К. ЗИГЕЛЬ

# АВТОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

*Перевод с английского*
И. И. ПЯТЕЦКОГО-ШАПИРО

*Под редакцией*
И. Р. ШАФАРЕВИЧА

И * Л
ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
*Москва—1954*

# ANALYTIC FUNCTIONS OF SEVERAL COMPLEX VARIABLES

*by*

**C. L. SIEGEL**

**Lectures delivered at the Institute for Advanced Study**

**1948—1949**

# ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Теория автоморфных, в частности эллиптических и модулярных, функций одного комплексного переменного была создана в конце XIX и начале XX веков Клейном, Пуанкаре, Кебе и др. Для этой теории особенно характерным является наличие многочисленных связей с другими частями математики: теорией групп, топологией, теорией римановых поверхностей, теорией алгебраических функций, дифференциальными уравнениями. Благодаря этому развитие теории автоморфных функций в свое время оказало большое влияние на развитие всей математики.

Книга К. Зигеля посвящена теории автоморфных функций нескольких комплексных переменных. В настоящее время эта теория разработана с гораздо меньшей полнотой, чем теория автоморфных функций одного переменного, однако накопленный в ней материал позволяет надеяться, что дальнейшее ее развитие обнаружит еще более важные закономерности и связи.

Литература по теории автоморфных функций нескольких комплексных переменных трудно обозрима. Поэтому книга Зигеля, являющаяся первым систематическим изложением этой области, несомненно представляется интересной.

Начинается книга с описания необходимых для дальнейшего элементарных свойств аналитических функций многих комплексных переменных (гл. I—III). Читатель, желающий более подробно ознакомиться с затронутыми в этих главах вопросами, может обратиться к имеющимся на русском языке книгам Б. А. Фукса „Теория аналитических функций многих комплексных переменных“ и С. Бохнера и У. Т. Мартина „Функции многих комплексных переменных“.

Дальше изложена теория трех сравнительно более изученных классов автоморфных функций. Именно, гл. IV—IX посвящены абелевым (многократно-периодическим) функциям, гл. X — автоморфным функциям с ограниченной областью существования и гл. XI—XII — теории модулярных функций.

Следует отметить, что теория абелевых функций, введенных в связи с проблемой обращения абелевых интегралов и непосредственно обобщающих эллиптические функции одного переменного, далеко не исчерпывается тем, что изложено в настоящей книге. Так, в ней

совершенно не упоминается богатая интересными результатами теория комплексного умножения абелевых функций [1]).

К этому разделу относятся два помещенных в конце книги примечания переводчика. Первое посвящено теореме сложения абелевых функций, приводящей к понятию абелева многообразия по А. Вейлю. Второе примечание содержит доказательство теоремы Лефшеца о том, что абелево многообразие может быть реализовано как многообразие без особых точек; для произвольных алгебраических многообразий аналогичный вопрос еще не решен.

Теория автоморфных функций многих переменных с ограниченной областью существования в своих основных идеях примыкает к случаю одного переменного и подводит читателя к теории модулярных функций. В этой последней теории основные успехи были достигнуты в работах самого автора книги, возникших в связи с арифметической теорией квадратичных форм.

Вопросы, изложенные в книге, имеют много точек соприкосновения с комбинаторной топологией, алгебраической и дифференциальной геометрией и теорией групп Ли. Автор дает краткий обзор этих пограничных вопросов, не ставя, однако, при этом своей целью аккуратное проведение всех доказательств. В некоторых случаях даже формулировки теорем не доведены до полной четкости. Таких мест в книге немного (гл. IX, §§ 46 и 48 из гл. XI и некоторые места последней главы), и их понимание не необходимо для чтения других частей книги. Восполнить имеющиеся здесь пробелы можно при помощи указанной в книге литературы.

В остальном книга написана ясно и подробно и не требует никаких знаний, выходящих за пределы университетских курсов линейной алгебры и теории функций комплексного переменного.

*И. Шафаревич.*

---

[1]) Albert A., A solution of the principle problem in the theory of Riemann matrices, Ann. of Math., **35** (1934), 500—515; Lefschetz S., On certain numerical invariants of algebraic varieties with application to abelian varieties, Trans. of Am. Math. Soc., **22** (1921), 327—482.

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

В этих лекциях излагаются некоторые вопросы теории автоморфных функций от $n$ комплексных переменных. В первой части рассматривается простейший случай, а именно, мероморфные функции с $2n$ независимыми периодами; здесь выводятся необходимые и достаточные условия, которым удовлетворяют периоды таких функций. Вторая часть посвящена автоморфным функциям с ограниченной областью существования при соответствующих предположениях относительно группы преобразований. В этой части доказывается, что автоморфные функции допускают представление в виде отношения автоморфных форм и что любые $n+1$ автоморфные функции алгебраически зависимы. В конце книги рассматриваются некоторые специальные примеры, в частности модулярные функции от нескольких переменных.

*К. Зигель.*

Глава I

# ТЕОРИЯ ДЕЛИМОСТИ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

## § 1. Введение

Мы будем рассматривать степенные ряды $f$ от $n$ комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$, сходящиеся в некоторой окрестности начала координат, имеющей вид $|z_1| < \rho, \ldots, |z_n| < \rho$ [1]). Такие степенные ряды образуют область целостности $R_n$, т. е. коммутативное кольцо без делителей нуля. Нулевым элементом в $R_n$ является степенной ряд, тождественно равный нулю.

Степенной ряд $f$ можно записать в виде $f = f_0 + f_1 + \ldots$, где $f_j$ — однородный полином степени $j$ от переменных $z_1, \ldots, z_n$. Если $f \neq 0$, то существует целое неотрицательное число $k$ такое, что $f_0 = \ldots = f_{k-1} = 0$, а $f_k \neq 0$. Мы будем говорить в этом случае, что ряд $f$ имеет *порядок* $k$. Если $f = 0$, мы скажем, что порядок $f$ есть $\infty$. Очевидно, что порядок $fg$ равен сумме порядков $f$ и $g$, а порядок $f + g$ не меньше, чем наименьший из порядков $f$ и $g$.

Мы скажем, что степенной ряд $f$ *делит* степенной ряд $g$ (записывается $f \setminus g$), если существует третий степенной ряд $h$ такой, что $g = fh$. Делители степенного ряда, тождественно равного 1, называются *единицами* кольца $R_n$; ясно, что единицы делят любой степенной ряд.

Единицы — это те элементы $R_n$, порядок которых равен 0; они образуют группу по умножению. Если $f \setminus g$ и $g \setminus f$, то ряд $g$ равен ряду $f$, умноженному на единицу; верно и обратное. В этом случае мы будем говорить, что ряд $g$ *эквивалентен* ряду $f$.

Делителями единицы являются только единицы. Если $f \neq 0$ и не является единицей, то $f$ имеет в качестве делителей, кроме единиц, степенные ряды, эквивалентные $f$. Если ряд $f$ не имеет других делителей, то он называется *простым* элементом. Любой ряд $f$ всегда делится на простой элемент, так как если $f$ не является простым, то его можно представить в виде $f = gh$, где порядки $g$ и $h$ — целые положительные числа, строго меньшие, чем порядок $f$. Очевидно, что каждый ряд порядка 1 является простым элементом; обратное верно лишь при $n$, равном 1.

Пусть $g_1, g_2, \ldots$ — некоторое множество элементов из $R_n$, хотя бы один из которых отличен от нуля. В случае, если элементы $g_1, g_2, \ldots$

---

[1]) Для каждого ряда имеется *своя* окрестность сходимости. — *Прим. перев.*

не имеют общих делителей, кроме единиц, условимся писать $(g_1, g_2, \ldots) = 1$ и говорить, что элементы $g_1, g_2, \ldots$ *взаимно просты*. Пусть $g_1, g_2, \ldots$ имеют общий делитель $a$, не являющийся единицей, и пусть, например, элемент $g_1$ отличен от нуля. Тогда, разделив все $g$ на $a$, мы придем к элементам $g_1/a, g_2/a, \ldots$, причем $g_1/a$ будет иметь меньший порядок, чем $g_1$. Продолжая этот процесс, мы получаем, что существует общий делитель $q$ такой, что $(g_1/q, g_2/q, \ldots) = 1$. Очевидно, последнее равенство сохранится, если $q$ заменить на $qu$, где $u$ — единица.

Ниже мы докажем теорему: если $f \setminus gh$ и $(f, g) = 1$, то $f \setminus h$. Из этого результата (аналогичного лемме Евклида в элементарной теории чисел) следует однозначность разложения элементов $R_n$ на простые элементы (с точностью до единиц).

Если $n$ рядов $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ без свободных членов таковы, что определитель из коэффициентов при первых степенях $z_1, \ldots, z_n$ отличен от нуля, то преобразование

$$w_1 = \Phi_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, \qquad w_n = \Phi_n(z_1, \ldots, z_n)$$

обратимо. Мы будем называть такое преобразование *аналитическим*. Легко проверить, что при аналитическом преобразовании отношение делимости сохраняется. В дальнейшем, однако, мы будем использовать только линейные преобразования.

Пусть $f$ имеет порядок $k \geqslant 1$; мы будем говорить, что элемент $f$ *нормален*, если $f_k$ содержит член вида $cz_1^k$, где $c \neq 0$. Если элемент $f$ не является нормальным, то его можно сделать нормальным при помощи линейного преобразования переменных. Действительно, если $f_k \neq 0$, то существует точка $(a_1, \ldots, a_n)$ такая, что $f_k(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$. Тогда невырожденное линейное преобразование вида $z_1 = a_1 z_1' + \ldots, \ldots, z_n = a_n z_1' + \ldots$ приводит к желаемому результату. Таким же образом можно показать, что для любого конечного множества функций можно найти линейное преобразование, после выполнения которого каждая из функций станет нормальной.

## § 2. Подготовительная теорема Вейерштрасса

Следующий результат, известный в литературе под названием подготовительной теоремы Вейерштрасса, необходим нам для доказательства аналога леммы Евклида.

Теорема 1. *Если степенной ряд $f \in R_n$ имеет порядок $k \geqslant 1$ и нормален, то существует единица $u \in R_n$ такая, что*

$$fu = z_1^k + A_1 z_1^{k-1} + \ldots + A_{k-1} z_1 + A_k,$$

*где $A_1, \ldots, A_k$ — степенные ряды от остальных переменных.*

Мы дадим два доказательства этой теоремы, первое — формальное, а второе — аналитическое. Мы будем предполагать (очевидно, не ограничивая общности), что коэффициент при $z_1^k$ в $f_k$ равен 1.

Наша задача заключается в нахождении единицы $X_0+X_1+\ldots$ [1]) такой, что

$$(f_k+f_{k+1}+\ldots)(X_0+X_1+X_2+\ldots)=Y_k+Y_{k+1}+\ldots, \quad (1)$$

где $Y_k=z_1^k+\ldots$, а $Y_{k+1}+Y_{k+2}+\ldots$ не содержит членов, в которые $z_1$ входит в степени, большей $k-1$. Сравнение членов степени $k$ в обеих частях равенства (1) дает

$$X_0f_k=Y_k, \quad \text{или} \quad X_0z_1^k+\ldots=z_1^k+\ldots,$$

так что $X_0=1$ и $Y_k=f_k$. Сравнение членов степени $k+\nu$, $\nu=1, \ldots,$ дает

$$f_kX_\nu+f_{k+1}X_{\nu-1}+\ldots f_{k+\nu-1}X_1+f_{k+\nu}=Y_{k+\nu}. \quad (2)$$

Отсюда вытекает, что если мы определили $X_1, \ldots, X_{\nu-1}$, то мы можем определить $X_\nu$ и $Y_{k+\nu}$, деля $f_{k+1}X_{\nu-1}+\ldots+f_{k+\nu-1}X_1+f_{k+\nu}$ на $f_k$ (предварительно расположив оба многочлена по степеням $z_1$). Частное при делении будет равно $-X_\nu$, а остаток $Y_{k+\nu}$. Так как член, содержащий наивысшую степень $z_1$ в $f_k$, есть $z_1^k$, то $-X_\nu$ и $Y_{k+\nu}$ — степенные ряды, причем $Y_{k+\nu}$ содержит $z_1$ в степени, не большей $k-1$. В силу однородности, $X_\nu$ и $Y_{k+\nu}$ — многочлены нужной степени.

Доказательство было бы закончено, если бы мы установили сходимость ряда $1+X_1+\ldots$. Однако доказательство сходимости этого ряда довольно сложно, и поэтому мы его пропустим, тем более, что ниже мы излагаем аналитическое доказательство теоремы.

Аналитическое доказательство [2]). Мы можем выбрать $\rho_1$ настолько малым, чтобы при $|z_j|\leqslant|z_1|<\rho_1$ $(j=2, \ldots, n)$ выполнялось неравенство $|f_{k+1}+f_{k+2}+\ldots|<\frac{1}{2}|z_1^k|$, или $|(f_{k+1}+\ldots)/z_1^k|<\frac{1}{2}$. С другой стороны, $f_k/z_1^k=1+r$, где $r$ — многочлен от $t_2=z_2/z_1, \ldots, t_n=z_n/z_1$, причем существует такое $\rho_2<1$, что $|r|<1/2$, если $|t_j|<\rho_2$ $(j=2, \ldots, n)$. Следовательно,

$$\frac{f}{f_k}=1+\frac{(f_{k+1}+\ldots)/z_1^k}{1+r}=1+q,$$

где $|q|<1$ при $|z_1|<\rho_1$, $|t_j|<\rho_2$ $(j=2, \ldots, n)$. Значит, $\ln(f/f_k)$ можно разложить в степенной ряд по $z_1, t_2, \ldots, t_n$ при $|z_1|<\rho_1$,

---

[1]) $X_m$ и $Y_m$ — однородные полиномы степени $m$. — *Прим. перев.*

[2]) Другое аналитическое доказательство теоремы Вейерштрасса см. в книгах: Бохнер С. и Мартин У., Функции многих комплексных переменных, М., 1951, гл. IX, стр. 259; Фукс Б. А., Теория аналитических функций многих комплексных переменных, М. — Л., 1948, гл. III, стр. 137. — *Прим. перев.*

$|t_j| < \rho_2$ $(j = 2, \ldots, n)$. Заметим, что все члены этого степенного ряда содержат $z_1$, так как все члены степенного ряда для $q$ содержат $z_1$ и так как

$$\ln \frac{f}{f_k} = \ln(1+q) = q - \frac{1}{2}q^2 + \ldots. \tag{3}$$

Если мы теперь заменим $t_j$ через $z_j/z_1$ $(j = 2, \ldots, n)$ и расположим полученный ряд по степеням $z_1$, то придем к соотношениям

$$\ln \frac{f}{f_k} = v + w, \tag{4}$$

$$v = a_0 + a_1 z_1 + \ldots, \tag{5}$$

$$w = \frac{b_1}{z_1} + \frac{b_2}{z_1^2} + \ldots, \tag{6}$$

где $a_0, a_1, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ — степенные ряды от $z_2, \ldots, z_n$, причем $a_0$ не содержит постоянного члена. Разложение (4) справедливо в области вида $0 < \delta < |z_1| < \rho_1$, $|z_j| < \rho_2\delta$ $(j = 2, \ldots, n)$. Далее, степенной ряд $e^{-v} = 1 - v + \ldots$ сходится в этой области; кроме того, $fe^{-v}$ также является степенным рядом, сходящимся в той же области. Но $fe^{-v} = f_k e^w = f_k(1 + w + \ldots)$, поэтому ряд $fe^{-v}$ не содержит членов с $z_1$ в степени, большей $k$. Следовательно, $e^{-v}$ есть искомая единица, так как для сходимости степенных рядов $e^{-v}$ и $fe^{-v}$ условие $|z_1| > \delta$ не является необходимым: на самом деле сходимость имеет место при $|z_1| < \rho_1$, $|z_j| < \rho_2\rho_1$ $(j = 2, \ldots, n)$.

## § 3. Аналог леммы Евклида

Главная задача этого параграфа состоит в доказательстве следующей теоремы.

**Теорема 2.** *Если $f$, $g$ и $h$ — степенные ряды от $n$ комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$ такие, что $f \setminus gh$ и $(f, g) = 1$, то $f \setminus h$.*

Заметим, что эта теорема тривиальна, если одна из трех функций равна нулю или единице. В частности, она верна при $n = 1$, так как тогда либо $f$, либо $g$ есть единица. Мы допустим сейчас, что теорема 2 верна для степенных рядов от $n - 1$ комплексных переменных, и выведем из этого предположения ее справедливость для степенных рядов от $n$ комплексных переменных.

Так как отношение делимости сохраняется при аналитических преобразованиях переменных и так как всегда можно подобрать линейное преобразование, при котором $f$, $g$ и $h$ перейдут в нормальные степенные ряды, то мы можем без ограничения общности предполагать, что $f$, $g$ и $h$ нормальны. По теореме 1, нормальный степенной ряд порядка $k \geqslant 1$ эквивалентен степенному ряду вида $z_1^k + A_1 z_1^{k-1} + \ldots + A_k$, где $A_1, \ldots, A_k$ — степенные ряды от $z_2, \ldots, z_n$. Так как отношения делимости не изменяются при замене степенных рядов

на эквивалентные и так как доказываемая теорема тривиальна, если одна из функций $f$, $g$ или $h$ имеет нулевой порядок, то мы можем предполагать, что $f$, $g$ и $h$ имеют только что указанную форму. Ее называют *приведенной* формой.

Нам нужен теперь аналог леммы Гаусса для полиномов от $z = z_1$ с коэффициентами из кольца $R_{n-1}$ степенных рядов от $z_2, \ldots, z_n$. Мы докажем его для степенных рядов от $z$ (коэффициенты которых — степенные ряды от $z_2, \ldots, z_n$). Условимся называть такой ряд $\lambda_0 + \lambda_1 z + \ldots$ примитивным, если $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots) = 1$. Если ряд не примитивен, то всегда существует степенной ряд $\delta$ от $z_2, \ldots, z_n$, такой, что

$$\lambda_0 + \lambda_1 z + \ldots = \delta(\nu_0 + \nu_1 z + \ldots), \qquad (\nu_0, \nu_1, \ldots) = 1. \tag{8}$$

Лемма, аналогичная лемме Гаусса, состоит в том, что *произведение двух примитивных степенных рядов есть вновь примитивный ряд.*

Предположим, что $\lambda_0 + \lambda_1 z + \ldots$ и $\mu_0 + \mu_1 z + \ldots$ — примитивные ряды и что

$$(\lambda_0 + \lambda_1 z + \ldots)(\mu_0 + \mu_1 z + \ldots) = \nu_0 + \nu_1 z + \ldots, \tag{9}$$

где, очевидно, $\nu_r = \lambda_0\mu_r + \lambda_1\mu_{r-1} + \ldots + \lambda_r\mu_0$. Тогда, если $\nu$ имеют некоторый общий делитель, то они имеют и простой общий делитель $\pi$. Поскольку $\lambda_0 + \lambda_1 z + \ldots$ и $\mu_0 + \mu_1 z + \ldots$ — примитивные степенные ряды, то существуют неотрицательные целые числа $a$ и $b$ такие, что

$$\pi \nmid \lambda_0, \ldots, \pi \nmid \lambda_{a-1}, \quad \text{но} \quad (\pi, \lambda_a) = 1,$$
$$\pi \nmid \mu_0, \ldots, \pi \nmid \mu_{b-1}, \quad \text{но} \quad (\pi, \mu_b) = 1.$$

Рассмотрим равенство

$$\nu_{a+b} = \lambda_0\mu_{a+b} + \cdots + \lambda_a\mu_b + \cdots + \lambda_{a+b}\mu_0.$$

Простое $\pi$ делит все члены в правой части этого равенства, кроме $\lambda_a\mu_b$. Однако $\pi \nmid \nu_{a+b}$. Следовательно, $\pi \nmid \lambda_a\mu_b$ и, таким образом, $\pi \nmid \lambda_a$ или $\pi \nmid \lambda_b$ по теореме 2 для $n-1$ переменных. Это противоречие и доказывает аналог леммы Гаусса [1]).

Вернемся теперь к полиномам с коэффициентами из области целостности $R_{n-1}$, т. е. совокупности степенных рядов от $z_2, \ldots, z_n$. Так как коэффициенты образуют не поле, а область целостности, алгоритм деления принимает следующую форму: если $p = \alpha z^r + \ldots$, $q = \beta z^s + \ldots$, $\beta \neq 0$, $r \geqslant s$, то существуют полиномы $u$ и $v$ с коэффициентами из $R_{n-1}$ и отличный от нуля элемент $\nu$ из $R_{n-1}$ такие, что $\nu p = uq + v$, где степень $v$ меньше $s$. Аналогичное изменение претерпевает теория результанта [2]). Если результант $\omega$ многочленов $p$

[1]) Ср. Ван-дер-Варден, Современная алгебра, т. I, М. — Л., 1947, стр. 100.

[2]) Там же, стр. 115.

и $q$ равен нулю, то существуют такие элементы $\lambda \neq 0$ и $\mu \neq 0$ в $R_{n-1}$ и такой многочлен $r = \nu z^t + \cdots$ с $\nu \neq 0$, $t > 0$ и коэффициентами из $R_{n-1}$, что $\lambda p = ar$ и $\mu q = br$, где $a$ и $b$ — полиномы от $z$ с коэффициентами из $R_{n-1}$. Если же результант $\omega \neq 0$, то существуют полиномы $c$ и $d$ с коэффициентами из $R_{n-1}$ такие, что $cp + dq = \omega$.

Мы применим эти соображения к $f$ и $g$, помня, что первые коэффициенты $f$, $g$ и $h$ равны единице и, следовательно, $f$, $g$ и $h$ примитивны. Предположим, что результант $f$ и $g$ равен нулю. Тогда мы должны иметь

$$\lambda f = r_1 a_1, \qquad \mu g = r_1 b_1, \tag{10}$$

где $\lambda$, $\mu$ — элементы $R_{n-1}$, а $r_1$, $a_1$, $b_1$ — многочлены с коэффициентами из $R_{n-1}$, причем $r_1$ имеет положительную степень. Выделив общие делители коэффициентов $a_1$, $b_1$ и $r_1$, мы можем переписать равенства (10) в виде

$$\lambda f = \alpha r_2 a_2, \qquad \mu g = \beta r_2 b_2, \tag{11}$$

где $r_2$, $a_2$, $b_2$ — уже примитивные многочлены. Поскольку первые коэффициенты у $f$ и $g$ равны 1, мы получаем, что $\alpha \setminus \lambda$ и $\beta \setminus \mu$. Далее, $\lambda\alpha^{-1}$ и $\mu\beta^{-1}$ должны быть единицами, так как в противном случае $r_2 a_2$ и $r_2 b_2$ не были бы примитивны. Поэтому наши равенства имеют вид

$$f = ra, \qquad g = rb. \tag{12}$$

Здесь $r = \nu z^t + \cdots$, где $\nu \neq 0$ и $t > 0$; $a$ должно иметь вид $\alpha z^{k-t} + \cdots$, где $\alpha\nu = 1$, а $k$ — порядок $f$. Далее, $\alpha$ должно быть единицей, и следовательно, порядок $a$ не больше $k - t$. Поэтому $r$ имеет порядок не меньше $t$ и, значит, не является единицей в $R_n$.

Это ведет к противоречию, так как $f$ и $g$, по предположению теоремы, не имеют общих делителей, отличных от единиц. Таким образом, $f$ и $g$ имеют отличный от нуля результант $\omega$. Отсюда вытекает, что существуют полиномы $c$ и $d$ с коэффициентами из $R_{n-1}$, такие, что $cf + dg = \omega$. Следовательно, $cfh + dgh = \omega h$, и, так как $f \setminus gh$ по предположению теоремы, мы получаем, что $f \setminus \omega h$. Поэтому $\omega h = \delta v f$, где $\delta$ принадлежит кольцу $R_{n-1}$, а $v$ — примитивный степенной ряд с коэффициентами из $R_{n-1}$. Первый коэффициент в $h$ равен единице, поэтому $\delta \setminus \omega$. Значит, $(\omega/\delta)h = vf$, так что $\omega\delta^{-1}$ должно быть единицей, поскольку $vf$ — примитивный многочлен. Это и показывает нам, что $f \setminus h$.

## § 4. Поле отношений кольца степенных рядов

Мы рассмотрим теперь *поле отношений* $K_n$ области целостности $R_n$, т. е. множество формальных дробей $p/q$, где $p$ и $q$ принадлежат $R_n$ и $q \neq 0$, причем равенство $p_1/q_1 = p_2/q_2$ определяется при помощи равенства в $R_n$

$$p_1 q_2 = p_2 q_1.$$

Из теоремы 2 вытекает важное следствие: любой элемент в $K_n$ можно с точностью до единиц *однозначно* представить в виде $p/q$, если потребовать дополнительно, чтобы $(p, q) = 1$. Действительно, если $p_1/q_1 = p_2/q_2$, где $(p_1, q_1) = (p_2, q_2) = 1$, то из $p_1q_2 = p_2q_1$ видно, что $q_1 \setminus q_2$ и $q_2 \setminus q_1$, так что $q_2 = q_1u$ и, следовательно, $p_2 = p_1u$, где $u$ — единица в $R_n$.

Элементы $p/q$ в $K_n$, такие, что $q$ — единица, называются *целыми*. Очевидно, что целые элементы образуют кольцо, изоморфное $R_n$. Пусть $r$ и $s$ принадлежат $K_n$; мы будем писать $r \setminus s$, если $s = rt$, где $t$ — целый элемент. Мы также будем писать $r \sim s$, если $r \setminus s$ и $s \setminus r$, т. е. если $r$ и $s$ отличаются только на множитель, являющийся единицей. Ясно, что классы эквивалентных элементов — это смежные классы мультипликативной группы поля $K_n$ по подгруппе единиц.

## Глава II

# ПРОБЛЕМЫ КУЗЕНА

### § 5. Предварительные сведения

Помимо степенных рядов от $z=(z_1, \ldots, z_n)$, мы будем рассматривать степенные ряды *с центром* $a$, где $a=(a_1, \ldots, a_n)$ есть $n$-мерный вектор, т. е. степенные ряды от $z-a=(z_1-a_1, \ldots, z_n-a_n)$. Условимся под $|z-a|$ понимать $\max\limits_k |z_k-a_k|$; через $C(a)=C(a, \rho)$ будем обозначать совокупность внутренних точек $n$-мерного полицилиндра радиуса $\rho$ с центром в точке $a$, т. е. множество всех точек $z$ таких, что $|z-a|<\rho$.

Если степенной ряд $p_a$ с центром $a$ сходится в $C(a, \rho)$ и если $b \in C(a, \rho)$, то степенной ряд $p_b$, полученный из $p_a$ подстановкой $(z-b)+(b-a)$ вместо $z-a$, мы будем называть *непосредственным продолжением* ряда $p_a$. Заметим, что $p_b$ сходится при $|z-b|<\rho-|b-a|$ и притом к тем же численным значениям, что и $p_a$. Конечно, не всегда $p_a$ есть непосредственное продолжение ряда $p_b$. Однако мы всегда можем построить конечное число точек $a_0, a_1, \ldots, a_h$ на сегменте $a, b$, так что $a_0=a$, $a_h=b$, а $p_{a_j}$ и $p_{a_{j+1}}$ $(j=0, 1, \ldots, h-1)$ — непосредственные продолжения друг друга.

Следовательно, мы можем утверждать, что если $p_b$ — непосредственное продолжение $p_a$, то $p_b$ тождественно равно нулю тогда и только тогда, когда $p_a$ тождественно равно нулю. Более обще, если $p_b$ — непосредственное продолжение $p_a$ и $q_b$ — непосредственное продолжение $q_a$, то $p_b$ и $q_b$ тождественно совпадают тогда и только тогда, когда тождественно совпадают $p_a$ и $q_a$.

Мы дадим сейчас доказательство одного результата о поведении непосредственных продолжений взаимно простых рядов.

Теорема 3. *Если степенные ряды $p_a$ и $q_a$ сходятся в $C(a, \rho)$ и $(p_a, q_a)=1$, то существует положительное $\rho_1 \leqslant \rho$, такое, что непосредственные продолжения $p_b$ и $q_b$ взаимно просты при любом $b \in C(a, \rho_1)$.*

Доказательство. Мы можем предположить, что $a=0$ и что $p$ и $q$ имеют вид

$$\begin{aligned} p &= u(z_1^h+\alpha_1 z_1^{h-1}+\cdots+\alpha_h), \\ q &= v(z_1^k+\beta_1 z_1^{k-1}+\cdots+\beta_k), \end{aligned} \tag{1}$$

где $u$ и $v$ единицы, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_h, \beta_1, \ldots, \beta_k$ — степенные ряды от $z_2, \ldots, z_n$. В достаточно малом $n$-мерном полицилиндре $C(0)$ с центром в начале координат все непосредственные продолжения $u$ и $v$ будут также единицами. Так как $(p, q) = 1$, то существуют степенные ряды $r$ и $s$, сходящиеся в некоторой окрестности 0, такие, что $rp + sq = \omega$, где $\omega$ — результант полиномов $p/u$ и $k/v$ и, значит, не равный тождественно нулю степенной ряд от $z_2, \ldots, z_n$. Мы предположим окрестность $C(0)$ настолько малой, что степенные ряды $r, p, s, q$ и $\omega$ сходятся в ней. Следовательно, для $b \in C(a)$ мы имеем соотношение $r_b p_b + s_b q_b = \omega_b$, где $r_b$, $p_b$, $s_b$, $q_b$ и $\omega_b$ — непосредственные продолжения в точке $b$, соответственно, рядов $r$, $p$, $s$, $q$ и $\omega$.

Пусть $d_b$ — какой-нибудь общий делитель рядов $p_b$ и $q_b$. Тогда $\omega_b = d_b e_b$. Положим $d_b = \delta_b d_b^*$ и $e_b = \varepsilon_b e_b^*$, где $\delta_b$ и $\varepsilon_b$ принадлежат $R_{n-1}$, а $d_b^*$ и $e_b^*$, если их рассматривать как степенные ряды, расположенные по степеням $z_1 - b_1$, с коэффициентами, зависящими от остальных переменных, примитивны. Мы имеем $\omega_b/\delta_b\varepsilon_b \in R_{n-1}$, $d_b^* e_b^*$ примитивно, так что $\omega_b/\delta_b\varepsilon_b = d_b^* e_b^*$ — единица. Следовательно, $d_b^*$ и $e_b^*$ — также единицы. Далее, поскольку $p_b/u_b = (z_1 - b_1)^h + \cdots$ — примитивный полином, то все его делители из $R_{n-1}$ являются единицами $R_{n-1}$. Так как $\delta_b \setminus p_b$, то $\delta_b$ должно быть единицей. Следовательно, $d_b = \delta_b d_b^*$ — единица. Таким образом, теорема 3 доказана.

## § 6. Определение регулярной функции

Заметим прежде всего, что если мы имеем не равный тождественно нулю степенной ряд $p_a$, сходящийся в некоторой окрестности точки $a$, то сумма этого степенного ряда может быть равна нулю в окрестности $a$ лишь на множестве точек, комплексная размерность которого не превосходит $n - 1$.

Действительно, мы можем предположить, что $a = 0$ и что степенной ряд $p$ имеет вид $u(z_1^k + \alpha_1 z_1^{k-1} + \cdots + \alpha_k)$, где $u$ — единица и, значит, $u \neq 0$ в достаточно малой окрестности $C(0)$ начала координат. Тогда для любых $z_2, \ldots, z_n$ существует не более $k$ точек в $C(0)$, где наша функция обращается в нуль, так что комплексная размерность множества нулей не больше $n - 1$.

Из предыдущего замечания следует, что если мы имеем не равный тождественно нулю степенной ряд с центром $a$, то существуют произвольно близкие к $a$ точки, в которых сумма ряда отлична от нуля. Следовательно, если $p_a$ сходится в $C(a)$, $p_b$ сходится в $C(b)$, $p_a$ и $p_b$ имеют одинаковые численные значения в $D(a, b) = C(a) \cap C(b)$, причем $D(a, b)$ не пусто, то $p_a$ и $p_b$ имеют одинаковые непосредственные продолжения в любой точке $D(a, b)$.

Теперь мы можем дать определение регулярной функции. Функция $f(z)$, определенная в области $D$ (т. е. на некотором открытом

связном непустом множестве точек), называется *регулярной*, если для каждой точки $a$ области $D$ существует степенной ряд $p_a$, сходящийся в некоторой окрестности $C(a) \subset D$ и такой, что численное значение его равно $f(z)$ в каждой точке $z \in C(a)$. Из предыдущего абзаца следует, что если $f(z)$ регулярна в $D$, то степенной ряд $p_a$ в каждой точке $D$ однозначно определен. Совокупность функций, регулярных в определенной области $D$, образует область целостности.

Функция, регулярная в области $D$, имеет первые частные производные в каждой точке этой области. Обратно, если функция $f(z)$ непрерывна и имеет первые частные производные в каждой точке $D$, то она является регулярной функцией в $D$. Это может быть показано повторным применением интегральной формулы Коши для функций от одного комплексного переменного, непрерывных и дифференцируемых в некоторой области комплексной плоскости [1]).

## § 7. Определение мероморфной функции

Пусть $R_n(a)$ — кольцо степенных рядов от $z - a = (z_1 - a_1, \ldots, z_n - a_n)$, сходящихся в некоторой окрестности точки $a$, и пусть $K_n(a)$ — поле отношений $R_n(a)$.

Определение. Функция $f(z)$ называется *мероморфной* в области $D$, если для каждой точки $a \in D$ существует такой элемент $r_a = p_a/q_a$ поля $K_n(a)$ и такая окрестность $C(a) \subset D$, что 1) $p_a$ и $q_a$ сходятся в $C(a)$, 2) непосредственные продолжения рядов $p_a$ и $q_a$ в каждой точке $C(a)$ взаимно просты, 3) $f(z)$ при $z \in C(a)$ равна численному значению $p_a(z)/q_a(z)$ в тех точках, где $q_a(z) \neq 0$ (так называемые *точки регулярности*), равна $\infty$ в тех точках, где $p_a(z) \neq 0$, а $q_a(z) = 0$ (так называемые полюсы), и равна 0/0 в тех точках, где $p_a(z) = q_a(z) = 0$ (так называемые *точки неопределенности*). Конечно, мы предполагаем, что это задание $p_a$ и $q_a$ не приводит к противоречию. Дроби $r_a = p_a/q_a$ (называемые *локальными элементами функции* $f(z)$) однозначно определены, потому что если $r_a$ и $s_a = p_a^*/q_a^*$ имеют одинаковые численные значения во всех тех точках $z \in C(a)$, где $q_a(z)\, q_a^*(z) \neq 0$, то $q_a^* p_a$ численно равно $q_a p_a^*$ всюду в $C(a)$, кроме, быть может, множества точек комплексной размерности $n - 1$, и следовательно, $q_a^* p_a$ и $q_a p_a^*$ равны как степенные ряды. При помощи аналогичных рассуждений мы получаем, что локальные элементы $r_a = p_a/q_a$ и $r_b = p_b/q_b$, соответствующие двум различным точкам $a$ и $b$, должны удовлетворять так называемым *условиям согласованности*; это означает, что в $D(a, b) = C(a) \cap C(b)$ мы имеем $p_a q_b = p_b q_a$ как в смысле равенства численных значений, так и в смысле существования одинаковых непосредственных продолжений в каждой точке $D(a, b)$.

---

[1]) См. Фукс Б. А., Теория аналитических функций многих комплексных переменных, М. — Л., 1948, стр. 31—35, 86—96. — *Прим. перев.*

С другой стороны, если для каждой точки $a$ области $D$ заданы элемент $r_a = p_a/q_a$ поля $K_n(a)$ и окрестность $C(a) \subset D$ такие, что $p_a$ и $q_a$ сходятся в $C(a)$, непосредственные продолжения $p_a$ и $q_a$ в любой точке $C(a)$ взаимно просты, а локальные элементы $r_a$ и $r_b$, соответствующие любым двум различным точкам, удовлетворяют сформулированным выше условиям согласованности, то в $D$ существует мероморфная функция $f$, которая имеет $r_a$ своими локальными элементами. Так как, в силу условий согласованности и взаимной простоты, непосредственные продолжения рядов $q_a$ и $q_b$ в любой точке $c \in D(a, b)$ делят друг друга, то $q_a(c)$ и $q_b(c)$ или оба одновременно равны нулю, или оба отличны от нуля. Аналогично, $p_a(c)$ и $p_b(c)$ одновременно или равны нулю, или отличны от нуля. Следовательно, $r_a(z) = p_a(z)/q_a(z)$ и $r_b(z) = p_b(z)/q_b(z)$ имеют одинаковые значения в тех точках $z \in D(a, b)$, где $q_a(z)q_b(z) = 0$. В тех же точках $z \in D(a, b)$, где $q_a(z)q_b(z) \neq 0$, из условий согласованности непосредственно следует, что $r_a(z)$ и $r_b(z)$ имеют одинаковые численные значения.

Заметим, что радиус окрестности $C(a)$ может измениться при умножении числителя и знаменателя дроби $p_a/q_a$ на единицу в точке $a$. Отметим также, что 1) $a$ — регулярная точка тогда и только тогда, когда $r_a$ — целый элемент (т. е. $q_a$ — единица), 2) $a$ — полюс тогда и только тогда, когда само $r_a$ не является целым элементом, но $r_a^{-1}$ — целый элемент (т. е. $p_a$ — единица, а $q_a$ нет), 3) $a$ — точка неопределенности тогда и только тогда, когда ни $r_a$, ни $r_a^{-1}$ не являются целыми (т. е. ни $p_a$, ни $q_a$ не являются единицами).

Если $a$ — точка регулярности, т. е. если $q_a$ — единица, то все точки достаточно малой окрестности $C(a)$ также являются точками регулярности. Пусть $a$ — особая точка, т. е. $q_a$ — не единица; можно принять, что $a = 0$ и что $q_a$ имеет вид $(z_1^k + \alpha_1 z_1^{k-1} + \ldots)u_0$, где $\alpha_1, \ldots$ — степенные ряды от $z_2, \ldots, z_n$, а $u_0$ — единица. Мы видим, что в сколь угодно малой окрестности особой точки всегда существуют особые точки, причем комплексная размерность их множества равна $n-1$. Если, в частности, $a$ — полюс, т. е. $q_a$ отлично от единицы, а $p_a$ — единица, то $p_a$ в достаточно малой окрестности остается единицей и, следовательно, все особые точки (множество которых имеет комплексную размерность $n-1$) будут полюсами. С другой стороны, если $a$ — точка неопределенности, т. е. если ни $q_a$, ни $p_a$ не являются единицами, то в любой достаточно малой окрестности этой точки комплексная размерность множества точек неопределенности равна $n-2$, в то время как множества нулей и полюсов имеют комплексную размерность $n-1$. Действительно, мы, очевидно, можем предположить, что $a = 0$ и что

$$\begin{aligned} q_0 &= (z_1^k + \alpha_1 z_1^{k-1} + \ldots)u_0, \\ p_0 &= (z_1^h + \beta_1 z_1^{h-1} + \ldots)v_0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\alpha_1, \beta_1, \ldots$ — степенные ряды от $z_2, \ldots, z_n$, а $u_0$ и $v_0$ — единицы. Отсюда следует, что в достаточно малой окрестности начала общие нули $p_0$ и $q_0$ являются также нулями результанта $\omega$ полиномов $p_0/v_0$ и $q_0/u_0$; следовательно, множество этих нулей имеет комплексную размерность $n-2$.

При помощи леммы Гейне — Бореля легко показать, что если две мероморфные в области $D$ функции имеют одинаковые локальные элементы в одной точке $D$, то они имеют одинаковые локальные элементы во всех точках $D$. Таким образом, существует не более одной функции, мероморфной в $D$, с заданным локальным элементом в точке $a$.

В дальнейшем мы будем обозначать локальный элемент функции $f(z)$ в точке $a$ через $f_a$.

Функции, мероморфные в $D$, образуют поле. Конечно, это поле содержит поле отношений области целостности, образованной функциями, регулярными в $D$. Когда совпадают эти поля? При решении этого вопроса существенную роль играют топологические свойства области $D$.

## § 8. Делимость в целом

Пусть $f$ и $g$ — функции, мероморфные в области $D$. Мы будем говорить, что *$f$ делит $g$ в целом*, если существует регулярная в $D$ функция $h$, такая, что $g=fh$. Таким образом, если $f$ не равна тождественно нулю, то $f \setminus g$ в целом тогда и только тогда, когда функция $g/f$ регулярна в $D$, иными словами, когда $g_a/f_a$ — целый элемент в любой точке $a \in D$, т. е. когда $f_a \setminus g_a$ в любой точке $a \in D$.

Мероморфная в $D$ функция $u$ называется *единицей в целом*, если $u$ есть единица в каждой точке $a \in D$, т. е. если $u$ и $u^{-1}$ регулярны в $D$, иными словами, если $u$ регулярна и не равна нулю в $D$.

Покажем, что если $D$ — односвязная область и если $u$ есть единица в целом в $D$, то существует функция $v$, регулярная в $D$ и удовлетворяющая равенству $u=e^v$, т. е. что логарифм $u$ — регулярная функция в $D$. Локально этот результат легко получить, используя разложение логарифма в ряд.

Для того чтобы доказать существование логарифма во всей области $D$, мы положим

$$v=\ln c+\int_a^z \frac{du}{u}=\ln c+\int_a^z \left(\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial z_1}dz_1+\ldots+\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial z_n}dz_n\right), \qquad (3)$$

где $a$ — некоторая фиксированная точка в $D$ и $u_a=c+\ldots$. Интеграл в (3), по теореме Стокса, не зависит от пути интегрирования (так как $D$ — односвязная область), следовательно, $v$ есть регулярная

функция в $D$, поскольку она имеет непрерывные частные производные. Далее, $d(ue^{-v})=0$ и, значит, $u=ke^{v}$. Полагая $z=a$, получаем, что $u=e^{v}$. Таким образом, $v$ равно логарифму $u$ всюду в $D$.

Очевидно, любое кратное $2\pi i$ может быть добавлено к $v$, но с точностью до этого кратного функция $v$ определяется однозначно (так как существует, самое большее, одна регулярная функция с заданным локальным элементом).

## § 9. Основные проблемы

Пусть функции $f\neq 0$ и $g$ мероморфны в области $D$. Мы скажем, что $f\sim g$ *в целом*, если $f\setminus g\setminus f$ в целом, т. е. если $g/f$ есть единица в целом в $D$, иными словами, если $f_a\sim g_a$ в каждой точке $a\in D$. Таким образом, эквивалентность в целом однозначно определяется через локальную эквивалентность; т. е. заданием в каждой точке области $D$ класса локально эквивалентных элементов определяется, самое большее, один класс элементов, эквивалентных в целом. Содержание первой основной проблемы составляет вопрос, когда, задав в каждой точке $a$ области $D$ класс локально эквивалентных элементов, удовлетворяющих соответствующим условиям согласованности, мы получим класс элементов, эквивалентных в целом.

Проблема I. Предположим, что для каждой точки $a$ области $D$ заданы дробь $r_a=p_a/q_a$ и окрестность $C(a)\subset D$ такие, что $p_a$ и $q_a$ сходятся в $C(a)$, непосредственные продолжения $p_a$ и $q_a$ в любой точке $C(a)$ взаимно просты и локальные элементы $r_a$ и $r_b$, соответствующие любым двум различным точкам, удовлетворяют условию согласованности, а именно, в любой точке $D(a, b)=C(a)\cap C(b)$ непосредственные продолжения рядов $r_a$ и $r_b$ эквивалентны (т. е. принадлежат к одному локальному классу). Можно ли найти мероморфную в $D$ функцию $f$ такую, что $f_a\sim r_a$ в любой точке $a\in D$?

Проблема II (вторая проблема Кузена). Тот же вопрос, что и в проблеме I, но для того специального случая, когда все заданные локальные классы являются целыми. Пусть для каждой точки $a\in D$ заданы степенной ряд $p_a$ и окрестность $C(a)$ такие, что $p_a$ сходится в $C(a)$, причем степенные ряды $p_a$ и $p_b$ принадлежат одному локальному классу в каждой точке $C(a)\cap C(b)$. Можно ли найти функцию $f$, регулярную в $D$ и такую, что $f_a\sim p_a$ в каждой точке $a\in D$?

Покажем прежде всего, что если проблема II разрешима для данной области $D$ [1]), то более общая проблема I также разрешима для $D$. При предположениях проблемы I мы имеем $r_a=r_b u_c$ [2]) в любой точке $c\in D(a, b)=C(a)\cap C(b)$, т. е. $p_a q_b=q_a p_b u_c$, и следовательно,

[1]) В формулировке проблем речь шла о фиксированном задании локальных элементов; здесь же говорится о произвольном задании локальных элементов (удовлетворяющих соответствующим условиям). — *Прим. перев.*

[2]) $u_c$ обозначает единицу в точке $c$. — *Прим. перев.*

в силу взаимной простоты $p$ и $q$, $p_a \setminus p_b \setminus p_a$ и $q_a \setminus q_b \setminus q_a$. Таким образом, $p_a \sim p_b$ и $q_a \sim q_b$, поэтому как $p_a$, так и $q_a$ удовлетворяют предположениям проблемы II. Следовательно, существуют две функции $g$ и $h$, регулярные в $D$ и такие, что $g_a \sim p_a$ и $h_a \sim q_a$ в каждой точке $a \in D$. Если мы теперь положим $f = g/h$, то будем иметь $f_a \sim r_a$.

Из разрешимости проблемы II для данной области вытекают некоторые следствия, касающиеся вопросов, связанных со взаимной простотой в целом. Две функции $f$ и $g$, регулярные в области $D$, называются *взаимно простыми в целом*, если любая функция, регулярная в $D$, делящая $f$ и $g$ в целом, является единицей в целом. Если $(f_a, g_a) = 1$ в каждой точке $a \in D$, то $(f, g) = 1$ в целом, так как любой общий делитель $f$ и $g$ в целом должен быть единицей в любой точке $D$ и, следовательно, должен оказаться единицей в целом.

Теорема 4. *Если проблема* II *разрешима для области* $D$, *то любые две регулярные функции, взаимно простые в целом в* $D$, *будут также взаимно просты в каждой точке* $D$.

При доказательстве теоремы 4 мы используем в качестве леммы следующее утверждение: пусть $f^*$, $g^*$ и $h$ — регулярные в $D$ функции, $(f_a^*, g_a^*) = 1$ для всех $a \in D$ и $f^* \setminus g^* h$ в целом; тогда $f^* \setminus h$ в целом. Это утверждение тривиально, если $f^* = 0$; если же $f^* \neq 0$, то для доказательства достаточно заметить, что $f_a^* \setminus g_a^* h_a$ в любой точке $a \in D$, так что $f_a^* \setminus h_a$ в каждой точке $D$; следовательно, функция $h/f^*$ регулярна в каждой точке $D$, т. е. $f^* \setminus h$.

Обратимся к доказательству теоремы 4. Пусть функции $f$ и $g$ регулярны и взаимно просты в целом в $D$, и пусть $f$ не равна тождественно нулю. Тогда функция $g/f$ мероморфна в $D$, и следовательно, ее локальные элементы удовлетворяют условиям согласованности § 7. Пусть $(g/f)_a = r_a = p_a/q_a$, где $p_a$ и $q_a$ сходятся и взаимно просты в каждой точке окрестности $C(a) \subset D$. Тогда (так же как в доказательстве того, что из разрешимости проблемы II следует разрешимость проблемы I) получаем, что $p_a$ и $q_a$ удовлетворяют предположениям проблемы II. Поэтому существуют две регулярные в $D$ функции $f^*$ и $g^*$ такие, что $g_a^* \sim p_a$ и $f_a^* \sim q_a$ в любой точке $a \in D$. Так как локальная взаимная простота сохраняется при замене элементов на локально эквивалентные, то $(f_a^*, g_a^*) = 1$. Далее, функция $g^*/f^*$ мероморфна в $D$ и $(g^*/f^*)_a \sim p_a/q_a = r_a = (g/f)_a$. Следовательно, $g^*/f^* \sim g/f$ в целом, так как они в каждой точке имеют эквивалентные локальные элементы. Отсюда вытекает, что $gf^* = fg^*u$, где $u$ — единица в целом. По нашей предварительной лемме, $f^* \setminus f$ и, следовательно, $f = f^*d$, $g = g^*du$, где $d$ регулярна в $D$. Но так как $(f, g) = 1$ в целом, то $d$ является единицей в целом.

Поэтому $d_a$ и $d_a u_a$ — единицы в точке $a$ и, значит, $(f_a, g_a) = 1$, поскольку $(f_a^*, g_a^*) = 1$. Теорема 4 доказана.

Проблема III (проблема Пуанкаре). Можно ли всякую мероморфную в данной области $D$ функцию $f$ представить в виде $g/h$, где $g$ и $h$ регулярны в $D$ и $(g, h) = 1$ в целом?

Проблема IV (первая проблема Кузена). Предположим, что для каждой точки $a$ области $D$ заданы дробный элемент $r_a = p_a/q_a$ и окрестность $C(a) \subset D$ так, что 1) $p_a$ и $q_a$ сходятся в $C(a)$, 2) непосредственные продолжения рядов $p_a$ и $q_a$ в каждой точке $C(a)$ взаимно просты, 3) дробные элементы $r_a$ и $r_b$, соответствующие двум различным точкам, удовлетворяют следующему условию согласованности: разность $r_a - r_b$ регулярна в $D(a, b) = C(a) \cap C(b)$. Существует ли мероморфная в $D$ функция $f$, такая, что разность $f_a - r_a$ регулярна в $C(a)$ при любом $a$?

Проблема IV аналогична проблеме I в том отношении, что в них, исходя из классов локально эквивалентных элементов, удовлетворяющих соответствующим условиям согласованности, нужно определить класс элементов, эквивалентных в целом. Разница заключается в том, что в проблеме I классы эквивалентных элементов — это смежные классы мультипликативной группы мероморфных функций (без нуля) по подгруппе единиц, в то время как в проблеме IV классы эквивалентных элементов суть смежные классы аддитивной группы мероморфных функций по подгруппе регулярных функций. (Это относится и к локальной эквивалентности, и к эквивалентности в целом.) В обоих случаях, задав в каждой точке класс локально эквивалентных элементов, мы можем получить, самое большее, один класс элементов, эквивалентных в целом.

При $n = 1$ любое $p_a \sim (z - a)^k$ для некоторого $k$. Таким образом, проблема II для $n = 1$ эквивалентна такой задаче: даны счетное множество точек $a_1, a_2, \ldots$, не имеющее предельных точек в $D$, и множество целых положительных чисел $k_1, k_2, \ldots$; спрашивается, можно ли построить функцию $f(z)$, регулярную в $D$ и имеющую в точках $a_1, a_2, \ldots$ нули, соответственно, кратностей $k_1, k_2, \ldots$. Аналогично, проблема IV при $n = 1$ эквивалентна следующей задаче: дано множество точек $a_1, a_2, \ldots$, не имеющее предельных точек в $D$, и для каждого $a_j$ главная часть

$$\frac{c_{j1}}{z - a_j} + \frac{c_{j2}}{(z - a_j)^2} + \cdots + \frac{c_{jh}}{(z - a_j)^h}; \tag{3}$$

спрашивается, существует ли функция $f(z)$, мероморфная в $D$ и имеющая в точках $a_1, a_2, \ldots$ полюсы с соответствующими главными частями (3). В этом случае из разрешимости проблемы IV следует разрешимость проблемы II (при $n > 1$ это уже несправедливо). Для получения функции $f(z)$, имеющей в точках $a_1, a_2, \ldots$ нули,

соответственно, кратностей $k_1, k_2, \ldots$, достаточно положить

$$f(z) = \exp\left\{\int_a^z g(z)\,dz\right\},$$

где $g(z)$ имеет полюсы в точках $a_1, a_2, \ldots$ с главными частями, соответственно, $k_1/(z-a_1)$, $k_2/(z-a_2)$, $\ldots$; $a$ — произвольная точка, отличная от $a_1, a_2, \ldots$.

Кузен доказал, что проблема IV всегда разрешима, если $D$ есть прямое произведение $n$ областей комплексной плоскости, из которых не более чем одна не односвязна. В частности, проблемы II и IV всегда разрешимы для $n=1$. Работа Кузена содержится в его диссертации „О функциях $n$ комплексных переменных“ [1]).

## § 10. Пример

Следующий пример, принадлежащий Ока [2]), показывает, что для разрешимости проблемы II в области, являющейся произведением $n$ областей комплексной плоскости, необходимо наложить некоторые ограничения на связность (такие же, как в теореме Кузена).

Пусть $n=2$ и пусть $D$ — произведение двух двусвязных областей $3/4 < |z| < 5/4$ и $3/4 < |w| < 5/4$. Рассмотрим множество тех точек $D$, в которых равна нулю функция $w-z-1$. Это множество имеет комплексную размерность 1 и состоит из точек вида $z=\zeta$, $w=\zeta+1$, где $\zeta$ — комплексное число такое, что $3/4 < |\zeta| < 5/4$ и $3/4 < |\zeta+1| < 5/4$; следовательно, это множество состоит из двух компонент $L$ и $\bar{L}$, находящихся друг от друга на положительном расстоянии; пусть, для определенности, в $L$ $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(w) > 0$, а в $\bar{L}$ $\operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w < 0$.

Рассмотрим следующее задание локальных классов, при котором проблема II оказывается неразрешимой: найти регулярную в $D$ функцию $f$ такую, что $f_a \sim 1$ при $a \in D-L$ и $f_a \sim (w-z-1)_a$ при $a \in L$. Условия согласованности, очевидно, выполняются, если выбирать окрестности $C(a)$ так, чтобы $C(a) \subset D-L$ при $a \in D-L$ и $C(a) \subset D$ при $a \in L$.

Предположим, что так поставленная задача разрешима. Тогда функция $f$, получающаяся в результате, равна нулю на $L$ и отлична от нуля в $D-L$ (значит, и на $\bar{L}$). Следовательно, $f$ отлична от нуля на произведении $M$ двух окружностей $|z|=1$ и $|w|=1$, за исключением точки $c=(z_0, w_0)$, где $z_0 = e^{2\pi i/3} = \rho^2$, а $w_0 = e^{\pi i/3} = \rho$.

---

[1]) Cousin P., Sur les fonctions de $n$ variables complexes, Acta Math., **19** (1895), 1—61.

[2]) Oka K., Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables, III, Deuxième problème de Cousin, Journ. of Sci. of the Hiroshima University, **9** (1939), 7—9.

Очевидно, что $M$ топологически эквивалентно тору. Точки $M$ мы можем представить в виде $z = e^{2\pi i/3+\beta i}$, $w = e^{\pi i/3+\alpha i}$, где $-\pi \leqslant \alpha$, $\beta \leqslant \pi$. Так как $f_c = u_c(w - z - 1)_c$, где $u_c$ — единица в точке $c$, мы имеем

$$f = u_c(\rho e^{\alpha i} - \rho^2 e^{\beta i} - 1) = u_c \rho i \left\{(\alpha - \rho\beta) + \frac{1}{2} i(\alpha^2 - \rho\beta^2) + \ldots\right\}$$

для точек $M$, принадлежащих достаточно малой окрестности $c$. Так как $\rho$ не вещественно, функция $f$ отображает окрестность точки $c$ в $M$ гомеоморфно на окрестность нуля в комплексной плоскости. Далее, так как $f$ не имеет нулей в $M - c$, то можно говорить о вариации $\ln f$ по пути, лежащем в $M - c$. С одной стороны, $\ln f$ должен изменить свое значение на $2\pi i$ при обходе по достаточно малому замкнутому пути вокруг $c$. С другой стороны, мы можем рассматривать $M$ как прямоугольник с идентифицированными противоположными сторонами. Если мы добавим к первоначальному пути путь, соответствующий сторонам этого прямоугольника, мы получим путь, ограничивающий односвязную область. Но общая вариация $\ln f$ по новому пути не изменится, потому что при обходе прямоугольника противоположные стороны мы проходим в противоположных направлениях и, следовательно, вариации $\ln f$ по ним сокращаются. Далее, вариация логарифма не равной нулю[1]) функции по пути, лежащему в односвязной области, равна нулю. Мы получили противоречие. Таким образом, поставленная задача неразрешима.

---

[1]) Здесь используется тот факт, что хорошо известное в теории функций комплексного переменного утверждение „вариация логарифма аналитической функции $\varphi$ по циклу, лежащему в односвязной области $S$, равна нулю, если $\varphi$ отлична от нуля в $S$“ справедливо для любых непрерывных функций $\varphi$.

В оригинале этой книги неправильно утверждается, что функция $f$ должна быть регулярной. Дело в том, что если функция $F$ регулярна в области $D$, то она не является регулярной функцией на торе $M$, т. е. в $M$ нельзя ввести координаты так, чтобы $F$ как функция этих координат была аналитична. В самом деле, как будет показано в гл. IX, на компактном аналитическом многообразии не может существовать регулярных функций, отличных от констант. — *Прим. перев.*

Глава III

# ДВЕ ЛЕММЫ

## § 11. Лемма Каратеодори

Лемма Каратеодори дает оценку для модуля функции одного комплексного переменного, регулярной в круге, если известно ее значение в центре круга и верхняя грань для ее действительной части. Для доказательства этой леммы мы используем лемму Шварца, в которой говорится, что *если функция* $f(z)$ *регулярна в круге* $|z|<R$, $f(0)=0$ *и* $|f(z)|<1$ *при* $|z|<R$, *то* $|f(z)|\leqslant|z|/R$ *при* $|z|<R$. Лемма Шварца доказывается применением принципа максимума модуля к функции $f(z)/z$ в круге $|z|\leqslant r<R$ и последующим переходом к пределу при $r\to R$.

Теорема 5 (лемма Каратеодори). *Если функция* $f(z)$ *регулярна в круге* $|z|<R$, $f(0)=0$ *и* $\operatorname{Re} f(z)<M$ *при* $|z|<R$, *то*

$$|f(z)|\leqslant 2M\frac{|z|}{R-|z|} \quad \text{при} \quad |z|<R.$$

Доказательство. Применим лемму Шварца к функции

$$g(z)=\frac{f(z)-0}{f(z)-2M},$$

которая, очевидно, регулярна при $|z|<R$ и обращается в нуль в начале координат. Ясно, что $|g(z)|<1$ при $|z|<R$, так как значение $f(z)$ есть комплексное число, которое ближе к нулю, чем к $2M$. Следовательно, при $|z|<R$

$$\left|\frac{f(z)}{f(z)-2M}\right|=|g(z)|\leqslant\frac{|z|}{R},$$

$$R|f(z)|\leqslant|z||f(z)-2M|\leqslant|z||f(z)|+2M|z|,$$

$$(R-|z|)|f(z)|\leqslant 2M|z|,$$

что и требовалось доказать.

## § 12. Лемма Кузена

В своей диссертации Кузен использует в качестве леммы следующий результат.

Теорема 6. *Пусть* $w=(z_2, \ldots, z_n)$; $f(z, w)$ — *функция, регулярная в области* $D_1(z)\times D_2(w)$; $L$ — *прямолинейный отрезок*

*с концами $\alpha$ и $\beta$, лежащий в $D_1$, и пусть*

$$\Phi(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(\zeta, w)}{\zeta - z} d\zeta.$$

*Тогда $\Phi(z, w)$ регулярна в $L^* \times D_2$, где $L^*$ — дополнение к $L$ в $z$-плоскости; $\Phi(z, w)$, рассматриваемая как функция от $z$, имеет логарифмические точки разветвления в точках $z = \alpha$ и $z = \beta$; в остальных точках $z \in L$ функция $\Phi(z, w)$ имеет регулярные продолжения $\Phi_-(z, w)$ и $\Phi_+(z, w)$, соответственно, с левой и с правой стороны пути интегрирования. Эти предельные значения связаны формулой*

$$\Phi_-(z, w) = f(z, w) + \Phi_+(z, w), \qquad (z, w) \in L \times D_2.$$

Регулярность $\Phi(z, w)$ следует из того, что $\Phi(z, w)$ непрерывна и однозначна в $L^* \times D_2$ и имеет там первые частные производные. Для доказательства второго утверждения теоремы представим $\Phi(z, w)$ в виде

$$\Phi(z, w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(\zeta, w) - f(z, w)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{f(z, w)}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\zeta}{\zeta - z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(\zeta, w) - f(z, w)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{f(z, w)}{2\pi i} \ln \frac{\beta - z}{\alpha - z},$$

где $\ln[(\beta - z)/(\alpha - z)]$ означает ту ветвь этой функции, которая стремится к нулю, когда $z$ стремится к бесконечности. Теперь мы утверждаем, что функция

$$g(\zeta, z, w) = \frac{f(\zeta, w) - f(z, w)}{\zeta - z}$$

регулярна в $D_1(\zeta) \times D_1(z) \times D_2(w)$. Это очевидно для всех точек, кроме точек $a$ вида $\zeta = a_1$, $z = a_1$, $w = a_2$. В каждой такой точке $\zeta - z$ есть простой степенной ряд (так как его порядок равен 1). Поэтому либо

$$\{\zeta - z\}_a \setminus \{f(\zeta, w) - f(z, w)\}_a,$$

либо

$$(\{\zeta - z\}_a, \quad \{f(\zeta, w) - f(z, w)\}_a) = 1.$$

Во втором случае $a$ — точка неопределенности функции $g(\zeta, z, w)$ и, значит, $g(\zeta, z, w)$ имеет полюсы в окрестности $a$. В полюсе $\zeta - z$ должно быть равно нулю, в то время как $f(\zeta, w) - f(z, w)$ должно быть отлично от нуля, что невозможно. Следовательно, функция $g(\zeta, z, w)$ регулярна в $a$.

Из регулярности $g(\zeta, z, w)$ в $D_1(\zeta) \times D_1(z) \times D_2(w)$ вытекает регулярность интеграла

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(\zeta, z, w) d\zeta$$

для $(z, w) \in D_1 \times D_2$. Теперь утверждение теоремы следует из свойств логарифмической функции.

Глава IV

# ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

## § 13. Периоды мероморфных функций

На протяжении настоящей главы мы будем рассматривать функции, мероморфные во всем $n$-мерном комплексном пространстве. Под *периодом* такой функции $f(z)$ мы будем понимать $n$-мерный вектор $c$ такой, что $f(z+c)=f(z)$ для всех $z$. Очевидно, что периоды одной функции образуют аддитивную группу.

Далее, множество периодов замкнуто. Действительно, пусть $c_1, c_2, \ldots$ — последовательность периодов, сходящаяся к $c_0$, и пусть $a$ — точка регулярности $f(z)$ такая, что $a+c_0$ — также точка регулярности $f(z)$. Тогда $a+c_k$ будут также точками регулярности $f(z)$ для всех достаточно больших $k$ и, следовательно, по непрерывности

$$f(a+c_0)-f(a)=\lim_{k\to\infty}\{f(a+c_k)-f(a)\}=0.$$

Поэтому

$$f(z+c_0)=f(z)$$

всюду, кроме, быть может, особых точек $f(z+c_0)$ или $f(z)$. Но комплексная размерность множества особых точек не больше $n-1$, следовательно, $f(z+c_0)=f(z)$ всюду.

Если мероморфная функция $f(z)$ допускает представление (быть может, после подходящего линейного преобразования) в виде функции от меньшего чем $n$ числа переменных, мы будем говорить, что $f$ *вырождена*.

В противном случае мы будем говорить, что функция $f$ *невырождена*.

Теорема 7. *Группа периодов любой невырожденной мероморфной функции состоит из дискретного множества векторов.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любой невырожденной мероморфной функции нуль является изолированным периодом, т. е. что если $\varepsilon>0$ достаточно мало, то нет отличных от 0 периодов, отстоящих от начала координат меньше чем на $\varepsilon$. До конца наших рассуждений условимся обозначать через $M(\varepsilon)$ множество периодов $f$, находящихся на расстоянии меньшем $\varepsilon$ от начала координат, через $L(\varepsilon)$ — векторное пространство над полем действительных чисел, порожденное векторами из $M(\varepsilon)$, и через $r(\varepsilon)$ — размер-

ность $L(\varepsilon)$. Ясно, что если $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, то

$$M(\varepsilon_1) \subset M(\varepsilon_2), \quad L(\varepsilon_1) \subset L(\varepsilon_2), \quad r(\varepsilon_1) \leqslant r(\varepsilon_2).$$

Следовательно, $r(\varepsilon)$ имеет предел при $\varepsilon$, стремящемся к 0. Таким образом, для всех достаточно малых $\varepsilon$ размерность $r(\varepsilon) = r$, а $L(\varepsilon)$ — фиксированное векторное пространство размерности $r$; обозначим его через $L$.

Покажем, что $L$ — подмножество группы периодов. Это, очевидно, верно, когда $r = 0$. Поэтому предположим, что $r > 0$. Пусть $a$ — любой вектор из $L$, а $\varepsilon$ — произвольно малое положительное число. Мы можем представить $a$ в виде

$$a = \zeta_1 c_1 + \zeta_2 c_2 + \ldots + \zeta_r c_r,$$

где $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$ — действительные числа, а $c_1, \ldots, c_r$ принадлежат $M(\varepsilon)$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — целые числа такие, что $|\zeta_j - \lambda_j| \leqslant 1/2$ $(j = 1, \ldots, r)$. Тогда, полагая

$$c = \lambda_1 c_1 + \ldots + \lambda_r c_r,$$

мы видим, что $c$ — период и что

$$|a - c| = |(\zeta_1 - \lambda_1) c_1 + \ldots + (\zeta_r - \lambda_r) c_r| \leqslant r\varepsilon/2.$$

Но $\varepsilon$ произвольно, поэтому существуют периоды, сколь угодно близкие к $a$. Так как группа периодов замкнута, то $a$ есть период. Таким образом, $L$ — подмножество группы периодов.

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что из предположения $r > 0$ вытекает вырожденность функции $f$.

При $r > 0$ пространство $L$ содержит отличный от нуля вектор $c_1$. Тогда вектор $\zeta_1 c_1$ является периодом при любом действительном $\zeta_1$. При помощи соответствующим образом подобранного линейного преобразования переменных мы можем перевести вектор $c_1$ в вектор $(1, 0, \ldots, 0)$. Будем рассматривать $f$ как функцию от $z_1$, тогда

$$f(z_1 + \zeta_1) = f(z_1).$$

Дифференцируя $f$ по действительной переменной $\zeta_1$ и полагая затем $\zeta_1 = 0$, мы получаем, что первая частная производная от $f$ по $z_1$ тождественно равна нулю, так что $f$ не зависит от $z_1$ и, следовательно, вырождена. Доказательство теоремы 7 закончено.

Векторы $c_1, c_2, \ldots, c_k$ комплексного $n$-мерного пространства условимся называть (*целочисленно*) *независимыми*, если соотношение

$$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \cdots + \lambda_k c_k = 0 \tag{1}$$

с целыми $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ может выполняться только при

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0, \tag{2}$$

иными словами, если группа, порожденная векторами $c_1, c_2, \ldots, c_k$, есть свободная абелева группа с $k$ образующими.

Векторы $c_1, c_2, \ldots, c_k$ комплексного $n$-мерного пространства будем называть *вещественно независимыми*, если соотношение

$$\zeta_1 c_1 + \zeta_2 c_2 + \cdots + \zeta_k c_k = 0 \tag{3}$$

с вещественными $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ может выполняться только при

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \cdots = \zeta_k = 0, \tag{4}$$

*иными словами, если векторное пространство, порожденное векторами $c_1, c_2, \ldots, c_k$, имеет размерность $k$.*

Теорема 8. *Если независимые векторы $c_1, c_2, \ldots, c_k$ являются периодами невырожденной мероморфной функции $f(z)$, то они вещественно независимы.*

Для доказательства этой теоремы мы используем следующий простой результат, касающийся одновременного приближения нескольких чисел: пусть $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ — действительные числа, $\varepsilon$ — произвольное положительное число; тогда существуют такие целые $t_1, t_2, \ldots, t_k$ и целое положительное $t$, что

$$|t\zeta_j - t_j| < \varepsilon \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Для доказательства этого факта заметим, что каждому неотрицательному целому $a$ можно сопоставить, и притом однозначно, точку в единичном кубе $k$-мерного вещественного евклидового пространства

$$(a\zeta_1 - a_1,\ a\zeta_2 - a_2,\ \ldots,\ a\zeta_k - a_k),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — целые числа, выбранные так, чтобы

$$0 \leqslant a\zeta_j - a_j < 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Разделим теперь единичный куб на $m^k$ подкубов при помощи плоскостей, параллельных его граням и расположенных на расстоянии $1/m$ друг от друга. Пусть $a$ пробегает все целые числа от 0 до $m^k$, тогда найдутся два различных значения $a$, скажем $a'$ и $a''$, такие, что соответствующие им точки лежат в одном подкубе. Если $a' > a''$, мы получим после вычитания, что

$$|(a' - a'')\zeta_j - (a'_j - a''_j)| < \frac{1}{m} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k).$$

Если $m > 1/\varepsilon$, то, полагая $t = a' - a''$, $t_j = a'_j - a''_j$ $(j = 1, \ldots, k)$, получим требуемые неравенства.

Перейдем к доказательству теоремы 8. Пусть векторы $c_1, c_2, \ldots, c_k$ удовлетворяют условиям этой теоремы, и пусть $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ — вещественные числа такие, что

$$\zeta_1 c_1 + \zeta_2 c_2 + \cdots + \zeta_k c_k = 0.$$

Для любого положительного $\varepsilon$ мы можем найти такие целые числа $t_1, t_2, \ldots, t_k$ и целое положительное $t$, что

$$|t\zeta_j - t_j| < \varepsilon \qquad (j = 1, \ldots, k).$$

Тогда

$$t_1c_1 + \cdots + t_kc_k = (t_1 - t\zeta_1)c_1 + \cdots + (t_k - t\zeta_k)c_k,$$

следовательно,

$$|t_1c_1 + \cdots + t_kc_k| < \varepsilon(|c_1| + \cdots + |c_k|).$$

Но при достаточно малом $\varepsilon$ это возможно (по теореме 7) только в том случае, если

$$t_1c_1 + t_2c_2 + \cdots + t_kc_k = 0$$

и, значит,

$$t_1 = t_2 = \cdots = t_k = 0.$$

Отсюда

$$|\zeta_j| \leqslant |t\zeta_j| = |t\zeta_j - t_j| < \varepsilon \qquad (j = 1, \ldots, k),$$

и, следовательно, так как $\varepsilon$ произвольно,

$$\zeta_j = 0 \qquad (j = 1, \ldots, k).$$

Таким образом, $c_1, c_2, \ldots, c_k$ вещественно независимы. Теорема 8 доказана.

Так как в $n$-мерном комплексном пространстве не может существовать множество, состоящее более чем из $2n$ вещественно независимых векторов, то из теоремы 8 следует, что невырожденная мероморфная функция имеет, самое большее, $2n$ независимых периодов. Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$ независимы и являются периодами невырожденной мероморфной функции, тогда они вещественно независимы и, следовательно, порождают все пространство, т. е. любой вектор пространства может быть представлен в виде

$$\zeta_1c_1 + \zeta_2c_2 + \cdots + \zeta_{2n}c_{2n} \tag{5}$$

с вещественными $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{2n}$. (Это справедливо даже в том случае, если $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$ порождают не всю группу периодов функции.) Параллелепипед $F$, определенный при помощи неравенств

$$0 \leqslant \zeta_j \leqslant 1 \qquad (j = 1, \ldots, 2n), \tag{6}$$

есть фундаментальная область [1]) для группы, порожденной $c_1, \ldots, c_{2n}$. Легко показать, что существуют невырожденные функции с $2n$ независимыми периодами, например, произведение $n$ эллиптических функций, соответственно, от переменных $z_1, z_2, \ldots, z_n$; однако периоды, как мы покажем позже, нельзя выбирать вполне свободно.

---

[1]) Здесь под *фундаментальной областью* понимается такая область, образы которой при преобразованиях группы покрывают все пространство, пересекаясь лишь по границе. —*Прим. перев.*

## § 14. Основная теорема о функциях, имеющих $2n$ вещественно независимых периодов

В этом параграфе мы изложим важную теорему о функциях с $2n$ вещественно независимыми периодами $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$. (Эта теорема будет справедлива, в частности, для *невырожденных* функций, имеющих $2n$ независимых периодов, однако ее применение *не ограничивается* только этим случаем.) Как и выше, параллелепипед $F$, определенный при помощи неравенств

$$0 \leqslant \zeta_j \leqslant 1 \quad (j = 1, \ldots, 2n), \tag{7}$$

есть фундаментальная область для группы, порожденной $c_1, \ldots, c_{2n}$. (Эта группа может, очевидно, иметь бесконечный индекс в полной группе периодов нашей функции, если последняя вырождена.) Наша теорема заключается в следующем.

Теорема 9. *Пусть $f(z)$ мероморфна во всем $n$-мерном комплексном пространстве $\Omega$ и имеет $2n$ вещественно независимых периодов $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$. Тогда $f(z)$ может быть представлена в виде*

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \tag{8}$$

*где $g$ и $h$ — функции, регулярные в $\Omega$ и взаимно простые в каждой точке $\Omega$, причем для любого периода $c$ из группы, порожденной $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$,*

$$\frac{g(z+c)}{g(z)} = \frac{h(z+c)}{h(z)} = e^{v_c(z)}, \tag{9}$$

*где $v_c(z)$ — полином, самое большее, третьей степени по каждому переменному.*

Для каждой точки $a \in \Omega$ существует локальный элемент $f_a = p_a/q_a$ и окрестность $C(a, \rho_a) = C(a)$ такие, что $p_a$ и $q_a$ сходятся в $C(a)$, $(p_a, q_a) = 1$ в $C(a)$ и $p_a q_b = p_b q_a$ в каждой точке $D(a, b) = C(a) \cap C(b)$. Чтобы выразить $f$ в виде отношения целых функций, которые взаимно просты в каждой точке $\Omega$, достаточно найти целую функцию $h(z)$, такую, что $h_a \sim q_a$ для всех $a \in \Omega$. Тогда, полагая $g = hf$, мы получим

$$g_a = h_a f_a \sim q_a \frac{p_a}{q_a} = p_a,$$

так что $g$ — целая функция и $(g_a, h_a) = 1$ для каждого $a$. Иными словами, достаточно решить проблему II для множества локальных классов $q_a$ и системы окрестностей $C(a)$. (Ясно, что $q_a$ удовлетворяют условиям согласованности проблемы II.)

Мы можем считать локальные элементы $f_a = p_a/q_a$ такими, что

$$q_a(z) = q_{a+c}(z+c), \quad p_a(z) = p_{a+c}(z+c), \tag{10}$$

где $c$ — любой период из группы, порожденной $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$. Действительно, локальные элементы достаточно выбрать для точек $a$ вида

$$a = \zeta_1 c_1 + \cdots + \zeta_{2n} c_{2n}, \quad 0 \leqslant \zeta_i < 1 \qquad (j = 1, \ldots, 2n) \quad (11)$$

и затем для остальных точек определить их с помощью условия (10). Аналогично, мы можем считать окрестности $C(a)$ такими, что $\rho_a = \rho_{a+c}$.

Окрестности вида $C(a, \rho_a/2)$, где $a$ пробегает все точки фундаментальной области $F$, образуют покрытие $F$. Из этого покрытия мы выберем конечное покрытие, скажем, с центрами в точках $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Сделав, если это необходимо, подходящее линейное преобразование, мы можем считать, что меньшее из чисел $\rho_{a_1}, \ldots, \rho_{a_r}$ равно 3. Из покрытия $F$ можно получить покрытие $\Omega$ с помощью сдвигов на все векторы из группы, порожденной $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$.

Построим теперь другое покрытие $\Omega$, а также связанную с ним триангуляцию. В плоскости $P(z_1)$ построим для каждого целого комплексного числа $\alpha = \lambda + \mu i$ два квадрата с центром $\alpha$ и сторонами, параллельными, соответственно, действительной и мнимой осям; один из них, обозначим его $S(\alpha)$, со сторонами длины 2, другой, $Q(\alpha)$, со сторонами длины 1. Таким образом, $S(\alpha)$ состоит из точек $z_1 = x + iy$, для которых выполняются неравенства

$$\lambda - 1 \leqslant x \leqslant \lambda + 1, \quad \mu - 1 \leqslant y \leqslant \mu + 1, \qquad (12)$$

аналогично, $Q(\alpha)$ состоит из точек $z_1 = x + iy$, для которых выполняются неравенства

$$\lambda - \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \lambda + \frac{1}{2}, \quad \mu - \frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \mu + \frac{1}{2}. \qquad (13)$$

Квадраты $S(\alpha)$ образуют покрытие плоскости $P(z_1)$, в то время как $Q(\alpha)$ составляют триангуляцию этой плоскости. Проделав то же самое в плоскостях $P(z_2), \ldots, P(z_n)$ и взяв затем прямые произведения, мы получим, соответственно, покрытие и триангуляцию $\Omega$. Пусть $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — целые комплексные числа. Введем обозначения

$$\begin{aligned} S(a) &= S(\alpha_1) \times S(\alpha_2) \times \cdots \times S(\alpha_n), \\ Q(a) &= Q(\alpha_1) \times Q(\alpha_2) \times \cdots \times Q(\alpha_n). \end{aligned} \qquad (14)$$

Очевидно, что каждая точка $\Omega$ принадлежит по крайней мере $4^n$ полицилиндрам $S(a)$ и по крайней мере одному $Q(a)$. До конца этого параграфа и на протяжении всего следующего буква $a$ будет обозначать всегда целую точку.

Каждая точка $a$ лежит в одной из окрестностей $C(a', \rho_{a'}/2)$ предыдущего покрытия $\Omega$ (полученного параллельным переносом из

покрытия $F$), т. е. имеется такое $a'$, что $|a'-a|<\rho_{a'}/2$. Теперь, считая, что $z\in S(a)$, мы будем иметь

$$|z-a|\leqslant\sqrt{2}<\frac{3}{2}\leqslant\frac{1}{2}\rho_{a'}$$

и, следовательно,

$$|z-a'|\leqslant|z-a|+|a-a'|<\frac{1}{2}\rho_{a'}+\frac{1}{2}\rho_{a'}=\rho_{a'}.$$

Поэтому если $a\in C(a',\rho_{a'}/2)$, то $S(a)$ содержится в $C(a',\rho_{a'})$.

В $S(a)$ положим $h_a(z)=q_{a'}(z)$; это дает нам в каждой целой точке $a$ степенной ряд $h_a$, сходящийся всюду в $S(a)$. Конечно, $a$ может принадлежать нескольким окрестностям $C(a',\rho_{a'}/2)$, и тогда $S(a)$ лежит в нескольких окрестностях $C(a',\rho_{a'})$, каждая из которых может быть использована для определения $h_a$. Однако все они приводят к функциям, эквивалентным в каждой точке $S(a)$, так что для определения $h_a$ мы можем выбрать любую из них.

Покажем теперь, что наша первоначальная проблема — найти целую функцию $h(z)$ такую, что $h\sim q_d$ в каждой точке $d\in\Omega$, — может быть сведена к проблеме: найти целую функцию $h(z)$ такую, что $h\sim h_a$ при любом целом $a$ в каждой точке $d\in S(a)$. Действительно, пусть $h\sim h_a$ в каждой точке $d\in S(a)$. Так как $d\in C(d)\cap C(a')$, мы имеем $h_a=q_{a'}\sim q_d$ в силу условий согласованности для $q$. Следовательно, $h\sim q_d$ в точке $d$. Далее, полицилиндры $S(a)$ покрывают $\Omega$, так что мы действительно свели первоначальную проблему к более простой.

Мы будем проводить доказательство при помощи индукции. Для удобства изложения введем следующие обозначения. Пусть

$$P_k=P(z_1)\times\cdots\times P(z_k), \tag{15}$$

$a_k$ есть $(n-k+1)$-мерный вектор вида $(\alpha_k,\ldots,\alpha_n)$, где $\alpha_k,\ldots,\alpha_n$ — целые комплексные числа ($b_k$, будет обозначать тоже самое),

$$\begin{aligned} S(a_k)&=S(\alpha_k)\times\cdots\times S(\alpha_n),\\ \Omega(a_k)&=P_{k-1}\times S(a_k). \end{aligned} \tag{16}$$

Если $k=1$, $\Omega(a_k)$ обозначает просто $S(a)$; если же $k=n+1$, то $\Omega(a_k)$ обозначает $\Omega$.

Лемма. *Пусть $k$ — фиксированное целое число, такое, что $1\leqslant k\leqslant n$. Предположим, что каждому $a_k$ соответствует функция $h_{a_k}(z)$, регулярная в $\Omega(a_k)$, и пусть при этом выполняются следующие три условия:*

1) $h_{a_k}\sim h_{b_k}$ *в* $\Omega(a_k)\cap\Omega(b_k)$;

2) *функция*

$$v_{a_k,b_k}=\ln\frac{h_{a_k}}{h_{b_k}}$$

*такова, что в* $\Omega(a_k) \cap \Omega(b_k)$

$$\operatorname{Re} v_{a_k, b_k} = O(m_{k-1})$$

*равномерно по* $a_k$ *и* $b_k$, *где*

$$m_k = (1 + |z_1|^3) \cdots (1 + |z_k|^3) \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

*а* $m_0 = 1$;

$$3) \quad v_{a_k, b_k}(0, \ldots, 0, z_k, \ldots, z_n) = O(1)$$

*в* $S(a_k) \cap S(b_k)$ *равномерно по* $a_k$ *и* $b_k$.

*Тогда для каждого* $a_{k+1}$ *существует функция* $h_{a_{k+1}}(z)$, *регулярная в* $\Omega(a_{k+1})$ *и такая, что условия* 1), 2) *и* 3) *выполняются с заменой* $k$ *на* $k+1$, *причем если* $a_k = (\alpha, a_{k+1})$, *т. е. если последние* $n-k$ *координат векторов* $a_k$ *и* $a_{k+1}$ *одинаковы, то*

$$4) \quad h_{a_{k+1}} \sim h_{a_k} \quad \text{в} \quad \Omega(a_k);$$

$$5) \quad \ln \left| \frac{h_{a_{k+1}}}{h_{a_k}} \right| = O(m_k) \quad \text{в} \quad \Omega(a_k) \text{ равномерно по } a_k.$$

Прежде чем доказывать лемму, мы покажем, как из нее следует теорема 9. С одной стороны, локальные степенные ряды $h_a$, соответствующие целым точкам, удовлетворяют условиям леммы в случае, когда $k = 1$. Условие 1) означает тогда, что $h_a \sim h_b$ в $S(a) \cap S(b)$. В самом деле, $S(a)$ содержится в некоторой $C(a', \rho_{a'})$, где $C(a', \rho_{a'}/2)$ есть одна из окрестностей нашего первоначального покрытия $\Omega$, $S(b)$ содержится в некоторой $C(b')$, $q_{a'} \sim q_{b'}$ в $C(a') \cap C(b')$, а по определению $h_a = q_{a'}$ в $S(a)$ и $h_b = q_{b'}$ в $S(b)$. Условия 2) и 3) означают, что функция

$$v_{a,b} = \ln \frac{h_a}{h_b}$$

ограничена в $S(a) \cap S(b)$. Действительно,

$$\frac{h_a}{h_b} = \frac{q_{a'}}{q_{b'}} \quad \text{в} \quad S(a) \cap S(b),$$

$S(a) \cap S(b)$ есть замкнутое множество, содержащееся в области аналитичности $\ln(q_{a'}/q_{b'})$, а число существенно различных функций $q_{a'}$ конечно (так как все они получаются из конечного числа при помощи сдвигов на векторы из группы, порожденной векторами $c_1, \ldots, c_{2n}$).

С другой стороны, при $k = n$ из леммы следует, что существует регулярная в $\Omega$ функция $h(z)$, удовлетворяющая условиям 1), 2) и 3), в которых $k = n+1$, и условиям 4) и 5) при $k = n$. Первые три условия ничего не дают в этом случае, последние же два читаются так:

$$4) \quad h \sim h_{a_n} \quad \text{в} \quad \Omega(a_n);$$

$$5) \quad \ln \left| \frac{h}{h_{a_n}} \right| = O(m_n) \quad \text{в} \quad \Omega(a_n)$$

равномерно по $a_n$, где $a_n = \alpha_n$ — целое комплексное число,

$$\Omega(a_n) = P(z_1) \times \ldots \times P(z_{n-1}) \times S(a_n)$$

и $h_{a_n}$ — функция, регулярная в $\Omega(a_n)$ и удовлетворяющая соответствующим условиям. Используя 4) и 5) при $k = n-1, \ldots, 1$, легко проверить, что в $\Omega(a_1) = S(a)$ справедливы соотношения:

$$h \sim h_{a_n} \sim h_{a_{n-1}} \sim \ldots \sim h_{a_1} = h_a;$$
$$\ln\left|\frac{h}{h_a}\right| = \ln\left|\frac{h}{h_{a_n}}\right| + \ln\left|\frac{h_{a_n}}{h_{a_{n-1}}}\right| + \ldots + \ln\left|\frac{h_{a_2}}{h_{a_1}}\right| = O(m_n) \tag{17}$$

равномерно по $a$, где $a = a_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \ldots, a_{n-1} = (\alpha_{n-1}, \alpha_n)$, $a_n = \alpha_n$ с одними и теми же целыми комплексными числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Таким образом, из леммы вытекает существование регулярной в $\Omega$ функции $h(z)$ такой, что в каждом полицилиндре $S(a)$ выполняются условия:

а) $h \sim h_a$,

б) $\ln\left|\frac{h}{h_a}\right| = O(m_n)$ равномерно по $a$.

Как мы показали выше, из условия а) следует, что $g = fh$ есть целая функция и что $g$ и $h$ взаимно просты в каждой точке $\Omega$. Из локальной взаимной простоты и соотношения

$$g(z)\,h(z+c) = g(z+c)\,h(z) \tag{18}$$

вытекает, что

$$\frac{h(z+c)}{h(z)}$$

есть единица в каждой точке $\Omega$ и, следовательно, также в целом ($c$ означает любой фиксированный вектор, принадлежащий группе, порожденной векторами $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$). Значит, мы можем написать

$$\frac{h(z+c)}{h(z)} = e^{v_c(z)}, \tag{19}$$

где $v_c(z)$ — целая функция. Покажем теперь, используя условие б), что $v_c(z)$ есть полином, степень которого по каждому переменному не превосходит трех. Для этого проверим сначала, что функция

$$\ln\left|\frac{h_b(z+c)}{h_a(z)}\right|$$

ограничена при $z \in S(a)$ и $z + c \in S(b)$. По определению,

$$h_a(z) = q_{a'}(z) \quad \text{в} \quad S(a),$$

где $S(a) \subset C(a', \rho_{a'})$ и $a'$ — один из центров рассмотренного ранее конечного покрытия $F$, сдвинутый на вектор из группы, порожденной векторами $c_1, \ldots, c_{2n}$.

Аналогично

$$h_b(z+c)=q_{b'}(z+c) \quad \text{в} \quad S(b),$$

где $S(b)\subset C(b',\ \rho_{b'})$; следовательно,

$$h_b(z+c)=q_{b'-c}(z),$$

в силу условия периодичности (10) для $q$. Так как $\rho_{b'-c}=\rho_{b'}$, мы имеем

$$q_{a'}\sim q_{b'-c} \quad \text{в} \quad C(a',\ \rho_{a'})\cap C(b'-c,\ \rho_{b'})$$

ввиду условий согласованности для $q$. Поэтому функция

$$\ln\frac{q_{b'-c}}{q_{a'}}$$

регулярна в области $C(a',\ \rho_{a'})\cap C(b'-c,\ \rho_{b'})$. Далее, множество точек $z$ таких, что $z\in S(a)$ и $z+c\in S(b)$, принадлежит замкнутому подмножеству этой области, определяемому неравенствами

$$|z-a'|\leqslant\frac{1}{2}\rho_{a'}+\sqrt{2},\quad |z-(b'-c)|\leqslant\frac{1}{2}\rho_{b'}+\sqrt{2}. \tag{20}$$

Следовательно, если $z\in S(a)$ и $z+c\in S(b)$, то функция

$$\ln\left|\frac{h_b(z+c)}{h_a(z)}\right|=\ln\left|\frac{q_{b'-c}}{q_{a'}}\right|$$

ограничена, причем равномерно по $a$ и $b$, так как в силу свойства периодичности (10) число существенно различных $q$ конечно.

Пусть $z\in S(a)$, а $z+c\in S(b)$, мы получаем тогда, используя условие б) и только что полученную оценку:

$$\ln\left|\frac{h(z+c)}{h(z)}\right|=\ln\left|\frac{h(z+c)}{h_b(z+c)}\right|+\ln\left|\frac{h_b(z+c)}{h_a(z)}\right|+\ln\left|\frac{h_a(z)}{h(z)}\right|=$$
$$=O(m_n)+O(1)+O(m_n)$$

равномерно по $a$ и $b$. Таким образом,

$$\ln\left|\frac{h(z+c)}{h(z)}\right|=O(m_n), \tag{21}$$

т. е. $\operatorname{Re} v_c(z)=O(m_n)$.

Из леммы Каратеодори следует, что если $g(\tau)$ — функция одного комплексного переменного $\tau$, регулярная в круге $|\tau|<2$ и такая, что $g(0)=0$, а $\operatorname{Re} g(\tau)<M$ всюду в этом круге, то $|g(1)|\leqslant 2M$. Если мы применим это соображение к функции $v_c(\tau z)-v_c(0)$, то получим, что

$$|v_c(z)-v_c(0)|=O(\{1+8|z_1|^3\}\ \ldots\ \{1+8|z_n|^3\})=$$
$$=O(\{1+|z_1|^3\}\ \ldots\ \{1+|z_n|^3\}),$$

следовательно, $v_c(z)=O(m_n)$.

В любой области вида $|z_1| < r_1, \ldots, |z_n| < r_n$ справедлива интегральная формула Коши

$$v_c(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{|\zeta_1|=r_1} \cdots \int\limits_{|\zeta_n|=r_n} \frac{v_c(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1) \ldots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \ldots d\zeta_n. \quad (22)$$

Следовательно, коэффициент перед $z_1^{h_1} \ldots z_n^{h_n}$ в разложении $v_c(z)$ в степенной ряд в окрестности начала координат, с точностью до числового множителя, равен

$$\int\limits_{|\zeta_1|=r_1} \cdots \int\limits_{|\zeta_n|=r_n} \frac{v_c(\zeta)}{\zeta_1^{h_1+1} \ldots \zeta_n^{h_n+1}} d\zeta_1 \ldots d\zeta_n.$$

Пусть, например, $h_1 \geqslant 4$; тогда, зафиксировав $r_2, \ldots, r_n$ и устремив $r_1$ к бесконечности, мы получим, что этот коэффициент равен нулю. Таким образом, $v_c(z)$ — многочлен, степень которого по каждому переменному не превосходит трех. Мы показали, что теорема 9 следует из указанной выше леммы.

## § 15. Доказательство основной леммы предыдущего параграфа

Пусть нам заданы функции $h_{a_k}$. Чтобы построить функцию $h_{a_{k+1}}$ для данного $a_{k+1}$, мы, очевидно, должны рассмотреть все функции $h_{a_k}$, где $a_k = (\alpha, a_{k+1})$. Таким образом, при данном $a_{k+1}$ функции $h_{a_k}$ зависят только от параметра $\alpha$, так что мы можем писать $h_{a_k} = h_\alpha$; аналогично, мы можем писать $v_{a_k, b_k} = v_{\alpha\beta}$.

Рассмотрим в плоскости переменного $z_k$ четыре квадрата $Q(\alpha)$, $Q(\beta)$, $Q(\gamma)$, $Q(\delta)$ с общей вершиной. (Для определенности допустим, что они расположены в порядке обхода против часовой стрелки вокруг их общей вершины.)

Пусть квадрат $T$ со стороной длины 1 и с центром в общей точке квадратов $Q$ является общей частью $S(\alpha)$, $S(\beta)$, $S(\delta)$ и $S(\gamma)$. Четыре функции $h_\alpha$, $h_\beta$, $h_\gamma$, $h_\delta$, рассматриваемые как функции от $z_k$, определены в $T$. Далее,

$$\frac{h_\alpha}{h_\beta} \cdot \frac{h_\beta}{h_\gamma} \cdot \frac{h_\gamma}{h_\delta} \cdot \frac{h_\delta}{h_\alpha} = 1. \quad (23)$$

Поэтому в односвязной области $P_{k-1} \times T \times S(a_{k+1})$ мы имеем

$$v_{\alpha\beta} + v_{\beta\gamma} + v_{\gamma\delta} + v_{\delta\alpha} = k_\alpha, \quad (24)$$

где $v$ — логарифмы соответствующих отношений, а $k_\alpha$ — целое кратное $2\pi i$. Если мы потребуем, чтобы $v_{\alpha\beta} = -v_{\beta\alpha}$, и введем обозначение

$$v_\alpha = v_{\alpha,\, \alpha+1}, \quad \overset{*}{v}_\alpha = v_{\alpha,\, \alpha+i},$$

то, в силу равенств $\beta = \alpha + 1$, $\gamma = \alpha + 1 + i$ и $\delta = \alpha + i$, соотношение (24) между функциями $v$ принимает вид

$$v_\alpha + \overset{*}{v}_{\alpha+1} = \overset{*}{v}_\alpha + v_{\alpha+i} + k_\alpha. \tag{25}$$

Из условия 3) следует, что $k_\alpha = O(1)$ равномерно по $\alpha$ и $a_{k+1}$. Теперь, исходя из ветвей $v_{\alpha\beta}$ логарифмов указанных выше отношений, выберем другие ветви $f_{\alpha\beta}$ так, чтобы выполнялось равенство

$$f_{\alpha\beta} + f_{\beta\gamma} + f_{\gamma\delta} + f_{\delta\alpha} = 0. \tag{26}$$

Мы сделаем это следующим образом. Положим $f_\alpha = v_\alpha$. Если $\alpha$ чисто мнимо, то положим $\overset{*}{f}_\alpha = \overset{*}{v}_\alpha$. Для $\alpha$, отличных от чисто мнимых, определим $\overset{*}{f}_\alpha$ рекуррентно так, чтобы всегда выполнялось следующее соотношение:

$$f_\alpha + \overset{*}{f}_{\alpha+1} = \overset{*}{f}_\alpha + f_{\alpha+1}. \tag{27}$$

Таким образом, если $\alpha$ чисто мнимо, то

$$\begin{aligned}
\overset{*}{f}_{\alpha+1} &= \overset{*}{v}_{\alpha+1} - k_\alpha,\\
\overset{*}{f}_{\alpha+2} &= \overset{*}{v}_{\alpha+2} - k_\alpha - k_{\alpha+1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\overset{*}{f}_{\alpha+h} &= \overset{*}{v}_{\alpha+h} - (k_\alpha + k_{\alpha+1} + \ldots + k_{\alpha+h-1}).
\end{aligned}$$

Аналогично

$$\overset{*}{f}_{\alpha-h} = \overset{*}{v}_{\alpha-h} + (k_{\alpha-1} + \ldots + k_{\alpha-h}).$$

Следовательно, если $\alpha$ чисто мнимо, то

$$|\overset{*}{f}_{\alpha\pm h} - \overset{*}{v}_{\alpha\pm h}| = O(h) = O(1 + |z_k|)$$

для $z_k$, принадлежащих $S(\alpha \pm h)$. Теперь, возвращаясь к прежним обозначениям при помощи соотношений

$$f_{\alpha,\,\alpha+1} = f_\alpha, \qquad f_{\alpha,\,\alpha+i} = \overset{*}{f}_\alpha, \qquad f_{\alpha\beta} = -f_{\beta\alpha},$$

приходим к равенству (26).

Справедлива следующая важная оценка:

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta}(0, \ldots, 0, z_k, \ldots, z_n) &= v_{\alpha\beta}(0, \ldots, 0, z_k, \ldots, z_n) +\\
&+ O(1 + |z_k|) = O(1 + |z_k|)
\end{aligned} \tag{28}$$

в $S(a_k) \cap S(b_k)$, где $a_k = (\alpha, a_{k+1})$, а $b_k = (\beta, a_{k+1})$. Из (28), применяя лемму Каратеодори (таким же образом, как в конце предыдущего параграфа) к функции

$$g(\tau) = f_{\alpha\beta}(\tau z_1, \ldots, \tau z_{k-1}, z_k, \ldots, z_n) - f_{\alpha\beta}(0, \ldots, 0, z_k, \ldots, z_n)$$

и используя условие 2), мы получаем, что

$$f_{\alpha\beta}(z) = O(m_{k-1}) + O(1 + |z_k|) \quad \text{в} \quad \Omega(a_k) \cap \Omega(b_k). \tag{29}$$

Введем теперь следующую сумму:

$$\Phi_\alpha(z) = \sum_{\gamma\delta} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L(\gamma,\delta)} f_{\gamma\delta}(\zeta)\left(\frac{1}{\zeta - z_k} - \frac{1}{\zeta} - \frac{z_k}{\zeta^2} - \frac{z_k^2}{\zeta^3}\right) d\zeta, \tag{30}$$

где $z_k$ — внутренняя точка квадрата $Q(\alpha)$ и $f_{\gamma\delta}(\zeta) = f_{\gamma\delta}(z_1, \ldots, z_{k-1}, \zeta, z_{k+1}, \ldots, z_n)$ рассматривается как функция от одной $k$-й переменной, а суммирование распространено на все пары целых комплексных чисел $\gamma$, $\delta$ таких, что квадраты $Q(\gamma)$ и $Q(\delta)$ имеют общую сторону $L(\gamma, \delta)$, причем путь интегрирования $L(\gamma, \delta)$ проходит в таком направлении, что квадрат $Q(\gamma)$ остается слева. Члены, соответствующие парам $\gamma$, $\delta$ и $\delta$, $\gamma$, равны, так как $f_{\gamma\delta} = -f_{\delta\gamma}$, а пути интегрирования в этих двух случаях мы проходим в противоположных направлениях. Будем считать, что в сумме (30) содержится только один член из каждой такой пары. Мы докажем, что если $(z_1, \ldots, z_{k-1}) \in P_{k-1}$, $z_k$ принадлежит внутренности $Q(\alpha)$, а $(z_{k+1}, \ldots, z_n) \in S(a_{k+1})$, то ряд (30) сходится к регулярной функции. Далее, мы покажем, что эта функция продолжается, с сохранением регулярности, на некоторую бо́льшую область, а именно, на всю $\Omega(a_k)$, где $a_k = (\alpha, a_{k+1})$, причем для нее там будет справедлива оценка $O(m_k)$. И, наконец, мы покажем, что для $\alpha$ и $\beta$ таких, что квадраты $Q(\alpha)$ и $Q(\beta)$ имеют общую сторону, справедливо равенство

$$\Phi_\alpha = \Phi_\beta + f_{\alpha\beta} \tag{31}$$

при $(z_1, \ldots, z_{k-1}) \in P_{k-1}$, $z_k \in S(\alpha) \cap S(\beta)$, $(z_{k+1}, \ldots, z_n) \in S(a_{k+1})$.

Разделим квадрат $Q(\alpha)$ на четыре части прямыми, проходящими через точку $\alpha$ параллельно действительной и мнимой осям. Точка $z_k$ принадлежит одной из этих частей, скажем, правой верхней. Выделим теперь из суммы (30) четыре интеграла, для которых одним из концов пути интегрирования является правая верхняя вершина $\varepsilon_0$ квадрата $Q(\alpha)$. Для остальных членов суммы (30) справедливо неравенство $|\zeta - z_k| \geqslant {}^1/_2$. Разделим эти члены на две группы: к первой мы отнесем те члены, для каждого из которых существует точка $\zeta \in L(\gamma, \delta)$ такая, что $|\zeta - z_k| \leqslant |\zeta|/2$, ко второй — члены, для которых при всех $\zeta \in L(\gamma, \delta)$ справедливо неравенство $|\zeta - z_k| > |\zeta|/2$. Заметим, что в любом случае мы имеем $|\zeta| \geqslant {}^1/_2$.

Для члена первой группы и по крайней мере для одной точки $\zeta \in L$ справедливо неравенство

$$\left|1 - \frac{z_k}{\zeta}\right| \leqslant \frac{1}{2} \tag{32}$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{2} \leqslant \left|\frac{z_k}{\zeta}\right| \leqslant \frac{3}{2}. \tag{33}$$

Таким образом, для любой точки $\zeta \in L(\gamma, \delta)$ имеем

$$|z_k| \leqslant \frac{3}{2}(1+|\zeta|), \quad |\zeta| \leqslant 2(1+|z_k|). \tag{34}$$

Далее,

$$\frac{1}{\zeta - z_k} - \frac{1}{\zeta} - \frac{z_k}{\zeta^2} - \frac{z_k^2}{\zeta^3} = \frac{z_k^3}{\zeta^3(\zeta - z_k)} = O(1)$$

и

$$f_{\gamma\delta}(\zeta) = O(m_{k-1}) + O(1+|\zeta|) = O(m_{k-1}) + O(1+|z_k|). \tag{35}$$

Последняя оценка верна для любого члена первой группы. Число же членов этой группы имеет порядок $O(1+|z_k|^2)$, поэтому для суммы всех членов первой группы справедлива оценка

$$O(m_{k-1}(1+|z_k|^2)) + O(1+|z_k|^5) = O(m_k). \tag{36}$$

В членах второй группы ядро по абсолютному значению меньше, чем

$$\frac{1+|z_k|^3}{\frac{1}{2}|\zeta|^4},$$

и, кроме того,

$$f_{\gamma\delta}(\zeta) = O(m_{k-1}) + O(1+|\zeta|).$$

Следовательно, для всего члена будет справедлива оценка

$$O\left(\frac{m_k}{|\zeta|^4}\right) + O\left(\frac{1+|z_k|^3}{|\zeta|^3}\right),$$

так что сумма абсолютных значений всех этих членов оценивается величиной

$$O\left(m_k \sum_{\gamma} \frac{1}{1+|\gamma|^4}\right) + O\left((1+|z_k|^3) \sum_{\gamma} \frac{1}{1+|\gamma|^3}\right), \tag{37}$$

где $\gamma$ пробегает все целые комплексные числа.

Оценки (36) и (37) выполняются равномерно, если точка $(z_1, \ldots, z_{k-1})$ принадлежит $P_{k-1}$, $z_k$ принадлежит квадрату $T$ со стороной длины 1 и с центром в точке $\varepsilon_0$, а $(z_{k+1}, \ldots, z_n) \in S(a_{k+1})$, так что бесконечный ряд (30), из которого удалены четыре критических члена, равномерно сходится при $z_k \in T$ и, следовательно, представляет собой регулярную функцию.

Рассмотрим теперь те четыре оставшихся члена ряда (30), которые соответствуют путям интегрирования, сходящимся в точке $\varepsilon_0$. Предположим, что четыре квадрата $Q(\alpha)$, $Q(\beta)$, $Q(\gamma)$ и $Q(\delta)$ с общей вершиной в точке $\varepsilon_0$ расположены в порядке обхода против часовой стрелки. Достаточно рассмотреть лишь следующие части

оставшихся членов:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L(\alpha,\beta)}\frac{f_{\alpha\beta}(\zeta)}{\zeta-z_k}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L(\beta,\gamma)}\frac{f_{\beta\gamma}(\zeta)}{\zeta-z_k}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L(\gamma,\delta)}\frac{f_{\gamma\delta}(\zeta)}{\zeta-z_k}d\zeta+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L(\delta,\alpha)}\frac{f_{\delta\alpha}(\zeta)}{\zeta-z_k}d\zeta, \qquad (38)$$

так как остальные части регулярны в области $P_{k-1}\times T\times S(a_{k+1})$ и имеют там порядок $O(m_k)$. Мы преобразуем сейчас каждый из интегралов формулы (38) следующим образом. Рассмотрим один из них, например,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L(\alpha,\beta)}\frac{f_{\alpha\beta}(\zeta)}{\zeta-z_k}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L(\alpha,\beta)}\frac{f_{\alpha\beta}(\zeta)-f_{\alpha\beta}(z_k)}{\zeta-z_k}d\zeta+\frac{f_{\alpha\beta}(z_k)}{2\pi i}\int\limits_{L(\alpha,\beta)}\frac{d\zeta}{\zeta-z_k}. \qquad (39)$$

Дробь $[f_{\alpha\beta}(\zeta)-f_{\alpha\beta}(z_k)]/[\zeta-z_k]$ является регулярной функцией от $z$, если $z_k\in T$, а $\zeta$ — любая точка отрезка $L(\alpha,\beta)$, причем, рассматривая эту дробь как функцию от $z_k$ в прямоугольнике $S(\alpha)\cap S(\beta)$ (который содержит квадрат $T$ и отрезок $L(\alpha,\beta)$) и применяя принцип максимума модуля, легко получить для нее оценку $O(m_k)$. Следовательно, первый из интегралов в формуле (38) регулярен в области $P_{k-1}\times T\times S(a_{k+1})$ и имеет там соответствующую оценку.

Далее, при $z_k$, принадлежащем внутренности квадрата $Q(\alpha)$, каждый из четырех интегралов вида

$$\int\limits_{L(\mu,\nu)}\frac{d\zeta}{\zeta-z_k}$$

можно выразить как интеграл по отрезку $L(\alpha,\beta)$ плюс интеграл по части периметра квадрата со стороной 2, образованного из квадратов $Q(\alpha)$, $Q(\beta)$, $Q(\gamma)$ и $Q(\delta)$, взятых вместе. Далее,

$$\frac{f_{\alpha\beta}+f_{\beta\gamma}+f_{\gamma\delta}+f_{\delta\alpha}}{2\pi i}\int\limits_{L(\alpha,\beta)}\frac{d\zeta}{\zeta-z_k}=0,$$

а остальные интегралы являются регулярными функциями при $z_k\in T$ и имеют оценку $O(m_k)$. Следовательно, сумма четырех критических членов ряда (30) для $\Phi_\alpha(z)$ является регулярной функцией в области $P_{k-1}\times T\times S(a_{k+1})$ и имеет там оценку $O(m_k)$.

Далее, $T$ есть правая верхняя четверть квадрата $S(\alpha)$. В силу симметрии можно утверждать, что $\Phi_\alpha(z)$ регулярна для $z_k$, принадлежащих любой из трех оставшихся четвертей $S(\alpha)$, и, следовательно, для всех $z_k\in S(\alpha)$. Кроме того, всюду в $S(\alpha)$ справедлива оценка $O(m_k)$. Соотношение

$$\Phi_\alpha=\Phi_\beta+f_{\alpha\beta} \qquad (40)$$

между функциями, соответствующими $Q(\alpha)$ и $Q(\beta)$, справедливо в силу леммы Кузена для всех $z_k \in L(\alpha, \beta)$ и, следовательно, для всех $z_k \in S(\alpha) \cap S(\beta)$. Таким образом, каждому целому комплексному числу $\alpha$ в плоскости $P(z_k)$ соответствует функция $\Phi_\alpha = \Phi_{a_k}$, регулярная в $\Omega(a_k)$, где $a_k = (\alpha, a_{k+1})$, имеющая там порядок $O(m_k)$ и такая, что если $b_k = (\beta, a_{k+1})$, то

$$\Phi_{a_k} = \Phi_{b_k} + f_{\alpha\beta} \tag{41}$$

в $\Omega(a_k) \cap \Omega(b_k)$, при условии, конечно, что $\alpha$ и $\beta$ — соседние целые комплексные числа.

Теперь мы уже можем перейти от функции $h_{a_k}(z)$, регулярной в $\Omega(a_k)$, к функции $h_{a_{k+1}}(z)$, регулярной в $\Omega(a_{k+1})$, посредством следующего определения:

$$h_{a_{k+1}}(z) = h_{a_k}(z)\, e^{-\Phi_{a_k}(z)} \text{ в } \Omega(a_k). \tag{42}$$

Формула (42) определяет $h_{a_{k+1}}$ во всей области $\Omega(a_{k+1})$, так как $\Omega(a_{k+1}) = \bigcup\limits_{\alpha} \Omega(a_k)$, где $a_k = (\alpha, a_{k+1})$ и $\alpha$ пробегает все целые комплексные числа. Это определение не содержит противоречия, потому что если $a_k = (\alpha, a_{k+1})$ и $b_k = (\beta, a_{k+1})$, то в $\Omega(a_k) \cap \Omega(b_k)$

$$h_{b_k}(z)\, e^{-\Phi_{b_k}(z)} = h_{b_k}(z)\, e^{-\Phi_{a_k}(z)}\, e^{f_{\alpha\beta}(z)} =$$

$$= h_{b_k}(z)\, e^{-\Phi_{a_k}(z)} \frac{h_{a_k}(z)}{h_{b_k}(z)} = h_{a_k}(z)\, e^{-\Phi_{a_k}(z)}.$$

Таким образом, функция $h_{a_{k+1}}(z)$, определенная посредством (42), регулярна в $\Omega(a_{k+1})$. Теперь мы должны доказать, что она обладает нужными свойствами. Свойства 4) и 5) следуют непосредственно из ее определения и оценки для функции $\Phi$.

Чтобы показать справедливость условий 1), 2) и 3), предположим, что области $\Omega(a_{k+1})$ и $\Omega(b_{k+1})$ перекрываются. Тогда $k$-я координата $z_k$ любой точки $z$ этого пересечения принадлежит $S(\alpha)$ при соответствующем $\alpha$ и, значит, $z$ принадлежит $\Omega(a_k) \cap \Omega(b_k)$, где $a_k = (\alpha, a_{k+1})$ и $b_k = (\alpha, b_{k+1})$.

Теперь соотношение 1) для $k+1$ непосредственно следует из соотношения 1) для $k$. Поскольку

$$\ln\left|\frac{h_{a_{k+1}}}{h_{b_{k+1}}}\right| = \ln\left|\frac{h_{a_k}}{h_{b_k}}\right| + \operatorname{Re}(\Phi_{b_k} - \Phi_{a_k}) = O(m_{k-1}) + O(m_k) = O(m_k), \tag{43}$$

соотношение 2) также выполняется. Пересечение $\Omega(a_{k+1})$ и $\Omega(b_{k+1})$ всегда односвязно; следовательно, ветвь функции

$$v_{a_{k+1}, b_{k+1}} = \ln \frac{h_{a_{k+1}}}{h_{b_{k+1}}}$$

будет определена однозначно указанием ее значения в одной точке. Пока эта ветвь в нашем распоряжении. Мы выберем ее так, чтобы

$$v_{a_{k+1}, b_{k+1}}(0, \ldots, 0, z_{k+1}, \ldots, z_n) = \\ = v_{a_k, b_k}(0, \ldots, 0, z_{k+1}, \ldots, z_n) + \Phi_{b_k}(0, \ldots, 0, z_{k+1}, \ldots, z_n) - \\ - \Phi_{a_k}(0, \ldots, 0, z_{k+1}, \ldots, z_n) \tag{44}$$

при $(z_{k+1}, \ldots, z_n) \in S(a_{k+1}) \cap S(b_{k+1})$, где $a_k = (0, a_{k+1})$, $b_k = (0, b_{k+1})$. При помощи индукции, используя тот факт, что $\Phi_{a_k} = O(m_k)$ и $\Phi_{b_k} = O(m_k)$, мы получаем, что правая часть (44) имеет порядок $O(1)$. Таким образом, условие 3) также выполнено. Следовательно, наша лемма полностью доказана.

Итак, мы решили проблему III для функций, мероморфных во всем пространстве и имеющих $2n$ вещественно независимых периодов. Фактически мы решили проблему II для локальных степенных рядов, которые служили локальными знаменателями таких функций. Теорема Кузена о проблеме II (см. § 9) может быть доказана таким же методом, причем доказательство даже проще, так как не надо делать оценки, в которых мы нуждались, чтобы показать, что $v_c(z)$ — многочлены. (Как мы покажем позднее, $v_c(z)$ можно считать линейными многочленами.)

## § 16. Степень произвола в выборе функций $g$ и $h$ в теореме 9

Теорема 9 гласит, что функция, мероморфная во всем $n$-мерном комплексном пространстве $\Omega$ и имеющая $2n$ вещественно независимых периодов $c_1, \ldots, c_{2n}$, может быть представлена в виде отношения двух целых функций $g$ и $h$, которые взаимно просты в каждой точке $\Omega$ и таковы, что

$$g(z + c_k) = e^{v_k(z)} g(z), \qquad h(z + c_k) = e^{v_k(z)} h(z) \\ (k = 1, \ldots, 2n),$$

где $v_k(z)$ — многочлен. (Степень его сейчас не будет нас интересовать.)

Естественно поставить вопрос об определении всех возможных функций $g$ и $h$ с такими свойствами. Ясно, что вместе с $g$ и $h$ этими свойствами обладают также функции $g^*$ и $h^*$, где

$$h^*(z) = e^{w(z)} h(z), \qquad g^*(z) = e^{w(z)} g(z), \tag{45}$$

а $w(z)$ — любой многочлен от $z_1, \ldots, z_n$. Мы докажем сейчас, что таким способом можно получить любую пару функций, удовлетво-

ряющую требованиям теоремы 9 (за исключением требования о степени многочлена).

Поскольку $g$ и $h$ взаимно просты в каждой точке $\Omega$, так же как $g^*$ и $h^*$, из соотношения

$$g(z)h^*(z) = g^*(z)h(z)$$

вытекает (ввиду замечания на стр. 20), что $h \setminus h^* \setminus h$ в целом. Следовательно (см. § 8),

$$h^*(z) = e^{w(z)}h(z),$$

где $w(z)$ — целая функция, и

$$g^*(z) = e^{w(z)}g(z).$$

Мы должны показать теперь, что $w(z)$ — многочлен. Прежде всего заметим, что

$$h^*(z+c_k) = e^{v_k^*(z)}h^*(z) = e^{v_k^*(z)+w(z)}h(z);$$

с другой стороны,

$$h^*(z+c_k) = e^{w(z+c_k)}h(z+c_k) = e^{w(z+c_k)+v_k(z)}h(z).$$

Отсюда

$$w(z+c_k) - w(z) = v_k^*(z) - v_k(z) + 2\pi i r_k \qquad (k = 1, \ldots, 2n), \quad (46)$$

где $r_k$ — постоянные целые числа. Если степени $v_k(z)$ и $v_k^*(z)$ не превосходят $d$, то из соотношения (46) следует, что любая частная производная порядка $d+1$ от разности $w(z+c_k) - w(z)$ тождественно равна нулю. Поэтому любая частная производная порядка $d+1$ функции $w(z)$ есть целая функция с $2n$ вещественно независимыми периодами $c_1, \ldots, c_{2n}$. Следовательно, эта производная ограничена во всем пространстве, так как любая точка $\Omega$ получается из некоторой точки фундаментального параллелепипеда $F$, определяемого условиями

$$z = \xi_1 c_1 + \ldots + \xi_{2n} c_{2n}, \quad 0 \leqslant \xi_j \leqslant 1 \qquad (j = 1, \ldots, 2n),$$

при помощи параллельного переноса на вектор из группы, порожденной $c_1, \ldots, c_{2n}$. Поэтому любая частная производная $w(z)$ порядка $d+1$ есть константа, а $w(z)$ — многочлен степени, не превосходящей $d+1$, чем и доказано наше утверждение.

В следующей главе мы покажем, что $w(z)$ можно выбрать так, чтобы $v_k^*(z)$ $(k = 1, \ldots, 2n)$ оказались линейными функциями.

Глава V

# РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

## § 17. Постановка задачи

Мы хотим найти целые функции $g^*(z)$ и $h^*(z)$, удовлетворяющие требованиям теоремы 9 и такие, что соответствующие полиномы $v_k^*(z)$ $(k=1, \ldots, 2n)$ линейны. В § 16 мы показали, что эта задача эквивалентна нахождению многочлена $w(z)$, для которого разности

$$w(z+c_k)-w(z)+v_k(z) \qquad (k=1, \ldots, 2n) \tag{1}$$

являются линейными функциями. Если $v_k(z)$ — произвольные полиномы, то, вообще говоря, найти такой многочлен $w(z)$ невозможно. Однако наши $v_k(z)$ таковы, что

$$h(z+c_k)=e^{v_k(z)}h(z) \qquad (k=1, \ldots, 2n). \tag{2}$$

Значит,

$$e^{v_j(z+c_k)+v_k(z)}h(z)=h(z+c_j+c_k)=e^{v_k(z+c_j)+v_j(z)}h(z), \tag{3}$$

так что многочлены $v$ удовлетворяют соотношениям

$$v_j(z+c_k)-v_j(z)=v_k(z+c_j)-v_k(z)+a_{jk} \qquad (j,\ k=1, \ldots, 2n), \tag{4}$$

где $a_{jk}$ — целочисленные кратные $2\pi i$. Соотношения (4) позволяют найти $w(z)$. Заметим еще, что матрица $(a_{jk})$ — кососимметрическая.

## § 18. Определение некоторых полиномов

Известно, что если $r=0, 1, \ldots$ и $\zeta=1, 2, \ldots$, то

$$0^r+1^r+\ldots+(\zeta-1)^r$$

многочлен степени $r+1$ от $\zeta$. Следовательно, если $\psi$ — любой многочлен, то

$$\psi(0)+\psi(1)+\ldots+\psi(\zeta-1)=\Phi(\zeta)$$

представляет собой многочлен от $\zeta$,

Из этого замечания следует, что если $t=(t_1, \ldots, t_n)$ — комплексный вектор, то

$$\sum_{\lambda=0}^{\zeta-1} v_k(t+\lambda c_k)=\Phi_k(t, \zeta)=\Phi_k(t_1, \ldots, t_n, \zeta) \tag{5}$$

есть многочлен от $t_1, \ldots, t_n$ и $\zeta$. Из соотношений (4) для $v_k$ следуют соотношения для $\Phi_k(t, \zeta)$. Для вывода этих соотношений заменим в (4) $z$ на $t+\lambda c_j+\mu c_k$ и просуммируем по $\lambda$ от 0 до $\zeta_j-1$ и по $\mu$ от 0 до $\eta_k-1$, где $\zeta_j$ и $\eta_k$ — целые положительные числа. Мы получим

$$\sum_{\lambda=0}^{\zeta_j-1}\{v_j(t+\lambda c_j+\eta_k c_k)-v_j(t+\lambda c_j)\}=$$
$$=\sum_{\mu=0}^{\eta_k-1}\{v_k(t+\zeta_j c_j+\mu c_k)-v_k(t+\mu c_k)\}+\zeta_j\eta_k a_{ik}, \tag{6}$$

что и дает нужные соотношения между $\Phi_k(t, \zeta)$:

$$\Phi_j(t+\eta_k c_k, \zeta_j)-\Phi_j(t, \zeta_j)=\Phi_k(t+\zeta_j c_j, \eta_k)-\Phi_k(t, \eta_k)+$$
$$+a_{jk}\zeta_j\eta_k \quad (j, k=1, \ldots, 2n). \tag{7}$$

Так как $\Phi_k$ — многочлены и равенство (7) справедливо для любых целых положительных $\zeta_j$ и $\eta_k$, то оно будет также выполняться для любых комплексных $\zeta_j$, $\eta_k$.

Следующие соотношения для $\Phi_j$ являются простыми следствиями определения:

$$\Phi_j(t, 1)=v_j(t) \qquad (j=1, \ldots, 2n); \tag{8}$$
$$\Phi_j(t, \zeta+\eta)-\Phi_j(t, \zeta)=\Phi_j(t+\zeta c_j, \eta) \qquad (j=1, \ldots, 2n). \tag{9}$$

Так же как в предыдущем абзаце, (9) справедливо для любых комплексных чисел.

Среди $2n$ векторов $c_1, \ldots, c_{2n}$, линейно независимых над полем действительных чисел, всегда можно найти $n$ векторов, скажем $c_1, \ldots, c_n$, линейно независимых над полем комплексных чисел. Действительно, в противном случае каждый из векторов $c_1, \ldots, c_{2n}$ можно было бы выразить через $n-1$ из них, скажем через $c_1, \ldots, c_{n-1}$, с комплексными коэффициентами. А тогда мы могли бы найти нетривиальное решение уравнения

$$\zeta_1 c_1+\ldots+\zeta_{2n}c_{2n}=0 \tag{10}$$

в действительных числах следующим образом. Подставим выражение $c_j$ через $c_1, \ldots, c_{n-1}$ в (10), тогда получится уравнение вида

$$\xi_1 c_1+\ldots+\xi_{n-1}c_{n-1}=0, \tag{11}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ — однородные линейные формы от $\zeta_1, \ldots, \zeta_{2n}$. Далее, заменим систему уравнений

$$\xi_1=0, \quad \xi_2=0, \ldots, \xi_{n-1}=0 \tag{12}$$

$2n-2$ линейными уравнениями с действительными коэффициентами и $2n$ неизвестными, приравнивая отдельно действительные и мнимые части нулю. Последние уравнения имеют, очевидно, нетривиальное решение в действительных числах.

Таким образом, мы можем предполагать, что любой вектор $x=(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ однозначно представляется в виде

$$x=\zeta_1 c_1+\ldots+\zeta_n c_n, \tag{13}$$

где $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — некоторые комплексные числа. Заметим, что $x_1, \ldots, x_n$ можно выразить линейным однородным образом через $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, и обратно. Введем теперь обозначения

$$x^{(j+1)}=\zeta_1 c_1+\ldots+\zeta_j c_j \qquad (j=0, 1, \ldots, n). \tag{14}$$

В частности, $x^{(1)}=0$ и $x^{(n+1)}=x$. Очевидно, что имеют место следующие рекуррентные соотношения:

$$x^{(j+1)}=x^{(j)}+\zeta_j c_j \qquad (j=1, \ldots, n). \tag{15}$$

Используя эти обозначения, введем новую функцию

$$\Phi(t, x)=\sum_{j=1}^{n} \Phi_j(t+x^{(j)}, \zeta_j). \tag{16}$$

Очевидно, $\Phi(t, x)$ есть многочлен от $t_1, \ldots, t_n$ и $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, следовательно, также многочлен от $t_1, \ldots, t_n$ и $x_1, \ldots, x_n$. Если мы заменим $t$ в (7) на $t+x^{(j)}$ и просуммируем по $j$ от 1 до $n$, мы найдем, что для любых $n$-мерных комплексных векторов $t$, $x$ и любого комплексного $\eta_k$ справедливо следующее соотношение для функции (16):

$$\Phi(t+\eta_k c_k, x)-\Phi(t, x)=$$
$$=\Phi_k(t+x, \eta_k)-\Phi_k(t, \eta_k)+\sum_{j=1}^{n} a_{tk}\zeta_j\eta_k \qquad (k=1, \ldots, 2n). \tag{17}$$

Пусть $y$ есть $n$-мерный комплексный вектор, такой, что

$$y=\eta_1 c_1+\ldots+\eta_n c_n,$$

и пусть

$$y^{(k+1)}=\eta_1 c_1+\ldots+\eta_k c_k \qquad (k=0, 1, \ldots, n).$$

Заменяя $t$ в (7) на $t+x^{(j)}+y^{(k)}$ и суммируя по $k$ и $j$, удовлетворяющим условию $1 \leqslant k<j \leqslant n$, получаем

$$\sum_{j=2}^{n}\{\Phi_j(t+x^{(j)}+y^{(j)}, \zeta_j)-\Phi_j(t+x^{(j)}, \zeta_j)\}=$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}\{\Phi_k(t+x+y^{(k)}, \eta_k)-\Phi_k(t+x^{(k)}+y^{(k)}+\zeta_k c_k, \eta_k)\}+$$
$$+\sum_{1 \leqslant k<j \leqslant n} a_{jk}\zeta_j\eta_k. \tag{18}$$

Заменяя $k$ на $j$ в первой сумме правой части равенства (18) и учитывая, что в этой сумме, так же как в сумме, стоящей в левой части этого равенства, можно считать индекс суммирования пробегающим все значения от 1 до $n$[1]), мы получаем

$$\sum_{j=1}^{n} \{\Phi_j(t+x^{(j)}+y^{(j)}, \zeta_j)-\Phi_j(t+x^{(j)}, \zeta_j)\} = \\ = \sum_{j=1}^{n} \{\Phi_j(t+x+y^{(j)}, \eta_j)-\Phi_j(t+x^{(j)}+y^{(j)}+\zeta_j c_j, \eta_j)\} + \\ + \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} a_{jk}\zeta_j\eta_k. \tag{19}$$

Теперь из (9) следует

$$\Phi_j(t+x^{(j)}+y^{(j)}+\zeta_j c_j, \eta_j) = \Phi_j(t+x^{(j)}+y^{(j)}, \zeta_j+\eta_j) - \\ - \Phi_j(t+x^{(j)}+y^{(j)}, \zeta_j). \tag{20}$$

Подставляя (20) в предыдущее соотношение (19), имеем

$$-\sum_{j=1}^{n} \Phi_j(t+x^{(j)}, \zeta_j) = \\ = \sum_{j=1}^{n} \{\Phi_j(t+x+y^{(j)}, \eta_j)-\Phi_j(t+x^{(j)}+y^{(j)}, \zeta_j+\eta_j)\} + \\ + \sum_{1\leqslant k<j\leqslant n} a_{jk}\zeta_j\eta_k,$$

или

$$-\Phi(t, x) = \Phi(t+x, y) - \Phi(t, x+y) + \sum_{1\leqslant k<j\leqslant n} a_{jk}\zeta_j\eta_k. \tag{21}$$

## § 19. Решение задачи, поставленной в § 17. Уточнение теоремы 9

При помощи полиномов, определенных в предыдущем параграфе, нетрудно решить систему разностных уравнений § 17. В самом деле, покажем, что функция $w(z) = -\Phi(0, z)$ такова, что полиномы

$$w(z+c_r) - w(z) + v_r(z) \qquad (r = 1, \ldots, 2n)$$

являются линейными функциями от $z = (z_1, \ldots, z_n)$.

Пусть $z = \zeta_1 c_1 + \ldots \zeta_n c_n$. Заменяя в (17) $k$ на $r$ и полагая $t = 0$, $\eta_r = 1$, $x = z$, получаем

$$\Phi(c_r, z) + w(z) = v_r(z) - v_r(0) + \sum_{j=1}^{n} a_{jr}\zeta_j. \tag{22}$$

---

[1]) Члены, соответствующие $j = 1$ и $j = n$, равны нулю. — *Прим. перев.*

Положим теперь в (21) $t=0$, $x=c_r$, $y=z$; тогда

$$w(c_r)=\Phi(c_r, z)+w(z+c_r)+\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n} a_{jk}\gamma_{jr}\zeta_k, \tag{23}$$

где $c_r=\gamma_{1r}c_1+\ldots+\gamma_{nr}c_r$ $(r=1, \ldots, 2n)$.

Наконец, складывая (22) и (23), получаем, что

$$w(z+c_r)-w(z)+v_r(z)=$$
$$=w(c_r)+v_r(0)-\sum_{j=1}^{n} a_{jr}\zeta_j-\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n} a_{jk}\gamma_{jr}\zeta_k$$
$$(r=1, \ldots, 2n). \tag{24}$$

Правая часть при каждом $r$ есть линейная функция от $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, а следовательно, и от $z_1, \ldots, z_n$.

Таким образом, теорему 9 можно заменить следующим более точным результатом.

Теорема 10. *Пусть функция $f(z)$ мероморфна во всем $n$-мерном комплексном пространстве $\Omega$ и имеет $2n$ вещественно независимых периодов $c_1, \ldots, c_{2n}$. Тогда $f(z)$ можно представить в виде отношения двух целых функций $g(z)$ и $h(z)$, взаимно простых в каждой точке $\Omega$ и таких, что*

$$g(z+c_k)=e^{v_k(z)}g(z), \quad h(z+c_k)=e^{v_k(z)}h(z)$$
$$(k=1, \ldots, 2n), \tag{25}$$

*где $v_k(z)$ — многочлен первой степени от $z$*[1]).

Очевидно, что если $g(z)$, $h(z)$ — целые функции, удовлетворяющие требованиям этой теоремы, то функции $g^*(z)$, $h^*(z)$, где

$$g^*(z)=e^{w(z)}g(z), \qquad h^*(z)=e^{w(z)}h(z),$$

а $w(z)$ — квадратичный многочлен от $z_1, \ldots, z_n$, также удовлетворяют требованиям теоремы 10. Нетрудно показать, что таким способом можно получить самые общие функции, удовлетворяющие требованиям теоремы 10. Мы не будем на этом останавливаться.

---

[1]) Теорема 10 была сформулирована еще Вейерштрассом, однако, первое ее доказательство в общем виде принадлежит Пуанкаре. Доказательство Пуанкаре, основанное на использовании теории потенциала, довольно сложно.

Аппель дал для $n=2$ доказательство, аналогичное нашему; в отличие от последнего оно основывалось на более слабой форме теоремы 10, из которой следовало лишь, что $v(z)$ — целая функция. Решение разностных уравнений было сложным и не обобщалось на любое $n$. В рецензии на книгу Конфорто (Math. Rev., **10** (1949), 29—30) указывается, что обоснование теории абелевых функций, данное Конфорто, отчасти аналогично нашему.

## Глава VI

# СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПЕРИОДАМИ

## § 20. Необходимость некоторых соотношений между периодами

Линейные функции $v_k(z)$, о которых говорится в теореме 10, можно представить в виде

$$v_k(z) = b_k \cdot z + \beta_k \qquad (k = 1, \ldots, 2n), \tag{1}$$

где $b_k$ — постоянный $n$-мерный вектор, записанный в виде столбца, и

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Точка в (1) обозначает скалярное произведение векторов $b_k$ и $z$, т. е.

$$b_k \cdot z = b_k' z = z' b_k,$$

где штрих означает операцию транспонирования, а второе и третье произведение — обычные матричные произведения.

Условия § 17 для функций $v_k(z)$ можно записать так:

$$b_j \cdot c_k - b_k \cdot c_j = a_{jk} \qquad (j,\ k = 1, \ldots, 2n), \tag{2}$$

где $a_{jk}$ — целые кратные $2\pi i$. Если $C$ обозначает матрицу, состоящую из $n$ строк и $2n$ столбцов, $k$-й столбец которой — вектор $c_k$, а $B$ обозначает аналогичную матрицу, $k$-й столбец которой — вектор $b_k$, то предыдущие условия можно представить в виде

$$B'C - C'B = 2A, \tag{3}$$

где $2A = (a_{jk})$ — кососимметрическая матрица, элементы которой — целые кратные $2\pi i$. Очевидно, что $A$ — эрмитова матрица.

Следующая теорема содержит необходимые условия, которым должны удовлетворять матрица периодов $C$ и линейные функции $v_k(z)$. Эта теорема и обратная (которую мы докажем позднее) были сформулированы Фробениусом [23].

Теорема 11. *Если $f(z)$ — невырожденная мероморфная функция, имеющая $2n$ независимых периодов $c_1, \ldots, c_{2n}$, а функции $g(z)$ и $h(z)$ удовлетворяют всем требованиям теоремы* 10, *кроме, быть может, условия взаимной простоты, то матрица $A$, определенная выше, и матрица периодов $C$ обладают следующими*

*свойствами*:

1) $A$ *невырождена*;
2) $CA^{-1}C' = 0$;
3) $\bar{C}A^{-1}C' < 0$.

Запись, используемая в 3), означает, что эрмитова форма с матрицей $\bar{C}A^{-1}C'$ отрицательно определена. Заметим, что свойство 3) эквивалентно $n$ неравенствам в комплексных числах и что свойство 2) эквивалентно $n(n-1)/2$ уравнениям в комплексных числах.

Так как мы предположили, что $f(z)$ невырождена, то из независимости периодов $c_1, \ldots, c_{2n}$ следует их вещественная независимость.

Для доказательства теоремы 11 мы введем некоторые обозначения. Прежде всего положим

$$B'C = S + A,$$

где $S = \frac{1}{2}(B'C + C'B)$ — симметрическая и $A = \frac{1}{2}(B'C - C'B)$ — кососимметрическая матрицы.

Далее, положим

$$P = \begin{pmatrix} C \\ \bar{C} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $P$ — квадратная матрица порядка $2n$, $k$-й столбец которой состоит из следующих друг за другом векторов $c_k$ и $\bar{c}_k$. Ее иногда называют *большой матрицей периодов*.

Большая матрица периодов невырождена. В самом деле, в противном случае существовал бы ненулевой комплексный $2n$-мерный вектор $x$ такой, что если его записать в виде столбца, то $Px = 0$. А тогда $Cx = 0$ и $\bar{C}x = 0$, или $Cx = 0$ и $C\bar{x} = 0$. Следовательно,

$$C\frac{x + \bar{x}}{2} = 0, \qquad C\frac{x - \bar{x}}{2} = 0. \tag{4}$$

Из двух векторов $(x + \bar{x})/2$ и $(x - \bar{x})/2i$ хотя бы один — не нуль; поэтому из (4) вытекает линейная зависимость $c_1, \ldots, c_{2n}$. Это противоречие показывает, что $P$ — действительно невырожденная матрица.

До конца этого параграфа мы будем обозначать буквой $x$ вектор

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix},$$

где $x_1, \ldots, x_{2n}$ — однозначно определенные действительные числа такие, что

$$z = x_1c_1 + \ldots + x_{2n}c_{2n}.$$

Очевидно, что $z = Cx$, $\bar{z} = \bar{C}x$ и

$$\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} = Px, \qquad x = P^{-1}\begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix}.$$

Если $P^{-1} = (G_1 \ G_2)$, где $G_1$ и $G_2$ — матрицы из $2n$ строк и $n$ столбцов, то

$$E_{2n} = P^{-1}P = (G_1 \ G_2)\begin{pmatrix} C \\ \bar{C} \end{pmatrix} = G_1C + G_2\bar{C}$$

и, следовательно,

$$E_{2n} = \bar{E}_{2n} = \bar{G}_2C + \bar{G}_1\bar{C} = (\bar{G}_2 \quad \bar{G}_1)\begin{pmatrix} C \\ \bar{C} \end{pmatrix},$$

где $E_{2n}$ означает единичную квадратную матрицу порядка $2n$. Так как существует только одна матрица, обратная к данной квадратной матрице, то мы получаем, что $G_2 = \bar{G}_1$; поэтому можно положить

$$P^{-1} = (G \ \bar{G}).$$

В этих обозначениях мы имеем

$$x = Gz + \bar{G}\,\bar{z}.$$

Пусть теперь $r$ — столбец из $2n$ элементов

$$r_k = \operatorname{Re}\left(\beta_k - \frac{1}{2}s_k\right) \qquad (k = 1, \ldots, 2n),$$

где $s_k$ есть $k$-й диагональный элемент $S$ (или $B'C$, что одно и то же). Рассмотрим квадратичный полином от $x_1, \ldots, x_{2n}$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}Sx \cdot x + r \cdot x = \frac{1}{2}x'Sx + r'x.$$

Функция $\Phi$, очевидно, представляет собой полином от $z_1, \ldots, z_n$, $\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n$, но, конечно, вообще говоря, не является аналитической функцией от $z$. Замечая, что замена $z$ на $z + c_k$ эквивалентна замене $x$ на $x + e_k$ (где $e_k$ есть $2n$-мерный вектор, $k$-я компонента которого равна единице, а остальные нулю), рассмотрим разность

$$\Phi(x + e_k) - \Phi(x) = \frac{1}{2}Sx \cdot e_k + \frac{1}{2}Se_k \cdot x + \frac{1}{2}Se_k \cdot e_k + r \cdot e_k =$$
$$= Se_k \cdot x + \frac{1}{2}s_k + r_k.$$

В правой части

$$\frac{1}{2}s_k + r_k = \beta_k + \text{чисто мнимое число},$$

$$Se_k \cdot x = (S - A)e_k \cdot x + \text{чисто мнимое число},$$

где

$$(S-A)e_k\cdot x = C'Be_k\cdot x = x'C'Be_k = (Cx)'Be_k = Be_k\cdot Cx = b_k\cdot z.$$

Следовательно,

$$\Phi(x+e_k)-\Phi(x) = v_k(z) + \text{чисто мнимое число};$$

поэтому непрерывная функция

$$|h(z)e^{-\Phi(x)}|$$

не меняется при замене $z$ на $z+c$ (где $c$ — любой вектор из группы периодов) и, следовательно, имеет конечный максимум $q$.

Мы должны теперь выразить $\Phi(x)$ через $z$. Так как $z=Cx$ и $x=Gz+\overline{G}\overline{z}$, то

$$r\cdot x = r\cdot Gz + r\cdot\overline{G}\overline{z} = 2\cdot\mathrm{Re}(r\cdot Gz),$$

$$Sx\cdot x = (S+A)x\cdot x = B'Cx\cdot x = Cx\cdot Bx =$$
$$= z\cdot B(Gz+\overline{G}\overline{z}) = z\cdot BGz + z\cdot B\overline{G}\overline{z},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}z\cdot BGz + 2r\cdot Gz + \frac{1}{2}z\cdot B\overline{G}\overline{z} + \text{чисто мнимое число} =$$
$$= \omega(z) + \frac{1}{2}z\cdot B\overline{G}\overline{z} + \text{чисто мнимое число},$$

где $\omega(z) = \frac{1}{2}z\cdot BGz + 2r\cdot Gz$ есть аналитическая функция $z$.

Из равенства

$$E_{2n} = PP^{-1} = \begin{pmatrix} C \\ \overline{C}\end{pmatrix}(G\ \ \overline{G}) = \begin{pmatrix} CG & C\overline{G} \\ \overline{C}G & \overline{C}\overline{G}\end{pmatrix}$$

выводим, что $C\overline{G}=0$ и $CG=E_n$. Так как и $G'C'=E_n$, мы имеем

$$B\overline{G} = G'C'B\overline{G} - G'B'C\overline{G} = G'(C'B-B'C)\overline{G}.$$

Но $C'B-B'C=-2A$, поэтому

$$-\frac{1}{2}B\overline{G} = G'A\overline{G} = H,$$

где $H$ — эрмитова матрица. Следовательно,

$$\Phi(x) = \omega(z) - z\cdot H\overline{z} + \text{чисто мнимое число},$$

$$|h(z)e^{-\omega(z)}| \leqslant qe^{-z\cdot H\overline{z}},$$

причем $h(z)e^{-\omega(z)}$ есть аналитическая функция от $z$ и $z\cdot H\overline{z}$ — эрмитова форма.

Заметим, что если утверждение нашей теоремы справедливо для одной системы координат $z_1, \ldots, z_n$, то оно справедливо и для

любой другой системы, получаемой из первоначальной линейным преобразованием. Действительно, если мы заменим $z$ на $Qz$, где $Q$ — невырожденная квадратная матрица $n$-го порядка, то $c_k$ заменится на $Q^{-1}c_k$, $b_k$ заменится на $Q'b_k$, так что $C$ заменится на $Q^{-1}C$, $B$ заменится на $Q'B$, а $A$ останется без изменений. Следовательно, без ограничения общности можно предполагать, что $H$ — вещественная диагональная матрица, так как любая эрмитова форма может быть приведена к вещественной диагональной форме линейным (на самом деле даже унитарным) преобразованием переменных.

Итак, пусть

$$z \cdot H\bar{z} = h_1 z_1 \bar{z}_1 + \ldots + h_n z_n \bar{z}_n.$$

Тогда

$$|h(z)e^{-\omega(z)}| \leqslant qe^{-h_1 z_1 \bar{z}_1 - \cdots - h_n z_n \bar{z}_n}.$$

До сих пор мы не использовали невырожденность $f(z)$. Мы утверждаем теперь, что из невырожденности $f(z)$ следуют неравенства $h_1 < 0, \ldots, h_n < 0$. Предположим, например, что $h_1 \geqslant 0$. Тогда, зафиксировав $z_2, \ldots, z_n$, получим, что $h(z)e^{-\omega(z)}$ — ограниченная аналитическая функция от $z_1$ и, следовательно, константа, т. е. $h(z)e^{-\omega(z)}$ не зависит от $z_1$. Аналогично $g(z)e^{-\omega(z)}$ не зависит от $z_1$, а тогда и $f(z)$ не зависит от $z_1$. Но $f(z)$ предполагается невырожденной. Следовательно, $h_1 < 0, \ldots, h_n < 0$, т. е. $H < 0$ и, в частности, $|H| \neq 0$.

Для доказательства соотношений 1) и 2) заметим, что равенство (3) может быть записано в форме

$$M'IM = 2A,$$

где

$$M = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы доказать 1), достаточно показать, что матрица $M$ невырождена. Матрица

$$MP^{-1} = \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} (G \ \bar{G}) = \begin{pmatrix} BG & B\bar{G} \\ CG & C\bar{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BG & -2H \\ E_n & 0 \end{pmatrix}$$

невырождена, так как $H$ невырождена; отсюда сразу следует 1). Докажем теперь 2).

Мы имеем

$$M'(IMA^{-1}) = 2E_{2n},$$

откуда

$$(IMA^{-1})M' = 2E_{2n},$$

$$MA^{-1}M' = 2I^{-1},$$

$$\begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} A^{-1} (B' \quad C') = 2\begin{pmatrix} 0 & -E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\begin{pmatrix} BA^{-1}B' & BA^{-1}C' \\ CA^{-1}B' & CA^{-1}C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2E_n \\ 2E_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Из последнего равенства следует 2). Остается доказать 3). Так как

$$H = G'A\bar{G} = G'AA^{-1}A\bar{G} = (\bar{A}G)'A^{-1}(A\bar{G}),$$

$$A\bar{G} = \frac{1}{2}(B'C - C'B)\bar{G} = -\frac{1}{2}C'B\bar{G} = C'H$$

и

$$(\bar{A}G)' = H\bar{C},$$

то мы имеем

$$H = H\bar{C}A^{-1}C'H;$$

поэтому

$$\bar{C}A^{-1}C' = H^{-1} < 0.$$

Таким образом, теорема 11 доказана.

## § 21. Сведéние обратной теоремы к простейшему случаю

Мы хотим теперь доказать следующую теорему, обратную теореме 11.

Теорема 12. *Пусть заданы состоящая из $n$ строк и $2n$ столбцов матрица $C = (c_1, \ldots, c_{2n})$ с комплексными элементами и кососимметрическая квадратная матрица $A$ порядка $2n$, элементы которой — целые кратные $\pi i$. Предположим далее, что выполняются следующие условия:*

1) *$A$ невырождена;*

2) $CA^{-1}C' = 0$;

3) $\bar{C}A^{-1}C' < 0$.

*Тогда, если $B = (b_1, \ldots, b_{2n})$ — любая матрица из $n$ строк и $2n$ столбцов, такая, что $B'C - C'B = 2A$, и $\beta_1, \ldots, \beta_{2n}$ — произвольные комплексные числа, то существует целая функция $h(z)$ со следующим свойством:*

$$h(z + c_k) = e^{b_k \cdot z + \beta_k} h(z) \qquad (k = 1, \ldots, 2n).$$

*Далее, существует невырожденная мероморфная функция $f(z)$ с $2n$ вещественно независимыми периодами $c_1, \ldots, c_{2n}$, не имеющая периодов, не принадлежащих группе, порожденной $c_1, \ldots, c_{2n}$.*

Из условий 1), 2) и 3) сразу следует, что векторы $c_1, \ldots, c_{2n}$ вещественно независимы, так как

$$\begin{pmatrix} C \\ \bar{C} \end{pmatrix} A^{-1} (C' \quad \bar{C}') = \begin{pmatrix} CA^{-1}C' & CA^{-1}\bar{C}' \\ \bar{C}A^{-1}C' & \bar{C}A^{-1}\bar{C}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\overline{\bar{C}A^{-1}C'} \\ \bar{C}A^{-1}C' & 0 \end{pmatrix}$$

и, следовательно, матрица $\begin{pmatrix} C \\ \overline{C} \end{pmatrix}$ невырождена. Мы ограничимся сказанным об этой довольно тривиальной части вывода. В этом параграфе доказательство теоремы 12 будет сведено к доказательству специального случая, который мы рассмотрим в следующей главе. Для преобразования условий теоремы 12 в эквивалентные, но более простые условия мы можем использовать следующие четыре операции: а) *выбор нового множества образующих в группе, порожденной* $c_1, \ldots, c_{2n}$; б) *линейное (однородное) преобразование переменных* $z_1, \ldots, z_n$; в) *умножение* $g(z)$ *и* $h(z)$ *на* $e^{w(z)}$, *где* $w(z)$ — *квадратичный полином*; г) *параллельный перенос начала координат.*

Выбор нового множества образующих группы, порожденной $c_1, \ldots, c_{2n}$, эквивалентен замене матрицы $C$ на $CU$, где $U$ — квадратная унимодулярная матрица порядка $2n$ (т. е. матрица с целыми элементами и детерминантом $\pm 1$). Если $\lambda_k$ — целое число, то

$$h(z+\lambda_k c_k) = e^{\lambda_k b_k \cdot \left(z+\frac{1}{2}(\lambda_k-1)c_k\right)+\lambda_k \beta_k} h(z).$$

Следовательно,

$$h(z+\lambda_1 c_1+\ldots+\lambda_{2n} c_{2n}) = e^{(\lambda_1 b_1+\cdots+\lambda_{2n} b_{2n})\cdot z+\gamma} h(z),$$

где

$$\gamma = \lambda_1\beta_1+\ldots+\lambda_{2n}\beta_{2n}+\sum_{1\leqslant j<k\leqslant 2n}\lambda_j\lambda_k b_j\cdot c_k+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n}\lambda_j(\lambda_j-1)\,b_j\cdot c_j.$$

Поэтому при замене $C$ на $CU$ матрица $B$ заменяется на $BU$, а матрица $A$ — на $U'AU$. Легко проверить, что предположения и выводы нашей теоремы при этом сохраняются ($\beta_1, \ldots, \beta_{2n}$ подвергаются афинному преобразованию). Мы хотим теперь выбрать $U$ так, чтобы матрица $U'AU$ имела наиболее простой вид. С этой целью докажем следующую лемму.

Лемма. *Если* $K$ — *кососимметрическая квадратная матрица порядка* $2n$, *элементы которой — целые числа, то всегда существует квадратная унимодулярная матрица* $U$ *порядка* $2n$ *такая, что*

$$U'KU = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix},$$

*где* 0 *означает нулевую квадратную матрицу порядка* $n$, *а* $D$ — *диагональную квадратную матрицу порядка* $n$ *с целыми неотрицательными элементами* $d_1, \ldots, d_n$ *на главной диагонали, такими, что* $d_1 \setminus d_2 \setminus \ldots \setminus d_n$. *При этом* $d_1, \ldots, d_n$ *однозначно определены.*

Эту лемму можно доказать при помощи элементарных преобразований строк и столбцов матрицы с целыми элементами, но такой

способ труден для изложения, так как нужно одновременно делать одни и те же операции со строками и столбцами. Несколько проще изложить доказательство в терминах унимодулярных подстановок неизвестных в билинейной форме

$$x \cdot Ky = x'Ky = \sum_{j,\, k=1}^{2n} a_{jk} x_j y_k,$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{2n} \end{pmatrix}.$$

Замена $K$ на $U'KU$ соответствует замене $x$ на $Ux$ и $y$ на $Uy$ (к $x$ и $y$ нужно применять одно и то же преобразование).

Запишем нашу билинейную форму в виде

$$\sum_{1 \leqslant j < k \leqslant 2n} a_{jk} u_{jk},$$

где $u_{jk} = x_j y_k - x_k y_j$. Если все коэффициенты $a_{jk}$ — нули, то доказательство закончено. Пусть имеются отличные от нуля $a_{jk}$. Сделав, если это необходимо, подходящую перестановку переменных (которая всегда является унимодулярным преобразованием), мы можем предполагать, что $a_{12}$ есть наименьший по абсолютному значению ненулевой коэффициент. Более того, мы можем предполагать, что $a_{12} > 0$, так как в нашем распоряжении имеется преобразование, заменяющее $x_1$ на $-x_1$ и $y_1$ на $-y_1$.

Далее, если мы сделаем унимодулярное преобразование, заменяющее $x_2$ на $x_2 + \lambda x_r$, а $y_2$ на $y_2 + \lambda y_r$, где $\lambda$ — целое и $r > 2$, то $u_{12}$ заменится на $u_{12} + \lambda u_{1r}$, $a_{1r}$ заменится на $a_{1r} + \lambda a_{12}$, а $a_{1k}$, $k \neq r$, останутся без изменения. Используя это обстоятельство, мы можем получить или эквивалентную билинейную форму, которая имеет ненулевой коэффициент, меньший по абсолютному значению, чем $a_{12}$, или же эквивалентную билинейную форму, у которой $a_{13} = a_{14} = \ldots a_{1,2n} = 0$ (билинейные формы с матрицами $K$ и $K_1$ называются эквивалентными, если $K_1 = U'KU$, где $U$ — унимодулярная матрица).

В первом случае проделаем все сначала, исходя из нового наименьшего по абсолютному значению ненулевого коэффициента. Во втором случае мы прежде всего заметим, что при унимодулярном преобразовании, заменяющем $x_1$ на $x_1 + \lambda x_r$ и $y_1$ на $y_1 + \lambda y_r$, где $\lambda$ — целое число и $r > 2$, $u_{12}$ заменяется на $u_{12} - \lambda u_{2r}$, $a_{2r}$ заменяется на $a_{2r} - \lambda a_{12}$, а $a_{2k}$, $k \neq r$, остаются без изменений. Используя это замечание, мы можем получить или а) эквивалентную билинейную форму, у которой имеется ненулевой коэффициент, меньший по модулю, чем $a_{12}$, или же б) эквивалентную билинейную форму, у которой

$$a_{13} = \ldots = a_{1,\,2n} = a_{23} = \ldots = a_{2,\,2n} = 0.$$

В случае а) мы проделаем все сначала с новым наименьшим по абсолютному значению ненулевым коэффициентом.

В случае б) имеются две возможности: или а′) по крайней мере один коэффициент, скажем $a_{rs}$, не делится на $a_{12}$, или же б′) все коэффициенты делятся на $a_{12}$.

В случае а′) мы заметим, что при унимодулярном преобразовании, заменяющем $x_1$ на $x_1+\lambda x_r$, $y_1$ на $y_1+\lambda y_r$, $x_2$ на $x_2+x_s$ и $y_2$ на $y_2+y_s$, $u_{12}$ заменяется на $u_{12}+u_{1s}-\lambda u_{2r}+\lambda u_{rs}$, а $a_{rs}$ — на $a_{rs}+\lambda a_{12}$. Следовательно, выбрав подходящее $\lambda$, мы можем сделать так, чтобы $a_{rs}$ было отлично от нуля и по абсолютной величине меньше, чем $a_{12}$; мы повторим тогда наши рассуждения с новым коэффициентом, наименьшим по абсолютному значению среди отличных от нуля.

В последнем случае б′) получается билинейная форма вида

$$a_{12}u_{12}+\sum_{3\leqslant j<k\leqslant 2n} a_{jk}u_{jk},\quad a_{12}>0,\quad a_{12}\backslash a_{jk}$$
$$(3\leqslant j<k\leqslant 2n).$$

Так как мы можем получать эквивалентные билинейные формы с убывающими наименьшими модулями ненулевых коэффициентов лишь конечное число раз, то в конце концов получим коэффициент $a_{12}$, для которого имеет место последний случай. Таким образом, наша билинейная форма эквивалентна форме указанного выше вида.

Повторяя этот процесс, мы в конечном итоге получим билинейную форму вида

$$a_{12}u_{12}+a_{34}u_{34}+\ldots+a_{2n-1,2n}u_{2n-1,2n},$$
$$a_{jk}\geqslant 0,\quad a_{12}\backslash a_{34}\backslash\ldots\backslash a_{2n-1,2n}.$$

(Заметим, что если $a_{s,s+1}=0$, то все последующие коэффициенты $a_{r,r+1}$ $(r>s+1)$ также равны нулю.) Наконец, сделав перестановку переменных, придем к форме вида

$$d_1u_{1,n+1}+d_2u_{2,n+2}+\ldots+d_nu_{n,2n},$$
$$d_j\geqslant 0,\quad d_1\backslash d_2\backslash\ldots\backslash d_n,$$

что и доказывает первую половину леммы.

Второе утверждение леммы следует из того обстоятельства, что наибольший общий делитель элементов матрицы $K$, наибольший общий делитель миноров 2-го порядка $K$ и т. д. равны соответствующим наибольшим общим делителям для матрицы $U'KU$, где $U$ — любая унимодулярная матрица порядка $2n$, т. е. что наибольшие общие делители не меняются при унимодулярном преобразовании неизвестных в соответствующей билинейной форме. В матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix},$$

где $D$ удовлетворяет условию леммы, наибольший общий делитель для элементов, очевидно, равен $d_1$, для миноров второго порядка $d_1^2$, для миноров третьего порядка $d_1^2 d_2$ и т. д.; отсюда и следует, что $d_1, \ldots, d_n$ однозначно определены. Таким образом, лемма доказана.

Применяя эту лемму, мы получаем, что можно найти унимодулярную матрицу $U$ порядка $2n$ такую, что

$$U'AU = \pi i \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix},$$

где $D$ — диагональная матрица порядка $n$ с целыми положительными элементами $d_1 \setminus d_2 \setminus \ldots \setminus d_n$ на главной диагонали. Учитывая наши прежние замечания, мы приходим к выводу, что достаточно доказать теорему 12 в том специальном случае, когда матрица $A$ имеет вид

$$A = \pi i \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix},$$

где $D$ определена так же, как выше.

До сих пор мы были заняты выбором наиболее выгодной системы образующих в группе, порожденной векторами $c_1, \ldots, c_{2n}$. Теперь мы постараемся сделать наиболее выгодное линейное преобразование координат. Если мы заменим $z$ на $Qz$, где $Q$ — невырожденная квадратная матрица порядка $n$, то, так как

$$h(Q(z + Q^{-1}c_k)) = e^{b_k \cdot Qz + \beta_k} h(Qz),$$

мы видим, что $C$ заменяется на $Q^{-1}C$, $B$ заменяется на $Q'B$, в то время как $\beta_1, \ldots, \beta_{2n}$ и $A$ остаются без изменения. Кроме того, легко видеть, что при этом предположения и утверждения нашей теоремы сохраняются.

Пусть $C = (C_1 \; C_2)$, где $C_1$ и $C_2$ — квадратные матрицы порядка $n$. Если мы покажем, что $C_1$ невырождена, то полагая $Q = C_1$, будем иметь

$$Q^{-1}C = (E_n \quad T),$$

где $T = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — некоторая квадратная матрица порядка $n$.

Чтобы доказать невырожденность матрицы $C_1$, предположим, что $\overline{C}_1' z = 0$. Тогда $C_1' \overline{z} = 0$ и $z' \overline{C}_1 = 0$. Так как

$$\overline{C} A^{-1} C' = (\overline{C}_1 \quad \overline{C}_2) \frac{1}{\pi i} \begin{pmatrix} 0 & -D^{-1} \\ D^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{\pi i} (\overline{C}_2 D^{-1} C_1' - \overline{C}_1 D^{-1} C_2'),$$

то

$$z' (\overline{C} A^{-1} C') \overline{z} = 0;$$

но $\overline{C} A^{-1} C' < 0$, следовательно, $z = 0$. Это означает, что матрица $\overline{C}_1'$ невырождена; следовательно, невырождена матрица $C_1$.

Таким образом, теорему 12 достаточно доказать в том специальном случае, когда $A$ имеет вид

$$A = \pi i \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix},$$

а $C$ имеет вид $C = (E_n \quad T)$. Здесь $c_1 = e_1, \ldots, c_n = e_n, c_{n+1} = t_1, \ldots, c_{2n} = t_n$. (Матрица периодов, имеющая такой вид, называется *нормальной матрицей периодов*.)

В этом специальном случае условие 2) означает, что

$$TD^{-1} - D^{-1}T' = 0, \text{ или } DT = T'D,$$

т. е. что $W = DT$ — симметрическая матрица.

Условие 3) означает, что

$$\frac{1}{\pi i}(\overline{T}D^{-1} - D^{-1}T') < 0,$$

$$\frac{1}{i}(D\overline{T} - T'D) < 0,$$

$$\frac{\overline{W} - W}{i} = \frac{\overline{W} - W'}{i} < 0,$$

т. е. если $W = X + iY$, то

$$Y > 0.$$

Заметим, что если мы положим $B = (B_1 \quad B_2)$, то так как, с одной стороны,

$$2A = B'C - C'B = \begin{pmatrix} B_1' \\ B_2' \end{pmatrix}(E \quad T) - \begin{pmatrix} E \\ T' \end{pmatrix}(B_1 \quad B_2) =$$

$$= \begin{pmatrix} B_1' - B_1 & B_1'T - B_2 \\ B_2' - T'B_1 & B_2'T - T'B_2 \end{pmatrix},$$

а с другой стороны,

$$2A = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix},$$

матрица $B_1$ должна быть симметрической и

$$B_1'T - B_2 = 2\pi i D.$$

В нашем распоряжении имеется еще возможность замены функций $g(z)$ и $h(z)$ на $e^{-w(z)}g(z)$ и $e^{-w(z)}h(z)$, где $w(z)$ — квадратичный многочлен. Так как $B_1$ — симметрическая матрица, то мы можем положить $w(z) = \frac{1}{2}B_1 z \cdot z$. Тогда линейная функция $v_k(z) = b_k \cdot z + \beta_k$ должна быть заменена на

$$b_k \cdot z + \beta_k - w(z + c_k) + w(z) = b_k \cdot z + \beta_k - B_1 c_k \cdot z - \frac{1}{2}B_1 c_k \cdot c_k.$$

Следовательно, матрица $B$ должна быть заменена на $B - B_1C$, а матрица $2A = B'C - C'B$ остается без изменений, так как $B_1$ — симметрическая матрица. Заметим, что

$$B - B_1C = (B_1 \quad B_2) - B_1(E \quad T) = \\ = (0 \quad B_2 - B_1T) = (0 \quad -2\pi iD).$$

Таким образом, мы свели нашу теорему к тому случаю, когда

$$A = \pi i\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}, \quad C = (E \quad T), \quad B = (0 \quad -2\pi iD).$$

При этом $\beta_k$ изменились только на постоянные слагаемые. В этом случае формулы для $g$ и $h$ имеют следующий вид:

$$g(z + e_k) = e^{\beta_k}g(z), \quad g(z + t_k) = e^{-2\pi i d_k z_k + \beta_{n+k}}g(z) \quad (k = 1, \ldots, n),$$
$$h(z + e_k) = e^{\beta_k}h(z), \quad h(z + t_k) = e^{-2\pi i d_k z_k + \beta_{n+k}}h(z) \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Наконец, мы можем сделать последнее упрощение, положив $\beta_1 = \ldots = \beta_{2n} = 0$. При этом общность не теряется, так как мы можем как угодно изменить $\beta_1, \ldots, \beta_n$, умножая $g$ и $h$ на функцию вида

$$e^{\alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_n z_n},$$

а затем как угодно изменить $\beta_{n+1}, \ldots, \beta_{2n}$ при помощи параллельного переноса начала координат.

Подводя итог, мы можем сказать, что теорема 12 равносильна следующей теореме.

Теорема 12*. *Пусть заданы состоящая из $n$ строк и $2n$ столбцов матрица $C = (e_1, \ldots, e_n, t_1, \ldots, t_n)$, где $e_k$ есть $n$-мерный вектор, $k$-я координата которого равна единице, а все остальные—нулю, и диагональная матрица $D$ порядка $n$ с целыми положительными диагональными элементами $d_1, d_2, \ldots, d_n$ такими, что*

$$d_1 \setminus d_2 \setminus \ldots \setminus d_n.$$

*Предположим, что $W = DT$ — симметрическая матрица и что $Y > 0$, где $W = X + iY$, а $X$ и $Y$ вещественные (симметрические) матрицы. Тогда существует целая функция $h(z)$ со следующим свойством:*

$$h(z + e_k) = h(z), \quad h(z + t_k) = e^{-2\pi i d_k z_k}h(z) \\ (k = 1, \ldots, n).$$

*Далее, существует невырожденная мероморфная функция $f(z)$ с $2n$ вещественно независимыми периодами $e_1, \ldots, e_n, t_1, \ldots, t_n$, не имеющая периодов, не принадлежащих группе, порожденной $e_1, \ldots, t_n$.*

## § 22. Некоторые замечания в связи с предыдущим параграфом

Наше первое замечание заключается в том, что если $g$, $h$ и $g^*$, $h^*$ удовлетворяют условиям теоремы 12 с одинаковыми параметрами (т. е. с одинаковыми $b_k$, $c_k$ и $\beta_k$) и дают одну и ту же функцию $f(z)$, то

$$g^*(z) = \eta g(z), \qquad h^*(z) = \eta h(z),$$

где $\eta$ — константа. Ввиду проведенной нами редукции достаточно показать это при условиях теоремы 12*.

Мы знаем, что

$$g^*(z) = e^{w(z)} g(z), \qquad h^*(z) = e^{w(z)} h(z),$$

где $w(z)$ — целая функция. Очевидно, что

$$w(z+e_k) = w(z) + 2\pi i a_k, \qquad w(z+t_k) = w(z) + 2\pi i b_k \qquad (k=1, \ldots, n),$$

где $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ — целочисленные постоянные. Следовательно, частные производные первого порядка функции $w(z)$ не зависят от $z$, так что $w(z)$ есть линейная функция. Ясно, что она имеет вид

$$w(z) = 2\pi i(a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n) + a_0,$$

где $a_0$ — некоторая константа. Далее, выполняются следующие условия:

$$a_1 t_{1k} + \ldots + a_n t_{nk} = b_k \qquad (k=1, \ldots, n),$$

где $(t_{jk}) = T$. Если $W = (w_{jk})$, то эти условия можно переписать так:

$$\frac{a_1}{d_1} w_{1k} + \ldots + \frac{a_n}{d_n} w_{hk} = b_k \qquad (k=1, \ldots, n).$$

Взяв от обеих частей равенства мнимую часть, мы получим

$$\frac{a_1}{d_1} y_{1k} + \ldots + \frac{a_n}{d_n} y_{nk} = 0 \qquad (k=1, \ldots, n),$$

где $(y_{jk}) = Y$. Далее, $Y > 0$, и следовательно, $Y$ — невырожденная матрица. Значит,

$$\frac{a_1}{d_1} = \frac{a_2}{d_2} = \ldots = \frac{a_n}{d_n} = 0,$$

и $w(z)$ — константа, как мы и утверждали.

Второе наше замечание связано с тем, что, хотя диагональная матрица $D$, появившаяся на первом шаге нашей редукции, однозначно определена, унимодулярная матрица, используемая для приведения матрицы $A$ к виду

$$\pi i \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix},$$

определена неоднозначно.

Действительно, пусть

$$U'\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Положим

$$U = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix},$$

тогда равенство (5) будет означать, что

$$\begin{pmatrix} P'DR - R'DP & P'DS - R'DQ \\ Q'DR - S'DP & Q'DS - S'DQ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix},$$

т. е. что $P'DR$ и $Q'DS$ — симметрические матрицы и

$$P'DS - R'DQ = D.$$

Матрицы $U$, имеющие указанные свойства, образуют группу.

Если $D = E_n$, эта группа называется *модулярной группой степени* $n$. При $n = 1$ эта группа совпадает с группой всех матриц второго порядка с целыми элементами и определителем, равным 1. При $n > 1$ модулярная группа степени $n$ есть собственная подгруппа группы квадратных матриц порядка $2n$ с целыми элементами и определителем, равным 1.

Если

$$A = \pi i \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}$$

и мы заменим $A$ на $U'AU$, где матрица

$$U = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$$

удовлетворяет указанным выше условиям, то матрица $A$ не изменится, а матрица $C$ должна перейти в $CU$.

Если $C$ взята в нормальной форме $C = (E \;\; T)$, она должна замениться на

$$(E \;\; T)\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = (P + TR \;\;\; Q + TS).$$

Чтобы вновь получить матрицу периодов в нормальной форме, мы должны применить линейное преобразование, переводящее $z$ в $(P + TR)^{-1}z$. Тогда $C$ перейдет в $(E \;\; T_1)$, где

$$T_1 = (P + TR)^{-1}(Q + TS).$$

Таким образом, если $(E \;\; T)$ — нормальная форма матрицы периодов, то $(E \;\; (P + TR)^{-1}(Q + TS))$ также будет нормальной формой матрицы

периодов, и притом это наиболее общий вид нормальной матрицы периодов. Выразим теперь $T$ через $T_1$:

$$PT_1 + TRT_1 = Q + TS,$$
$$PT_1 - Q = T(-RT_1 + S),$$
$$T = (PT_1 - Q)(-RT_1 + S)^{-1}$$

(легко показать, что матрица $(-RT_1 + S)$ невырождена). Так как

$$\begin{pmatrix} P & -Q \\ -R & S \end{pmatrix}$$

также удовлетворяет указанным выше условиям, мы получаем, что если $(E \quad T_1)$ — нормальная форма матрицы периодов, то любая другая нормальная форма имеет вид

$$(E \quad T), \qquad \text{где} \qquad T = (PT_1 + Q)(RT_1 + S)^{-1}$$

и матрица

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условию (5).

Позднее мы определим *фундаментальную область для матриц* $T$, т. е. подмножество матриц $T$ такое, что любая $T$ может быть получена из одной (и только одной) $T$ из фундаментальной области при помощи преобразований указанного выше типа. Матрица $T$, принадлежащая фундаментальной области, называется *приведенной*.

В следующей главе мы построим функции, удовлетворяющие требованиям теоремы 12*. Они будут выражены через некоторые основные функции, так называемые *тэта-функции* [1]). Мы покажем, что *любая* функция, удовлетворяющая условиям теоремы 12*, может быть выражена через тэта-функции. Сведение, описанное в предыдущем параграфе, и теорема 11 показывают, таким образом, что любая невырожденная мероморфная функция, имеющая $2n$ независимых периодов выражается через тэта-функции.

---

[1]) Тэта-функциями $\vartheta(z)$ называются функции, представимые в виде

$$\vartheta(z) = \sum_{m_1, \ldots, m_n} \exp\Big(\sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} a_{ij} m_i m_j + \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} c_{ij} z_i z_j + \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} b_{ij} z_i m_j + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i m_i\Big),$$

где $a_{ij}$, $b_{ij}$, $c_{ij}$, $\alpha_i$, $\beta_i$ — комплексные числа такие, что квадратичная форма

$$\sum r_{ij} x_i x_j, \quad r_{ij} = \operatorname{Re} a_{ij},$$

отрицательно определена. — *Прим. перев.*

Глава VII

# ТЭТА-ФУНКЦИИ

## § 23. Существование невырожденных якобиевых функций

Пусть мы имеем матрицу $C=(c_1, \ldots, c_{2n})$ с комплексными элементами, состоящую из $n$ строк и $2n$ столбцов, и $2n$ линейных многочленов

$$v_k(z)=b_k\cdot z+\beta_k \qquad (k=1, \ldots, 2n), \tag{1}$$

где $b_k$ означает записанный в виде столбца $n$-мерный вектор, а $\beta_k$ — комплексное число. Тогда *якобиевой* (или *вспомогательной*) *функцией типа* $\{C;\ v_1(z), \ldots, v_{2n}(z)\}$ мы будем называть целую функцию $h(z)$ такую, что

$$h(z+c_k)=e^{v_k(z)}h(z) \qquad (k=1, \ldots, 2n). \tag{2}$$

Ясно, что матрица $B=(b_1, \ldots, b_{2n})$ из $n$ строк и $2n$ столбцов должна удовлетворять условию: $2A=B'C-C'B$ есть кососимметрическая матрица, элементы которой — целые кратные $2\pi i$. Если дополнительно

1) $A$ невырождена,
2) $CA^{-1}C'=0$,
3) $\overline{C}A^{-1}C'<0$,

то мы будем говорить, что $h$ — якобиева функция *невырожденного типа*.

Якобиевы функции одного типа образуют, очевидно, линейное пространство над полем комплексных чисел. Для якобиевых функций невырожденного типа мы докажем в этом параграфе следующий результат, из которого вытекает первая половина теоремы 12.

Теорема 12а. *Существуют якобиевы функции любого невырожденного типа. Линейное пространство (над полем комплексных чисел), образованное совокупностью якобиевых функций одного невырожденного типа, имеет размерность*

$$d=\left|\frac{1}{\pi i}A\right|^{1/2}. \tag{3}$$

Ввиду редукции, проведенной в § 22, достаточно рассмотреть лишь случай, в котором

$$C=(E_n \quad T)=(e_1, \ldots, e_n,\ t_1, \ldots, t_n), \tag{4}$$

где $e_k$ — записанный в виде столбца $n$-мерный единичный вектор, и

$$v_k(z) = 0, \quad v_{n+k}(z) = -2\pi i\, d_k z_k \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{5}$$

где $d_1, d_2, \ldots, d_n$ — целые положительные числа, такие, что $d_1 \setminus d_2 \setminus \ldots \setminus d_n$. В этом случае

$$A = \pi i \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = -2\pi i (0 \quad D). \tag{6}$$

Здесь $D$ — диагональная матрица с диагональными элементами $d_1, \ldots, d_n$. Условия 2) и 3) принимают вид:

2) $W$ — симметрическая матрица,

3) $Y > 0$,

где $W = DT = X + iY$.

В этом специальном случае якобиева функция $h(z)$ должна быть такова, что

$$h(z + e_k) = h(z) \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Введем новые переменные при помощи соотношений

$$u_k = e^{2\pi i z_k}, \qquad z_k = \frac{\ln u_k}{2\pi i}.$$

Тогда $h$ будет однозначной аналитической функцией от переменных $u_1, \ldots, u_n$ в области

$$0 < |u_1|, \ldots, |u_n| < \infty.$$

Следовательно, функция $h$ должна разлагаться в абсолютно сходящийся кратный ряд Лорана

$$h(z) = \sum_r \gamma_r u_1^{r_1} \ldots u_u^{r_n}. \tag{7}$$

Здесь

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$$

пробегает все $n$-мерные векторы, компоненты которых — целые числа. Очевидно, что существование такого разложения в ряд Лорана эквивалентно наличию у $h(z)$ периодов $e_1, \ldots, e_n$. Условия

$$h(z + t_k) = e^{-2\pi i d_k z_k} h(z) \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{8}$$

еще не были использованы. Мы покажем сейчас, что они эквивалентны некоторым рекуррентным соотношениям для коэффициентов $\gamma_r$. Действительно, так как при замене $z$ на $z + t_k$ $z_j$ переходит в $z_j + t_{jk}$, а $u_j$ — в $u_j e^{2\pi i t_{jk}}$, то

$$h(z + t_k) = \sum_r \gamma_r e^{2\pi i (r_1 t_{1k} + \ldots + r_n t_{nk})} u_1^{r_1} \ldots u_n^{r_n}.$$

С другой стороны,

$$e^{-2\pi i d_k z_k} h(z) = u_k^{-d_k} \sum_r \gamma_r u_1^{r_1} \ldots u_n^{r_n} = \sum_r \gamma_{r+d_k e_k} u_1^{r_1} \ldots u_n^{r_n}.$$

Следовательно,

$$\gamma_{r+d_k e_k} = \gamma_r e^{2\pi i (r_1 t_{1k} + \ldots + r_n t_{nk})} \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Для каждого вектора $r$ мы можем, и притом единственным образом, найти $n$-мерные векторы

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

такие, что

$$r = Dg + a \quad \text{и} \quad 0 \leqslant a_k < d_k \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{10}$$

Отсюда $r \equiv a \pmod{D}$ в том смысле, что $r_k \equiv a_k \pmod{d_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$, иными словами, $D^{-1}(r - a)$ — вектор с целыми компонентами.

Указанные выше рекуррентные соотношения позволяют выразить любой коэффициент $\gamma_r$ через $\gamma_a$. Число последних равно

$$d_1 d_2 \ldots d_n = |D| = \left| \frac{1}{\pi i} A \right|^{1/2} = d. \tag{11}$$

Положим

$$\lambda_r = W[D^{-1}r] - W[D^{-1}a] - (w_{11} g_1 + \ldots + w_{nn} g_n), \tag{12}$$

где $W[\ \ ]$ — значение квадратичной формы с симметрической матрицей $W$, т. е.

$$W[z] = z \cdot Wz = z' W z.$$

Тогда

$$\lambda_{r+d_k e_k} - \lambda_r = W[g + e_k + D^{-1}a] - W[g + D^{-1}a] - w_{kk} =$$

$$= 2 \sum_{j=1}^{n} \left( g_j + \frac{a_j}{d_j} \right) w_{jk} = 2 \sum_{j=1}^{n} r_j t_{jk},$$

и следовательно, $e^{\pi i \lambda_r}$ удовлетворяет тем же рекуррентным соотношениям, что и $\gamma_r$. Кроме того,

$$\lambda_a = 0, \qquad e^{\pi i \lambda_a} = 1,$$

поэтому

$$\gamma_r = e^{\pi i \lambda_r} \gamma_a. \tag{13}$$

Итак, мы показали, что

$$h(z) = \sum_a \gamma_a \sum_{r \equiv a \pmod D} e^{\pi i \lambda_r} u_1^{r_1} \ldots u_n^{r_n} =$$
$$= \sum_a \gamma_a \sum_{r \equiv a \pmod D} e^{\pi i \lambda_r + 2\pi i (r_1 z_1 + \ldots + r_n z_n)},$$

где $a$ пробегает множество, состоящее из $d$ векторов, компоненты которых $a_k$ — целые числа, такие, что $0 \leqslant a_k < d_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Таким образом, $h$ есть линейная комбинация $d$ тэта-функций вида

$$\vartheta_a(z) = \sum_{r \equiv a \pmod D} e^{\pi i \lambda_r + 2\pi i r \cdot z}. \tag{14}$$

Обратно, если мы докажем, что ряды (14) для тэта-функций сходятся, то любая линейная комбинация этих тэта-функций даст нам якобиеву функцию нужного типа.

Для доказательства сходимости заметим, что при фиксированном $a$ и $r = Dg + a$

$$\operatorname{Re}(\pi i \lambda_r) = -\pi \{Y[g + D^{-1}a] - Y[D^{-1}a] -$$
$$- \operatorname{Im}(w_{11} g_1 + \ldots + w_{nn} g_n)\} =$$
$$= -\pi Y[g] + \text{линейная функция от } g_1, \ldots, g_n. \tag{15}$$

Но $Y > 0$, следовательно,

$$Y[g] \geqslant m(g_1^2 + \ldots + g_n^2),$$

где $m > 0$ — минимум квадратичной формы $Y[x]$ по вещественным $n$-мерным векторам $x$ длины 1, т. е.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

Следовательно, если $z$ изменяется в ограниченной области комплексного $n$-мерного пространства и $c$ — соответствующим образом выбранная константа, то

$$\operatorname{Re}(\pi i \lambda_r + 2\pi i r_1 z_1 + \ldots + 2\pi i r_n z_n) \leqslant -\pi m (g_1^2 + \ldots + g_n^2) +$$
$$+ c(|g_1| + \ldots + |g_n|) \leqslant -\frac{1}{2}\pi m (g_1^2 + \ldots + g_n^2) +$$
$$+ \left\{\left(c|g_1| - \frac{1}{2}\pi m g_1^2\right) + \ldots + \left(c|g_n| - \frac{1}{2}\pi m g_n^2\right)\right\}.$$

Так как выражение, стоящее в фигурных скобках, ограничено, то ряд (14) для тэта-функции сходится абсолютно и равномерно в любой ограниченной области.

Наконец, $d$ тэта-функций линейно независимы, в силу единственности разложения в ряд Лорана (функций, регулярных в области $0 < |u_1|, \ldots, |u_n| < \infty$).

Таким образом, мы доказали, что совокупность якобиевых функций одного специального невырожденного типа образует линейное пространство размерности $d$ над полем комплексных чисел с базисом из функций $\vartheta_a(z)$. Отсюда следует, что и в общем случае якобиевы функции одного невырожденного типа образуют линейное пространство размерности $d$, причем любая из них есть линейная комбинация тэта-функций. В случае, когда тип якобиевой функции отличен от специального типа, рассмотренного выше, тэта-функции получаются из рассмотренных нами при помощи линейного преобразования переменных и умножения на $\exp(w(z))$, где $w(z)$ — квадратичный многочлен. Теорема 12а доказана.

## § 24. Некоторые замечания об абелевых функциях

Пусть задана матрица $C = (c_1, \ldots, c_{2n})$ с комплексными элементами, состоящая из $n$ строк и $2n$ вещественно независимых столбцов $c_1, \ldots, c_{2n}$. Мероморфные функции с $2n$ периодами $c_1, \ldots, c_{2n}$ образуют поле, обозначаемое в дальнейшем $K_C$.

Условимся называть мероморфные функции с $2n$ вещественно независимыми периодами *абелевыми функциями*. Из теоремы 10 следует, что любую абелеву функцию можно представить в виде отношения двух всюду взаимно простых якобиевых функций.

Если, в частности, абелева функция $f$ невырождена (т. е. не может быть выражена при помощи линейного преобразования через меньшее чем $n$ число переменных), то, согласно теореме 11, $f$ можно представить в виде отношения двух всюду взаимно простых якобиевых функций невырожденного типа, т. е. таких якобиевых функций, что 1) матрица $A = \frac{1}{2}(B'C - C'B)$ невырождена, 2) $CA^{-1}C' = 0$, 3) $\overline{C}A^{-1}C' < 0$. Сопоставляя этот факт с результатами § 23, мы получаем, что любая невырожденная абелева функция есть отношение двух всюду взаимно простых линейных комбинаций тэта-функций.

Если абелева функция сама вырождена, но принадлежит полю $K_C$, содержащему невырожденные функции, то она может быть представлена в виде отношения линейных комбинаций тэта-функций, однако уже, вообще говоря, не взаимно простых всюду. Мы покажем сейчас даже большее, а именно, что если $f(z)$ — невырожденная функция, принадлежащая $K_C$, и $f_1, \ldots, f_n$ — любые функции из $K_C$, то можно выразить все функции $f, f_1, \ldots, f_n$ через тэта-функции *одного* типа. Мы имеем, согласно теореме 10,

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \quad f_1(z) = \frac{g_1(z)}{h_1(z)}, \ldots, \quad f_p(z) = \frac{g_p(z)}{h_p(z)},$$

где $g$, $h$, $g_1$, $h_1$, ..., $g_p$, $h_p$ — якобиевы функции, вообще говоря, различных типов. Следовательно,

$$f(z)=\frac{G(z)}{H(z)},\quad f_1(z)=\frac{G_1(z)}{H(z)},\ \ldots,\quad f_p(z)=\frac{G_p(z)}{H(z)},$$

где

$$H=hh_1\ldots h_p$$

и

$$G=gh_1\ldots h_p,\quad G_1=ghh_2\ldots h_p,\ \ldots,\quad G_p=g_phh_1\ldots h_{p-1}.$$

Очевидно, что $H$, $G$, $G_1$, ..., $G_p$ будут якобиевыми функциями одного и того же типа. Более того, согласно теореме 11, $G$ и $H$ — якобиевы функции невырожденного типа. (Условие взаимной простоты не требуется в теореме 11.) Следовательно, и $G_1$, ..., $G_p$ — якобиевы функции невырожденного типа, так что их можно представить в виде линейных комбинаций тэта-функций этого же типа. Наше утверждение доказано.

В следующей главе мы покажем, что если $K_G$ не содержит невырожденных функций, то существует линейное преобразование переменных, позволяющее одновременно все функции из $K_G$ выразить через меньшее чем $n$ число переменных.

## § 25. Существование невырожденных абелевых функций

В этом параграфе мы докажем следующий результат, который составляет вторую половину теоремы 12.

Теорема 12б. *Если матрица $C=(c_1, \ldots, c_{2n})$ такова, что существует кососимметрическая квадратная матрица $\frac{1}{\pi i}A$ порядка $2n$ с целыми элементами, удовлетворяющая вместе с $C$ условиям* 1), 2) *и* 3) *теоремы* 12, *то поле $K_G$ содержит невырожденную абелеву функцию, все периоды которой принадлежат группе $\Delta$, порожденной векторами $c_1, \ldots, c_{2n}$.*

Не ограничивая общности, мы можем проводить доказательство в том специальном случае, когда

$$C=(E_n\quad T),\qquad A=\pi i\begin{pmatrix}0 & D\\ -D & 0\end{pmatrix},\tag{16}$$

где $D$ — диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят целые положительные числа $d_1, \ldots, d_n$ такие, что $d_1 \setminus d_2 \setminus \ldots \setminus d_n$, а $W=DT$ — симметрическая матрица такая, что $Y=\operatorname{Im} W>0$.

В § 23 мы доказали существование якобиевых функций типа $\{C;\ v_1(z), \ldots, v_{2n}(z)\}$, где

$$v_k(z)=0,\qquad v_{k+n}(z)=-2\pi i\, d_k z_k\qquad (k=1, \ldots, n).$$

Заметим, что все якобиевы функции типа, для которого $d=|D|=1$, отличаются лишь постоянным множителем от фиксированной тэта-функции, так что в этом случае отношение двух якобиевых функций

есть константа. Этот пример показывает, что, вообще говоря, отношение двух якобиевых функций одного невырожденного типа не является невырожденной абелевой функцией. Однако, если $C$ удовлетворяет предположениям теоремы 12б с некоторой матрицей $A$, то эти предположения будут также выполняться, если мы матрицу $A$ заменим, например, на $2A$. Мы покажем, что можно получить невырожденную функцию поля $K_C$ в виде отношения двух соответствующим образом подобранных якобиевых функций типа, в котором роль матрицы $A$ играет матрица $2A$.

Нам понадобится одна лемма, доказательство которой будет изложено в следующем параграфе.

Лемма. *Пусть $D$ — некоторая область (т. е. открытое связное непустое множество) в $n$-мерном комплексном пространстве, а $D_0$ — замкнутое подмножество $D$, причем расстояние от $D_0$ до границы $D$ не меньше некоторого положительного числа $\varepsilon$. Тогда, если $h(z)$ — регулярная в $D$ функция, не равная тождественно нулю, то существует постоянный вектор $q$, $|q| < \varepsilon$, такой, что $h(z)$ и $h(z+q)$ взаимно просты в каждой точке множества $D_0$.*

Если мы применим эту лемму к отличной от нуля якобиевой функции $h(z)$ специального типа, рассмотренного нами выше, взяв за $D_0$ основной параллелепипед [1]), то получим, что существует постоянный вектор $q$ такой, что $h(z)$ и $h(z+q)$ всюду взаимно просты. Тогда $h(z-q)$ и $h(z)$ также всюду взаимно просты. В силу теоремы 2, $h(z+q)\cdot h(z-q)$ и $h^2(z)$ всюду взаимно просты. Но $h(z+q)\,h(z-q)$ и $h^2(z)$ — якобиевы функции типа $\{C, 2v_1(z), \ldots, 2v_n(z)\}$, где функции $v_k(z)$ $(k=1, \ldots, 2n)$ те же, что и выше. Следовательно,

$$f(z)=\frac{h(z+q)\,h(z-q)}{h^2(z)} \tag{17}$$

— абелева функция, имеющая $2n$ вещественно независимых периодов $e_1, \ldots, e_n, t_1, \ldots, t_n$. Мы утверждаем, что $f(z)$ — невырожденная функция при любом выборе $h(z)$ и что можно выбрать $h$ так, чтобы все периоды $f(z)$ принадлежали группе $\Lambda$, порожденной $e_1, \ldots, e_n, t_1, \ldots, t_n$. (Очевидно, постоянный вектор $q$ зависит от выбора $h$. Однако излагаемый ниже способ выбора $h$ не связан со значением $q$.)

Предположим, что

$$p=\begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$$

есть некоторый период функции $f(z)$. Тогда из равенства

$$h(z+q)\,h(z-q)\,h^2(z+p)=h(z+p+q)\,h(z+p-q)\,h^2(z)$$

[1]) В качестве $D$ можно взять любую область, содержащую фундаментальный параллелепипед, например, все пространство. — *Прим. перев.*

и условий взаимной простоты мы получаем, что

$$h^2(z) \setminus h^2(z+p) \setminus h^2(z).$$

Таким образом, $h^2(z+p)/h^2(z)$ есть единица всюду. Следовательно, и $h(z+p)/h(z)$ — единица всюду, так что

$$h(z+p) = e^{-2\pi i\lambda(z)} h(z),$$

где $\lambda(z)$ — целая функция.

Так как

$$e^{-2\pi i\lambda(z)} h(z) = h(z+p) = h(z+p+e_k) = \\ = e^{-2\pi i\lambda(z+e_k)} h(z+e_k) = e^{-2\pi i\lambda(z+e_k)} h(z) \qquad (18)$$

и

$$e^{-2\pi i\{\lambda(z)+d_k z_k+d_k p_k\}} h(z) = e^{-2\pi i d_k(z_k+p_k)} h(z+p) = \\ = h(z+p+t_k) = e^{-2\pi i\lambda(z+t_k)} h(z+t_k) = \\ = e^{-2\pi i\{\lambda(z+t_k)+d_k z_k\}} h(z), \qquad (19)$$

то справедливы равенства

$$\lambda(z+e_k) - \lambda(z) = a_k^*, \qquad \lambda(z+t_k) - \lambda(z) = d_k p_k - b_k, \qquad (20)$$

где $a_k^*$ и $b_k$ — некоторые целочисленные константы. Следовательно, $\lambda(z)$ — линейная функция вида

$$\lambda(z) = a_1^* z_1 + \ldots + a_n^* z_n + a_0 = a^* \cdot z + a_0,$$

где $a_0$ — постоянное комплексное число и $a^*$ — $n$-мерный вектор с компонентами $a_1^*, \ldots, a_n^*$. Далее, должны выполняться следующие соотношения:

$$a^* \cdot t_k = d_k p_k - b_k. \qquad (21)$$

Эти соотношения можно записать в виде

$$T' a^* = Dp - b, \qquad (22)$$

где $b$ — $n$-мерный вектор с компонентами $b_1, \ldots, b_n$. Отсюда

$$p = D^{-1} b + D^{-1} T' a^* = D^{-1} b + D^{-1} (DT)' D^{-1} a^* = \\ = D^{-1} b + D^{-1} DT D^{-1} a^* = D^{-1} b + T D^{-1} a^* = \\ = (E_n \quad T) \begin{pmatrix} D^{-1} b \\ D^{-1} a^* \end{pmatrix} = (E_n \quad T) \begin{pmatrix} b_1/d_1 \\ \vdots \\ b_n/d_n \\ a_1^*/d_1 \\ \vdots \\ a_n^*/d_n \end{pmatrix}. \qquad (23)$$

Отсюда видно, что если $D = E_n$, т. е. если $d_1 = \ldots = d_n = 1$, то $p$ принадлежит группе $\Lambda$. В этом случае любая отличная от нуля функция $h(z)$ обладает нужными свойствами.

В общем случае мы получаем, что $d_n p$ принадлежит группе $\Lambda$, так что $f$ не может иметь сколь угодно малых периодов и, следовательно, невырождена (при любой не равной тождественно нулю функции $h(z)$). Однако при некоторых $h(z)$ может оказаться, что функция $f(z)$ имеет периоды $p$, не принадлежащие $\Lambda$. Мы покажем сейчас, что избежать этого нетрудно.

Заметим вначале, что произведение матрицы $(E_n\ T)$ на любой записанный в виде столбца $2n$-мерный вектор с целыми компонентами дает вектор, принадлежащий группе периодов $\Lambda$. Таким образом, мы можем ограничиться рассмотрением периодов $p$, для которых

$$0 \leqslant b_k < d_k, \qquad 0 \leqslant a_k^* < d_k \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Мы должны теперь исключить функции $h$, которые приводят к функциям $f$, имеющим некоторые из $d^2 - 1$ периодов, не принадлежащих $\Lambda$. Выше мы показали, что если $p$ есть период $f$, то

$$h(z+p) = e^{-2\pi i(a_1^* z_1 + \ldots + a_n^* z_n + a_0)} h(z) = \rho e^{-2\pi i a^* \cdot z} h(z),$$

где $\rho$ — некоторая отличная от нуля константа. Таким образом, если $h(z) = \sum_a \gamma_a \vartheta_a(z)$, то

$$\sum_a \gamma_a \vartheta_a(z+p) = \rho \sum_a \gamma_a e^{-2\pi i a^* \cdot z} \vartheta_a(z), \tag{24}$$

где $a$ пробегает полную систему вычетов по модулю $D$, состоящую из всех $n$-мерных векторов с неотрицательными целыми компонентами, соответственно, меньшими $d_1, \ldots, d_n$. Напомним теперь, что

$$\vartheta_a(z) = \sum_{r \equiv a \pmod D} e^{\pi i \lambda_r} e^{2\pi i r \cdot z}.$$

Сравнивая члены в обеих частях равенства (24), содержащие $e^{2\pi i r \cdot z}$ с $r \equiv a \pmod D$, мы получаем

$$\gamma_{\tilde a} \vartheta_{\tilde a}(z+p) = \rho \gamma_a \vartheta_a(z),$$

где $\tilde a \equiv a - a^* \pmod D$, причем компоненты $\tilde a$ — неотрицательные целые числа, соответственно, меньшие $d_1, \ldots, d_n$.

Мы будем искать функцию $h$, дающую невырожденную функцию $f$, среди таких $h$, у которых все коэффициенты $\gamma_a$ отличны от нуля.

Предположим сначала, что $p$ — такой период $f(z)$, что $a^* \neq 0$. Тогда $\tilde a \neq a$ для всех $a$. Если $a$ пробегает все $n$-мерные векторы

полной системы вычетов, то $\tilde{a}$ также пробегает полную систему вычетов; следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \prod_a \gamma_a \vartheta_a(z+p) &= \prod_a \rho\gamma_a \vartheta_a(z), \\ \rho^d &= \frac{\prod_a \vartheta_a(z+p)}{\prod_a \vartheta_a(z)}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Если мы зафиксируем $z$ так, чтобы знаменатель последней дроби был отличен от нуля, то станет ясно, что $\rho$ может принять лишь конечное число значений. Далее,

$$\frac{\gamma_{\tilde{a}}}{\gamma_a} = \rho\,\frac{\vartheta_a(z)}{\vartheta_{\tilde{a}}(z+p)}, \tag{26}$$

так что, фиксируя $z$, мы опять получаем, что число возможных значений отношения $\gamma_{\tilde{a}}/\gamma_a$ конечно (при каждом $a$). Предположим теперь, что $p$ есть такой период функции $f(z)$, что $a^* = 0$. Тогда $\tilde{a} = a$ для любого $a$. Следовательно, для каждого $a$ мы имеем

$$\vartheta_a(z+p) = \rho\vartheta_a(z), \tag{27}$$

или

$$\sum_{r\equiv a\,(\mathrm{mod}\,D)} e^{\pi i\lambda_r} e^{2\pi i r\cdot p} e^{2\pi i r\cdot z} = \rho \sum_{r\equiv a\,(\mathrm{mod}\,D)} e^{\pi i\lambda_r} e^{2\pi i r\cdot z},$$

так что $e^{2\pi i r\cdot p} = \rho$ для всех $r \equiv a\,(\mathrm{mod}\,D)$. Так как последнее равенство справедливо для любого $a$ из нашей системы вычетов по модулю $D$, то

$$e^{2\pi i(r_1p_1+\ldots+r_np_n)} = \rho \tag{28}$$

при произвольных целых $r_1, \ldots, r_n$. Поэтому $\rho = 1$, а $p_1, \ldots, p_n$ — целые числа. Значит, в случае $a^* = 0$ период $p$ принадлежит группе $\Lambda$.

Следовательно, чтобы получить якобиеву функцию $h(z)$ рассматриваемого типа, такую, что функция

$$f(z) = \frac{h(z+q)\,h(z-q)}{h^2(z)} \tag{29}$$

не имеет периодов, не принадлежащих $\Lambda$, нам нужно только выбрать коэффициенты $\gamma_a$ в выражении

$$h(z) = \sum_a \gamma_a \vartheta_a(z) \tag{30}$$

так, чтобы 1) все они были отличны от нуля и 2) отношение любых двух различных $\gamma$ было отлично от конечного числа значений [см. (25) и (26)]. Для завершения доказательства теоремы 12б остается вернуться от рассмотренного нами специального случая к общему.

## § 26. Доказательство леммы

Мы изложим теперь доказательство леммы, использованной в предыдущем параграфе.

Согласно подготовительной теореме Вейерштрасса, для любой точки $b \in D_0$ существуют степенные ряды $p_b$, $u_b$ и окрестность $C(b, \rho_b) \subset D$ такие, что $p_b$, $u_b$ сходятся всюду в $C(b, \rho_b)$, $u_b$ — единица всюду в $C(b, \rho_b)$, $h(z) = p_b(z) \cdot u_b(z)$ всюду в $C(b, \rho_b)$, причем $p_b$ после выполнения подходящего линейного преобразования имеет вид

$$p_b(b+z) = z_1^k + \alpha_1 z_1^{k-1} + \ldots + \alpha_k, \tag{31}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — степенные ряды от $z_2, \ldots, z_n$, а $k$ — порядок $h(z)$ в точке $b$; подразумевается, что если $h(z)$ имеет нулевой порядок в точке $b$, то $p_b = 1$.

Мы можем покрыть $D_0$ конечным числом окрестностей вида $C(b, \rho_b/2)$. Например, пусть окрестности

$$C\left(b_1, \frac{1}{2}\rho_{b_1}\right), \ldots, \quad C\left(b_k, \frac{1}{2}\rho_{b_k}\right) \tag{32}$$

покрывают $D_0$.

Рассмотрим функцию

$$g(z) = h(z+b_1)\ldots h(z+b_k) \tag{33}$$

в области

$$|z| < \min\left(\varepsilon, \frac{1}{2}\rho_{b_1}, \ldots, \frac{1}{2}\rho_{b_k}\right). \tag{34}$$

Так как $g(z)$ регулярна в области (34), то в этой области существует точка $q$ такая, что

$$h(q+b_1)\ldots h(q+b_k) = g(q) \neq 0.$$

Мы утверждаем, что $q$ обладает требуемым в лемме свойством. Чтобы доказать взаимную простоту $h(z)$ и $h(z+q)$ в каждой точке $c$ области $D_0$, достаточно показать, что

$$\left(p_{b_j}(z), p_{b_j}(z+q)\right) = 1 \text{ в каждой точке } c \in C\left(b_j, \frac{1}{2}\rho_{b_j}\right)$$
$$(j = 1, 2, \ldots, k), \tag{35}$$

ибо любая точка $c \in D_0$ принадлежит некоторой окрестности $C(b_j, \rho_{b_j}/2)$. Можно предположить без ограничения общности, что $b_j = 0$. Поэтому будем доказывать, что

$$p_0(z) = z_1^k + \alpha_1 z_1^{k-1} + \ldots + \alpha_k$$

и

$$p_0(z+q) = z_1^k + \beta_1 z_1^{k-1} + \ldots + \beta_k \tag{36}$$

взаимно просты в каждой точке $C(0, \rho_0/2)$.

Очевидно, что эти функции взаимно просты в точке $z=0$, так как $p_0(q)\neq 0$. Следовательно (см. гл. I, § 3), $p_0(z)$ и $p_0(z+q)$ имеют отличный от нуля результант $\delta$, являющийся степенным рядом от $z_2, \ldots, z_n$. Значит, существуют полиномы $q$ и $r$ с коэффициентами из $R_{n-1}$, такие, что

$$qp_0(z)+rp_0(z+q)=\delta. \tag{37}$$

Последнее соотношение справедливо всюду в $C(0, \rho_0/2)$, так как $q$, $r$ и $\delta$ получаются из $p_0(z)$ и $p_0(z+q)$ при помощи конечного числа операций сложения и умножения.

Предположим, что в точке $c\in C(0, \rho_0/2)$ степенные ряды $p_0(z)$ и $p_0(q+z)$ имеют общий делитель $s$ в кольце степенных рядов от $z_1-c_1, \ldots, z_n-c_n$. Тогда $p_0(z)$ и $p_0(q+z)$, рассматриваемые как полиномы от $z_1-c_1$, являются примитивными степенными рядами (в смысле § 3); следовательно, $s$ также примитивен, если его рассматривать как степенной ряд от $z_1-c_1$. Значит, мы имеем

$$\delta=\gamma st, \tag{38}$$

где $t$ — также примитивный степенной ряд от $z_1-c_1$, а $\gamma$ зависит только от последних $n-1$ переменных. Далее, $\delta/\gamma$ должно быть единицей, так как $st$ — примитивный степенной ряд; следовательно, $s$ — также единица. Отсюда вытекает, что $p_0(z)$ и $p_0(z+q)$ взаимно просты всюду в $C(0, \rho_0/2)$, чем и завершается доказательство леммы.

Глава VIII

# ПОЛЕ АБЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

## § 27. Существование $n$ аналитически независимых функций

Пусть $C=(c_1, \ldots, c_{2n})$ — матрица, состоящая из $n$ строк и $2n$ вещественно независимых столбцов $c_1, \ldots, c_{2n}$.

В этой главе мы будем заниматься структурой поля $K_C$, образованного абелевыми функциями с периодами $c_1, \ldots, c_{2n}$. В этом и в следующем параграфах мы рассмотрим невырожденный случай и покажем, что в этом случае поле $K_C$ изоморфно полю алгебраических функций от $n$ переменных над полем комплексных чисел. Иными словами, поле $K_C$ есть простое алгебраическое расширение поля рациональных функций (с комплексными коэффициентами) от $n$ алгебраически независимых трансцендентных элементов (над полем комплексных чисел). На самом деле мы покажем даже большее, а именно, что эти $n$ трансцендентных элементов являются аналитически независимыми функциями, т. е. что они не удовлетворяют никакому аналитическому соотношению. Эти утверждения содержатся в теоремах 13 и 14.

Теорема 13. *Если функция $f(z) \in K_C$ невырождена, то существуют векторы $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ такие, что $n$ функций*

$$f(z+\zeta_1), \ldots, \quad f(z+\zeta_n) \tag{1}$$

*аналитически независимы.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что нельзя подобрать $n$ чисел $a_1, \ldots, a_n$, $\sum_1^n |a_k|^2>0$, так, чтобы выполнялось тождественно следующее соотношение:

$$a_1 \frac{\partial f}{\partial z_1}+a_2 \frac{\partial f}{\partial z_2}+\ldots+a_n \frac{\partial f}{\partial z_n}=0. \tag{2}$$

Действительно, если, например, $a_1 \neq 0$, то невырожденное линейное преобразование

$$z_1=a_1 u_1, \quad z_k=a_k u_1+u_k \qquad (2 \leqslant k \leqslant n) \tag{3}$$

дает

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}=a_1 \frac{\partial f}{\partial z_1}+\ldots+a_n \frac{\partial f}{\partial z_n}=0, \tag{4}$$

что невозможно, так как $f(z)$ — невырожденная функция.

Введем теперь следующие обозначения (только до конца этого параграфа):

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = f_j(z) \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Рассмотрим матрицу

$$(f_j(\zeta_k)), \tag{6}$$

где $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — независимо меняющиеся $n$-мерные векторы. Предположим, что ранг этой матрицы $r$ меньше $n$. Пусть, для определенности, минор, состоящий из первых $r$ строк и первых $r$ столбцов, не равен нулю тождественно. Рассмотрим теперь разложение минора $(r+1)$-го порядка, состоящего из первых $r+1$ строк и первых $r+1$ столбцов, по элементам последнего столбца. Это разложение приводит к тождеству вида

$$A_1 f_1(\zeta_{r+1}) + \ldots + A_{r+1} f_{r+1}(\zeta_{r+1}) = 0, \tag{7}$$

где $A_1, \ldots, A_{r+1}$ — функции от переменных $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$ и $A_{r+1}$ не равна нулю тождественно. Значит, мы можем найти постоянные значения для векторов $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$, при которых в предыдущем тождестве $A_1, \ldots, A_{r+1}$ будут константами и $A_{r+1} \neq 0$. Однако это противоречит замечанию, сделанному в предыдущем абзаце. Следовательно, ранг матрицы (6) равен $n$. Поэтому существует $n$ векторов $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ таких, что детерминант $|f_j(\zeta_k)| \neq 0$. Значит, $n$ функций

$$f(z+\zeta_1), \ldots, \quad f(z+\zeta_n)$$

аналитически независимы, ибо их якобиан не равен нулю тождественно. Теорема 13 доказана.

## § 28. Алгебраические соотношения. Первое доказательство

В этом параграфе мы изложим доказательство следующей теоремы. (Другое доказательство будет дано в § 29.)

Теорема 14. *Если $f_1, \ldots, f_n$ — алгебраически независимые функции, из которых по крайней мере одна невырождена, то любая функция $f_0 \in K_G$ удовлетворяет полиномиальному соотношению*

$$A(f_0, f_1, \ldots, f_n) = 0, \tag{8}$$

*степень которого по $f_0$ ограничена константой* (зависящей, конечно, от $f_1, \ldots, f_n$).

Замечание. Если мы выберем функцию $f_0$ так, чтобы ее степень над полем $R(f_1, \ldots, f_n)$ рациональных функций от $f_1, \ldots, f_n$

была максимальной, то мы будем иметь[1])

$$K_G = R(f_0, f_1, \ldots, f_n).$$

Таким образом, $K_G$ — простое алгебраическое расширение поля $R(f_1, \ldots, f_n)$. (Согласно теореме 13, поле $K_G$ содержит $n$ алгебраически независимых функций.) Отсюда следует справедливость высказанного нами ранее утверждения о том, что поле $K_G$ изоморфно полю алгебраических функций над полем комплексных чисел от $n$ переменных.

Отметим еще одно следствие из теорем 13 и 14: любые $n$ алгебраически независимых функций из $K_G$ обязательно аналитически независимы.

Доказательство теоремы 14. Рассмотрим $(s+1)(t+1)^n$ функций из $K_G$ вида

$$f_0^{a_0} f_1^{a_1} \ldots f_n^{a_n}, \quad a_0 = 0, 1, \ldots, s; \quad a_k = 0, 1, \ldots, t \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Каждая из функций $f_k$ может быть представлена в виде отношения двух якобиевых функций (см. теорему 10):

$$f_k = \frac{g_k(z)}{h_k(z)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{10}$$

Значит, каждая из $(s+1)(t+1)^n$ функций $f_0^{a_0} f_1^{a_1} \ldots f_n^{a_n}$ есть отношение двух якобиевых функций, причем ту из них, которая является знаменателем, можно считать равной

$$h = h_0^s (h_1 \ldots h_n)^t.$$

Теперь, если $h_k(z)$ имеет тип $\{C; v_1^{(k)}(z), \ldots, v_{2n}^{(k)}(z)\}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, то тип $h(z)$ есть

$$\{C;\ v_1(z), \ldots, v_{2n}(z)\},$$

где

$$v_j(z) = s v_j^{(0)}(z) + t\{v_j^{(1)}(z) + \ldots + v_j^{(n)}(z)\} \qquad (j = 1, \ldots, 2n). \tag{11}$$

Следовательно,

$$B = sB_0 + t(B_1 + \ldots + B_n), \qquad A = sA_0 + t(A_1 + \ldots + A_n), \tag{12}$$

---

[1]) Действительно, обозначим через $\Omega$ поле, которое получается, если к полю $R(f_1, \ldots, f_n)$ присоединить $f_0$. Пусть в $K_G$ содержится элемент $\varphi$, не принадлежащий $\Omega$; присоединим его к $\Omega$ и рассмотрим поле $\Omega(\varphi)$. Очевидно, степень $\Omega(\varphi)$ над $R(f_1, \ldots, f_n)$ больше, чем степень $\Omega$. Далее, в $\Omega(\varphi)$ существует примитивный элемент $\varphi_0$ (см. Ван-дер-Варден, Современная алгебра, т. I, стр. 165). Степень уравнения над полем $R(f_1, \ldots, f_n)$ для $\varphi_0$ больше, чем степень уравнения для $f_0$, что невозможно. Таким образом, $K_G$ совпадает с $\Omega$. — *Прим. перев.*

где $B_k$ и $A_k$ означают, соответственно, $B$- и $A$-матрицы для $h_k(z)$, $0 \leqslant k \leqslant n$.

По крайней мере одна из функций $f_1, \ldots, f_n$ является невырожденной; представляя ее в виде отношения двух якобиевых функций так, чтобы в знаменателе стояло $h$, получаем из теоремы 13, что $h$ — якобиева функция невырожденного типа. Следовательно, $A$ — невырожденная матрица, и, согласно теореме 12а, якобиевы функции одного типа с $h$ образуют линейное пространство размерности $d = \left|\frac{1}{\pi i} A\right|^{1/2}$. Далее,

$$|A| = |sA_0 + t(A_1 + \ldots + A_n)| = t^{2n}|A_1 + \ldots + A_{2n}| + O(t^{2n-1}), \quad (13)$$

где $A_1 + \ldots + A_n$ — невырожденная матрица (что доказывается так же, как невырожденность $A$). Следовательно,

$$d = \left|\frac{1}{\pi i} A\right|^{1/2} = \gamma t^n + O(t^{n-1}), \quad (14)$$

где

$$\gamma = \left|\frac{1}{\pi i}(A_1 + \ldots + A_n)\right|^{1/2} > 0.$$

Заметим, что член $O(t^{n-1})$ в формуле (14) зависит, вообще говоря, от $f_0$; $\gamma$ же от $f_0$ не зависит. $(s+1)(t+1)^n$ функций $h(f_0^{a_0} f_0^{a_1} \ldots f_n^{a_n})$ являются якобиевыми функциями того же типа, что и $h$. Положим $s = [\gamma]$, где квадратные скобки означают, как обычно, наибольшее целое число, не превосходящее число, в них заключенное; тогда $s + 1 > \gamma$. Следовательно,

$$(s+1)(t+1)^n > \gamma t^n + O(t^{n-1}) = d$$

при $t > t_0$, где $t_0$ — достаточно большое положительное число, зависящее от $f_0$. Значит, функции

$$h(f_0^{a_0} f_1^{a_1} \ldots f_n^{a_n})$$

линейно зависимы при $t > t_0$. Следовательно, функции

$$f_0^{a_0} f_1^{a_1} \ldots f_n^{a_n}, \quad a_0 = 0, \ldots, s; \quad a_k = 0, \ldots, t \quad (k = 1, \ldots, n) \quad (15)$$

линейно зависимы при $t > t_0$. Таким образом, мы получили полиномиальное соотношение, связывающее $f_0, f_1, \ldots, f_n$, причем такое, что его степень по $f_0$ не превосходит $[\gamma]$, степени же его по $f_1, \ldots, f_n$, конечно, зависят от $f_0$. Теорема 14 доказана.

## § 29. Алгебраические соотношения. Второе доказательство

В этом параграфе мы изложим второе доказательство теоремы 14. Это доказательство использует из результатов, полученных в главах V — VII, только часть теоремы 9, а именно, что

$$f_k(z) = \frac{g_k(z)}{h_k(z)}, \quad (16)$$

где $g_k(z)$ и $h_k(z)$ — целые функции, взаимно простые всюду (в дальнейшем этот факт нам понадобится только для некоторой ограниченной области). Для любого элемента $c$ из группы $\Lambda$, порожденной векторами $c_1, \ldots, c_{2n}$, имеет место равенство

$$\frac{h_k(z)}{h_k(z-c)} = \frac{g_k(z)}{g_k(z-c)} = e^{v(z)}, \tag{17}$$

где $v(z)$ — целая функция.

Как и выше, рассмотрим $(s+1)(t+1)^n$ функций из $K_G$:

$$f_0^{a_0} f_1^{a_1} \ldots f_n^{a_n}; \quad a_0 = 0, \ldots, s; \quad a_k = 0, \ldots, t \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{18}$$

Рассмотрим, далее, целую функцию вида

$$\Phi(z) = \sum_{a_0=0}^{s} \sum_{a_1=0}^{t} \ldots \sum_{a_n=0}^{t} \alpha_{a_0 a_1 \ldots a_n} f_0^{a_0} f_1^{a_1} \ldots f_n^{a_n} h, \tag{19}$$

где, как и выше,

$$h = h_0^s (h_1 \ldots h_n)^t.$$

Общее число производных от $\Phi(z)$ порядков $0, \ldots, r$ равно

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n+1}{2} + \ldots + \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r}{r} = \binom{n+r}{n}.$$

Следовательно, если $\binom{n+r}{n} < (s+1)(t+1)^n$, то мы можем найти такую систему постоянных $\alpha$, не все из которых равны нулю, чтобы все частные производные от $\Phi(z)$ порядка, не превосходящего $r$, были равны 0 в произвольной фиксированной точке $a \in F$, в которой все функции $f_0, f_1, \ldots, f_n$ регулярны. Здесь $F$ — основной параллелепипед, состоящий из точек вида

$$\zeta_1 c_1 + \ldots + \zeta_{2n} c_{2n}, \quad 0 \leqslant \zeta_k \leqslant 1 \quad (k = 1, \ldots, 2n). \tag{20}$$

Предполагая теперь, что $s$ фиксировано, для каждого целого положительного $r$ определяем $t$ как наименьшее неотрицательное число, для которого $(s+1)(t+1)^n > \binom{n+r}{r}$. Иными словами, $t$ есть функция от $r$, определенная неравенствами

$$(s+1)t^n \leqslant \binom{n+r}{r} < (s+1)(t+1)^n. \tag{21}$$

Мы покажем, что если $s$ подобрать соответствующим образом в зависимости от функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$, то функция $\Phi(z)$ будет тождественно равна нулю для всех достаточно больших $r$. Это и даст нам алгебраическое соотношение между $f_0, f_1, \ldots, f_n$, степень которого по $f_0$ ограничена.

Предположим, что $\Phi(z)$ не равна тождественно нулю, и пусть $\mu > 0$ — максимум $|\Phi(z)|$ в основном параллелепипеде $F$. Тогда $\Phi(b) = \mu e^{i\vartheta}$, где $b$ — некоторая точка границы $F$, а $\vartheta$ — действительное число. Разделив все коэффициенты $\alpha$ на $\mu e^{i\vartheta}$, мы можем считать, что $\Phi(b) = 1$. Пусть теперь $\lambda$ — обычное комплексное переменное, тогда функция $\Phi[a + \lambda(b - a)]$ будет целой функцией от $\lambda$, причем в начале координат она будет иметь нуль кратности, не меньшей чем $r + 1$. Значит,

$$\psi(\lambda) = \frac{\Phi[a + \lambda(b - a)]}{\lambda^{r+1}} \tag{22}$$

есть целая функция и $\psi(1) = 1$. Следовательно, существует $\lambda_0$, равное по модулю $e$ и такое, что

$$|\psi(\lambda_0)| \geqslant 1, \quad |\Phi[a + \lambda_0(b - a)]| \geqslant e^{r+1}. \tag{23}$$

Так как $F$ содержится в полицилиндре

$$|z| \leqslant (|c_1| + \ldots + |c_{2n}|),$$

то точка $a + \lambda_0(b - a)$ должна принадлежать полицилиндру

$$|z| \leqslant (e + 1)(|c_1| + \ldots + |c_{2n}|),$$

обозначаемому в дальнейшем через $D$. Для любого $z \in D$ существует $c \in \Delta$ такое, что $(z - c) \in F$, причем этих $c$ лишь конечное число. Следовательно, существуют такие постоянные $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$, что

$$\left|\frac{h_k(z)}{h_k(z - c)}\right| \leqslant \gamma_k \quad \text{для} \quad z \in D \qquad (k = 0, \ldots, n). \tag{24}$$

Отсюда

$$\left|\frac{h(z)}{h(z - c)}\right| \leqslant \gamma_0^s \gamma^t \quad \text{для} \quad z \in D, \tag{25}$$

где $\gamma = \max(\gamma_1, \ldots, \gamma_n, 1)$. Так как

$$\Phi(z) = \Phi(z - c)\frac{h(z)}{h(z - c)}, \tag{26}$$

то из (25) следует, что

$$|\Phi(z)| \leqslant \gamma_0^s \gamma^t \quad \text{для} \quad z \in D. \tag{27}$$

В частности,

$$e^{r+1} \leqslant |\Phi(a + \lambda_0(b - a))| \leqslant \gamma_0^s \gamma^t, \tag{28}$$

или

$$r + 1 \leqslant s \ln \gamma_0 + t \ln \gamma. \tag{29}$$

С другой стороны,

$$(r + 1)^n \geqslant \left(\frac{r}{1} + 1\right)\left(\frac{r}{2} + 1\right)\ldots\left(\frac{r}{n} + 1\right) = \binom{n + r}{n} \geqslant (s + 1)t^n. \tag{30}$$

Таким образом,

$$(s+1)^{1/n}t \leqslant r+1 \leqslant s\ln\gamma_0 + t\ln\gamma. \tag{31}$$

Выберем теперь $s$ равным $[(\ln\gamma)^n]$, тогда

$$s+1 > (\ln\gamma)^n, \quad (s+1)^{1/n} > \ln\gamma, \tag{32}$$

что при достаточно большом $r$ (и, следовательно, при достаточно большом $t$) ведет к противоречию. Как велики должны быть $r$ и $t$, это зависит от $f_0$, однако, $s$ зависит только от $f_1, \ldots, f_n$. Таким образом, второе доказательство теоремы 14 закончено. Заметим еще, что это доказательство не предполагает невырожденность хотя бы одной из функций $f_1, \ldots, f_n$.

## § 30. Вырожденные поля абелевых функций

Поле $K_C$ абелевых функций содержит невырожденные функции тогда и только тогда, когда существует невырожденная кососимметрическая матрица $\frac{1}{\pi i}A$ с целыми элементами, такая, что $CA^{-1}C' = 0$ и $\overline{C}A^{-1}C' < 0$. Далее, если $C$ обладает указанными свойствами, то в поле $K_C$ имеется невырожденная функция $f(z)$, все периоды которой принадлежат группе $\Lambda$.

Из последнего утверждения следует, что если $(a-b)\overline{\in}\Lambda$, то существует такая функция $f^*(z)$, что $f^*(a) \neq f^*(b)$. Действительно, если $(a-b)\overline{\in}\Lambda$ и если все периоды $f(z)$ принадлежат группе $\Lambda$, то функция $f(z+a)-f(z+b)$ не равна нулю тождественно и, следовательно, существует точка $q$, в которой функция $f(z+a)-f(z+b)$ регулярна и не равна нулю. Тогда функция $f^*(z) = f(z+q)$ обладает нужными свойствами.

В вырожденном случае, как мы покажем сейчас, другое положение, а именно, в основном параллелепипеде существует бесконечно много пар точек, которые не могут быть разделены функциями из $K_C$[1]). Более точно, мы покажем, что после соответствующего линейного преобразования *все* функции из $K_C$ не будут зависеть от некоторых координат.

Теорема 15. *Пусть матрица $C$ из $n$ строк и $2n$ столбцов такова, что не существует невырожденной целочисленной кососимметрической матрицы $\frac{1}{\pi i}A$, для которой $CA^{-1}C' = 0$ и $\overline{C}A^{-1}C' < 0$. Тогда существуют такое $s$, $0 \leqslant s \leqslant n$, и такое линейное преобразование $L$, что после выполнения $L$ все функции*

---

[1]) Две точки $a$ и $b$, по определению, *разделяются посредством функций из $K_C$*, если существует функция $f(z) \in K_C$ такая, что $f(a) \neq f(b)$. — *Прим. перев.*

*из $K_G$ зависят лишь от первых $s$ переменных и образуют невырожденное поле абелевых функций от $s$ переменных.*

Пусть $f_1, \ldots, f_r$ — некоторые функции из $K_G$. Согласно теореме 10, каждая из них может быть представлена в виде отношения двух якобиевых функций. После приведения к общему знаменателю получаем, что

$$f_1 = \frac{g_1}{h}, \ldots, \quad f_r = \frac{g_r}{h},$$

где $g_1, \ldots, g_r, h$ — якобиевы функции одного типа.

Мы утверждаем, что можно подобрать такое линейное преобразование, после выполнения которого функции $f_1, \ldots, f_r$ окажутся зависящими только от $n-1$ переменной. Прежде всего напомним, что в доказательстве теоремы 11 (см. § 20) предположение о невырожденности использовалось только в одном месте, а именно, в доказательстве отрицательной определенности матрицы $H = -\frac{1}{2}B\overline{G}$ (матрица $G$ определялась равенством $P^{-1} = (G\overline{G})$, где $P = \begin{pmatrix} C \\ \overline{C} \end{pmatrix}$ — большая матрица периодов). Из отрицательной определенности $H$ условия 1), 2) и 3) теоремы 11 следуют сразу. Применяя эти соображения к функциям $f_1, \ldots, f_r$ вырожденного поля $K_G$, получаем, что в этом случае матрица $H$ должна иметь по крайней мере один неотрицательный элемент после приведения к диагональной форме (при помощи линейного преобразования переменных). В противном случае выполнялись бы условия 1), 2), 3) теоремы 11, и, следовательно, согласно теореме 12б, поле $K_G$ содержало бы невырожденные функции, что противоречит предположениям доказываемой теоремы. Из существования неотрицательного элемента в диагональной форме $H$ следует (см. стр. 53), что функции

$$g_1(z)e^{-\omega(z)}, \ldots, \quad g_k(z)e^{-\omega(z)}, \quad h(z)e^{-\omega(z)}$$

не зависят от одного из переменных. Это переменное — одно и то же для всех этих функций, так как предыдущие рассуждения связаны только с типом якобиевых функций. (Функция $\omega(z)$ есть квадратичный многочлен, зависящий только от параметров типа якобиевых функций.) Таким образом, после линейного преобразования, приводящего $H$ к диагональному виду, функции $f_1, \ldots, f_r$ оказываются не зависящими от одного из переменных, скажем от $z_n$.

Согласно замечанию в конце предыдущего параграфа, в поле $K_G$ не существует множеств, содержащих более чем $n$ алгебраически независимых функций. Пусть $r$ — максимальное число алгебраически независимых функций из $K_G$ и пусть функции $f_1, \ldots, f_r$ алгебраически независимы. В силу сказанного в предыдущем абзаце, можно предполагать, что функции $f_1, \ldots, f_r$ не зависят от $z_n$. Пусть теперь $f_0$ — любая другая функция из $K_G$, тогда существует полиномиальное

соотношение $A(f_0, f_1, \ldots, f_r) = 0$, связывающее $f_0, f_1, \ldots, f_r$. Дифференцируя его по $z_n$, получаем, что

$$\frac{\partial A}{\partial f_0}\frac{\partial f_0}{\partial z_n} = 0.$$

$A$ существенно содержит $f_0$, так как функции $f_1, \ldots, f_r$ алгебраически независимы, и следовательно, $\partial A/\partial f_0$ не равно нулю тождественно[1]). Поэтому $\partial f/\partial z_n$ тождественно равно нулю, и значит, $f_0$ не зависит от $z_n$. Таким образом, после выполнения подходящим образом подобранного линейного преобразования все функции вырожденного (т. е. не содержащего невырожденных функций) поля $K_C$ оказываются функциями только от $z_1, \ldots, z_{n-1}$. Повторяя это рассуждение, получаем, что существует такое $s$, $0 \leqslant s < n$, что все функции из $K_C$ после выполнения соответствующего линейного преобразования оказываются зависящими только от $z_1, z_2, \ldots, z_s$, причем выразить их через меньшее количество переменных уже невозможно. Далее, достаточно рассматривать только первые $s$ строк матрицы $C$. Обозначим через $C_s = (c_1^*, \ldots, c_{2n}^*)$ матрицу, образованную первыми $s$ строками $C$. Все функции нашего поля обладают периодами $c_1^*, \ldots, c_{2n}^*$. Так как $\begin{pmatrix} C \\ \overline{C} \end{pmatrix}$ — невырожденная матрица, то ранг $\begin{pmatrix} C_s \\ \overline{C_s} \end{pmatrix}$ равен $2s$. Поэтому $C_s$ имеет $2s$ вещественно независимых столбцов. С другой стороны, группа, порожденная векторами $c_1^*, \ldots, c_{2n}^*$, является дискретным множеством точек, так как в противном случае (см. стр. 26) она была бы плотна в некотором линейном подпространстве и, следовательно, все наши функции можно было бы считать функциями от меньшего числа переменных. Таким образом, векторы $c_1^*, c_2^*, \ldots, c_{2n}^*$ порождают $2s$-мерную решетку. Выбрав в этой решетке некоторый базис, мы получаем новую матрицу периодов $C_0$, состоящую из $s$ строк и $2s$ столбцов. Согласно предположению, существуют невырожденные функции $f$ от $z_1, \ldots, z_s$ с матрицей периодов $C_0$. Значит, $K_C = K_{C_0}$ — невырожденное поле абелевых функций от $s$ переменных. Ясно, что $C_0$ удовлетворяет условиям 1), 2) и 3) теоремы 11. Заметим еще, что максимальное число $r$ алгебраически независимых функций $K_C$ равно $s$. Доказательство теоремы 15 закончено.

При $n = 1$ поле $K_C$ невырождено для любой матрицы $C$, состоящей из одной строки и двух вещественно независимых столбцов. Действительно, без ограничения общности можно считать, что $C = (1\ \tau)$, где

---

[1]) Здесь предполагается, что $A$ — многочлен минимальной возможной степени по $f_0$. — *Прим. перев.*

$\operatorname{Im}\tau > 0$. Тогда, полагая

$$A = \pi i \begin{pmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{pmatrix},$$

где $d$ — любое целое положительное число, мы будем иметь

$$CA^{-1}C' = (1\ \tau)\frac{1}{\pi i}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{d} \\ \frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \tau \end{pmatrix} = 0$$

и

$$\bar{C}A^{-1}C' = (1\ \bar{\tau})\frac{1}{\pi i}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{d} \\ \frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \tau \end{pmatrix} = \frac{\bar{\tau}-\tau}{\pi i d} = -\frac{2}{\pi d}\operatorname{Im}(\tau),$$

так что любая целочисленная кососимметрическая матрица (с точностью до множителя $\pm 1$) может служить в качестве матрицы $\frac{1}{\pi i}A$. В следующем параграфе мы покажем, что при $n > 1$ поле $K_C$ может оказаться вырожденным.

## § 31. Пример поля абелевых функций, содержащего только константы

Мы покажем, что при $n = 2$ поле $K_C$, соответствующее матрице

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{-2} & \sqrt{-5} \\ 0 & 1 & \sqrt{-3} & \sqrt{-7} \end{pmatrix}, \tag{33}$$

состоит только из констант.

Предположим вначале, что поле $K_C$ невырождено. Тогда существует матрица $A$ с многократно упоминаемыми в настоящей книге свойствами 1), 2) и 3). Положим

$$\pi i A^{-1} = B = (b_{ij}), \tag{34}$$

где $b_{ij}$ — рациональные числа и $b_{ij} + b_{ji} = 0$. Из $CA^{-1}C' = 0$ следует, что $CBC' = 0$. Простые вычисления показывают, что элемент, стоящий на пересечении первой строки и второго столбца матрицы $CBC'$, равен

$$(1\quad 0\quad \sqrt{-2}\quad \sqrt{-5})\, B \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{-3} \\ \sqrt{-7} \end{pmatrix} = b_{12} + b_{13}\sqrt{-3} + b_{14}\sqrt{-7} -$$

$$- b_{23}\sqrt{-2} - b_{24}\sqrt{-5} + b_{34}(\sqrt{14} - \sqrt{15}). \tag{35}$$

Это немедленно дает

$$b_{12}=b_{13}=b_{14}=b_{23}=b_{24}=b_{34}=0, \tag{36}$$

и значит, $B=0$, что невозможно.

Допустим теперь, что $s=1$. Тогда после выполнения соответствующим образом подобранного линейного преобразования все функции поля $K_C$ оказываются функциями только от $z_1$. Пусть это линейное преобразование переводит $z$ в $Q^{-1}z$, где

$$Q=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix},$$

тогда матрица $C$ переходит в $QC$. Первый столбец $QC$ есть

$$C_1=(\alpha \quad \beta \quad \alpha\sqrt{-2}+\beta\sqrt{-3} \quad \alpha\sqrt{-5}+\beta\sqrt{-7}).$$

Значит, числа $\alpha$, $\beta$, $\alpha\sqrt{-2}+\beta\sqrt{-3}$, $\alpha\sqrt{-5}+\beta\sqrt{-7}$ порождают двумерную решетку в комплексной плоскости. Пусть $\omega_1$, $\omega_2$ — базис этой решетки, тогда

$$\begin{aligned}
\alpha&=p_1\omega_1+p_2\omega_2,\\
\beta&=q_1\omega_1+q_2\omega_2,\\
\alpha\sqrt{-2}+\beta\sqrt{-3}&=r_1\omega_1+r_2\omega_2,\\
\alpha\sqrt{-5}+\beta\sqrt{-7}&=s_1\omega_1+s_2\omega_2,
\end{aligned}$$

где $p_1$, $p_2$, $q_1$, $q_2$, $r_1$, $r_2$, $s_1$, $s_2$ — целые числа. Исключая $\alpha$ и $\beta$, получаем

$$(p_1\sqrt{-2}+q_1\sqrt{-3}-r_1)\omega_1+(p_2\sqrt{-2}+q_2\sqrt{-3}-r_2)\omega_2=0,$$
$$(p_1\sqrt{-5}+q_1\sqrt{-7}-s_1)\omega_1+(p_2\sqrt{-5}+q_2\sqrt{-7}-s_2)\omega_2=0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
0&=\begin{vmatrix}p_1\sqrt{-2}+q_1\sqrt{-3}-r_1 & p_2\sqrt{-2}+q_2\sqrt{-3}-r_2\\ p_1\sqrt{-5}+q_1\sqrt{-7}-s_1 & p_1\sqrt{-5}+q_2\sqrt{-7}-s_2\end{vmatrix}=\\
&=(r_1s_2-r_2s_1)+(s_1p_2-s_2p_1)\sqrt{-2}+(s_1q_2-s_2q_1)\sqrt{-3}+\\
&+(p_1r_2-p_2r_1)\sqrt{-5}+(q_1r_2-q_2r_1)\sqrt{-7}+(p_1q_2-p_2q_1)\sqrt{14}+\\
&+(q_1p_2-q_2p_1)\sqrt{15},
\end{aligned}$$

так что все миноры второго порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \\ r_1 & r_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix}$$

равны нулю. Однако это противоречит тому, что два из четырех комплексных чисел $\alpha$, $\beta$, $\alpha\sqrt{-2}+\beta\sqrt{-3}$, $\alpha\sqrt{-5}+\beta\sqrt{-7}$ линейно независимы над полем действительных чисел. Значит, наше поле $K_C$ не может быть полем абелевых функций от одного комплексного переменного.

Таким образом, остался только случай $s=0$, и, следовательно, наше поле $K_C$ совпадает с полем комплексных чисел.

Глава IX

# ПРИВЛЕЧЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

## § 32. Связь с идеей римановой поверхности

Мы показали, что невырожденное поле $K_C$ абелевых функций от $n$ комплексных переменных есть поле алгебраических функций от $n$ неизвестных. Иными словами, $K_C$ есть поле $R(f_0, \ldots, f_n)$ рациональных функций от $n+1$ функций $f_0, f_1, \ldots, f_n$, которые удовлетворяют алгебраическому соотношению

$$A(f_0, f_1, \ldots, f_n) = 0, \tag{1}$$

причем $n$ последних функций $f_1, \ldots, f_n$ алгебраически независимы.

Уравнение $A(X_0, X_1, \ldots, X_n) = 0$ определяет алгебраическую поверхность $S$ в $(n+1)$-мерном пространстве. Функции $f_0, f_1, \ldots, f_n$ мероморфны на компактном аналитическом многообразии $M$, получающемся из фундаментального параллелепипеда $F$ отождествлением конгруентных точек. (Топологически это многообразие есть $n$-мерный тор.) Мы показали (см. стр. 82), что нет двух точек в $M$, в которых соответственно совпадают значения всех функций из $K_C$. Таким образом, двум различным точкам $M$, не являющимся точками неопределенности ни для одной из функций $f_0, f_1, \ldots, f_n$, соответствуют различные точки на алгебраической поверхности $S$. С другой стороны, можно доказать, что координаты всякой точки $S$ являются системой значений $f_0, f_1, \ldots, f_n$ в некоторой точке $M$. Значит, функции $f_0, f_1, \ldots, f_n$ дают параметрическое представление поверхности $S$ через координаты на $M$.

Мы скажем в этом случае, что мы *униформизировали* алгебраическую поверхность $S$ при помощи мероморфных функций $f_0, f_1, \ldots, f_n$ на компактном аналитическом многообразии $M$.

Напомним, что вообще (комплексным) *аналитическим многообразием* называется связное топологическое пространство $M$, в котором каждая точка имеет окрестность, гомеоморфную некоторой окрестности начала координат в $n$-мерном комплексном пространстве $\Omega$, причем если эти окрестности для двух различных точек $M$ перекрываются, то соответствующие координатные системы получаются одна из другой аналитическим преобразованием с отличным от нуля якобианом. Заметим, что способ введения системы координат играет существенную роль в понятии аналитического многообразия. Под мероморфной на аналитическом многообразии функцией мы будем понимать функцию, которая мероморфна в каждой точке многообразия как функция

от координат. Совокупность функций, мероморфных на аналитическом многообразии, образует поле.

В дальнейшем мы ограничимся лишь компактными аналитическими многообразиями $M$.

При $n=1$ можно построить нетривиальное поле функций, мероморфных на $M$ [1]). Известно также, что это поле всегда является полем алгебраических функций от одного независимого переменного. Кроме того, компактное аналитическое многообразие $M$ служит римановой поверхностью для этого поля алгебраических функций, так как функции на $M$, согласно предположению, однозначны.

При $n>1$ не всякое компактное аналитическое многообразие $M$ таково, что мероморфные на нем функции образуют поле алгебраических функций от $n$ неизвестных. Например, пусть $M$ — фактор-пространство пространства $\Omega$ по модулю $\Delta$, где $\Delta$ — векторная группа, порожденная $2n$ вещественно независимыми векторами. Тогда мы знаем некоторые (необходимые и достаточные) условия для того, чтобы мероморфные на $M$ функции составляли поле алгебраических функций от $n$ неизвестных, причем мы видели на примерах, что это поле может сводиться к полю констант. В общем случае неизвестны условия для существования $n$ алгебраически независимых функций на компактном аналитическом многообразии $M$. Не доказано даже (хотя это, вероятно, верно), что любые $n+1$ мероморфные на компактном аналитическом многообразии функции обязательно алгебраически зависимы. Однако доказать это, повидимому, легче, чем решить проблему существования.

Часть этих трудностей вызывается тем, что при $n>1$ уже неверно, что алгебраическая поверхность и риманова поверхность поля алгебраических функций по существу совпадают. Если при $n=1$ мы будем, исходя из алгебраической поверхности $f(x, y)=0$, строить при помощи аналитического продолжения риманову поверхность, на которой рациональные функции от $x$ и $y$ были бы всюду мероморфными, то результат будет существенно единственный. При $n>1$ это уже неверно, так как из алгебраической поверхности можно получить более чем одну риманову поверхность [2]). Это является следствием того факта, что бирациональные преобразования не взаимно однозначны при $n>1$.

Допустим теперь, что нам задана алгебраическая поверхность $S$, определенная неприводимым полиномиальным уравнением $A(X_0, X_1, \ldots, X_n)=0$, и рассмотрим поле $K=R(X_0, X_1, \ldots, X_n)$. Зарисский доказал [3]), что существует компактное аналитическое

---

[1]) Weyl H., Die Idee der Riemannschen Fläche, Leipzig, 1913 (и 1923).

[2]) Для абелевых многообразий римановой поверхностью естественно назвать алгебраическую поверхность без особых точек, находящуюся в комплексном пространстве, конструкция которой указана в примечании II в конце книги. — *Прим. перев.*

[3]) Zariski O., Local uniformization on algebraic varieties, Ann. of Math. (2), **41** (1940), 352—396.

многообразие $M$, комплексная размерность которого равна $n$, со следующими свойствами. Поле $K$ может быть изоморфно отображено в поле функций, мероморфных на $M$, причем $X_1, \ldots, X_n$ при этом переходят в $n$ аналитически независимых функций. Кроме того, поле функций, мероморфных на $M$, таково, что нет двух точек $M$, в которых соответственно совпадают значения всех функций этого поля. Это означает, что $S$ отображается на $M$, грубо говоря, взаимно однозначно, однако, это отображение не является взаимно однозначным из-за точек неопределенности мероморфных функций. Таким образом, мы имеем локальную параметризацию $S$ при помощи координат на $M$.

Мы можем рассматривать $X_1, \ldots, X_n$ как независимые переменные на $S$, хотя при этом надо учитывать, что $X_0$ определяется через них неоднозначно. Рассмотрим на алгебраической поверхности $S$ дифференциальную форму

$$\Phi_1 dX_1 + \ldots + \Phi_n dX_n, \tag{2}$$

где $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ — функции, мероморфные на $S$. Мы будем предполагать в дальнейшем, что

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial X_k} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial X_j}, \tag{3}$$

т. е. что дифференциальная форма (2) *замкнута* по терминологии Картана [1]).

Для вычисления интегралов нам придется использовать выражение дифференциальной формы через координаты на $M$. Пусть $t_1, \ldots, t_n$ — любая система локальных координат на $M$ в окрестности точки $P$. Выражая дифференциальную форму (2) через $t_1, \ldots, t_n$, получаем

$$\psi_1 dt_1 + \ldots + \psi_n dt_n, \tag{4}$$

где $\psi_1, \ldots, \psi_n$ локально регулярны, причем если это будет справедливо для каждой точки $P$, то мы будем говорить, что дифференциальная форма (2) есть *абелева дифференциальная форма первого рода*. В этом случае интеграл

$$\int_{P_0}^{P} (\psi_1 dt_1 + \ldots + \psi_n dt_n) \tag{5}$$

всюду локально регулярен, хотя, вообще говоря, неоднозначен. По теореме Стокса, этот интеграл равен нулю, если он берется по любому пути на $M$, гомологичному нулю. Таким образом, интеграл (5) определяется с точностью до аддитивных постоянных, которые получаются при интегрировании по одномерным циклам на $M$.

---

[1]) Hodge W., The theory and application of harmonic integrals, Cambridge, 1941, pp. 68—79.

Абелевы дифференциальные формы первого рода образуют линейное пространство над полем комплексных чисел. Предположим, что ранг этого пространства равен $p$, и пусть $dz_1, \ldots, dz_p$ образуют его базис. С другой стороны, пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_q$ образуют базис одномерных циклов на $M$. Тогда естественно рассмотреть матрицу $C=(c_{jk})$ из $p$ строк и $q$ столбцов, где

$$c_{jk}=\int_{\gamma_k} dz_j. \tag{6}$$

В алгебраической геометрии доказывается, что $q=2p$ и что матрица $\left(\frac{C}{\bar{C}}\right)$ невырождена. Используя все эти факты, мы докажем сейчас следующую теорему.

Теорема 16. *Поле $K=R(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ алгебраических функций на алгебраической поверхности $A(X_0, X_1, \ldots, X_n)=0$ изоморфно невырожденному полю абелевых функций от $n$ комплексных переменных тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия: 1) существует в точности $n$ линейно независимых абелевых интегралов первого рода на соответствующем компактном аналитическом многообразии $M$, 2) каждая мероморфная на $M$ функция является мероморфной функцией от этих $n$ абелевых интегралов.*

Доказательство. Допустим вначале, что поле $K$ алгебраических функций от $n$ неизвестных таково, что на соответствующем $n$-мерном компактном аналитическом многообразии $M$ существует точно $n$ линейно независимых абелевых интегралов первого рода $z_1, \ldots, z_n$, причем все мероморфные на $M$ функции являются мероморфными функциями от $z_1, \ldots, z_n$. Согласно замечанию, сделанному перед формулировкой теоремы, на $M$ существует $2n$ независимых одномерных циклов, а матрица $C$ состоит из $2n$ вещественно независимых столбцов. Следовательно, вектор

$$z=\begin{pmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n \end{pmatrix} \tag{7}$$

определяется однозначно с точностью до линейной комбинации с целыми коэффициентами векторов, являющихся столбцами матрицы $C$. Значит, мероморфные на $M$ функции имеют $2n$ вещественно независимых периодов. Следовательно, $K$ — невырожденное поле абелевых функций.

Предположим теперь, с другой стороны, что нам дано невырожденное поле абелевых функций от $n$ комплексных переменных с вещественно независимыми периодами $c_1, \ldots, c_{2n}$. Иными словами, нам

дано поле функций, мероморфных на компактном аналитическом многообразии $M$, являющемся фактор-пространством всего пространства $\Omega$ по векторной группе $\Lambda$, порожденной векторами $c_1, \ldots, c_{2n}$. Мы знаем, что наше поле абелевых функций есть поле алгебраических функций от $n$ неизвестных. Обозначим через $z_1, \ldots, z_n$ комплексные координаты в $\Omega$, тогда локальные системы координат на $M$ имеют вид $t = z - a$, где $a$ — некоторая точка $M$. Таким образом, по существу мы имеем одну и ту же систему координат на всем $M$[1]). Далее, функции, всюду регулярные на $M$, являются целыми функциями на $\Omega$ с вещественно независимыми периодами $c_1, \ldots, c_{2n}$ и, следовательно, должны быть константами. Таким образом, общий вид абелевой дифференциальной формы первого рода на $M$ следующий:

$$a_1\, dz_1 + \ldots + a_n\, dz_n, \tag{8}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — комплексные числа. Значит, $dz_1, \ldots, dz_n$ образуют базис абелевых дифференциалов первого рода на $M$, и следовательно, $z_1, \ldots, z_n$ (определенные с точностью до прибавления элементов из $\Lambda$) образуют базис абелевых интегралов первого рода на $M$. Таким образом, мероморфные на $M$ функции являются мероморфными функциями от $n$ абелевых интегралов, составляющих базис. Теорема 16 доказана.

## § 33. Связь с топологическими группами

В этом параграфе мы дадим характеристику в терминах топологических групп тех компактных аналитических многообразий, которые получаются как фактор-пространства $n$-мерного комплексного пространства $\Omega$ по модулю $\Lambda$, где $\Lambda$ — группа, порожденная $2n$ вещественно независимыми векторами[2]). Мы можем рассматривать такие многообразия, как комплексные группы Ли. Мы докажем сейчас, что таким образом получаются все компактные аналитические многообразия, являющиеся комплексными группами Ли.

Теорема 17. *Всякое компактное аналитическое $n$-мерное комплексное многообразие $M$, являющееся комплексной группой Ли, есть фактор-пространство $n$-мерного комплексного пространства по векторной группе, порожденной $2n$ вещественно независимыми векторами.*

---

[1]) Следовательно, любая абелева дифференциальная форма на $M$ имеет вид

$$\psi_1(z)\, dz_1 + \ldots + \psi_n(z)\, dz_n.$$

— *Прим. перев.*

[2]) Для алгебраической геометрии важна характеристика алгебраических многообразий, являющихся группами. К числу таких многообразий принадлежат абелевы многообразия. (См. примечания в конце книги.) Теорема 17 показывает, что никаких других алгебраических многообразий, являющихся группами, нет. — *Прим. перев.*

Будем записывать групповую операцию в $M$ как умножение. Рассмотрим произведение $\zeta\alpha\zeta^{-1}$, где $\zeta$ — произвольный элемент $M$, а $\alpha$ находится в достаточно малой окрестности единицы $\varepsilon$. Так как это произведение непрерывно по обеим переменным и равно $\varepsilon$ при $\alpha=\varepsilon$, то для любого $\zeta_1$ и любой окрестности $N(\varepsilon)$ элемента $\varepsilon$ существуют окрестности $N_1(\zeta_1)$ элемента $\zeta_1$ и $N_2(\varepsilon)$ элемента $\varepsilon$ такие, что если $\zeta\in N_1(\zeta_1)$, а $\alpha\in N_2(\varepsilon)$, то $\zeta\alpha\zeta^{-1}\in N(\varepsilon)$. В силу компактности многообразия $M$, его можно покрыть конечным числом окрестностей вида $N_1(\zeta_1)$; следовательно, существует окрестность $N_0(\varepsilon)$ такая, что если $\alpha\in N_0(\varepsilon)$, то $\zeta\alpha\zeta^{-1}\in N(\varepsilon)$ для любого $\zeta\in M$.

Теперь рассмотрим элемент $\zeta\alpha\zeta^{-1}$ при фиксированном $\alpha$ как функцию от $\zeta$. Так как $\zeta\alpha\zeta^{-1}$ принадлежит окрестности $N(\varepsilon)$, в которой нам задана определенная система координат, то каждая координата $\zeta\alpha\zeta^{-1}$ является аналитической функцией от $\zeta$[1]). Пусть $f(\zeta)$ — какая-нибудь фиксированная координата $\zeta\alpha\zeta^{-1}$, тогда $|f(\zeta)|$ есть непрерывная функция на $M$ и, следовательно, имеет максимум в некоторой точке $\zeta_0\in M$. Далее, функция $f(\zeta)$ как функция от локальных координат в точке $\zeta_0$ регулярна в некоторой окрестности $\zeta_0$, причем $|f(\zeta)|$ имеет максимум в $\zeta_0$. Следовательно, $f(\zeta)$ — константа в окрестности $\zeta_0$ и, значит, всюду. Поэтому $\zeta\alpha\zeta^{-1}$ не зависит от $\zeta$ и $\zeta\alpha\zeta^{-1}=\alpha$ для всех $\alpha$, поскольку это верно при $\zeta=\varepsilon$. Мы доказали, таким образом, что все $\alpha\in N_1(\varepsilon)$ принадлежат центру группы. А так как $M$ — связная топологическая группа, то $M$ порождается элементами окрестности $N_1(\varepsilon)$[2]). Следовательно, $M$ — коммутативная топологическая группа.

Известно[3]), что коммутативная компактная топологическая группа, имеющая окрестность нуля, гомеоморфную некоторому открытому множеству евклидового пространства, является прямой суммой конечного числа групп, изоморфных группе вещественных чисел, взятых по модулю 1.

Таким образом, $M$ топологически является $n$-мерным тором. Так как выбор системы координат в группе Ли единственен с точностью до аналитического преобразования, то из доказанного следует, что после выполнения соответствующего аналитического преобразования $M$ переходит в фактор-пространство комплексного $n$-мерного пространства $\Omega$ по векторной группе, порожденной $2n$ вещественно независимыми векторами. Таким образом, теорема 17 доказана.

Вследствие теоремы 17 и наших предыдущих результатов мы видим, что полностью решен вопрос об условиях существования мероморфных функций на компактных аналитических многообразиях, являющихся в то же время комплексными группами Ли.

---

[1]) Числовая функция $f(\zeta)$ называется аналитической, если она является аналитической функцией координат точки $\zeta$. — *Прим. перев.*

[2]) Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, М. — Л., 1938, стр. 90.

[3]) Там же, стр. 185.

## § 34. Набросок другого доказательства соотношений между периодами

Мы наметим здесь топологическое доказательство соотношений между периодами (теорема 11), принадлежащее Лефшецу [24]. Напомним эти соотношения. Предположим, что $f(z)$ — невырожденная мероморфная функция с $2n$ вещественно независимыми периодами $c_1, \ldots, c_{2n}$. Представим ее в виде отношения двух целых функций $g(z)$ и $h(z)$ таких, что

$$g(z+c_k)=e^{v_k(z)}g(z), \quad h(z+c_k)=e^{v_k(z)}h(z),$$

где $v_k(z)$ — линейный многочлен:

$$v_k(z)=b_k\cdot z+\beta_k.$$

Пусть, наконец, $B=(b_1, \ldots, b_{2n})$ — матрица из $n$ строк и $2n$ столбцов $b_k$ и

$$A=\frac{1}{2}(B'C-C'B).$$

Тогда 1) $A$ невырождена, 2) $CA^{-1}C'=0$, 3) $\bar{C}A^{-1}C'<0$.

Топологическое доказательство состоит в следующем. Обозначим, как обычно, через $F$ множество точек вида

$$\lambda_1c_1+\ldots+\lambda_{2n}c_{2n}, \quad 0\leqslant\lambda_k\leqslant 1 \qquad (k=1, \ldots, 2n), \tag{9}$$

а через $M$ — компактное аналитическое многообразие, получаемое из $F$ отождествлением точек, отличающихся на вектор из группы $\Lambda$, порожденной $c_1, \ldots, c_{2n}$. Одномерное число Бетти для $M$ равно $2n$, т. е. на $M$ существуют $2n$ одномерных циклов $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}$, негомологичных друг другу и таких, что всякий одномерный цикл на $M$ гомологичен линейной комбинации $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2n}$ с целыми коэффициентами. Мы можем считать, например, что $\gamma_k$ $(k=1, \ldots, 2n)$ есть множество точек $\lambda_kc_k$, $0\leqslant\lambda_k\leqslant 1$, ориентированное по возрастанию $\lambda_k$. Аналогично, двумерное число Бетти для $M$ равно $\binom{2n}{2}$, причем за базис для двумерных циклов мы можем взять прямые произведения $\gamma_j\gamma_k$, $j<k$, т. е. множества точек вида

$$\lambda_jc_j+\lambda_kc_k, \quad 0\leqslant\lambda_j\leqslant 1, \quad 0\leqslant\lambda_k\leqslant 1, \tag{10}$$

ориентированные обычным способом. Значит, для любого двумерного цикла $\gamma$ на $M$ справедливо соотношение

$$\gamma\sim\sum_{1\leqslant j<k\leqslant 2n} r_{jk}\gamma_j\gamma_k, \tag{11}$$

где $r_{jk}$ — целые числа. Следовательно, если $\Phi$ — замкнутая внешняя дифференциальная форма размерности 2, то, согласно теореме Стокса[1]),

$$\int_{\gamma} \Phi = \sum r_{jk} \int_{\gamma_j \gamma_k} \Phi. \tag{12}$$

Примем за $\gamma$ множество точек $M$, в которых равны нулю функции $g(z+\zeta_1), \ldots, g(z+\zeta_{n-1})$, где $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$ — любые постоянные векторы, выбранные так, чтобы функции $f(z+\zeta_1), \ldots, f(z+\zeta_{n-1})$ были аналитически независимы. (Возможность такого выбора следует из теоремы 13, доказательство которой не зависит от соотношений между периодами.) При помощи теории исключения можно доказать, что $\gamma$ — компактное аналитическое комплексное многообразие размерности 1[2]). Далее, оно ориентируемо и триангулируемо и, следовательно, является двумерным циклом. Поэтому, выбрав ориентацию на $\gamma$, мы можем написать

$$\gamma \sim \sum_{j<k} r_{jk} \gamma_j \gamma_k, \tag{13}$$

где $r_{jk}$ — целые числа. Определим дополнительно $r_{kj} = -r_{jk}$ при $1 \leqslant j < k \leqslant 2n$ и $r_{jj} = 0$ при $1 \leqslant j \leqslant 2n$, тогда $R = (r_{jk})$ — квадратная кососимметрическая матрица с целыми элементами порядка $2n$. Для доказательства соотношений между периодами достаточно показать, что

1) $CRC' = 0$,

2) $i\bar{C}RC' < 0$,

3) $RA = -i\alpha E_{2n}$, где $\alpha$ — положительное число.

Для доказательства 1) рассмотрим интеграл $\int_{\gamma} dz_p\, dz_q$. С одной стороны, этот интеграл равен нулю, так как в любой окрестности на $\gamma$ как $z_p$, так и $z_q$ можно выразить через единственную локальную комплексную координату $t$. С другой стороны, точки $\gamma_j \gamma_k$ имеют вид

$$z_p = c_{pj}\lambda_j + c_{pk}\lambda_k, \quad z_q = c_{qj}\lambda_j + c_{qk}\lambda_k, \quad 0 \leqslant \lambda_j,\ \lambda_k \leqslant 1,$$

так что внешнее произведение $dz_p$ и $dz_q$ равно $(c_{pj}c_{qk} - c_{pk}c_{qj})\, d\lambda_j\, d\lambda_k$. Следовательно, так как внешняя производная от $dz_p\, dz_q$, очевидно,

---

[1]) Hodge W., The theory and application of harmonic integrals, Cambridge, 1941, pp. 68—79, или de Rham G., Relations entre la topologie et la théorie des intégrales multiples, L'Enseignement Mathématique, **35** (1936), 213—228.

[2]) Lefschetz S., Numerical invariants of algebraic varieties, Trans. Am. Math. Soc., **22** (1921), 367—369. — *Прим. перев.*

равна нулю, мы имеем

$$\int_\gamma dz_p\,dz_q = \sum_{j<k} r_{jk} \int_{\gamma_j\gamma_k} dz_p\,dz_q =$$

$$= \sum_{j<k} r_{jk}(c_{pj}c_{qk} - c_{pk}c_{qj}) = \sum_{1\leqslant j,\ k\leqslant 2n} c_{pj}r_{jk}c_{qk}. \qquad (14)$$

Таким образом, поскольку последнее выражение есть общий элемент матрицы $CRC'$, мы доказали, что $CRC' = 0$.

Чтобы доказать 2), мы рассмотрим интеграл $\int_\gamma d\bar{u}\,du$, где $u = \zeta_1 z_1 + \ldots \zeta_n z_n$, а $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — произвольные комплексные числа. Так как

$$du = \zeta_1\,dz_1 + \ldots + \zeta_n\,dz_n,$$

$$d\bar{u} = \bar{\zeta}_1\,d\bar{z}_1 + \ldots + \bar{\zeta}_n\,d\bar{z}_n,$$

то очевидно, что $du\,d\bar{u}$ — замкнутая внешняя дифференциальная форма. Отделим в $u$ действительную и мнимую части, полагая $u = x + iy$. Тогда $du = dx + i\,dy$ и $d\bar{u}\,du = 2i\,dx\,dy$. Следовательно,

$$0 \leqslant i^{-1}\int_\gamma d\bar{u}\,du, \qquad (15)$$

причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда $\zeta_1 = \ldots = \zeta_n = 0$. Далее,

$$\int_\gamma d\bar{u}\,du = \sum_{1\leqslant p,\ q\leqslant 2n} \bar{\zeta}_p\zeta_q \int_\gamma d\bar{z}_p\,dz_q = \sum_{p,\ q} \bar{\zeta}_p\zeta_q \sum_{j<k} r_{jk} \int_{\gamma_j\gamma_k} d\bar{z}_p\,dz_q =$$

$$= \sum_{p,\ q} \bar{\zeta}_p\zeta_q \sum_{j<k} r_{jk}(\bar{c}_{pj}c_{qk} - \bar{c}_{pk}c_{qj}) = \sum_{p,\ q} \bar{\zeta}_p\zeta_q \Big\{\sum_{j,\ k} \bar{c}_{pj}r_{jk}c_{qk}\Big\}.$$

Выражение, стоящее в скобках, есть общий элемент матрицы $\bar{C}RC'$. Таким образом, $i^{-1}\bar{C}RC' > 0$.

Прежде чем переходить к доказательству соотношения 3), заметим, что из соотношений 1) и 2) уже следует невырожденность матрицы $R$. Действительно, матрица

$$\begin{pmatrix} C \\ \bar{C} \end{pmatrix} R\,(C'\bar{C}') = \begin{pmatrix} CRC' & CR\bar{C}' \\ \bar{C}RC' & \bar{C}R\bar{C}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\bar{C}RC'} \\ \bar{C}RC' & 0 \end{pmatrix}$$

невырождена, и следовательно, $R$ также невырождена.

Для доказательства 3) мы рассмотрим $(2n-2)$-мерные циклы на $M$. $(2n-2)$-мерное число Бетти равно $\binom{2n}{2n-2} = \binom{2n}{2}$. За базис

для $(2n-2)$-мерных циклов можно взять $\Gamma_{jk}$, где $\Gamma_{jk}$ означает прямое произведение в некотором определенном порядке всех $\gamma_p$ за исключением $\gamma_j$ и $\gamma_k$. Нас будет интересовать цикл $\Gamma_0$, являющийся множеством нулей функции $g(z)$. Ввиду всего сказанного мы имеем право написать

$$\Gamma_0 \sim \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant 2n} d_{jk}\Gamma_{jk}, \tag{16}$$

где $d_{jk}$ — целые числа.

Прежде всего покажем, что

$$d_{pq} = \pm \frac{a_{pq}}{\pi i} \qquad (1 \leqslant p < q \leqslant 2n), \tag{17}$$

где $A = (a_{pq})$. (Чтобы фиксировать знак, мы, очевидно, должны указать ориентацию на $\Gamma_0$ и на $\Gamma_{jk}$.) Мы докажем соотношения (17), вычисляя индекс пересечения $(\Gamma_0, \gamma_p\gamma_q)$ двумя различными способами [1]). С одной стороны, мы можем выбрать ориентацию на $\Gamma_0$ такой, что при $1 \leqslant p < q \leqslant 2n$ индекс пересечения $(\Gamma_0, \gamma_p\gamma_q)$ равен вариации $\frac{1}{2\pi i}\ln g(z)$ по периметру цикла $\gamma_p\gamma_q$, который является обычным параллелограммом с отождествленными противоположными сторонами. (Мы предполагаем, конечно, что $g(z)$ не имеет нулей на границе этого параллелограмма.) Вариация функции $\frac{1}{2\pi i}\ln g(z)$ по границе $\gamma_p\gamma_q$ равна

$$v_p(c_p + c_q) - v_p(c_p) - v_q(c_p + c_q) + v_q(c_q) = \\ = b_p \cdot c_q - b_q \cdot c_p = 2a_{pq}, \tag{18}$$

и следовательно,

$$(\Gamma_0, \gamma_p\gamma_q) = \frac{a_{pq}}{\pi i}. \tag{19}$$

С другой стороны,

$$(\Gamma_0, \gamma_p\gamma_q) = \sum_{j<k} d_{jk}(\Gamma_{jk}, \gamma_p\gamma_q) = d_{pq}(\Gamma_{pq}, \gamma_p\gamma_q) = \pm d_{pq}, \tag{20}$$

поэтому

$$d_{pq} = \pm \frac{a_{pq}}{\pi i}. \tag{21}$$

Конец доказательства мы проведем в предположении, что матрица $A$ имеет вид

$$\pi i \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix},$$

где $D$ — диагональная матрица с неотрицательными целыми диагональными элементами $d_n$ такими, что $d_1 \backslash d_2 \backslash \ldots \backslash d_n$. Так как

[1]) Глезерман М. Е. и Понтрягин Л. С., Пересечения в многообразиях, УМН, 2, вып. 1 (17), (1947), 58—155. — *Прим. перев.*

матрицу $A$ всегда можно привести к указанному виду при помощи выбора образующих в группе $\Delta$, порожденной векторами $c_1, \ldots, c_{2n}$, то ясно, что наше предположение не ограничивает общность рассуждения. Значит, при $j < k$ мы имеем

$$\frac{a_{jk}}{\pi i} = \begin{cases} d_k, & \text{если} \quad k = j + n, \\ 0, & \text{если} \quad k \neq j + n. \end{cases} \tag{22}$$

Следовательно, $d_{jk} = 0$ при $k \neq j + n$, и

$$\Gamma_0 \sim \sum_{j=1}^{n} d_{j,\, j+n} \Gamma_{j,\, j+n}. \tag{23}$$

Положим теперь

$$\Gamma = \gamma_1 \gamma_{n+1}, \ldots, \gamma_j \gamma_{j+n}, \ldots, \gamma_n \gamma_{2n}, \tag{24}$$

и пусть

$$\Gamma_{j,\, j+n} = \frac{\Gamma}{\gamma_j \gamma_{j+n}}. \tag{25}$$

Запись, употребленная в (25), означает, что в произведении (24) пропущены множители $\gamma_j$ и $\gamma_{j+n}$, а остальные множители взяты в том же порядке, что и в (24). Очевидно, что

$$(\Gamma_{j,\, j+n}, \quad \gamma_j \gamma_{j+n}) = 1 \tag{26}$$

и, ввиду соображений предыдущего абзаца,

$$d_{j,\, j+n} = \frac{a_{j,\, j+n}}{\pi i} = d_j. \tag{27}$$

Таким образом, мы имеем

$$\Gamma_0 \sim \sum_{j=1}^{n} d_j \Gamma_{j,\, j+n} = \sum_{j=1}^{n} d_j \frac{\Gamma}{\gamma_j \gamma_{j+n}}, \tag{28}$$

откуда [1])

$$\Gamma_0^{n-1} \sim (n-1)! \sum d_1, \ldots, d_{j-1} d_{j+1}, \ldots, d_n \gamma_j \gamma_{j+n}. \tag{29}$$

Далее, цикл $\Gamma_0$ представляет собой множество нулей функции $g(z)$ в $M$ и, следовательно, гомологичен множеству нулей функции $g(z + \zeta_p)$, $1 \leqslant p \leqslant n - 1$. Поэтому

$$\Gamma_0^{n-1} \sim \gamma \sim \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant 2n} r_{jk} \gamma_j \gamma_k, \tag{30}$$

---

[1]) $\Gamma_0^m$ означает пересечение $m$ циклов, гомологичных $\Gamma_0$, когда они находятся в „общем положении". Подробное изложение теории пересечений содержится в статье: Глезерман М. Е. и Понтрягин Л. С., Пересечения в многообразиях, УМН, 2, вып. 1 (17), (1947), 58—155. — *Прим. перев.*

где $\gamma$ — множество общих нулей функций $g(z+\zeta_1), \ldots, g(z+\zeta_{n-1})$, рассмотренных ранее. Значит, при $j<k$

$$r_{jk}=\begin{cases}(n-1)!\,d_1, \ldots, d_{j-1}d_{j+1}, \ldots, d_n, & k=j+n,\\ 0, & k\neq j+n.\end{cases}$$

Далее, мы знаем, что $R=(r_{jk})$ — невырожденная кососимметрическая матрица. Следовательно, $d=d_1 \ldots d_n \neq 0$, а $R$ можно представить в виде

$$R=(n-1)!\,d\begin{pmatrix}0 & D^{-1}\\ -D^{-1} & 0\end{pmatrix}. \tag{31}$$

Таким образом, окончательно

$$RA=-\pi i(n-1)!\,d\,E_{2n}, \tag{32}$$

чем и доказано соотношение 3).

Этим заканчивается второе доказательство соотношений между периодами. По существу оно намного проще, чем доказательство, изложенное в § 20, однако, если подробно объяснять, почему множество $\gamma$ является компактным аналитическим многообразием комплексной размерности 1, то это второе доказательство окажется намного сложнее первоначального.

Глава X

# АВТОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ

## § 35. Предварительные сведения

Пусть нам задана некоторая область $D$ в $n$-мерном комплексном пространстве, т. е. открытое связное непустое множество. Предположим далее, что $\Gamma$ — некоторая группа аналитических автоморфизмов [1]) $z \to \gamma z$ области $D$. Функция $f$ называется автоморфной в области $D$ относительно группы $\Gamma$, если она мероморфна в $D$ и удовлетворяет функциональному уравнению $f(\gamma z) = f(z)$ при любом $\gamma \in \Gamma$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что область $D$ *ограничена*.

Лемма 1. *Если $\Gamma$ — группа аналитических автоморфизмов области $D$, $C$ — любое замкнутое подмножество области $D$ и $\varepsilon$ — некоторое положительное число, то существует положительное $\delta$, зависящее только от $D$, $C$ и $\varepsilon$ и такое, что для любого $a \in C$ и любого $\gamma \in \Gamma$ мы имеем*

$$|\gamma z - \gamma a| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |z - a| < \delta. \tag{1}$$

Эта лемма следует из более общего утверждения: если $g(z)$ регулярна и $|g(z)| < M$ в $D$, то существует положительное $\delta$, зависящее только от $D$, $C$, $M$ и $\varepsilon$ и такое, что для любого $a \in C$ мы имеем $|g(z) - g(a)| < \varepsilon$ при $|z - a| < \delta$. Докажем это утверждение. Обозначим через $2r$ расстояние от $C$ до дополнения к $D$; тогда, если $a \in C$ и $|t - a| < r/2$, то

$$g(t) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int\limits_{|z_k - a_k| = r} \cdots \int \frac{g(z)}{(z_1 - t_1)\ldots(z_n - t_n)}\, dz_1, \ldots, dz_n. \tag{2}$$

Поэтому

$$|g(t) - g(a)| \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{|z_k - a_k| = r} \cdots \int M \times$$

$$\times \left| \frac{1}{(z_1 - t_1)\ldots(z_n - t_n)} - \frac{1}{(z_1 - a_1)\ldots(z_n - a_n)} \right| |dz_1| \ldots |dz_n|. \tag{3}$$

---

[1]) Отображение $z \to \gamma z$ области $D$ на себя называется аналитическим автоморфизмом, если оно взаимно однозначно и если функции, выражающие координаты образа через координаты прообраза, являются аналитическими. — *Прим. перев.*

Следовательно, мы можем найти $\delta$, меньшее чем $r/2$, зависящее только от $M$, $r$ и $\varepsilon$ и такое, что $|g(t)-g(a)|<\varepsilon$ при $|t-a|<\delta$, чем и доказано наше утверждение.

Сделаем теперь еще одно, впрочем, довольно естественное допущение, а именно, что группа $\Gamma$ *дискретна на* $D$; это означает, что множество образов $\gamma a$ любой фиксированной точки $a \in D$ не имеет предельных точек в $D$.

Лемма 2. *Если* $\Gamma$ — *дискретная группа аналитических автоморфизмов ограниченной области* $D$, *а* $C$ — *любое замкнутое подмножество* $D$, *то существует целое положительное* $t$ *такое, что любая точка* $D$ *встречается самое большее* $t$ *раз среди точек образов* $\gamma C$ *множества* $C$, *когда* $\gamma$ *пробегает* $\Gamma$. (Конечно, мы не утверждаем, что любая точка области $D$ покрывается образами $\gamma C$.)

Доказательство. Обозначим снова через $2r$ расстояние от $C$ до дополнения к $D$, и пусть $C_1$ — множество точек $D$, расстояние которых от $C$ не превосходит $r$. Для любого $a \in C$ в $C_1$ содержится лишь конечное число точек вида $\gamma a$, где $\gamma$ пробегает $\Gamma$. Согласно лемме 1, существует $\delta$ такое, что для любого $a \in C$ и любого $\gamma \in \Gamma$ мы имеем $|\gamma z-\gamma a|<r$, если $z$ принадлежит некоторой окрестности $N$ вида $|z-a|<\delta$.

Следовательно, если $z \in N$, то из $\gamma a \overline{\in} C_1$ (что имеет место для всех $\gamma$ за исключением конечного числа) следует $\gamma z \overline{\in} C$. Поэтому $C$ пересекается только с конечным числом образов $\gamma N$, где $\gamma$ пробегает $\Gamma$. Так как замкнутое множество $C$ может быть покрыто конечным числом окрестностей $N$, то оно может пересекаться лишь с конечным числом, скажем $\tau$, образов $\gamma C$. Этим доказано наше утверждение для точек $C$; для остальных точек $D$ оно следует из групповых свойств [1]).

Лемма 3. *Дискретная группа* $\Gamma$ *аналитических автоморфизмов ограниченной области* $D$ *состоит из, самое большее, счетного множества элементов.*

Доказательство. Применяя лемму 2 к объединению двух замкнутых подмножеств $C$ и $C^*$ области $D$, легко получить, что $C^*$ пересекается лишь с конечным числом образов $\gamma C$ множества $C$. Рассмотрим теперь возрастающую последовательность замкнутых множеств $C_1, C_2, \ldots$, объединением которых является $D$, и некоторый замкнутый полицилиндр $C$, содержащийся в $D$. Для каждого $j$ ($j=1, 2, \ldots$) существует лишь конечное число $\gamma$ таких, что $\gamma C$ пересекается с $C_j$, и, следовательно, автоморфизмы $\gamma$ можно перенумеровать.

---

[1]) Действительно, пусть $b=\gamma_0 a_0=\gamma_1 a_1=\ldots=\gamma_N a_N$, где $a_k \in C$ ($k=0, 1, \ldots, N$), тогда $a_0=\gamma_0^{-1}\gamma_k a_k$ ($k=1, \ldots, N$), и следовательно, $N \leqslant \tau$. — *Прим. перев.*

Две точки $a$ и $b$ области $D$ *называются эквивалентными относительно группы* $\Gamma$, если существует автоморфизм $\gamma \in \Gamma$ такой, что $\gamma a = b$.

Лемма 4. *Если $a$ и $b$ — точки ограниченной области $D$, не эквивалентные относительно дискретной группы $\Gamma$, то существуют такие окрестности $M$ и $N$, соответственно, точек $a$ и $b$, что образы $M$ и $N$ при отображениях из группы $\Gamma$ не пересекаются.*

Доказательство. Обозначим через $C$ какое-нибудь замкнутое подмножество $D$, содержащее $a$ и $b$ в качестве внутренних точек. Тогда только конечное число образов $\gamma C$ пересекается с $C$; обозначим их через $\gamma_1 C, \gamma_2 C, \ldots, \gamma_t C$. В $C$ содержится полицилиндр $M$ с центром в точке $a$, такой, что замыкание областей $\gamma_1 M, \gamma_2 M, \ldots, \gamma_t M$ не содержит $b$. Поэтому существует полицилиндр $N$ с центром в точке $b$, содержащийся в $C$ и не пересекающийся с $\gamma_1 M, \gamma_2 M, \ldots, \gamma_t M$. Тогда ни один образ $\gamma M$ полицилиндра $M$ не пересекается с $N$, и следовательно, любые два образа полицилиндров $M$ и $N$ при отображениях из $\Gamma$ не пересекаются.

Группа $\Gamma$ есть подгруппа группы всех аналитических автоморфизмов области $D$. Если $n = 1$ и $D$ — односвязная область, то последняя группа всегда бесконечна; однако, если $n > 1$, то существуют односвязные области, единственным аналитическим автоморфизмом которых является тождественное преобразование [1]). Нас, очевидно, интересуют только области, имеющие нетривиальные автоморфизмы; при $n > 1$ это — свойство, которое нужно дополнительно предполагать. Помимо того, в дальнейшем мы наложим еще более сильное ограничение, а именно, потребуем выполнения так называемого условия компактности.

## § 36. Сходимость некоторых рядов

Пусть $dv$ означает элемент объема $dx_1 dy_1 \ldots dx_n dy_n$, где $z_1 = x_1 + iy_1, \ldots, z_n = x_n + iy_n$. Если $\gamma \in \Gamma$, то при отображении $\gamma$ элемент объема $dv$ переходит в новый элемент объема $dv_\gamma$. *Объемным коэффициентом* мы будем называть отношение

$$\frac{dv_\gamma}{dv}.$$

Если $j_\gamma(z) = d(\gamma z)/dz$ — якобиан отображения, переводящего $z$ в $\gamma z$, то, очевидно,

$$\frac{dv_\gamma}{dv} = |j_\gamma(z)|^2. \tag{4}$$

---

[1]) Behnke H., Peschl E., Zur Theorie der analytischen Funktionen mehreren komplexen Veränderlichen, Monatshefte für Math. und Phys., 43 (1935), 493. — *Прим. перев.*

Лемма 5. *Если* Г *есть дискретная группа аналитических автоморфизмов области* $D$, *то ряд*

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}|j_\gamma(z)|^2 \tag{5}$$

*сходится в каждой точке* $z\in D$ *и притом равномерно на любом замкнутом подмножестве* $C$ *области* $D$.

Доказательство. Пусть расстояние от $C$ до дополнения к $D$ равно $2r$, и пусть $C_1$ — множество точек $D$, расстояние которых от $C$ не превосходит $r$. Предположим, что $a$ — какая-нибудь точка $C$, а $N$ — полицилиндр радиуса $r$ с центром в этой точке. Обозначим через $t_1$ такое целое положительное число, что любая точка $D$ содержится не более чем в $t_1$ образах $\gamma C_1$ множества $C_1$. Тогда, если $V(D)$ обозначает объем $D$, а штрих означает любую частную сумму ряда (5), то мы имеем

$$t_1V(D)\geqslant\sum_\gamma{}'\int_{\gamma C_1}dv\geqslant\sum_\gamma{}'\int_{\gamma N}dv\geqslant\sum_\gamma{}'\int_N|j_\gamma(z)|^2\,dv\geqslant$$
$$\geqslant\sum_\gamma{}'|j_\gamma(a)|^2\int_N dv=(\pi r^2)^n\sum_\gamma{}'|j_\gamma(a)|^2; \tag{6}$$

в последнем неравенстве мы использовали хорошо известное свойство функций, регулярных в замкнутом круговом полицилиндре. Таким образом, ряд $\sum_\gamma|j_\gamma(a)|^2$ сходится. Для доказательства его равномерной сходимости в $C$ обозначим через $C_2$ какое-нибудь замкнутое подмножество $D$, содержащее $C_1$ и такое, что $V(D-C_2)<\varepsilon$, где $\varepsilon$ — некоторое заданное положительное число. Так как только конечное число образов $\gamma C_1$ множества $C_1$ пересекается с $C_2$, то, обозначив звездочкой пропуск соответствующих членов в суммах, имеем

$$t_1\varepsilon>t_1V(D-C_2)\geqslant\sum_\gamma{}^*\int_{\gamma C_1}dv\geqslant\sum_\gamma{}^*\int_N|j_\gamma(z)|^2\,dv\geqslant$$
$$\geqslant(\pi r^2)^n\sum_\gamma{}^*|j_\gamma(a)|^2. \tag{7}$$

Этим и доказана равномерная сходимость ряда (5).

## § 37. Условие компактности

Множество классов точек $D$, эквивалентных относительно преобразований группы Г, можно сделать топологическим пространством; мы будем называть его *фактор-пространством* $D$ по Г. Для этого определим окрестность как совокупность классов, состоящих из точек, эквивалентных точкам некоторой евклидовой окрестности в $D$. Из леммы 4 следует, что в фактор-пространстве $D$ по Г выполняется

аксиома отделимости Хаусдорфа. (На самом деле фактор-пространство $D$ по $\Gamma$ можно рассматривать даже как аналитическое многообразие, если сделать соответствующие предположения относительно неподвижных точек.)

К высказанным ранее предположениям об ограниченности $D$ и дискретности $\Gamma$ в $D$ добавим теперь следующее важное предположение: *фактор-пространство $D$ по $\Gamma$ компактно*. Иными словами, мы будем предполагать, что существует *замкнутое* множество $F \subset D$, содержащее точки из любого класса эквивалентных относительно $\Gamma$ точек.

Предположим, что $P$ есть замкнутое подмножество $D$ со следующим свойством: существуют регулярные в $D$ функции $f_1, \ldots, f_k$ такие, что $|f_1(z)| < 1, \ldots, |f_k(z)| < 1$, если $z$ есть внутренняя точка $P$, в то время как в каждой точке границы $P$ абсолютное значение хотя бы одной из функций $f_j$ равно 1. Тогда $P$ называется *полиэдральной областью* в $D$. Иными словами, полиэдральная область в $D$ состоит из нескольких компонент замкнутого множества точек, определенного неравенствами $|f_1(z)| \leqslant 1, \ldots, |f_k(z)| \leqslant 1$; очевидно, что эти компоненты должны целиком лежать в $D$.

Лемма 6. *Если $\Gamma$ — дискретная группа автоморфизмов ограниченной области $D$, причем фактор-пространство $D$ по $\Gamma$ компактно, то $D$ есть объединение возрастающей последовательности полиэдральных областей.*

Чтобы доказать лемму, достаточно показать, что любое замкнутое множество $C \subset D$ содержится в некоторой полиэдральной области $P$ в $D$. Без ограничения общности можно считать, что $C$ содержит множество $F$, существование которого мы предположили выше. Далее, ряд $\sum |j_\gamma(z)|^2$ сходится равномерно на $C$, и следовательно, существует такое положительное число $M$, что $|j_\gamma(z)| < M$ при любых $z \in C$ и $\gamma \in \Gamma$. Ясно, что $M > 1$, так как $j_\varepsilon(z) = 1$, где $\varepsilon$ — тождественное преобразование из $\Gamma$. Далее, $|j_\gamma(z)| < 1/M$ для всех $z \in C$ и, за исключением конечного числа, для всех $\gamma \in \Gamma$. Следовательно, также

$$|j_{\gamma^{-1}}(z)| < \frac{1}{M} \tag{8}$$

для всех $z \in C$ и для всех $\gamma \in \Gamma$ за исключением конечного числа, скажем, $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$. Обозначим через $C_1$ объединение $\gamma_1^{-1}C, \ldots, \gamma_r^{-1}C$. Так как среди $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ имеется $\varepsilon$, множество $C_1$ содержит $C$. Пусть $C_2$ — замкнутое подмножество $D$, содержащее все точки $C_1$ в качестве внутренних точек. Очевидно, что $C_2$ можно покрыть образами $\gamma F$ множества $F$. Так как только конечное число образов $\gamma F$ пересекается с $C_2$, то $C_2$ можно покрыть конечным числом образов $\gamma F$ и, тем более, конечным числом образов $\gamma C$. Пусть, например,

$$C_2 \subset \gamma_1^{-1}C + \ldots + \gamma_r^{-1}C + \gamma_{r+1}^{-1}C + \ldots + \gamma_{r+s}^{-1}C. \tag{9}$$

Тогда $C_2 - C_1$ содержится в $\gamma_{r+1}^{-1}C + \ldots + \gamma_{r+s}^{-1}C$ по определению $C_1$. Значит, если $z \in C_2 - C_1$, то мы имеем

$$z = \gamma^{-1}z_0, \qquad z_0 = \gamma z,$$

где $z_0 \in C$, а $\gamma$ означает одно из $\gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_{r+s}$. Поэтому

$$j_\gamma(z)\, j_{\gamma^{-1}}(z_0) = 1, \tag{10}$$

и так как

$$|j_{\gamma^{-1}}(z_0)| < \frac{1}{M}, \tag{11}$$

то

$$|j_\gamma(z)| > M, \tag{12}$$

где $\gamma$ означает одно из $\gamma_{r+1}, \ldots, \gamma_{r+s}$. Таким образом, для любого $z \in C_2 - C_1$ мы имеем для некоторого $k\,(1 \leqslant k \leqslant s)$

$$\left|\frac{1}{M} j_{\gamma_{r+k}}(z)\right| > 1, \tag{13}$$

в то время как для $z \in C$ и для всех $k\,(1 \leqslant k \leqslant s)$

$$\left|\frac{1}{M} j_{\gamma_{r+k}}(z)\right| < 1. \tag{14}$$

Следовательно, если $P$ — множество точек $z \in C_2$ таких, что

$$\left|\frac{1}{M} j_{\gamma_{r+k}}(z)\right| \leqslant 1, \tag{15}$$

то $P$ есть полиэдральная область в $D$, причем $C \subset P \subset C_1$. Этим наше утверждение, что $D$ есть предел полиэдральных областей, доказано.

Область $R$, в которой существует регулярная функция, не продолжаемая за пределы $R$, называется *областью регулярности*. Картан и Туллен доказали [1]), что область $R$ тогда и только тогда является областью регулярности, когда она представляет собой объединение возрастающей последовательности полиэдральных областей. Таким образом, из полученного нами результата и из теоремы Картана и Туллена следует, что $D$ есть область регулярности. Позднее мы непосредственно это установим.

## § 38. Ряды Пуанкаре

Пусть $m$ — целое положительное число, большее 1; тогда, согласно лемме 5, ряд $\sum |j_\gamma(z)|^m$ сходится равномерно на любом замкнутом подмножестве области $D$. Следовательно, если $\Phi$ — регулярная и ограниченная в $D$ функция (например, многочлен), то

$$h(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \Phi(\gamma z)\, j_\gamma^m(z) \tag{16}$$

---

[1]) См. Cartan H., Thullen P., Math. Ann., **106** (1932), 617—647.

есть функция, регулярная в $D$. Пусть $\gamma_1$ — какой-нибудь элемент группы $\Gamma$; тогда, так как

$$(\gamma\gamma_1)z = \gamma(\gamma_1 z),$$

то

$$j_{\gamma\gamma_1}(z) = j_\gamma(\gamma_1 z) j_{\gamma_1}(z). \tag{17}$$

Следовательно,

$$h(\gamma_1 z) = \sum_\gamma \Phi(\gamma\gamma_1 z) j_\gamma^m(\gamma_1 z) =$$
$$= j_{\gamma_1}^{-m}(z) \sum_\gamma \Phi(\gamma\gamma_1 z) j_{\gamma\gamma_1}^m(z) = j_{\gamma_1}^{-m}(z) h(z). \tag{18}$$

Регулярная в области $D$ функция, удовлетворяющая функциональному уравнению

$$g(\gamma z) = j_\gamma^{-m}(z) g(z) \quad \text{для всех} \quad \gamma \in \Gamma, \tag{19}$$

называется *автоморфной формой веса* $m$. Пользуясь этим понятием, доказанное выше можно сформулировать в виде следующей леммы.

Лемма 7. *Если* $\Gamma$ — *дискретная группа автоморфизмов ограниченной области* $D$, $m$ — *целое положительное число, большее* 1, $\Phi(z)$ — *функция, регулярная и ограниченная в* $D$, *то*

$$h(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \Phi(\gamma z) j_\gamma^m(z) \tag{20}$$

*есть автоморфная форма веса* $m$.

Автоморфные формы, о которых говорится в этой лемме, носят название рядов Пуанкаре.

## § 39. Существование автоморфных функций

Отношение двух автоморфных форм одинакового веса $m$ всегда есть автоморфная функция, однако, нельзя гарантировать, что это отношение не будет константой. Мы докажем сейчас, что при достаточно большом $m$ можно построить даже $n$ аналитически независимых автоморфных функций в виде отношений автоморфных форм веса $m$.

Теорема 18. *Если* $\Gamma$ — *дискретная группа аналитических автоморфизмов ограниченной области* $D$, *такая, что фактор-пространство* $D$ *по* $\Gamma$ *компактно, то существуют* $n$ *аналитически независимых функций, автоморфных относительно* $\Gamma$ *в* $D$.

Доказательство. Первым нашим шагом будет выбор точки, наиболее удобной для доказательства отличия от нуля якобиана $n$ автоморфных функций. Мы сделаем это следующим образом. Рассмотрим все точки $z$, эквивалентные некоторой данной точке $z_0$ относительно группы $\Gamma$. Мы будем говорить, что точка $\gamma z_0$ *выше* $z_0$, если $|j_\gamma(z_0)| > 1$, *одинаковой высоты с* $z_0$, если $|j_\gamma(z_0)| = 1$, *ниже* $z_0$, если $|j_\gamma(z_0)| < 1$,

Так как ряд $\sum |j_\gamma(z_0)|^2$ сходится (см. лемму 5), то существует лишь конечное число $\gamma$, для которых $\gamma z_0$ не ниже $z_0$. Среди них имеются преобразования $\gamma$, *сохраняющие объем*, т. е. такие, что $|j_\gamma(z)| = 1$ для всех $z$. (Заметим, что при $C \neq 1$ не существует $\gamma$, для которых $|j_\gamma(z)| = C$ при всех $z \in D$, так как тогда было бы $|j_{\gamma^n}(z)| = C^n$ для всех целых $n$, что невозможно ввиду леммы 5.) Выберем теперь из рассматриваемого класса эквивалентных точек такую, что в этом классе нет точек выше ее, и обозначим ее опять через $z_0$. Тогда, если $\gamma_1 = \varepsilon, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ — все сохраняющие объем преобразования из группы $\Gamma$, то точки $\gamma_1 z_0, \ldots, \gamma_r z_0$ будут иметь одинаковую с $z_0$ высоту.

Пусть высоту, одинаковую с точкой $z_0$, имеют также точки $\gamma_{r+1} z_0, \ldots, \gamma_s z_0$, причем для других $\gamma$ точка $\gamma z_0$ ниже $z_0$.

Мы утверждаем, что существует класс эквивалентных точек, для которого $s = r$, т. е. такой, что $\gamma z_0$ имеет одинаковую с $z_0$ высоту только в том случае, когда $\gamma$ есть отображение, сохраняющее объем. Действительно, предположим, что мы имеем некоторый класс эквивалентных точек, для которого $s > r$. Пусть $N$ — замкнутый полицилиндр с центром в точке $z_0$, целиком лежащий в $D$. Перенумеруем все преобразования из $\Gamma$ и найдем целое $t$ такое, что

$$\sum_{k>t} |j_{\gamma_k}(z)|^2 < \frac{1}{2} \tag{21}$$

для любого $z \in N$. Уменьшив $N$, если это необходимо, можно считать, что всюду в $N$ функции

$$j_{\gamma_{s+1}}(z), \ \ldots, \ j_{\gamma_t}(z) \tag{22}$$

по абсолютному значению меньше 1. Далее, так как функция $|j_{\gamma_s}(z)|$ не может иметь положительный минимум во внутренней точке, то должна существовать такая точка $z \in N$, что $|j_{\gamma_s}(z)| < 1$. Тогда среди точек, эквивалентных этой точке, существует не более чем $s - 1$ таких точек, которые не ниже $z$. Выберем в классе точек, эквивалентных $z$, самую высокую точку и обозначим ее опять через $z_0$. Повторив этот процесс достаточное число раз, мы получим такую точку $z_0$, что

$$|j_\gamma(z_0)| < 1 \tag{23}$$

для всех $\gamma \in \Gamma$, за исключением преобразований, сохраняющих объем.

Далее, любая точка достаточно малой окрестности $N$ обладает теми же свойствами, что легко следует из рассуждений предыдущего абзаца. Если $\gamma \neq \varepsilon$, то комплексная размерность множества нулей разности $\gamma z - z$ не превосходит $n - 1$, и следовательно, мы можем точку $z_0$ выбрать так, чтобы она не являлась неподвижной точкой ни для одного из отображений $\gamma_2, \ldots, \gamma_r$, сохраняющих объем. Наконец, выберем систему координат так, что $z_0 = 0$. Таким образом,

мы можем считать, что начало координат не является неподвижной точкой для отображений $\gamma_2, \ldots, \gamma_r$ и что

$$|j_{\gamma_k}(z)| \leqslant C < 1 \qquad (k = r+1,\ r+2,\ \ldots) \tag{24}$$

в некотором полицилиндре $M$ с центром в начале координат.

Если $\gamma$ — отображение, сохраняющее объем, то $|j_\gamma(z)| = 1$, и следовательно, $j_\gamma(z)$ есть постоянная, по абсолютному значению равная 1. Так как отображения, сохраняющие объем, образуют группу порядка $r$, то $\gamma^r = \varepsilon$. Поэтому

$$j_\gamma^r(z) = 1$$

для $\gamma$, сохраняющих объем. Значит, если мы заменим $m$ в (20) на $mr$ и положим

$$h(z,\ m) = \sum_\gamma \Phi(\gamma z) j_\gamma^{mr}(z), \tag{25}$$

то будем иметь, что

$$\lim_{m\to\infty} h(z,\ m) = \Phi(\gamma_1 z) + \ldots + \Phi(\gamma_r z) \tag{26}$$

равномерно в полицилиндре $M$.

Выберем теперь $\Phi(z)$ равной $1/r$ и положим

$$h_0(z,\ m) = \frac{1}{r} \sum_\gamma j_\gamma^{mr}(z), \tag{27}$$

тогда

$$\lim_{m\to\infty} h_0(z,\ m) = 1 \tag{28}$$

равномерно при $z \in M$. Далее, последовательно выбирая $\Phi$ в виде

$$\Phi_k(z) = z_k \Phi_0^2(z) \qquad (k = 1,\ \ldots,\ n) \tag{29}$$

и полагая

$$h_k(z,\ m) = \sum_\gamma \Phi_k(\gamma z) j_\gamma^{mr}(z) \qquad (k = 1,\ \ldots,\ n), \tag{30}$$

где $z_k$ означает $k$-ю компоненту вектора $z$, а $\Phi_0$ — многочлен, удовлетворяющий условиям

$$\Phi_0(0) = 1, \quad \Phi_0(\gamma_2 0) = \ldots = \Phi_0(\gamma_r 0) = 0, \tag{31}$$

мы будем иметь при $m$, стремящемся к бесконечности, что

$$f_k(z,\ m) = \frac{h_k(z,\ m)}{h_0(z,\ m)} \tag{32}$$

стремится к $\psi_k(z) = \Phi_k(\gamma_1 z) + \ldots + \Phi_k(\gamma_r z)$ равномерно для $z \in M$. Согласно теореме Вейерштрасса для кратных рядов [1]), частные произ-

[1]) Фукс Б. А., Теория аналитических функций многих комплексных переменных, М. — Л., 1948, стр. 29. — *Прим. перев.*

водные от $f_k(z, m)$ равномерно при $z \in M$ стремятся к частным производным от $\psi_k(z, m)$. Далее,

$$\left[\frac{\partial \psi_k}{\partial z_j}\right]_{z=0} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k, \end{cases} \tag{33}$$

и, следовательно, якобиан функций $\psi_1, \ldots, \psi_n$ равен в начале координат 1. Поэтому якобиан функций $f_1(z, m), \ldots, f_n(z, m)$ в начале координат отличен от нуля, если $m$ достаточно велико. Таким образом, функции $f_1, \ldots, f_n$ аналитически независимы для достаточно больших $m$. Теорема 18 доказана.

## § 40. Доказательство того, что $D$ — область регулярности

Мы докажем сейчас нужное нам для дальнейшего утверждение, приведенное в конце § 37.

Лемма 8. *Если $\Gamma$ — дискретная группа автоморфизмов ограниченной области $D$, такая, что фактор-пространство $D$ по $\Gamma$ компактно, то $D$ есть область регулярности.*

Для доказательства леммы достаточно найти регулярную в $D$ функцию, которая была бы неограниченной вблизи любой точки $p$, находящейся на границе $D$. Мы утверждаем, что этим свойством обладает функция из предыдущего параграфа

$$h_0(z) = h_0(z, m) = \frac{1}{r} \sum_{\gamma \in \Gamma} j_\gamma^{mr}(z), \tag{34}$$

где $m$ — столь большое число, что $h_0(z) \not\equiv 0$. Действительно, пусть $\{p_k\}$ — последовательность точек $D$, сходящаяся к $p$. Напомним, что условие компактности означает существование замкнутого множества $F \subset D$, содержащего представителей любого класса точек, эквивалентных относительно группы $\Gamma$. Значит, для каждого $k$ существует преобразование из группы $\Gamma$, скажем $\gamma_k$, такое, что $p_k = \gamma_k q_k$, где $q_k \in F$. (Нумерация $\gamma_k$ здесь не имеет ничего общего с нумерацией в предыдущем параграфе.) Так как $F$ замкнуто, то последовательность $\{q_k\}$ имеет предельную точку $q \in F$. Взяв, если это необходимо, подпоследовательность, мы можем предполагать, что $\{q_k\}$ сходится к $q$. По лемме 1, для любого $\varepsilon > 0$ существует полицилиндр $N$ с центром в точке $q$, такой, что $|\gamma z - \gamma a| < \varepsilon$ для любых двух его точек $a$ и $z$ и любого $\gamma \in \Gamma$. Выберем $a$ так, чтобы $h_0(a) \neq 0$. Для достаточно больших $k$ точка $q_k$ принадлежит $N$, и следовательно, $|\gamma a - \gamma q_k| < \varepsilon$ для всех $\gamma$; в частности, $|\gamma_k a - \gamma_k q_k| < \varepsilon$ при достаточно больших $k$. Далее, если $k$ достаточно велико, то также $|\gamma_k q_k - p| < \varepsilon$. Поэтому $|\gamma_k a - p| < 2\varepsilon$ для достаточно больших $k$. Так как $\gamma_k q \to p$ при $k \to \infty$, то любой элемент $\Gamma$ может встретиться только конечное число

раз среди $\gamma_k$. Значит, $j_{\gamma_k}(a) \to 0$, согласно лемме 5. Следовательно,

$$h_0(\gamma_k a) = j_{\gamma_k}^{-mr}(a) h_0(a)$$

стремится к бесконечности, когда $k \to \infty$, так что $h_0(z)$ — функция, неограниченная в полицилиндре радиуса $2\varepsilon$ с центром в точке $p$.

## § 41. Алгебраические соотношения. Замечания

Мы хотим доказать следующую теорему, аналогичную теореме 14 для абелевых функций.

Теорема 19. *Пусть $\Gamma$ — дискретная группа автоморфизмов ограниченной области $D$, причем фактор-пространство $D$ по $\Gamma$ компактно. Если $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — любые алгебраически независимые функции, автоморфные относительно $\Gamma$ в $D$, а $f_0$ — любая другая функция, автоморфная относительно $\Gamma$ в $D$, то $f_0$ удовлетворяет полиномиальному соотношению*

$$A(f_0, f_1, \ldots, f_n) = 0, \tag{35}$$

*степень которого по $f_0$ ограничена константой* (очевидно, зависящей от $f_1, \ldots, f_n$) [1].

Первое доказательство теоремы 14, очевидно, не переносится на рассматриваемые здесь автоморфные функции. Однако второе доказательство кажется более обнадеживающим.

Идея второго доказательства заключается в следующем. Рассмотрим $(s+1)(t+1)^n$ абелевых функций

$$f_0^{a_0} f_1^{a_1} \ldots f_n^{a_n}; \quad a_0 = 0, \ldots, s; \quad a_k = 0, \ldots, t \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Мы знаем, что каждую $f_k$ $(k = 0, \ldots, n)$ можно выразить в виде отношения двух взаимно простых функций $g_k$ и $h_k$. Это наводит на мысль рассмотреть целую функцию

$$\varphi(z) = \sum_{a_0=0}^{s} \sum_{a_1=0}^{t} \ldots \sum_{a_n=0}^{t} \alpha_{a_0, a_1, \ldots, a_n} f_0^{a_0} f_1^{a_1} \ldots f_n^{a_n} h, \tag{36}$$

где

$$h = h_0^s (h_1 h_2 \ldots h_n)^t.$$

Мы определяем постоянные $\alpha$ так, чтобы $\varphi$ имела нуль как можно более высокого порядка в некоторой точке $a$ фундаментальной области (относительно группы периодов), не являющейся особой точкой для функций $f_k$. Благодаря взаимной простоте $g_k$ и $h_k$ можно оценить отношение $h(z)/h(z-c)$, когда $z$ принадлежит некоторому полицилиндру с центром в точке $a$, а $c$ — некоторый период, такой, что

[1] Ср. Bochner S., Algebraic and linear dependence of automorfic functions in several variables, Journ. Indian Math. Soc., 16 (1952), 1—6. — *Прим. перев.*

$z-c$ принадлежит фундаментальной области. Это и принцип максимума модуля позволяют показать, что для достаточно больших $t$ так определенная $\varphi$ тождественно равна 0 при соответствующем подборе $s$.

Чтобы перенести это доказательство на автоморфные функции, мы должны заменить одну точку $a$ на некоторое конечное число точек $a_1, a_2, \ldots, a_m$, выбранных так, чтобы расстояние любой точки множества $F$ от одной из точек $a$ было мало по сравнению с расстоянием от $F$ до дополнения к $D$. Однако самая большая трудность заключается в том, что проблема Пуанкаре (см. стр. 21) для области $D$, в отличие от всего пространства, может быть неразрешимой. Иными словами, нельзя выразить любую мероморфную в $D$ функцию как отношение двух взаимно простых регулярных в $D$ функций. Мы дадим сейчас очерк одной работы А. Картана [7], которая поможет нам обойти эту трудность и провести доказательство теоремы 19 на основе примерно той же идеи, что и для абелевых функций.

## § 42. Об одной работе А. Картана

Предположим, что $f$ — функция, мероморфная в области $D$. Тогда совокупность функций $h$, регулярных в $D$ и таких, что $hf$ регулярно в $D$, составляет идеал $J$ в кольце $R_D$ функций, регулярных в $D$.

Аналогично, множество всех степенных рядов $g_a$ с центром в точке $a$, таких, что $g_a f_a$ есть целый элемент, составляет идеал $J_a$ в кольце $R_a$ степенных рядов с центром в точке $a$ (сходящихся в некоторой окрестности $a$). Пусть в окрестности точки $a$ функция $f$ имеет локальный элемент

$$f_a = \frac{p_a}{q_a},$$

где $(p_a, q_a) = 1$. Ясно, что $q_a f_a$ — целый элемент тогда и только тогда, когда $q_a \setminus g_a$. Таким образом, локальный идеал $J_a$ — всегда главный. Нас будет интересовать теперь соотношение между $J$ и локальными идеалами $J_a$.

Заметим прежде всего, что если область $D$ обладает свойством Кузена, т. е. если вторая проблема Кузена разрешима в $D$, то ответ очень прост. Действительно, тогда мы можем найти функцию $h^*$, регулярную в $D$ и такую, что $\overset{*}{h_a} \sim q_a$ в каждой точке $a \in D$. Положим $g^* = h^* f$, тогда

$$f = \frac{g^*}{h^*},$$

где $(\overset{*}{g_a}, \overset{*}{h_a}) = 1$ в каждой точке $a \in D$. Если $h$ — регулярная в $D$ функция, такая, что $hf$ регулярно в $D$, т. е. такая, что $h^* \setminus hg^*$ всюду, то, согласно лемме на стр. 20, $h^* \setminus h$. Следовательно, в этом случае идеал $J$ есть главный идеал, порожденный $h^*$. Далее, $h^*$ порождает все локальные идеалы в том смысле, что $J_a$ — главный идеал, порожденный $\overset{*}{h_a}$.

Вообще, если $S$ — связное подмножество $D$, то идеал $J_D$ в $R_D$ порождает идеал $J_S$ в кольце $R_S$ регулярных в $S$ функций. Действительно, функция, регулярная в $D$, заведомо регулярна в каждой точке $S$, поэтому любой элемент $R_D$ можно рассматривать как элемент $R_S$. Идеал $J_S$ есть множество всех конечных сумм вида $\sum \omega h$, где $h \in J_D$, а $\omega \in R_S$. Предположим, что $J_D$ имеет конечный базис, например, состоящий из функций $h_1, \ldots, h_m$, так что любой элемент $J_D$ имеет вид

$$\varphi_1 h_1 + \ldots + \varphi_m h_m,$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — функции, регулярные в $D$. Тогда $J_S$ есть совокупность функций вида

$$\omega_1 h_1 + \ldots + \omega_m h_m,$$

где $\omega_1, \ldots, \omega_m$ — произвольные элементы $R_S$. Картан рассмотрел специальный случай, когда в качестве $D$ взята полиэдральная область $P$, и доказал следующее. Пусть $f$ — функция, мероморфная в $P$, и пусть $J_a$, как и выше, означает локальный главный идеал, порожденный знаменателем $q_a$ локального элемента $f_a$. Тогда существует единственный идеал $J_P$ с конечным базисом в кольце $R_P$, порождающий все локальные идеалы $J_a$. Иными словами, существует конечное число функций $h_1, \ldots, h_m$, регулярных в $P$ и порождающих для каждого $a$ тот же идеал, что и $q_a$, в кольце степенных рядов с центром в точке $a$. Таким образом, в терминах степенных рядов, сходящихся в окрестности $a$, мы будем иметь тождества следующего типа:

$$q_a = v_{1a} h_1 + \ldots + v_{ma} h_m, \tag{37}$$

$$h_k = w_{ka} q_a \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{38}$$

где $v_{ka}$ и $w_{ka}$ — степенные ряды с центром в точке $a$.

Из результата Картана следует, что идеал $J_p = (h_1, \ldots, h_m)$, порождающий локальные идеалы в $P$, совпадает с идеалом $J$ функций, регулярных в $P$ и таких, что $hf$ также регулярно. Действительно, очевидно, что $h_k f$ регулярно в каждой точке $P$ и, следовательно, $h_k \in J$ $(k = 1, \ldots, m)$. Таким образом, $J_p \subset J$. С другой стороны, если $h$ — любой элемент $J$, то $h_a f_a = (hf)_a$ — целый степенной ряд и, значит, $h_a$ принадлежит локальному идеалу $J_a$ при любом $a \in D$. Поэтому идеал $(h_1, \ldots, h_m, h)$ порождает все $J_a$, так же как идеал $(h_1, \ldots, h_m)$. Но в $R_P$ существует только один идеал, обладающий этим свойством, и следовательно, $J_P = (h_1, \ldots, h_m, h)$. Поэтому $J \subset J_P$.

Из результата Картана также следует, что если $Q$ — полиэдральная область, содержащаяся в $P$, то идеал $J_P = (h_1, \ldots, h_m)$ в $R_P$ порождает идеал $J_Q$ в $R_Q$, соответствующий той же функции $f$. Таким образом, если $h$ регулярна в $Q$ и такова, что $hf$ также регулярна в $Q$, то $h = v_1 h_1 + \ldots + v_m h_m$, где $v_1, \ldots, v_m$ регулярны в $Q$.

## § 43. Алгебраические соотношения. Доказательство

Мы докажем сейчас теорему 19, используя результаты Картана, изложенные в предыдущем параграфе.

Обозначим через $6\rho$ расстояние от $F$ до дополнения к $D$. Пусть $C$ — множество точек, расстояние которых от $F$ не превосходит $3\rho$. Тогда $C$ содержится, скажем, в $\gamma_1 F + \ldots + \gamma_u F$, где $\gamma_1 = \varepsilon$. Пусть $Q$ — полиэдральная область, содержащая $C$, а $P$ — полиэдральная область, содержащая $\gamma_1 Q + \ldots + \gamma_u Q$.

Для $j = 1, \ldots, n$ предположим, что $h_{j1}, \ldots, h_{jp}$ порождают идеал $J_{P_j}$ в $R_P$, состоящий из всех регулярных в $P$ функций $h$, таких, что $hf_j$ также регулярно. Очевидно, что $p$ мы можем считать одним и тем же для всех $j$. Аналогично, пусть $h_{01}, \ldots, h_{0m}$ — базис идеала в $R_P$, состоящего из всех функций, регулярных в $R_P$, для которых $hf_0$ также регулярно.

Предположим, что $\gamma$ есть одно из $\gamma_1, \ldots, \gamma_u$. Тогда из $z \in Q$ вытекает, что $\gamma z \in P$.

Следовательно, функции

$$h_{jk}(\gamma z) f_j(z) = h_{jk}(\gamma z) f_j(\gamma z) \quad (1 \leqslant j \leqslant n,\ 1 \leqslant k \leqslant p)$$

регулярны в $Q$. Поэтому $h_{jk}(\gamma z)$ принадлежат идеалу кольца $R_Q$, порожденному $h_{j1}, \ldots, h_{jp}$. Следовательно, при $1 \leqslant j \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant p$ и $z \in Q$ мы имеем

$$h_{jk}(\gamma z) = v_{jk1}(z) h_{j1}(z) + \ldots + v_{jkp}(z) h_{jp}(z), \tag{39}$$

где $v$ — регулярные в $Q$ функции, зависящие от $\gamma$. Аналогично, если $\gamma$ опять означает одно из $\gamma_1, \ldots, \gamma_u$, а $z \in Q$, то

$$h_{0k}(\gamma z) = v_{0k1}(z) h_{01}(z) + \ldots + v_{0km}(z) h_{0m}(z) \tag{40}$$
$$(k = 1, \ldots, m),$$

где $v$ — регулярные в $Q$ функции, зависящие от $\gamma$.

Пусть $a_1, \ldots, a_q \in F$ — такая система точек, что любая точка $F$ находится от одной из них на расстоянии, не превосходящем $\rho/2$. В полицилиндре радиуса $\rho/2$ с центром в любой из точек $a$ существует точка, в которой все функции $f_0, f_1, \ldots, f_n$ регулярны. Если мы заменим $a$ на эти точки, то мы можем утверждать, что расстояние любой точки $F$ хотя бы от одной из новых $a$ не больше $\rho$.

Как и раньше, рассмотрим функцию вида

$$\Phi(z) = \sum_{a_0=0}^{s} \sum_{a_1=0}^{t} \ldots \sum_{a_n=0}^{t} \alpha_{a_0 a_1 \ldots a_n} f_0^{a_0} f_1^{a_1} \ldots f_n^{a_n}. \tag{41}$$

Если $q\binom{n+r}{r} < (s+1)(t+1)^n$, то мы можем определить нетривиальный набор постоянных $\alpha$ так, чтобы все частные производные

от $\Phi$ порядков, не превосходящих $r$, были равны нулю в точках $a_1, \ldots, a_q$.

Предположим, что $s$ зафиксировано и что для каждого целого положительного $r$ определено $t$ как наименьшее неотрицательное целое, при котором $(s+1)(t+1)^n > q\binom{n+r}{r}$. Иными словами, $t$ определено как функция от $r$ неравенствами

$$(s+1)t^n \leqslant q\binom{n+r}{r} < (s+1)(t+1)^n. \tag{42}$$

Рассмотрим теперь функции вида

$$H(z) = h_{01}^{b_1} \ldots h_{0m}^{b_m} \prod_{j=1}^{n} h_{j1}^{c_{j1}} \ldots h_{jp}^{c_{jp}}, \tag{43}$$

где $b_1, \ldots, b_m, c_{j1}, \ldots, c_{jp}$ — любые неотрицательные целые числа, такие, что

$$b_1 + \ldots + b_m = s, \quad c_{j1} + \ldots + c_{jp} = t \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{44}$$

Эти функции обладают тем свойством, что произведение $H(z)\Phi(z)$ регулярно всюду в $P$. Очевидно, что существует только конечное число функций $H$; обозначим их через $H_1, \ldots, H_d$.

Каждая из функций $|H_1(z)\Phi(z)|, \ldots, |H_d(z)\Phi(z)|$ имеет конечный максимум для $z \in F$. Предположим, что максимум $|H_1\Phi|$ — самый большой из них. Разделив, если это необходимо, все коэффициенты $\alpha$ на константу, мы можем считать, что максимум $|H_1\Phi|$ в $F$ равен 1. Кроме того, мы можем считать, что функция $\Phi_0 = H_1(z)\Phi(z)$ равна 1 в некоторой точке $b \in F$.

Расстояние точки $b$ от одной из точек $a$ не превосходит $\rho$; обозначим эту точку через $a$. Рассмотрим функцию $\Phi_0(a+(b-a)\lambda)$, где $\lambda$ — обычное комплексное переменное, в круге $|\lambda| \leqslant e$. Так как $e < 3$, точка $a+(b-a)\lambda$ находится на расстоянии меньше $3\rho$ от точки $a$ и, следовательно, принадлежит $C$. Далее, $\Phi_0(a+(b-a)\lambda)$ при $\lambda = 0$ имеет нуль порядка, не меньшего $r+1$. Таким образом, функция

$$\psi(\lambda) = \frac{\Phi_0(a+(b-a)\lambda)}{\lambda^{r+1}}$$

регулярна при $|\lambda| \leqslant e$, причем $\psi(1) = 1$. Следовательно, существует $\lambda_0$, $|\lambda_0| = e$, при котором

$$|\psi(\lambda_0)| \geqslant 1, \quad |\Phi_0(a+(b-a)\lambda_0)| \geqslant e^{r+1}. \tag{45}$$

Иными словами, существует $z \in C$ такое, что

$$|H_1(z)\Phi(z)| = |\Phi_0(z)| \geqslant e^{r+1}. \tag{46}$$

Так как $C \subset \gamma_1 F + \ldots + \gamma_u F$, то последнее означает, что

$$|H_1(\gamma z_0)\Phi(\gamma z_0)| \geqslant e^{r+1} \tag{47}$$

для некоторого $z_0 \in F$ и $\gamma$, равного одному из $\gamma_1, \ldots, \gamma_u$.

Пусть $M$ — максимум абсолютных значений в $F$ функций $v_{jkl}(z)$, где $1 \leqslant j \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant p$, $1 \leqslant l \leqslant p$, а $\gamma$ пробегает $\gamma_1, \ldots, \gamma_u$. Ввиду того, что таких функций только конечное число, $M$ конечно. Аналогично пусть $M_0$ — максимум абсолютных значений в $F$ функций $v_{0kl}(z)$ для $1 \leqslant k$, $l \leqslant m$ и всех $\gamma$ из $\gamma_1, \ldots, \gamma_u$. Тогда, если $\gamma$ означает любое из $\gamma_1, \ldots, \gamma_u$, а $z \in F$, то мы имеем [см. формулы (39) и (40)]

$$|H_1(\gamma z)| \leqslant (M_0 m)^s (Mp)^{nt} \max_{z \in F} \{|H_1(z)|, \ldots, |H_d(z)|\}. \tag{48}$$

Следовательно,

$$H_1(\gamma z)\Phi(z)| \leqslant (M_0 m)^s (Mp)^{nt} \max_{z \in F} \{|H_1(z)\Phi(z)|, \ldots, |H_d(z)\Phi(z)|\} \tag{49}$$

для $z \in F$, так как из (48) вытекает, что это справедливо для всех $z$, кроме $z$, являющихся особыми точками для функций $f_0, f_1, \ldots, f_n$.

Таким образом,

$$|H_1(\gamma z)\Phi(\gamma z)| = |H_1(\gamma z)\Phi(z)| \leqslant (M_0 m)^s (Mp)^{nt}, \tag{50}$$

где $z \in F$, а $\gamma$ — любое из $\gamma_1, \ldots, \gamma_u$. Но для некоторого $z_0 \in F$ и некоторого $\gamma$ из $\gamma_1, \ldots, \gamma_u$, как мы знаем,

$$|H_1(\gamma z_0)\Phi(\gamma z_0)| \geqslant e^{r+1}. \tag{51}$$

Следовательно,

$$r + 1 \leqslant s \ln(M_0 m) + tn \ln(Mp). \tag{52}$$

С другой стороны,

$$(r+1)^n \geqslant \left(\frac{r}{1}+1\right)\left(\frac{r}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{r}{n}+1\right) = \binom{n+r}{n} \geqslant \frac{s+1}{q} t^n,$$

таким образом,

$$\left(\frac{s+1}{q}\right)^{1/n} t \leqslant r + 1 \leqslant s \ln(M_0 m) + tn \ln(Mp).$$

Если мы положим $s = [q\{n \ln(Mp)\}^n]$, то будем иметь, что

$$s + 1 > q\{n \ln(Mp)\}^n, \qquad \left(\frac{s+1}{q}\right)^{1/n} > n \ln(Mp),$$

и значит, если $r$ достаточно велико (тогда и $t$ велико), мы приходим к противоречию. Таким образом, $\Phi(z)$ тождественно равна

нулю при этих предположениях. Доказательство теоремы 19 закончено. Заметим еще, что $s$ зависит только от $f_1, \ldots, f_n$, как мы и утверждали в формулировке теоремы.

## § 44. Поле автоморфных функций

При предположениях, что $D$ ограничена, $\Gamma$ дискретна и фактор-пространство $D$ по $\Gamma$ компактно, мы доказали, что если $f_1, \ldots, f_n$ — алгебраически независимые функции, автоморфные относительно $\Gamma$ в $D$, то любая другая автоморфная функция удовлетворяет алгебраическому уравнению ограниченной степени, коэффициенты которого — многочлены от $f_1, \ldots, f_n$. Выбрав автоморфную функцию $f_0$, степень которой над полем $R(f_1, \ldots, f_n)$ рациональных функций от $f_1, \ldots, f_n$ максимальна, мы видим, что поле $K$ автоморфных функций есть поле $R(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ рациональных функций от $f_0, f_1, \ldots, f_n$. Таким образом, $K$ есть простое алгебраическое расширение поля $R(f_1, \ldots, f_n)$, т. е. $K$ — поле алгебраических функций от $n$ неизвестных над полем комплексных чисел. Из теорем 18 и 19, очевидно, следует, что любые $n$ алгебраически независимых функций обязательно будут аналитически независимыми.

Значит, наши автоморфные функции $f_0, \ldots, f_n$ дают параметрическое представление некоторой алгебраической поверхности [1]. Известно, что при $n = 1$ любая алгебраическая поверхность может быть таким образом униформизирована. Для $n > 1$ до сих пор неизвестно, любая ли алгебраическая поверхность может быть униформизирована при помощи автоморфных функций.

Поле $K$ автоморфных в $D$ относительно $\Gamma$ функций можно рассматривать с другой точки зрения, как видно из следующей теоремы.

Теорема 20. *Предположим, что $\Gamma$ — дискретная группа аналитических автоморфизмов ограниченной области $D$, такая, что фактор-пространство $D$ по $\Gamma$ компактно. Тогда любая автоморфная в $D$ относительно $\Gamma$ функция может быть представлена в виде отношения двух однородных полиномов от $n+2$ фиксированных автоморфных форм одинакового веса. Эти автоморфные формы удовлетворяют однородному полиномиальному соотношению.*

Доказательство. Мы знаем, что наше поле $K$ содержит $n$ аналитически независимых функций

$$f_1(z) = \frac{h_1(z)}{h_0(z)}, \ldots, \quad f_n(z) = \frac{h_n(z)}{h_0(z)},$$

[1]) Для доказательства этого утверждения нужно показать, что 1) для любых двух точек $a$ и $b$, не эквивалентных относительно группы $\Gamma$, существует автоморфная функция, принимающая в этих точках различные значения, и 2) для каждой точки $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ поверхности $A(X_0, \ldots, X_n) = 0$ (т. е. той поверхности, которую нам нужно параметризовать) существует точка $a \in D$ такая, что $f_k(a) = X_k$ $(k = 0, \ldots, n)$. Эти утверждения в настоящей книге не доказаны.— *Прим. перев.*

где $h_0, h_1, \ldots, h_n$ — ряды Пуанкаре некоторого веса $m$. Мы знаем также, что $K = R(f_0, f_1, \ldots, f_n)$, где $f_0$ удовлетворяет уравнению

$$P_0 f_0^s + P_1 f_0^{s-1} + \ldots + P_{s-1} f_0 + P_s = 0, \tag{53}$$

в котором $P_0, P_1, \ldots, P_s$ — многочлены от $f_1, \ldots, f_n$. Пусть общая степень по $f_1, \ldots, f_n$ каждого из $P_0, \ldots, P_s$ не превосходит $t$. Тогда функция $h_0^t P_k$ регулярна в $D$ и, следовательно, является автоморфной формой веса $mt$. Умножим уравнение (53) на $h_0^{st} P_0^{s-1}$ и обозначим $h_0^t P_0 f_0$ через $h$; тогда

$$h^s + (h_0^t P_1) h^{s-1} + (h_0^{2t} P_0 P_1) h^{s-2} + \ldots + h_0^{st} P_0^{s-1} P_s = 0. \tag{54}$$

Теперь пусть $a$ — любая точка $D$ и $h = p_a/q_a$, где $(p_a, q_a) = 1$. Подставляя выражение для $h$ в уравнение (54) и умножая его на $q_a^{s-1}$, мы получаем, что $p_a^s/q_a$ регулярно в точке $a$. Следовательно, $q_a$ есть единица и $h$ регулярно всюду в $D$, так что $h$ — автоморфная форма веса $mt$. Значит, $f_0$ — отношение двух автоморфных форм $h$ и $h_0^t P_0$ веса $mt$.

Используя возможность представления любого элемента $K$ в виде рациональной функции от $f_0, f_1, \ldots, f_n$, легко получить, что любая автоморфная функция представима в виде отношения двух однородных многочленов одинакового веса от $h, h_0, h_1, \ldots, h_n$. Равенство (54) есть однородное полиномиальное соотношение между $h, h_0, h_1, \ldots, h_n$. Заметим, что $h_0, h_1, \ldots, h_n$ — ряды Пуанкаре. Можно доказать, что функция $h$ также представима в виде ряда Пуанкаре.

Глава XI

# СУЩЕСТВОВАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ГРУПП

## § 45. Об одной работе Э. Картана

В предыдущей главе мы доказали ряд общих теорем об автоморфных функциях в ограниченной области $D$. Мы предполагали там, что $\Gamma$ — дискретная группа аналитических автоморфизмов такая, что фактор-пространство $D$ по $\Gamma$ компактно. Однако проблема существования такой группы $\Gamma$ для заданной области $D$ является весьма трудной.

Для $n=1$ можно доказать, что область $D$ должна быть односвязной и, следовательно, эквивалентной, в смысле возможности аналитического отображения, внутренности единичного круга. Если $D$ — внутренность единичного круга, то самым общим аналитическим автоморфизмом $D$ является отображение $z \to (az+b)/(\bar{b}z+\bar{a})$, где $a$ и $b$ — комплексные числа, такие, что $a\bar{a}-b\bar{b}=1$. Эти отображения составляют вещественную трехмерную группу Ли, из которой, как известно, можно выделять подгруппы $\Gamma$, дискретные на $D$ и такие, что фактор-пространство $D$ по $\Gamma$ компактно (см., например, § 46).

Рассуждения, приведенные в конце § 40, показывают, что если ограниченная область $D$ имеет дискретную группу $\Gamma$ аналитических автоморфизмов такую, что фактор-пространство $D$ по $\Gamma$ компактно, то $\Gamma$ содержит бесконечное множество элементов. Следовательно, для существования такой группы необходимо, чтобы полная группа $\Omega$ аналитических автоморфизмов $D$ была бесконечна. Группа $\Omega$ есть всегда вещественная группа Ли (см. [6]), однако при $n>1$ существуют ограниченные, даже односвязные, области $D$, для которых $\Omega$ состоит из одного тождественного преобразования (см. [1], стр. 103—104).

Для $n>1$ неизвестны условия, необходимые и достаточные для того, чтобы ограниченная область $D$ допускала бесконечную (или хотя бы нетривиальную) группу $\Omega$ аналитических автоморфизмов. Однако если мы сделаем дополнительные предположения относительно группы $\Omega$, то ответ возможен. Естественным ограничением на группу $\Omega$ является требование, чтобы она была транзитивна на $D$, т. е. содержала преобразования, переводящие любую точку $D$ в любую другую точку; мы будем говорить в этом случае, что область $D$ (*аналитически*) *однородна*. Э. Картан (см. [5], стр. 111—162) показал, что при $n=2$ ограниченная однородная область эквивалентна или области $\max(|z_1|, |z_2|)<1$, или области $|z_1|^2+|z_2|^2<1$.

Кроме того, он высказал без доказательства утверждение, что при $n=3$ любая ограниченная однородная область эквивалентна одной из следующих четырех областей:

$$|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|<1, \tag{1}$$

$$\max(|z_1|, |z_2|, |z_3|)<1, \tag{2}$$

$$\max(|z_1|^2, |z_2|^2+|z_3|^2)<1, \tag{3}$$

$$Z\bar{Z}<E, \quad \text{где} \quad Z=\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 \end{pmatrix}, \quad \text{а} \quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Для бо́льших значений $n$, как обнаружил Картан, характеристика ограниченных однородных областей становится сложнее, и поэтому Картан ввел еще одно требование, которое при $n=1, 2, 3$ выполняется автоматически. Он предположил, что область $D$ *симметрична* в том смысле, что для каждой точки $a \in D$ группа $\Omega$ содержит инволюцию[1]) с единственной неподвижной точкой $a$. (Доказательство того, что ограниченная симметрическая область автоматически оказывается однородной см. в [5], стр. 134. Таким образом, ограниченная область $D$ симметрична тогда и только тогда, когда она однородна и ее группа $\Omega$ содержит хотя бы одну инволюцию с единственной неподвижной точкой $a$.) Картан дал классификацию всех ограниченных симметрических областей $D$.

Заметим, что достаточно указать только одну область из каждого класса эквивалентных (относительно аналитических отображений) областей и что достаточно рассматривать лишь неприводимые классы, т. е. классы областей, не являющихся прямыми произведениями ограниченных симметрических областей меньшей размерности. Если $n=1$, то существует только один класс, представителем которого является область $|z|<1$. При $n=2$ имеется только один неприводимый класс, представителем которого служит область $|z_1|^2+|z_2|^2<1$. Для $n=3$ только области (1) и (4) являются представителями неприводимых классов.

Вообще, существует шесть типов неприводимых областей, два из которых являются исключительными в том смысле, что встречаются только для одного значения $n$, — соответственно, для $n=16$ и $n=27$.

## § 46. Пример дискретной группы

Один из четырех главных картановских типов ограниченных симметрических областей содержит в качестве специального случая единичный шар $S$ в $n$-мерном комплексном пространстве

$$|z_1|^2+\ldots+|z_n|^2<1.$$

---

[1]) *Инволюцией* называется преобразование, квадрат которого равен тождественному преобразованию. — *Прим. перев.*

Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — фиксированные положительные числа. Рассмотрим группу всех однородных линейных преобразований $n+1$ комплексного переменного, переводящих эрмитову форму

$$\alpha_0 |t_0|^2 - \alpha_1 |t_1|^2 - \ldots - \alpha_n |t_n|^2 \tag{5}$$

в себя. Подстановка

$$z_k = \frac{\alpha_k^{1/2} t_k}{\alpha_0^{1/2} t_0} \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

связывает такие линейные преобразования с дробно-линейными преобразованиями $S$ в себя. Можно доказать, что таким образом получается полная группа аналитических автоморфизмов области $S$.

Для получения дискретной подгруппы с условием компактности мы поступим следующим образом. Возьмем абсолютно вещественное поле [1]) алгебраических чисел $K_0$, отличное от поля рациональных чисел. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — абсолютно положительные [2]) числа из $K_0$, а $\alpha_0$ — положительное число, все сопряженные которого отрицательны. Обозначим через $\rho$ абсолютно положительное число из $K_0$, и пусть $K = K_0(\sqrt{-\rho})$. Рассмотрим теперь группу линейных преобразований $n+1$ комплексного переменного с коэффициентами из кольца целых чисел поля $K$, оставляющих неизменной эрмитову форму (5). Можно доказать, что соответствующая группа $\Gamma$ дробно-линейных преобразований $z_1, \ldots, z_n$ дискретна на $S$ и что фактор-пространство $S$ по $\Gamma$ компактно.

Например, можно взять $K_0 = P(\sqrt{2})$, где $P$ обозначает поле рациональных чисел, $\alpha_1 = \ldots \alpha_n = 1$, $\alpha_0 = \sqrt{2}$, $\rho = 1$. Выбрать $K_0$ равным $P$ нельзя.

## § 47. Четыре главных типа неприводимых ограниченных симметрических областей

Мы опишем здесь четыре неисключительных типа неприводимых ограниченных симметрических областей в пространстве многих комплексных переменных.

Тип I. Пусть $p$ и $q$ — целые положительные числа; положим $p+q=m$. Рассмотрим группу комплексных линейных преобразований (зависящих от $m^2$ действительных параметров) $m$ переменных, оставляющих без изменения эрмитову форму

$$-|t_1|^2 - \ldots - |t_p|^2 + |t_{p+1}|^2 + \ldots + |t_m|^2 = t \cdot H\bar{t} = t' H \bar{t}, \tag{7}$$

---

[1]) Поле алгебраических чисел называется *абсолютно вещественным*, если все сопряженные к нему поля вещественны. — *Прим. перев.*

[2]) $\alpha$ называется *абсолютно положительным числом*, если оно и все его сопряженные — положительные числа. — *Прим. перев.*

где

$$t=\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix}, \qquad H=\begin{pmatrix} -E_p & 0 \\ 0 & E_q \end{pmatrix}.$$

Иными словами, мы рассмотрим линейные преобразования с матрицей $G$, удовлетворяющей соотношению $G'H\overline{G}=H$.

Условимся в дальнейшем обозначать число строк и столбцов матрицы верхними двойными индексами. Положим

$$G=G^{(m,\,m)}=\begin{pmatrix} A^{(p,\,p)} & B^{(p,\,q)} \\ C^{(q,\,p)} & D^{(q,\,q)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Очевидно, что $G'H\overline{G}=H$ тогда и только тогда, когда

$$A'\overline{A}-C'\overline{C}=E_p, \qquad D'\overline{D}-B'\overline{B}=E_q, \qquad A'\overline{B}=C'\overline{D}. \tag{9}$$

Пусть матрица

$$U=\begin{pmatrix} V^{(p,\,q)} \\ W^{(q,\,q)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} \tag{10}$$

пробегает все матрицы, состоящие из $m$ строк и $q$ столбцов, такие, что $U'H\overline{U}>0$. Иными словами, $V$ пробегает все матрицы из $p$ строк и $q$ столбцов, а $W$ пробегает квадратные матрицы порядка $q$ такие, что

$$W'\overline{W}>V'\overline{V}.$$

Взаимно однозначное отображение $U\to GU=U_1$ переводит это множество матриц в себя, так как

$$U_1'H\overline{U}_1=U'G'H\overline{G}\,\overline{U}=U'H\overline{U}.$$

Любая из матриц $W$ невырождена, ибо в противоположном случае существовал бы ненулевой $q$-мерный вектор $z$ такой, что $Wz=0$, и мы получили бы, рассматривая $z$ как матрицу из $q$ строк и одного столбца,

$$0=z'W'\overline{W}\,\overline{z}>z'V'\overline{V}\,\overline{z}=(Vz)'\overline{(Vz)}\geqslant 0.$$

Рассмотрим теперь множество матриц $Z^{(p,\,q)}=VW^{-1}$. Условие $U'H\overline{U}>0$, или $W'\overline{W}>V'\overline{V}$, переходит в $Z'\overline{Z}<E$. Любой диагональный элемент матрицы $Z'\overline{Z}$ меньше 1, так что сумма квадратов модулей элементов $Z$ не превосходит $q$. Таким образом, совокупность матриц $Z^{(p,\,q)}$ таких, что $Z'\overline{Z}<E_q$, образует ограниченную область в $pq$-мерном комплексном пространстве. Преобразование

$$U\to GU=U_1=\begin{pmatrix} V_1 \\ W_1 \end{pmatrix}$$

переходит в преобразование

$$Z \to Z_1 = V_1 W_1^{-1} = (AV + BW)(CV + DW)^{-1} = \\ = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}. \quad (11)$$

Таким образом, область $Z'\bar{Z} < E_q$ инвариантна относительно группы преобразований $Z \to (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$, где

$$A'\bar{A} - C'\bar{C} = E_p, \quad D'\bar{D} - B'\bar{B} = E_q, \quad A'\bar{B} = C'\bar{D}. \quad (12)$$

При переходе от группы матриц $G$ к группе дробно-линейных преобразований мы потеряли один действительный параметр, так как если $\eta$ — комплексное число, по модулю равное 1, то два преобразования

$$Z \to (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \quad \text{и} \quad Z \to (\eta AZ + \eta B)(\eta CZ + \eta D)^{-1}$$

совпадают. (Иными словами, однопараметрическая подгруппа, состоящая из матриц $G$ вида $\eta E_m$, где $|\eta| = 1$, переходит в тождественное отображение, причем эта подгруппа есть полный прообраз тождественного преобразования.) Поэтому наша группа преобразований зависит от $m^2 - 1$ действительных параметров. Можно доказать, что эта группа в рассматриваемой области транзитивна; кроме того, она симметрична, ибо содержит инволюцию $Z \to -Z$. (Более обще, если $\vartheta$ — действительное число, то группа содержит преобразование $Z \to e^{i\vartheta} Z$, получаемое при $A = e^{i\vartheta}\eta E_p$, $B = C = 0$, $D = \eta E_q$, где $|\eta| = 1$.) Можно также доказать, что наша группа есть полная группа аналитических автоморфизмов области $Z'\bar{Z} < E_q$. Если $q = 1$, то мы получаем шар $S$, который мы рассматривали в предыдущем параграфе. Можно показать, что если переменить $p$ и $q$ местами, то снова получаются те же область и группа (см. § 49, лемму 13).

Тип II. Предположим, что $p = q \geqslant 2$, и рассмотрим подгруппу группы линейных преобразований $m$ переменных, введенной при описании типа I. А именно, кроме того, что наши линейные преобразования не меняют эрмитову форму

$$-|t_1|^2 - \ldots - |t_p|^2 + |t_{p+1}|^2 + \ldots + |t_{2p}|^2, \quad (13)$$

мы предположим, что они не меняют квадратичную форму

$$2t_1 t_{p+1} + 2t_2 t_{p+2} + \ldots + 2t_p t_{2p} = t \cdot Kt = t'Kt, \quad (14)$$

где

$$K = \begin{pmatrix} 0 & E_p \\ E_p & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы рассматриваем линейные преобразования, матрицы $G$ которых удовлетворяют условиям

$$G'H\bar{G} = H, \quad G'K\bar{G} = K. \quad (15)$$

Если положить

$$J = K^{-1}H = \begin{pmatrix} 0 & E_p \\ E_p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E_p & 0 \\ 0 & E_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_p \\ -E_p & 0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

то условия (15), накладываемые на $G$, можно заменить следующими:

$$G'H\overline{G} = H, \quad J\overline{G} = GJ. \tag{17}$$

Действительно, если $G'H\overline{G} = H$ и $G'KG = K$, то

$$G^{-1}J\overline{G} = G^{-1}K^{-1}H\overline{G} = (G'KG)^{-1}(G'H\overline{G}) = K^{-1}H = J;$$

с другой стороны, из $G'H\overline{G} = H$ и $J\overline{G} = GJ$ следует, что

$$G'KG = G'HJ^{-1}G = (G'H\overline{G})(G^{-1}J\overline{G})^{-1} = HJ^{-1} = K.$$

Положим

$$G = \begin{pmatrix} A^{(p,p)} & B^{(p,p)} \\ C^{(p,p)} & D^{(p,p)} \end{pmatrix},$$

тогда (как и при описании типа I) условие $G'H\overline{G} = H$ будет эквивалентно равенствам

$$A'\overline{A} - C'\overline{C} = E_p = D'\overline{D} - B'\overline{B}, \quad A'\overline{B} = C'\overline{D}, \tag{18}$$

а условие $J\overline{G} = GJ$ — равенствам

$$B = -\overline{C}, \quad D = \overline{A}. \tag{19}$$

Следовательно, соотношения (17) выполняются тогда и только тогда, когда

$$B = -\overline{C}, \quad D = \overline{A}, \quad A'\overline{A} - C'\overline{C} = E_p, \quad A'C = -C'A. \tag{20}$$

Так как $A'\overline{A} = C'\overline{C} + E_p > 0$, то $A$ невырождена, и предыдущие условия можно записать следующим образом:

$$B = -\overline{C}, \quad D = \overline{A}, \quad CA^{-1} = -(CA^{-1})',$$
$$E_p - (CA^{-1})'\overline{(CA^{-1})} = (A^{-1})'\overline{(A^{-1})}. \tag{21}$$

Значит, самую общую матрицу $G$ можно получить следующим образом: берем любую кососимметрическую матрицу $T^{(p,p)}$ такую, что $T'\overline{T} < E_p$, находим матрицу $A_0^{(p,p)}$, такую, что $(A_0^{-1})'\overline{(A^{-1})} = E_p - T'\overline{T}$, так что любая $A^{(p,p)}$, для которой $(A^{-1})'\overline{(A^{-1})} = E_p - T'\overline{T}$, имеет вид $A_0O$, где $O^{(p,p)}$ — унитарная матрица, и затем определяем матрицу $G$ соотношениями

$$A = A_0O, \quad C = TA = TA_0O, \quad D = \overline{A} = \overline{A}_0\overline{O},$$
$$B = -\overline{C} = -\overline{T}\overline{A}_0\overline{O}. \tag{22}$$

Таким образом, число вещественных параметров группы матриц $G$ равно $p(p-1)+p^2=p(2p-1)$. Пусть

$$U=\begin{pmatrix} V^{(p,p)} \\ W^{(p,p)} \end{pmatrix}$$

пробегает матрицы, состоящие из $2p$ строк и $p$ столбцов и такие, что $U'H\overline{U}>0$ и $U'KU=0$. Иными словами, пусть $V$ пробегает все квадратные матрицы порядка $p$, а $W$ — квадратные матрицы порядка $p$ такие, что $W'\overline{W}>V'\overline{V}$ и $V'W=-W'V$. Очевидно, что отображения $U\to GU$ сохраняют как $U'H\overline{U}$, так и $U'KU$, т. е. переводят множество матриц $U$ в себя.

Так как каждая матрица $W$ невырождена, то условия, накладываемые на матрицы $V$ и $W$, можно записать в виде

$$(VW^{-1})'(\overline{VW^{-1}})<E_p, \quad (VW^{-1})'=-VW^{-1}.$$

Значит, матрица $Z^{(p,p)}=VW^{-1}$ пробегает область

$$Z'\overline{Z}<E_p, \quad Z'=-Z. \tag{23}$$

Соотношения (23) определяют, очевидно, в $p(p-1)/2$-мерном комплексном пространстве ограниченную область. Эта область инвариантна относительно группы аналитических преобразований

$$Z\to(AZ+B)(CZ+D)^{-1}, \tag{24}$$

где $A$, $B$, $C$, $D$ определены выше. Так же как для областей типа I, эта группа аналитических преобразований имеет меньше параметров, чем соответствующая группа матриц $G$. (Например, при $p=2$ трехпараметрическая подгруппа, состоящая из тех $G$, для которых $B=C=0$, $A=\overline{D}=\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$, где $a\overline{a}+b\overline{b}=1$, переходит в тождественное преобразование.) Можно доказать, что группа аналитических преобразований (24) транзитивна в области (23); кроме того, она симметрична, так как содержит инволюцию $Z\to-\overline{Z}$. (Более обще, если $\vartheta$ — действительное число, то наша группа содержит преобразование $Z\to e^{i\vartheta}Z$, получающееся при $A=e^{i\vartheta/2}E_p$, $B=C=0$, $D=e^{-\vartheta/2}E_p$.) Можно также доказать, что эта группа есть полная группа аналитических отображений области $Z'\overline{Z}<E_p$, $Z'=-Z$ в себя.

Тип III. Пусть $p=q$. Рассмотрим другую подгруппу группы линейных преобразований $m$ переменных, введенной при описании типа I. Пусть кроме того, что наши линейные преобразования не меняют эрмитову форму

$$-|t_1|^2-\ldots-|t_p|^2+|t_{p+1}|^2+\ldots+|t_{2p}|^2, \tag{25}$$

они также не меняют и билинейную форму

$$(t_1u_{p+1}-u_1t_{p+1})+\ldots+(t_pu_{2p}-u_pt_{2p})=t\cdot Ju=t'Ju. \tag{26}$$

Таким образом, мы рассматриваем линейные преобразования с матрицей $G$, удовлетворяющей соотношениям

$$G'H\overline{G}=H, \quad G'JG=J. \tag{27}$$

Так как $K=-J^{-1}H$ и $J=-HK^{-1}$, то легко показать, что соотношения (27) можно заменить следующими:

$$G'H\overline{G}=H, \quad K\overline{G}=GK. \tag{28}$$

Положим

$$G=\begin{pmatrix} A^{(p,p)} & B^{(p,p)} \\ C^{(p,p)} & D^{(p,p)} \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Тогда соотношения (28) будут означать, что

$$A'\overline{A}-C'\overline{C}=E_p=D'\overline{D}-B'\overline{B}, \quad A'\overline{B}=C'\overline{D},$$
$$B=\overline{C}, \quad D=\overline{A}, \tag{30}$$

или

$$B=\overline{C}, \quad D=\overline{A}, \quad A'\overline{A}-C'\overline{C}=E_p, \quad A'C=C'A, \tag{31}$$

или

$$B=\overline{C}, \quad D=\overline{A}, \quad E-(CA^{-1})'\,\overline{(CA^{-1})}=(A^{-1})'\,\overline{(A^{-1})}$$
$$CA^{-1}=(CA^{-1})'. \tag{32}$$

Поэтому самую общую матрицу $G$ можно получить следующим способом. Берем любую симметрическую матрицу $T^{(p,p)}$ такую, что $T'\overline{T}<E_p$, и находим матрицу $A_0^{(p,p)}$, для которой $(A_0^{-1})'\,\overline{(A_0^{-1})}=E_p-T'\overline{T}$, тогда самая общая матрица $G$ определяется соотношениями

$$A=A_0O, \quad C=TA=TA_0O, \quad B=\overline{C}=\overline{T}\,\overline{A}_0\overline{O},$$
$$D=\overline{A}=\overline{A}_0\overline{O}, \tag{33}$$

где $O^{(p,p)}$ — унитарная матрица. Следовательно, число вещественных параметров группы матриц $G$ равно $p(p+1)+p^2=p(2p+1)$.

Пусть теперь

$$U=\begin{pmatrix} V^{(p,p)} \\ W^{(p,p)} \end{pmatrix} \tag{34}$$

пробегает все матрицы, имеющие $2p$ строк и $p$ столбцов, такие, что $U'H\overline{U}>0$ и $U'JU=0$, иными словами, такие, что $\overline{W}'W>\overline{V}'V$ и $V'W=W'V$. Очевидно, что отображения $U\to GU$ не меняют как $U'H\overline{U}$, так и $U'JU$, т. е. переводят множество матриц $U$ в себя.

Как и выше, каждая матрица $W$ невырождена, поэтому условия, накладываемые на $V$ и $W$, можно записать так:

$$(VW^{-1})'\,\overline{(VW^{-1})} < E_p, \quad (VW^{-1})' = VW^{-1}. \tag{35}$$

Следовательно, матрица $Z^{(p,p)} = VW^{-1}$ пробегает ограниченную область

$$Z'\overline{Z} < E_p, \quad Z' = Z \tag{36}$$

в $p(p+1)/2$-мерном комплексном пространстве. Эта область имеет $p(2p+1)$-параметрическую группу аналитических автоморфизмов

$$Z \to (AZ+B)(CZ+D)^{-1}, \tag{37}$$

где $A$, $B$, $C$ и $D$ определены выше. (Здесь единственными $G$, дающими тождественное отображение, являются $\pm E_{2p}$.) Можно доказать, что эта группа транзитивна в области (36). Далее, область (36) симметрична, так как группа (37) содержит инволюцию $Z \to -Z$. (Более обще, как и выше, группа (37) содержит преобразование $Z \to e^{i\vartheta}Z$ с любым действительным $\vartheta$, так как можно положить $A = e^{i\vartheta/2}E_p$, $B = C = 0$, $D = e^{-i\vartheta/2}E_p$.) Можно также доказать, что эта группа является полной группой аналитических автоморфизмов области (36).

Тип IV. Пусть $p$ — целое положительное число. Рассмотрим группу линейных преобразований с вещественными коэффициентами $p+2$ переменных, оставляющих на месте квадратичную форму

$$-t_1^2 - \ldots - t_p^2 + t_{p+1}^2 + t_{p+2}^2 = t \cdot Ht = t'Ht, \tag{38}$$

где

$$t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{p+2} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} -E_p & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}.$$

Другими словами, мы рассматриваем группу линейных преобразований, матрицы $G$ которых удовлетворяют соотношениям $G = \overline{G}$ и $G'HG = H$. Очевидно, что число вещественных параметров этой группы равно $(p+1)(p+2)/2$.

Множество точек $(p+2)$-мерного комплексного пространства, определяемое условиями

$$t'Ht = -t_1^2 - \ldots - t_p^2 + t_{p+1}^2 + t_{p+2}^2 = 0 \tag{39}$$

и

$$t'H\overline{t} = -|t_1|^2 - \ldots - |t_p|^2 + |t_{p+1}|^2 + |t_{p+2}|^2 > 0, \tag{40}$$

переходит в себя при взаимно однозначных преобразованиях $t \to Gt$. Заметим еще, что $t_{p+1}$ и $t_{p+2}$ оба отличны от нуля и не лежат на

одной прямой, проходящей через начало координат, так как в противном случае было бы $|t_{p+1}|^2+|t_{p+2}|^2=|t_{p+1}^2+t_{p+2}^2|$ и

$$|t_1|^2+\ldots+|t_p|^2<|t_1^2+\ldots+t_p^2|. \tag{41}$$

Следовательно, мнимая часть отношения $t_{p+1}/t_{p+2}$ отлична от нуля. Нетрудно доказать, что наше точечное множество состоит из двух компонент, каждая из которых содержит точки с определенным знаком мнимой части $t_{p+1}/t_{p+2}$. Очевидно, что преобразования нашей группы либо сохраняют знак мнимой части $t_{p+1}/t_{p+2}$ для всех точек рассматриваемого множества, либо для всех точек изменяют его на противоположный. Таким образом, линейные преобразования, сохраняющие знак мнимой части $t_{p+1}/t_{p+2}$, составляют подгруппу индекса два. Рассмотрим теперь эту подгруппу и множество точек, определяемое условиями:

$$t'Ht=0, \quad t'H\bar{t}>0, \quad \operatorname{Im}\frac{t_{p+1}}{t_{p+2}}>0. \tag{42}$$

Переходя к неоднородным координатам, мы переведем это множество в ограниченную область в $p$-мерном комплексном пространстве. Разделив первое соотношение из (42) на $(t_{p+1}+it_{p+2})^2$, получим

$$\left(\frac{t_1}{t_{p+1}+it_{p+2}}\right)^2+\ldots+\left(\frac{t_p}{t_{p+1}+it_{p+2}}\right)^2=\frac{t_{p+1}-it_{p+2}}{t_{p+1}+it_{p+2}}. \tag{43}$$

Деля второе соотношение в (42) на $|t_{p+1}+it_{p+2}|^2$ и замечая, что

$$\frac{|t_{p+1}|^2+|t_{p+2}|^2}{|t_{p+1}+it_{p+2}|^2}=\frac{|t_{p+1}-it_{p+2}|^2+|t_{p+1}+it_{p+2}|^2}{2|t_{p+1}+it_{p+2}|^2},$$

мы получаем

$$\left|\frac{t_1}{t_{p+1}+it_{p+2}}\right|^2+\ldots+\left|\frac{t_p}{t_{p+1}+it_{p+2}}\right|^2<\frac{1}{2}\left\{1+\left|\frac{t_{p+1}-it_{p+2}}{t_{p+1}+it_{p+2}}\right|^2\right\}. \tag{44}$$

Третье же условие означает, что

$$\left|\frac{t_{p+1}-it_{p+2}}{t_{p+1}+it_{p+2}}\right|<1.$$

Значит, если мы положим

$$z_k=\frac{t_k}{t_{p+1}+it_{p+2}} \qquad (k=1,\ldots,p),$$

то множество, определенное в (42), перейдет в ограниченную область

$$|z_1|^2+\ldots+|z_p|^2<\frac{1}{2}\{1+|z_1^2+\ldots+z_p^2|^2\}<1, \tag{45}$$

а наша группа линейных преобразований перейдет в $(p+1)(p+2)/2$-параметрическую группу дробно-линейных преобразований этой области

на себя. Можно доказать, что эта группа отображений транзитивна в рассматриваемой области. Наконец, если положить $G=H$, то мы получим отображение $z\to -z$, так что область (45) симметрична.

Замечание. Область типа IV при $p=2$ приводима. Напротив, остальные области всех четырех типов неприводимы, но между ними встречаются одинаковые. Как мы уже отмечали выше, перемена $p$ и $q$ местами в типе I не меняет области. Далее, единичный круг комплексной плоскости получается в типе I при $p=q=1$, в типе II — при $p=2$, в типе III — при $p=1$, в типе IV — при $p=1$. Область типа I при $p=3$, $q=1$ совпадает с областью типа II при $p=3$. Область типа I при $p=q=2$ совпадает с областью типа IV при $p=4$. Область типа III при $p=2$ совпадает с областью типа IV при $p=3$. Таким образом, мы получим различные неприводимые области, если потребуем, чтобы в типе I было $p\geqslant q$, в типе II $p\geqslant 4$, в типе III $p\geqslant 2$, в типе IV $p\geqslant 5$. Таким образом, число $\psi(n)$ классов неприводимых ограниченных симметрических областей $n$-мерного комплексного пространства равно общему числу представлений $n$ в одном из следующих видов:

$$n=pq\ (p\geqslant q),\quad n=\frac{1}{2}p(p-1)\ (p\geqslant 4),$$

$$n=\frac{1}{2}p(p+1)\ (p\geqslant 2),\quad n=p\ (p\geqslant 5),\quad n=16,\quad n=17.$$

Все неприводимые области, получающиеся этим путем, топологически (но не аналитически) эквивалентны $n$-мерному комплексному пространству.

Для получения всех ограниченных симметрических областей $n$-мерного комплексного пространства нужно взять все прямые произведения неприводимых областей, которые дают $n$-мерную область. Поэтому производящей функцией для числа $\Psi(n)$ классов ограниченных симметрических областей (как приводимых, так и неприводимых) $n$-мерного комплексного пространства является функция

$$\frac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{\psi(n)}}.$$

Методом Харди и Рамануджана[1]) нетрудно доказать, что

$$\Psi(n)=e^{(1+o(1))(\zeta(3)n\ln n)^{1/2}}.$$

---

[1]) Hardy G., Ramanujan S., Asymptotic formulae for the distribution of integers of various types, Proc. London Math. Soc. (2), 16 (1917), 112—132 или Coll. Papers of S. Ramanujan, pp. 245—261.

## § 48. Некоторые замечания о дискретных группах

Пусть $\Omega$ — топологическая группа с элементами $\omega$, а $R$ — хаусдорфово пространство, точки которого будем обозначать $d$, $s$ или $r$. Предположим, что нам задано непрерывное представление $\Omega$ в виде транзитивной группы гомеоморфных преобразований $R$; иными словами, мы предполагаем: 1) каждому $\omega$ соответствует отображение $s = r\omega$ пространства $R$ на себя, 2) $(r\omega_1)\omega_2 = r(\omega_1\omega_2)$, 3) отображение $(r, \omega) \to r\omega$ произведения $R \times \Omega$ на $R$ непрерывно и 4) для любых точек $d$ и $r$ существует $\rho \in \Omega$ такое, что $d\rho = r$. Мы не предполагаем, что различным элементам $\Omega$ соответствуют различные отображения $R$. Для фиксированного $d \in R$ множество всех $\delta \in \Omega$ таких, что $d\delta = d$, образует замкнутую подгруппу $\Delta$ группы $\Omega$. Если $d\rho = r$, то $\delta\rho$, где $\delta$ пробегает всю подгруппу $\Delta$, есть общий вид элементов $\Omega$, переводящих $d$ в $r$; другими словами, правый смежный класс $\Delta\rho$ в точности совпадает с совокупностью элементов $\Omega$, переводящих $d$ в $r$. Таким образом, мы имеем взаимно однозначное соответствие между правыми смежными классами по подгруппе $\Delta$ и точками $R$. Под $\Delta \setminus \Omega$ мы будем понимать пространство правых смежных классов по $\Delta$, топологизированное обычным способом[1]). Указанное выше взаимно однозначное соответствие, очевидно, непрерывно переводит $\Delta \setminus \Omega$ в $R$. Оно будет гомеоморфизмом, если мы дополнительно предположим, что отображения $\omega \to d\omega$ открыты; мы условимся говорить в этом случае, что наше непрерывное представление *открыто*. Это будет всегда, если, например, $\Omega$ компактна (случай, который для нас не интересен) или если $\Omega$ — группа Ли. (Последнее можно доказать методом, использованным в монографии Л. С. Понтрягина для доказательства теоремы 13[2]).) Так как при выполнении условия открытости $R$ и $\Delta \setminus \Omega$ гомеоморфны, то отображение $r \to r\omega$ пространства $R$ на себя можно рассматривать как автоморфизм пространства $\Delta \setminus \Omega$, переводящий смежный класс $\Delta\rho$ в смежный класс $\Delta\rho\omega$.

С другой стороны, если $\Delta$ — любая замкнутая подгруппа топологической группы $\Omega$, то преобразования $\Delta\rho \to \Delta\rho\omega$, $\omega \in \Omega$ определяют непрерывное открытое представление $\Omega$ в виде транзитивной группы гомеоморфных преобразований пространства $\Delta \setminus \Omega$ на себя.

Из предыдущего абзаца ясно, что таким способом можно получить любое открытое непрерывное представление $\Omega$ в виде транзитивной группы гомеоморфных преобразований хаусдорфова пространства.

Пусть $\Gamma$ — подгруппа с элементами $\gamma$ топологической группы $\Omega$. Отображения $\Delta\rho \to \Delta\rho\gamma$ дают, очевидно, представление $\Gamma$ преобразованиями пространства смежных классов $\Delta \setminus \Omega$. Условимся называть это представление *дискретным* в том и только в том случае, когда $\Gamma$

---

[1]) Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, М. — Л., 1938, стр. 71.

[2]) Arens R., Amer. Journ. Math., 68 (1946), 607 и Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, М. — Л., 1938, стр. 77.

состоит из бесконечного числа элементов, а множество правых смежных классов $\{\Delta\rho\gamma_n\}$ при любой последовательности $\{\gamma_n\}$ различных элементов $\Gamma$ и любом смежном классе $\Delta\rho$ не имеет предельных точек в $\Delta\setminus\Omega$. Последнее условие эквивалентно такому: если $\{\delta_n\}$ — произвольная последовательность элементов $\Delta$, то последовательность $\{\delta_n\rho\gamma_n\}$ не имеет предельных точек в $\Omega$. В частности, последовательность $\{\gamma_n\}$ элементов $\Gamma$ не может иметь предельных точек в $\Omega$, так что $\Gamma$ есть дискретная подгруппа $\Omega$. Однако, вообще говоря, неверно, что любая дискретная подгруппа $\Gamma\subset\Omega$ дискретна на любом пространстве смежных классов $\Delta\setminus\Omega$. Тем не менее, она должна быть дискретна на $\Delta\setminus\Omega$ для компактных $\Delta$, как показывает следующая лемма.

Лемма 9. *Если $\Gamma$ — дискретная подгруппа, а $\Delta$ — компактная подгруппа топологической группы $\Omega$, то $\Gamma$ дискретна на $\Delta\setminus\Omega$.*

Доказательство. Допустим, что $\{\gamma_n\}$ — такая последовательность различных элементов $\Gamma$, для которой последовательность правых смежных классов $\{\Delta\rho\gamma_n\}$ имеет предельную точку $\Delta\beta$ в $\Delta\setminus\Omega$. Рассмотрим окрестности: $M$ — элемента $\beta$ и $N$ — единицы $\varepsilon$, такие, что $M^{-1}N^{-1}NM$ не содержит элементов $\Gamma$, отличных от единицы $\varepsilon$. Мы имеем $\rho\gamma_n=\delta_n\omega_n$, где $\delta_n\in\Delta$, а $\omega_n\in M$ для всех достаточно больших $n$. Так как $\Delta$ компактна, то существует точка $\delta\in\Delta$ такая, что $\delta_n\in\delta N$ для бесконечного множества значений $n$. Пусть, например, $\delta_n$ и $\delta_m$ принадлежат $\delta N$, причем $m\neq n$ и $m$ и $n$ достаточно велики. Тогда $\gamma_m^{-1}\gamma_n=\omega_m^{-1}\delta_m^{-1}\delta_n\omega_n\in M^{-1}N^{-1}NM$ и, следовательно, $\gamma_m=\gamma_n$, что невозможно. Таким образом, представление $\Gamma$ в виде группы преобразований пространства $\Delta\setminus\Omega$ дискретно.

Условие компактности в лемме 9 существенно, как показывает следующая лемма.

Лемма 10. *Пусть $\Gamma$ — дискретная подгруппа топологической группы $\Omega$, такая, что пространство левых смежных классов $\Omega/\Gamma$ компактно. Тогда любая замкнутая подгруппа $\Delta\in\Omega$ такая, что $\Gamma$ дискретна на пространстве правых смежных классов $\Delta\setminus\Omega$, обязательно компактна.*

Доказательство. Пусть $\{\delta_n\}$ — некоторая последовательность элементов $\Delta$. Ввиду компактности $\Omega/\Gamma$ существует такая последовательность $\{\gamma_n\}$ элементов $\Gamma$, что последовательность $\{\delta_n\gamma_n\}$ имеет предельную точку $\delta\in\Omega$. Значит, существует подпоследовательность $\{\delta'_n\gamma'_n\}$ последовательности $\{\delta_n\gamma_n\}$, сходящаяся к $\delta$. Из условия дискретности следует тогда, что среди $\gamma'_n$ содержится только конечное число различных элементов $\Gamma$. Поэтому существуют подпоследовательность $\{\delta''_n\}$ последовательности $\{\delta'_n\}$ и элемент $\gamma$ группы $\Gamma$ такие, что последовательность $\{\delta''_n\gamma\}$ сходится к $\delta$ и, значит, $\{\delta''_n\}$ также сходится. Таким образом, подгруппа $\Delta$ компактна.

Предположение леммы 10 о компактности $\Omega / \Gamma$ можно заменить более слабым условием. А именно, пусть $\Omega$ локально компактна, так что в $\Omega$ существует единственная правоинвариантная мера[1]). Эта мера индуцирует меру в $\Omega / \Gamma$. Можно доказать (см. [15]), что в лемме 10 вместо компактности $\Omega / \Gamma$ достаточно предположить конечность меры пространства $\Omega / \Gamma$.

Таким образом, если $\Gamma$ — дискретная подгруппа локально компактной топологической группы $\Omega$, такая, что пространство левых смежных классов $\Omega / \Gamma$ компактно или, по крайней мере, имеет конечную меру, то $\Gamma$ дискретна на пространстве правых смежных классов $\Delta \setminus \Omega$ тогда и только тогда, когда подгруппа $\Delta$ компактна.

## § 49. Первый тип неприводимых ограниченных симметрических областей

При рассмотрении первого типа областей в § 47 мы исходили из топологической группы $\Omega$ квадратных матриц $G$ порядка $m$, таких что $G'H\bar{G} = H$, где

$$H = \begin{pmatrix} -E_p & 0 \\ 0 & E_q \end{pmatrix},$$

а $p$ и $q$ — целые положительные числа, причем $p + q = m$. (Заметим, что соотношение $G'H\bar{G} = H$ эквивалентно $\bar{G}HG' = H$, так как они оба эквивалентны $G'H\bar{G}H = E_m$ и $H\bar{G}HG' = E_m$.) Мы хотим показать в этом параграфе, как естественным путем прийти к области, рассматривавшейся в § 47.

Если $\Delta$ — любая замкнутая подгруппа $\Omega$, то группа $\Omega$ транзитивна в пространстве $\Delta \setminus \Omega$ правых смежных классов по $\Delta$ (отображения — это умножения справа на элементы $\gamma$); причем самая общая область, в которой $\Omega$ транзитивна, по существу получается таким способом. Пусть $\Delta$ — подгруппа $\Omega$ такая, что любая дискретная подгруппа $\Gamma$ группы $\Omega$, удовлетворяющая условию конечности объема $\Omega / \Gamma$ (по той мере на $\Omega / \Gamma$, которая индуцируется правоинвариантной мерой на $\Omega$), дискретна на $\Delta \setminus \Omega$; тогда, согласно замечанию в конце предыдущего параграфа, $\Delta$ компактна. Потребуем, далее, чтобы пространство смежных классов $\Delta \setminus \Omega$ было минимальной размерности среди обладающих тем свойством, что всякая дискретная подгруппа $\Gamma$, для которой $\Omega / \Gamma$ имеет конечный объем, дискретна на $\Omega / \Gamma$. Тогда $\Delta$ оказывается максимальной компактной подгруппой $\Omega$. Мы покажем, что максимальные подгруппы с таким свойством суть подгруппы, сопряженные группе $\Omega_u$ — пересечению $\Omega$ и унитарной группы, так что соответствующие пространства смежных классов вещественно-аналитически гомеоморфны

[1]) Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, М., 1950, стр. 44.— *Прим. перев.*

$\Omega_u \setminus \Omega$. Далее, мы покажем, что координаты в пространстве $\Omega_u \setminus \Omega$ можно ввести так, что оно станет областью $Z'\overline{Z} < E_q$ (где $Z = Z^{(p,q)}$) в $pq$-мерном комплексном пространстве, а группа $\Omega$ перейдет в группу дробно-линейных подстановок

$$Z \to (AZ + B)(CZ + D)^{-1},$$

где

$$G = \begin{pmatrix} A^{(p,p)} & B^{(p,q)} \\ C^{(q,p)} & D^{(q,q)} \end{pmatrix}.$$

Лемма 11. *Любая компактная подгруппа $\Delta$ группы $\Omega$ сопряжена с подгруппой группы $\Omega_u$, являющейся пересечением $\Omega$ и унитарной группы.*

Доказательство. Заметим, что так как $\Delta$ — компактная группа квадратных матриц порядка $m$, то существует положительная эрмитова матрица $Q^{(m,m)}$, такая, что $C'Q\overline{C} = Q$ для любой матрицы $C \in \Delta$. (В самом деле, можно положить, например,

$$Q = \int_{\Delta} C'\overline{C}\, d\omega,$$

где $C$ пробегает $\Delta$, а $d\omega$ — инвариантная мера на $\Delta$.) Далее, в $\Omega$ существует $L$ такое, что $L'Q\overline{L} = P$, где $P$ — положительная диагональная матрица. Значит, $C'P\overline{C} = P$ для любой матрицы $C \in L^{-1}\Delta L$. А тогда для $C \in L^{-1}\Delta L$ мы имеем

$$H^{-1}P = (C'H\overline{C})^{-1}(C'P\overline{C}) = \overline{C}^{-1}(H^{-1}P)\overline{C},$$

$$(H^{-1}P)^2 = \overline{C}^{-1}(H^{-1}P)^2\overline{C}. \tag{46}$$

Так как $P$ — диагональная матрица, то $(H^{-1}P)^2 = P^2$. Следовательно, $\overline{C}P^2 = P^2\overline{C}$ для $C \in L^{-1}\Delta L$. Обозначим через $p_1, \ldots, p_m$ диагональные элементы $P$ и положим $\overline{C} = (c_{jk})$, тогда

$$\begin{aligned} c_{jk}(p_j^2 - p_k^2) &= 0 \qquad (j,\ k = 1, \ldots, m), \\ c_{jk}(p_j - p_k) &= 0 \qquad (j,\ k = 1, \ldots, m), \end{aligned} \tag{47}$$

и, следовательно, $\overline{C}P = P\overline{C}$ для любой матрицы $C \in L^{-1}\Delta L$. Таким образом, для $C \in L^{-1}\Delta L$ мы имеем $P = C'P\overline{C} = C'\overline{C}P$, и, значит, $C'\overline{C} = E_m$, так что

$$L^{-1}\Delta L \subset \Omega_u, \tag{48}$$

чем и доказана лемма 11.

Из этой леммы следует, что максимальные компактные подгруппы $\Omega$ исчерпываются подгруппами, сопряженными с $\Omega_u$, поэтому доста-

точно показать, что пространство смежных классов $\Omega_u \setminus \Omega$ совпадает с областью $Z'\overline{Z} < E_q$ (где $Z = Z^{(p,q)}$) в $pq$-мерном комплексном пространстве.

Два элемента $G_1$ и $G_2$ принадлежат к одному правому смежному классу по $\Omega_u$ тогда и только тогда, когда $G_1 G_2^{-1} \in \Omega_u$, иначе говоря, когда $(G_1 G_2^{-1})' (\overline{G_1 G_2^{-1}}) = E_m$, т. е. когда $G_1' \overline{G}_1 = G_2' \overline{G}_2$. Так как вместе с $G_1$ также $G_1'$ и $\overline{G}_1$ принадлежат $\Omega$, то должно существовать взаимно однозначное соответствие между правыми смежными классами $\Omega_u G_1$ по $\Omega_u$ и некоторыми положительными эрмитовыми матрицами $F = G_1' \overline{G}_1 \in \Omega$.

Покажем, что в этом соответствии принимают участие все положительные эрмитовы матрицы, принадлежащие $\Omega$. Действительно, пусть $F$ — положительная эрмитова матрица, принадлежащая $\Omega$, т. е. пусть

$$F' = \overline{F}, \quad F > 0, \quad FHF = H. \tag{49}$$

Тогда существует матрица $L \in \Omega$ такая, что $F = L'P\overline{L}$, где $P$ — положительная диагональная матрица. Значит,

$$H = (L'P\overline{L})\, H\, (L'P\overline{L}) = L'PHP\overline{L} = L'P^2H\overline{L}.$$

Но $H = L'H\overline{L}$, поэтому $P^2 = E$, $P = E$ и, следовательно, $F = L'\overline{L}$. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между пространством $\Omega_u \setminus \Omega$ правых смежных классов и пространством положительных эрмитовых матриц $F \in \Omega$. Легко видеть, что это соответствие является вещественно-аналитическим и взаимно однозначным. Кроме того, открытое непрерывное представление $\Omega$ в виде транзитивной группы преобразований, получаемое сопоставлением каждой матрице $G \in \Omega$ отображения $\Omega_u G_1 \to \Omega_u G_1 G$ в пространстве $\Omega_u \setminus \Omega$, переходит в открытое непрерывное представление $\Omega$ в виде транзитивной группы отображений $F \to G'F\overline{G}$ пространства положительных эрмитовых матриц $F \in \Omega$. Теперь нам осталось перейти от пространства матриц $F$ к области $Z'\overline{Z} < E_q$, где $Z$ означает матрицу из $p$ строк и $q$ столбцов. Один способ для такого перехода имеется в статье [1]) автора этой книги. Мы изложим сейчас несколько иной способ.

Наше пространство матриц $F$ состоит из квадратных матриц порядка $m$, представимых в виде $G_1' \overline{G}_1$, где $G_1 \in \Omega$. Полагая $2W = F + H$, получаем, что пространство матриц $F$ (вещественно-

---

[1]) Siegel C., On the Theory of Indefinite Quadratic Forms, Ann. of Math. (2), **45** (1944), 577—622, Lemma 4.

аналитически) гомеоморфно пространству квадратных матриц $W$ порядка $m$ таких, что

$$W = \frac{1}{2}(G_1'\overline{G}_1 + H) = \frac{1}{2}(G_1'E_m\overline{G}_1 + G_1'H\overline{G}_1) =$$

$$= G_1'\frac{1}{2}(E_m + H)\,\overline{G}_1 = G_1'\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_q \end{pmatrix}\overline{G}_1, \tag{50}$$

где $G_1 \in \Omega$, иными словами, пространству матриц $W$, представимых в виде $L'\overline{L}$, где матрица $L = L^{(q,\,m)}$ состоит из последних $q$ строк произвольной матрицы из группы $\Omega$.

Далее, опять можно рассматривать открытое непрерывное представление $\Omega$ в виде транзитивной группы преобразований $W \to G'W\overline{G}$ пространства матриц $W$. Нам нужно теперь как-то параметризовать пространство смежных классов при помощи матриц $L$; затруднение, возникающее при этом, заключается в том, что мы не знаем пока, какие $L$ приводят к одинаковым $W$ (дальше мы увидим, что такими $L$ являются, например, матрицы, состоящие из последних $q$ строк матриц, принадлежащих к одному правому смежному классу по $\Omega_u$). В решении этого вопроса нам помогут следующие леммы.

Лемма 12. *Пусть матрица $W^{(m,\,m)}$ допускает представление в виде*

$$W = L'T^{(q,\,q)}\overline{L}, \tag{51}$$

*где ранг $L = L^{(q,\,m)}$ равен $q$, а $T = \overline{T}' > 0$. Тогда самым общим ее представлением указанного вида* (51) *является*

$$W = L_1'T_1\overline{L}_1,$$

*где $L_1 = RL$, $T_1 = R'^{-1}T\overline{R}^{-1}$, $R^{(q,\,q)}$ невырождена.*

С одной стороны, если $R^{(q,\,q)}$ невырождена, то $W = (RL)' \times \times (R'^{-1}T\overline{R}^{-1})(\overline{RL})$, ранг $RL$ равен $q$ и $R'^{-1}T\overline{R}^{-1}$ — положительная эрмитова матрица. С другой стороны, пусть $W = L_1'T_1L_1$, ранг $L_1$ равен $q$, а $T_1$ — положительная эрмитова матрица. Выберем $K^{(p,\,m)}$ так, чтобы матрица

$$M^{(m,\,m)} = \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix}$$

была невырождена. Тогда

$$\begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & E_q \end{pmatrix} = MM^{-1} = \begin{pmatrix} K & M^{-1} \\ L & M^{-1} \end{pmatrix},$$

так что $(LM^{-1}) = (0 \quad E_q)$. Пусть $(L_1M^{-1}) = (Q^{(q,p)} \quad R^{(q,q)})$. Тогда

$$M'^{-1}W\overline{M}^{-1} = M'^{-1}L_1'T_1\overline{L}_1\overline{M}^{-1} = (L_1M^{-1})'T_1\,(\overline{L_1M^{-1}}) =$$

$$= \begin{pmatrix} Q' \\ R' \end{pmatrix} T_1(\overline{Q} \quad \overline{R}) = \begin{pmatrix} Q'T_1\overline{Q} & Q'T_1\overline{R} \\ R'T_1\overline{Q} & R'T_1\overline{R} \end{pmatrix} \tag{52}$$

и в то же время

$$M'^{-1}W\overline{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_q \end{pmatrix} T\,(0 \quad E_q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}. \tag{53}$$

Следовательно, $R'T_1\overline{R} = T$, $R'T_1\overline{Q} = 0$. Так как $T_1$ и $T$ невырождены, то $R$ также невырождена. Поэтому $Q = 0$ и $L_1M^{-1} = (0 \quad R)$. Отсюда

$$L_1 = (0 \quad R)\,M = (0 \quad R)\begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} = RL, \quad T_1 = R'^{-1}T\overline{R}^{-1}.$$

Таким образом, лемма 12 доказана.

Лемма 13. *Если $Z$ — матрица из $p$ строк и $q$ столбцов, то соотношения $\overline{Z}'Z < E_q$ и $Z\overline{Z}' < E_p$ эквивалентны.*

Справедливость этого утверждения вытекает из тождества

$$\begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & E_q - \overline{Z}'Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_p & -Z \\ \overline{Z}' & E_q - \overline{Z}'Z \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} E_p - Z\overline{Z}' & 0 \\ 0 & E_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_p & -Z \\ \overline{Z}' & E_q - \overline{Z}'Z \end{pmatrix}. \tag{54}$$

Лемма 14. *Матрица $L^{(q,m)}$, такая, что $\overline{L}HL' = E_q$, всегда состоит из последних $q$ строк некоторой матрицы $G_1$ из $\Omega$.*

Положим $L = (C^{(q,p)} \; D^{(q,q)})$, тогда соотношение $\overline{L}HL' = E_q$ перепишется так: $\overline{D}D' - \overline{C}C' = E_q$.

Нам нужно теперь найти такие $A^{(p,p)}$ и $B^{(p,q)}$, чтобы матрица

$$G_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

удовлетворяла условию $\overline{G}_1HG_1' = H$, т. е.

$$\overline{A}A' - \overline{B}B' = E_p, \quad \overline{A}C' = \overline{B}D', \quad \overline{D}D' - \overline{C}C' = E_q. \tag{55}$$

Так как $\overline{D}D' = \overline{C}C' + E_q > 0$, то $D$ невырождена и, следовательно, условия (55), накладываемые на $A$ и $B$, можно переписать так:

$$\overline{B} = \overline{A}C'D'^{-1}, \quad \overline{A}\,(E_p - C'D'^{-1}\overline{D}^{-1}\overline{C})\,A' = E_p. \tag{56}$$

Далее, $(\overline{D}^{-1}\overline{C})(C'D'^{-1}) = E_q - \overline{D}^{-1}D'^{-1} < E_q$ и, значит, согласно лемме 13, $(C'D'^{-1})(\overline{D}^{-1}\overline{C}) < E_p$. Поэтому, если мы выберем матрицу $A$ так, чтобы

$$\overline{A}(E_p - C'D'^{-1}\overline{D}^{-1}\overline{C})A' = E_p, \tag{57}$$

а матрицу $B$ равной $A\overline{C}'\overline{D}'^{-1}$, то матрица

$$G_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

будет принадлежать $\Omega$. Лемма 14 доказана.

Мы утверждаем теперь, что пространство матриц $W^{(m,m)}$, представимых в виде $L'\overline{L}$, где $L$ состоит из последних строк любой матрицы из $\Omega$, допускает взаимно однозначное вещественно-аналитическое отображение на пространство классов эквивалентных матриц $L$ из $q$ строк и $m$ столбцов, таких, что $\overline{L}HL' > 0$ (матрицы $L$ считаются эквивалентными, если они получаются друг из друга умножением слева на невырожденную квадратную матрицу порядка $q$). В самом деле, согласно лемме 12, самое общее представление матрицы $W = L'\overline{L}$ ($L$ — матрица, состоящая из последних $q$ строк некоторой матрицы из $\Omega$) в виде $L_1'T_1\overline{L}_1$, где $T_1$ — положительная эрмитова матрица и $L_1^{(q,m)}$ имеет ранг $q$, есть

$$(RL)'(\overline{R}R')^{-1}(\overline{RL}), \quad R^{(q,q)} \text{ невырождена.} \tag{58}$$

Значит, каждая $W$ определяет класс эквивалентных матриц $RL$, где $R$ пробегает все невырожденные квадратные матрицы порядка $q$. Обратно, пусть $L$ — матрица из $q$ строк и $m$ столбцов, такая, что $\overline{L}HL' > 0$, тогда существует невырожденная матрица $R_1^{(q,q)}$ такая, что

$$E_q = \overline{R}_1(\overline{L}HL')R_1' = (\overline{R_1L})H(R_1L_1)'. \tag{59}$$

По лемме 14 существует матрица $G_1 \in \Omega$, в которой $R_1L$ составляет последние $q$ строк. Поэтому

$$W = (R_1L)'(\overline{R_1L}) = L'R_1'\overline{R}_1\overline{L} = L'(\overline{L}HL')^{-1}\overline{L}$$

принадлежит нашему $W$-пространству. Очевидно, что $L_1$ и $L_2$ дают одну и ту же матрицу $W$ тогда и только тогда, когда они принадлежат к одному классу матриц $L$, эквивалентных относительно умножения слева на невырожденные матрицы $R$. Кроме того, легко видеть, что это отображение пространства классов эквивалентных матриц $L$ на $W$-пространство обратно отображению $W$-пространства на пространство классов эквивалентных матриц $L$, которое мы рассматривали выше. Значит, между этими пространствами имеется взаимно однозначное вещественно-аналитическое соответствие. Следовательно,

группа $\Omega$ допускает открытое непрерывное представление в виде транзитивной группы преобразований $L \to LG$ пространства классов эквивалентных матриц $L$ таких, что $\overline{L}HL' > 0$. Наконец, если

$$\overline{L}' = \begin{pmatrix} V_1^{(p,\,q)} \\ V_2^{(q,\,q)} \end{pmatrix},$$

то соотношение $\overline{L}HL' > 0$ означает, что $V_2'\overline{V}_2 > V_1'\overline{V}_1$, следовательно, $V_2$ невырождена. Таким образом, мы можем считать $\overline{V}_2'^{-1}L$ представителем класса эквивалентных матриц $L$, так что наше пространство классов матриц $L$, эквивалентных относительно умножения слева на невырожденные квадратные матрицы порядка $q$, гомеоморфно (вещественно-аналитически) пространству матриц вида

$$\begin{pmatrix} V_1V_2^{-1} \\ E_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z^{(p,\,q)} \\ E_q \end{pmatrix}, \tag{60}$$

где $Z'\overline{Z} < E_q$. $W$ и $F$, соответствующие данной $Z$, определяются следующими формулами:

$$W = \begin{pmatrix} \overline{Z} \\ E_q \end{pmatrix} (E_q - Z'\overline{Z})^{-1} (Z'E_q) =$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{Z}(E_q - Z'\overline{Z})^{-1}Z' & \overline{Z}(E_q - Z'\overline{Z})^{-1} \\ (E_q - Z'\overline{Z})^{-1}Z' & (E_q - Z'\overline{Z})^{-1} \end{pmatrix}, \tag{61}$$

$$F = 2W - H = \begin{pmatrix} \dfrac{E_p + \overline{Z}Z'}{E_p - \overline{Z}Z'} & 2\overline{Z}(E_q - Z'\overline{Z})^{-1} \\ 2(E_q - Z'\overline{Z})^{-1}Z' & \dfrac{E_q + Z'\overline{Z}}{E_q - Z'\overline{Z}} \end{pmatrix}. \tag{62}$$

Если

$$\overline{G}' = \begin{pmatrix} A^{(p,\,p)} & B^{(p,\,q)} \\ C^{(q,\,p)} & D^{(q,\,q)} \end{pmatrix},$$

то отображение $L \to LG$ или $\overline{L}' \to \overline{G}'\overline{L}'$ означает, что

$$V_1 \to AV_1 + BV_2, \quad V_2 \to CV_1 + DV_2. \tag{63}$$

Для области $Z'\overline{Z} < E_q$ преобразование (63) переходит в аналитическое (комплексное) отображение

$$Z \to (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \tag{64}$$

этой области на себя. Так так наша область гомеоморфна пространству смежных классов $\Omega_u \setminus \Omega$, то она должна быть однородна относительно преобразований (64). Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 21. *Группа* $\Omega$ *матриц*

$$G=\begin{pmatrix} A^{(p,p)} & B^{(p,q)} \\ C^{(q,p)} & D^{(q,q)} \end{pmatrix} \text{ таких, что } \bar{G}\begin{pmatrix} -E_p & 0 \\ 0 & E_q \end{pmatrix} G' = \begin{pmatrix} -E_p & 0 \\ 0 & E_q \end{pmatrix},$$

*допускает открытое непрерывное представление в виде транзитивной группы дробно-линейных преобразований*

$$Z \to (AZ+B)\,(CZ+D)^{-1}$$

*области* $Z'\bar{Z} < E_q$, $Z = Z^{(p,q)}$ *на себя, причем эта область имеет минимальную размерность из всех областей, на которых любая дискретная подгруппа* $\Gamma \subset \Omega$, *такая, что объем* $\Omega / \Gamma$ *конечен, дискретна.*

Аналогично можно трактовать области типов II, III и IV § 47.

Глава XII

# МОДУЛЯРНАЯ ГРУППА СТЕПЕНИ $p$

## § 50. Неограниченная область, эквивалентная области типа III

Полная группа аналитических автоморфизмов единичного круга комплексной $t$-плоскости совпадает с группой дробно-линейных преобразований

$$t \to \frac{at+b}{\bar{b}t+\bar{a}}, \qquad a\bar{a}-b\bar{b}=1. \tag{1}$$

Если мы выполним преобразование

$$t=\frac{z-i}{z+i}, \qquad z=i\frac{1+t}{1-t}, \tag{2}$$

то единичный круг перейдет в верхнюю полуплоскость, а его группа аналитических автоморфизмов перейдет в группу дробно-линейных преобразований

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}; \qquad ad-bc=1, \qquad a,\ b,\ c,\ d \text{ вещественны}. \tag{3}$$

Попробуем обобщить это на неприводимые ограниченные симметрические области третьего типа (см. § 47). Условимся называть *обобщенным единичным кругом* область, состоящую из квадратных матриц $T$ порядка $p$, таких, что $T=T'$ и $T\bar{T}<E$. (Всюду на протяжении этой главы, если не оговорено противное, мы рассматриваем квадратные матрицы порядка $p$; в частности, $E$ обозначает единичную матрицу порядка $p$.) Заметим прежде всего, что матрица $E-T$ [1]) невырождена: действительно, пусть $x$ — записанный в столбец $p$-мерный вектор, такой, что $(E-T)x=0$, тогда $x'T=x'$ и $\bar{T}\bar{x}=\bar{x}$, так что $x'(E-T\bar{T})\bar{x}=0$ и, значит, $x$ равен 0. (Аналогично, $E+T$ также невырождена.) Таким образом, существует матрица

$$Z=i(E+T)(E-T)^{-1}=i(E-T)^{-1}(E+T). \tag{4}$$

Очевидно, что $Z'=Z$. Так как

$$\frac{1}{2i}(Z-\bar{Z})=\frac{1}{2}\{(E-T)^{-1}(E+T)+(E+\bar{T})(E-\bar{T})^{-1}\}=$$
$$=\frac{1}{2}(E-T)^{-1}\{(E+T)(E-\bar{T})+(E-T)(E+\bar{T})\}(E-\bar{T})^{-1}=$$
$$=(E-T)^{-1}(E-T\bar{T})(E-\bar{T})^{-1},$$

---

[1]) Если $T$ принадлежит обобщенному единичному кругу. — *Прим. перев.*

то из соотношения $T\overline{T} < E$ следует, что $\frac{1}{2i}(Z-\overline{Z}) > 0$. Наконец,

$$Z - iE = i\frac{2T}{E-T},^{1)} \quad Z + iE = i\frac{2E}{E-T},$$

так что матрица $Z+iE$ невырождена и

$$T = \frac{Z-iE}{Z+iE}. \tag{5}$$

С другой стороны, пусть нам дана область $\frac{1}{2i}(Z-\overline{Z}) > 0$, $Z' = Z$; мы условимся называть ее *обобщенной верхней полуплоскостью*. Тогда $Z+iE$ невырождена: действительно, пусть $x$ — записанный в столбец $p$-мерный вектор такой, что $(Z+iE)x = 0$, тогда $x'Z = -ix'$, $\overline{Z}\overline{x} = i\overline{x}$,

$$x'\frac{Z-\overline{Z}}{2i}\overline{x} = \frac{x'Z\overline{x} - x'\overline{Z}\overline{x}}{2i} = \frac{-ix'\overline{x} - ix'\overline{x}}{2i} = -x'\overline{x} \leqslant 0$$

и, следовательно, $x = 0$. Поэтому существует матрица

$$T = (Z-iE)(Z+iE)^{-1} = (Z+iE)^{-1}(Z-iE). \tag{6}$$

Очевидно, что $T' = T$. Так как

$$\begin{aligned} E - T\overline{T} &= E - (Z+iE)^{-1}(Z-iE)(\overline{Z}+iE)(\overline{Z}-iE)^{-1} = \\ &= (Z+iE)^{-1}\{(Z+iE)(\overline{Z}-iE) - (Z-iE)(\overline{Z}+iE)\}(\overline{Z}-iE)^{-1} = \\ &= (Z+iE)^{-1}\frac{2}{i}(Z-\overline{Z})(\overline{Z}-iE)^{-1}, \end{aligned} \tag{7}$$

то из условия $\operatorname{Im} Z = \frac{1}{2i}(Z-\overline{Z}) > 0$ следует, что $T\overline{T} < E$. Наконец,

$$E - T = \frac{2iE}{Z+iE}, \qquad E + T = \frac{2Z}{Z+iE},$$

так что матрица $E-T$ невырождена и

$$Z = i\frac{E+T}{E-T}. \tag{8}$$

Таким образом, обобщенный единичный круг $T = T'$, $T\overline{T} < E$ переходит в обобщенную верхнюю полуплоскость $Z = Z'$, $\operatorname{Im} Z > 0$ при преобразовании

$$T = \frac{Z-iE}{Z+iE}, \qquad Z = i\frac{E+T}{E-T}.$$

---

[1]) Подобная запись имеет смысл, если матрицы, стоящие в числителе и знаменателе, перестановочны. — *Прим. перев.*

Напомним, что обобщенный единичный круг переходит в себя при аналитических преобразованиях вида

$$T \to (AT+B)(CT+D)^{-1}, \tag{9}$$

где

$$\overline{G}HG' = H, \quad GJG' = J,$$

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix},$$

иными словами, где $A$, $B$, $C$, $D$ удовлетворяют соотношениям

$$C = \overline{B}, \quad D = \overline{A}, \quad \overline{A}A' - \overline{B}B' = E, \quad AB' = BA', \tag{10}$$

или

$$C = \overline{B}, \quad D = \overline{A}, \quad \overline{A}\{E - (\overline{A^{-1}B})(A^{-1}B)'\}A' = E,$$

$$A^{-1}B = (A^{-1}B)'. \tag{11}$$

(Соотношение $\overline{G}HG' = H$ эквивалентно $G'H\overline{G} = H$, а соотношение $GJG' = J$ эквивалентно $G'JG = J$, ибо $H^{-1} = H$ и $J^{-1} = -J$.) Самое общее отображение вида (9) можно получить следующим образом: возьмем симметрическую матрицу $S$, такую, что $E - S\overline{S} > 0$, затем найдем матрицу $A$ так, чтобы было $\overline{A}(E - S\overline{S})A' = E$, и положим $B = AS$, $C = \overline{B}$, $D = \overline{A}$. Отображение, которое получается таким способом, переводит $-S$ в нуль, откуда следует транзитивность группы преобразований (9) в обобщенном единичном круге.

Мы хотим теперь узнать, что произойдет с этой группой при переходе к обобщенной верхней полуплоскости $Z' = Z$, $\operatorname{Im} Z > 0$. С этой целью вернемся к однородной форме этой группы преобразований.

Преобразованию $T \to (AT+B)(CT+D)^{-1}$ соответствует однородное преобразование

$$\begin{pmatrix} Q \\ R \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} AQ+BR \\ CQ+DR \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad P \to GP, \tag{12}$$

где

$$P^{(2p,\,p)} = \begin{pmatrix} Q \\ R \end{pmatrix}, \quad G^{(2p,\,2p)} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

и

$$G'H\overline{G} = H, \quad G'JG = J.$$

Однородные преобразования (12) переводят в себя область

$$P'H\overline{P} > 0, \quad P'JP = 0, \tag{13}$$

или

$$R'\overline{R} - Q'\overline{Q} > 0, \quad Q'R = R'Q \tag{14}$$

(для перехода к обобщенному единичному кругу достаточно положить $T=QR^{-1}$). Чтобы получить соответствующие однородные координаты для обобщенной верхней полуплоскости, мы просто положим $P=LU$, где

$$L^{(2p,\,2p)}=\begin{pmatrix} E & -iE \\ E & iE \end{pmatrix}, \qquad U^{(2p,\,p)}=\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}.$$

Тогда $U$ будет пробегать все матрицы из $2p$ строк и $p$ столбцов такие, что

$$U'L'H\overline{L}\,\overline{U}>0, \qquad U'L'JLU=0, \tag{15}$$

или

$$U'(-2iJ)\,\overline{U}>0, \qquad U'(2iJ)\,U=0, \tag{16}$$

т. е.

$$i^{-1}(V'\overline{W}-W'\overline{V})>0, \qquad V'W=W'V, \tag{17}$$

так как $L'H\overline{L}=-2iJ$, $L'JL=2iJ$. Отображения (12) для матриц $U$ имеют вид

$$LU\to GLU, \quad \text{или} \quad U\to(L^{-1}GL)\,U, \tag{18}$$

где матрица $L^{-1}GL$ удовлетворяет следующим условиям:

$$(L^{-1}GL)'\,L'H\overline{L}\,\overline{(L^{-1}GL)}=L'H\overline{L},$$

$$(L^{-1}GL)'\,L'JL(L^{-1}GL)=L'JL. \tag{19}$$

Далее, из соотношения $i^{-1}(V'\overline{W}-W'\overline{V})>0$ следует, что матрица $W$ невырождена. Действительно, пусть $x$ — записанный в столбец $p$-мерный вектор такой, что $W'x=0$, тогда $x'W'=0=\overline{W}\overline{x}$,

$$x'\,\frac{V'\overline{W}-W'\overline{V}}{i}\,\overline{x}=0 \tag{20}$$

и, следовательно, $x=0$. Поэтому матрица $Z=VW^{-1}$ может быть любой матрицей из области $Z'=Z$, $\operatorname{Im} Z>0$, как и следовало ожидать. Так как $U$-пространство имеет группу преобразований, определенную соотношениями (18) и (19), то группой преобразований обобщенной верхней полуплоскости служит группа, состоящая из следующих отображений:

$$Z\to(A_1Z+B_1)(C_1Z+D_1)^{-1}, \tag{21}$$

где матрица

$$M^{(2p,\,2p)}=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$$

удовлетворяет условиям

$$M'J\overline{M}=J, \qquad M'JM=J,$$

или

$$\overline{M}=M, \qquad M'JM=J. \tag{22}$$

Это — так называемая симплектическая (вещественная) группа степени $p$. Так как группа отображений обобщенного единичного круга, из которой мы исходили, транзитивна, то симплектическая группа будет также транзитивна в обобщенной верхней полуплоскости. Можно доказать, что каждая из этих групп на самом деле является полной группой аналитических автоморфизмов соответствующей области (см. [13], гл. II). Легко видеть, что две симплектические матрицы $M$ дают одно и то же отображение только в том случае, когда они отличаются множителем $-1$. Можно показать, что детерминант симплектической матрицы равен 1 (см. [13], стр. 10).

## § 51. Замечания о дискретных группах в обобщенном единичном круге

Для обобщенного единичного круга $T' = T$, $T\overline{T} < E$ мы укажем здесь конструкцию дискретных групп автоморфизмов с условием компактности (т. е. таких, для которых существует компактное множество, состоящее целиком из внутренних точек обобщенного единичного круга и содержащее по крайней мере по одному представителю из каждого класса эквивалентных точек). Очевидно, что после перехода к обобщенной верхней полуплоскости мы получим дискретные группы на ней, для которых выполняются условия компактности. Однако в следующих параграфах нас главным образом будет интересовать одна дискретная группа на обобщенной верхней полуплоскости, а именно, модулярная группа степени $p$, для которой условие компактности не выполнено.

Лемма 15. *Подгруппа $\Lambda$ полной группы $\Omega$ аналитических автоморфизмов*

$$T \to (AT + B)(CT + D)^{-1},$$

*где $B = \overline{C}$, $D = \overline{A}$, $A'\overline{A} - C'\overline{C} = E$, $A'C = C'A$, дискретна на обобщенном единичном круге $T' = T$, $T\overline{T} < E$ тогда и только тогда, когда она является дискретной подгруппой группы $\Omega$.*

Очевидно, из дискретности на обобщенном единичном круге следует дискретность в группе $\Omega$.

С другой стороны, пусть мы имеем дискретную подгруппу $\Lambda$ группы $\Omega$, т. е. подгруппу, которая не имеет предельных точек в $\Omega$. Допустим, что последовательность образов какой-то точки нашей области при преобразованиях из группы $\Lambda$ имеет предельную точку, принадлежащую нашей области. Так как $\Omega$ транзитивна, то можно ограничиться рассмотрением случая, в котором образы нулевой матрицы при преобразованиях из подгруппы $\Lambda$ имеют в нашей области предельную точку $T_0$. Предположим, что

$$T \to (A_n T + B_n)(C_n T + D_n)^{-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

есть такая последовательность различных преобразований из подгруппы $\Lambda$, при которой образы нуля

$$T_n = B_n D_n^{-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

стремятся к $T_0$ при $n \to \infty$. Очевидно, что

$$E - T_n \overline{T}_n = E - T_n' \overline{T}_n = D_n'^{-1} (D_n' \overline{D}_n - B_n' \overline{B}_n) \overline{D}_n^{-1} = D_n'^{-1} \overline{D}_n^{-1}.$$

Таким образом, матрицы $D_n^{-1}$ ограничены (т. е. их элементы ограничены) при $n$, стремящемся к бесконечности, ибо $\sigma(D_n'^{-1} \overline{D}_n^{-1})$ (через $\sigma(A)$ мы обозначаем след квадратной матрицы $A$) стремится к $\sigma(E - T_0 \overline{T}_0)$. Далее, при $n$, стремящемся к бесконечности, $|D_n^{-1}|^2$ стремится к $|E - T_0 \overline{T}_0| > 0$, поэтому определитель $|D_n^{-1}|$ ограничен снизу некоторой положительной константой. Следовательно, матрицы $D_n$ ограничены. Таким образом, матрицы $B_n = T_n D_n$, $A_n = \overline{D}_n$, $C_n = \overline{B}_n$ также оказываются ограниченными, а потому последовательность

$$\begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}$$

содержит сходящуюся подпоследовательность, что противоречит предположению о дискретности $\Lambda$. Значит, совокупность образов произвольной точки обобщенного единичного круга при преобразованиях из дискретной подгруппы $\Lambda$ не имеет предельных точек внутри обобщенного единичного круга. Лемма 15 доказана.

При $p = 1$ хорошо известны три метода для получения дискретных подгрупп $\Omega$. Первый метод использует теорию униформизации алгебраических функций. Другой основан на рассмотрении неевклидова многоугольника в единичном круге, углы которого соизмеримы с $\pi$ (а стороны — дуги окружностей, ортогональных окружности единичного круга); оказывается, что группа, состоящая из произведений четного числа отражений от сторон этого многоугольника, есть дискретная группа аналитических автоморфизмов, и, следовательно, она будет дискретной на единичном круге, причем если ни один из углов этого многоугольника не равен нулю, то будет также выполнено условие компактности. Оба эти метода не годятся для $p > 1$. Однако существует третий метод, который пригоден для всех $p$.

Рассмотрим абсолютно вещественное алгебраическое числовое поле $K$, отличное от поля рациональных чисел. Пусть $\rho$ — любое положительное число из $K$, все сопряженные которого отрицательны. Положим

$$N^{(2p, 2p)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho}\, E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

тогда матрицы $G_1^{(2p, 2p)} = N^{-1} G N \in N^{-1} \Omega N$ будут удовлетворять соотношениям

$$G_1' (NHN) \overline{G}_1 = NHN, \qquad G_1' (NJN) G_1 = NJN, \tag{23}$$

или

$$G_1'H_1\overline{G}_1 = H_1, \qquad G_1'JG_1 = J, \tag{24}$$

где

$$H_1^{(2p,\,2p)} = NHN = \begin{pmatrix} -\rho E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Пусть $\sigma$ — любое абсолютно положительное число из $K$. Тогда можно доказать, что те преобразования из $\Omega$, матрицы $G$ которых таковы, что элементы матриц $G_1 = N^{-1}GN$ — целые числа абсолютно мнимого поля $K(\sqrt{-\sigma})$, образуют дискретную подгруппу $\Lambda$ группы $\Omega$, которая дискретна на области $T' = T$, $T\overline{T} < E$, причем выполнено условие компактности (см. [13], гл. V).

Очевидно, что мы получим дискретные подгруппы $\Omega$, рассматривая преобразования из $\Omega$ с матрицами, все элементы которых — целые числа из некоторого мнимого квадратичного поля. Согласно лемме 15, такие подгруппы будут дискретны на обобщенном единичном круге. Однако условие компактности для них не выполняется. Например, при $p = 1$ матрицы $G$, такие, что все элементы их — целые комплексные числа, образуют ту же дискретную подгруппу $\Omega$, которая получается из рассмотрения неевклидова треугольника с вершинами — $i$, 1, $i$; при переходе к верхней полуплоскости эта группа перейдет в подгруппу модулярной группы индекса 3.

## § 52. Некоторые замечания об абелевых функциях

Пусть, как в гл. VI — IX, $C^{(p,\,2p)} = (c_1, \ldots, c_{2p})$ означает некоторую матрицу из $p$ строк и $2p$ вещественно независимых столбцов $c_1, \ldots, c_{2p}$, и пусть поле $K_C$ абелевых функций с периодами $c_1, \ldots, c_{2p}$ невырождено. В терминах поля $K_C$ комплексные переменные $z_1, \ldots, z_p$ появляются как базис абелевых интегралов первого рода на соответствующем униформизирующем компактном аналитическом многообразии $M$ (см. стр. 91—92). Таким образом, координатный вектор

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_p \end{pmatrix} \tag{25}$$

определен с точностью до умножения слева на произвольную невырожденную матрицу $P^{(p,\,p)}$. Преобразование $z \to Pz$, очевидно, влечет замену $C \to PC$. Кроме того, если уже выбрана система координат, то образующие $c_1, \ldots, c_{2p}$ группы периодов определяются только с точностью до унимодулярного преобразования. Значит, $C$ определено с точностью до замены на $PCU$, где $P$ — любая невырожденная матрица, а $U^{(2p,\,2p)}$ — унимодулярная матрица. При такой замене матрица $A$, определенная в § 20 (стр. 49), переходит в $U'AU$.

В § 21 мы доказали, что при помощи подходящего выбора $U$ матрицу $A$ можно привести к виду

$$\pi i\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

где $D$ — диагональная матрица порядка $p$, на главной диагонали которой стоят целые положительные числа $d_1 \setminus d_2 \setminus \ldots \setminus d_p$. Если мы хотим, чтобы $A$ сохраняла вид (26), то мы должны ограничиться лишь такими унимодулярными преобразованиями $C \to CU$, для которых

$$U'FU = F, \quad \text{где} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

При заданной матрице $F$ за $C$ можно принять любую матрицу из $p$ строк и $2p$ столбцов, удовлетворяющую условиям (см. стр. 54):

$$CF^{-1}C' = 0, \qquad i^{-1}\overline{C}F^{-1}C' < 0. \tag{28}$$

Положим $C = (C_1^{(p,\,p)}\ C_2^{(p,\,p)})$, тогда соотношения (28) будут означать, что

$$C_2D^{-1}C_1' = C_1D^{-1}C_2', \qquad i^{-1}(\overline{C}_2D^{-1}C_1' - \overline{C}_1D^{-1}C_2') < 0. \tag{29}$$

В силу сказанного выше, матрицы $C_1$ и $C_2$ невырождены. Следовательно, соотношения (29) можно переписать так:

$$C_1^{-1}C_2D^{-1} = (C_1^{-1}C_2D^{-1})', \quad i^{-1}\{\overline{(C_1^{-1}C_2D^{-1})} - (C_1^{-1}C_2D^{-1})'\} < 0. \tag{30}$$

При помощи линейного преобразования переменных с матрицей $P = C_1^{-1}$ (которое сохраняет $A = \pi iF$) заменим $C$ на $C_1^{-1}C = (E\,T)$, где $T = C_1^{-1}C_2$. Таким образом, мы привели нашу матрицу периодов к нормальной форме

$$C = (E\,T^{(p,\,p)}), \tag{31}$$

где $T$ — любая матрица, удовлетворяющая условиям

$$TD^{-1} = (TD^{-1})', \qquad i^{-1}\{(TD^{-1})' - (\overline{TD^{-1}})\} > 0. \tag{32}$$

Иными словами, $T$ — любая матрица, представимая в виде $T = WD$, где $W$ принадлежит обобщенной верхней полуплоскости

$$W' = W, \qquad \operatorname{Im} W > 0. \tag{33}$$

Для данной матрицы $F$, как мы доказали на стр. 62—63, общий вид нормальной матрицы периодов, эквивалентной матрице $(E\,T_1)$, есть $(E\,T)$, где

$$T = (PT_1 + Q)(RT_1 + S)^{-1}, \quad U = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \text{ целочисленна, } U'FU = F. \tag{34}$$

В терминах $W$

$$WD = (PW_1D + Q)(RW_1D + S)^{-1}, \tag{35}$$

или

$$W = (PW_1D + Q)(DRW_1D + DS)^{-1} =$$
$$= (PW_1 + QD^{-1})(DRW_1 + DSD^{-1}). \tag{36}$$

Далее,

$$F = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = KJK,$$

$$K^{(2p,\,2p)} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Следовательно, допустимыми являются только такие матрицы

$$U^{(2p,\,2p)} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix},$$

для которых

$$U'KJKU = KJK, \tag{38}$$

или

$$(KUK^{-1})'\,J\,(KUK^{-1}) = J. \tag{39}$$

Значит, $M = KUK^{-1}$ может быть любой такой симплектической матрицей, что матрица $K^{-1}MK$ целочисленна. Так как

$$M = KUK^{-1} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & QD^{-1} \\ DR & DSD^{-1} \end{pmatrix}, \tag{40}$$

то матрицы $M$ соответствуют дробно-линейным преобразованиям (36) $W$-пространства. Эти дробно-линейные преобразования составляют группу, которая, согласно лемме 15, дискретна на обобщенной верхней полуплоскости. Однако для нее условие компактности не выполнено. Таким образом, нам нужно теперь найти фундаментальную область для этой дискретной группы. (Под *фундаментальной областью* относительно дискретной группы в некоторой области мы понимаем достаточно хорошее множество в этой области, скажем борелевское множество, содержащее по одному и только по одному представителю из каждого класса точек, эквивалентных относительно этой группы.) Действительно, тогда мы сможем выбирать представителей из каждого класса эквивалентных (т. е. соответствующих одинаковым полям абелевых функций) нормальных матриц периодов.

Функции поля $K_C$ выражаются через тэта-функции. Так как все члены рядов для тэта-функций являются аналитическими функциями от элементов $W$ и так как эти ряды сходятся равномерно на любом компактном множестве матриц $W$, таких, что $W' = W$, $\operatorname{Im} W > 0$, то

мы видим, что тэта-функции должны быть регулярными функциями от $W$ при $W$ из обобщенной верхней полуплоскости. Таким образом, функции из $K_C$ являются мероморфными функциями от $W$ (при $W$ из обобщенной верхней полуплоскости). Рассмотрим теперь неприводимое алгебраическое уравнение, связывающее те $n+1$ функций из $K_C$, через которые все остальные выражаются рационально. Подставляя постоянные значения для $z_1, \ldots, z_p$ в это уравнение, можно показать, что его коэффициенты — мероморфные функции от $W$ и что они являются автоморфными формами относительно дискретной группы, рассмотренной выше.

Нас будет интересовать тот специальный случай, когда $D$ равна $E$ (или целочисленному кратному $E$). Тогда наша дискретная группа перейдет просто в группу симплектических матриц с целыми элементами; эта группа, как уже было сказано в § 22, называется модулярной группой степени $p$.

## § 53. Фундаментальная область для модулярной группы

Модулярная группа $\Gamma$ степени $p$ состоит из преобразований

$$Z \to (AZ+B)(CZ+D)^{-1}, \tag{41}$$

где $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ целочисленна, $M'JM = J$ (или $MJM' = J$).

Так как $\Gamma$ — дискретная подгруппа симплектической группы, то она, согласно лемме 15, дискретна в обобщенной верхней полуплоскости $H$, определяемой условиями $Z' = Z$, $\operatorname{Im} Z > 0$. Так как только две матрицы, а именно, $M$ и $-M$, дают одно отображение, мы имеем точное представление фактор-группы группы модулярных матриц по подгруппе $\{E_{2p}, -E_{2p}\}$ в виде дискретной группы автоморфизмов $H$.

Ввиду того, что фактор-пространство $H$ по $\Gamma$ некомпактно, нам нужно найти в явном виде достаточно простую фундаментальную область в $H$ для $\Gamma$. Кроме того, при рассмотрении функций, автоморфных в $H$ относительно $\Gamma$, нам придется сделать некоторые предположения о поведении функций на границе $H$.

Напомним, как при $p=1$ строится фундаментальная область. Пусть точка $z_1 = (az+b)(cz+d)^{-1}$ эквивалентна точке $z$ относительно модулярной группы, тогда

$$\operatorname{Im} z_1 = \frac{\operatorname{Im} z}{(cz+d)(\bar{c}\bar{z}+d)}.$$

Для данного $z$ мы возьмем взаимно простые целые числа $c$ и $d$, дающие минимум положительной бинарной квадратичной формы $(cz+d)\times\times(\bar{c}\bar{z}+d)$, т. е. такие, что $\operatorname{Im} z_1$ имеет наибольшее возможное значение. Далее, мы найдем целые числа $a_0$ и $b_0$ такие, что $a_0 d - b_0 c = 1$. Общий вид модулярной подстановки со знаменателем $cz+d$ будет

следующий:

$$\frac{(a_0+hc)z+(b_0+hd)}{cz+d}=\frac{a_0z+b_0}{cz+d}+h,$$

где $h$ — произвольное целое число. Мы выберем $h$ таким, чтобы действительная часть рассматриваемой точки не превосходила $^1/_2$ по абсолютному значению.

Таким образом, для каждой точки верхней полуплоскости существует по крайней мере одна точка, ей эквивалентная, в замкнутой области, определенной неравенствами

$$-\frac{1}{2}\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant\frac{1}{2},$$

$$(cz+d)(c\bar{z}+d)\geqslant 1,$$

где $c$, $d$ — произвольные взаимно простые целые числа. Заметим, что из выполнения второго соотношения при $c=1$, $d=0$ (вместе с условием $-^1/_2\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant {}^1/_2$) вытекает справедливость этого соотношения для любых $c$ и $d$. Действительно, пусть

$$z\bar{z}\geqslant 1 \text{ и } -{}^1/_2\leqslant \operatorname{Re} z=(z+\bar{z})/2\leqslant {}^1/_2,$$

тогда

$$(cz+d)(c\bar{z}+d)=c^2z\bar{z}+cd(z+\bar{z})+d^2\geqslant c^2-|cd|+d^2\geqslant 1$$

для любой пары взаимно простых чисел $c$ и $d$. Таким образом, при $p=1$ для каждой точки верхней полуплоскости существует точка, эквивалентная ей относительно группы $\Gamma$ в области

$$-\frac{1}{2}\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant\frac{1}{2},\qquad z\bar{z}\geqslant 1.$$

Можно доказать, что среди внутренних точек этого множества нет точек, эквивалентных друг другу; далее, если мы удалим часть границы, в которой $\operatorname{Re} z>0$, то в оставшейся области из каждого класса эквивалентных точек будет содержаться только одна точка, и, значит, мы получим фундаментальную область в точном смысле этого слова [1]).

В общем случае положим $Z=X+iY$, где $X$ и $Y$ — вещественные матрицы. Пусть

$$X_1+iY_1=Z_1=(AZ+B)(CZ+D)^{-1} \tag{42}$$

— точка, эквивалентная точке $Z$.

---

[1]) Hurwitz A., Über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, Math. Ann., 58 (1904), 343—360.

Так как

$$Z_1-\overline{Z}_1=Z_1'-\overline{Z}_1=(ZC'+D')^{-1}(ZA'+B')-$$
$$-(A\overline{Z}+B)(C\overline{Z}+D)^{-1}=(ZC'+D')^{-1}\{(ZA'+B')(C\overline{Z}+D)-$$
$$-(ZC'+D')(A\overline{Z}+B)\}(C\overline{Z}+D)^{-1}=$$
$$=(ZC'+D')^{-1}(Z-\overline{Z})(C\overline{Z}+D)^{-1}, \tag{43}$$

то мы имеем

$$Y_1=(ZC'+D')^{-1}Y(C\overline{Z}+D)^{-1},$$
$$Y_1^{-1}=(C\overline{Z}+D)Y^{-1}(ZC'+D')=(CX+D-iCY)Y^{-1}\times$$
$$\times(XC'+D'+iYC')=Y^{-1}[XC'+D']+Y[C']. \tag{44}$$

(Под $S[L]$ мы понимаем $L'SL$, где $S$ — произвольная симметрическая матрица, а $L$ — любая матрица с тем же числом строк, что и $S$.)

Наша основная идея заключается в том, чтобы выбрать такие $C$ и $D$, при которых $|Y_1|$ был бы *максимален* (при заданной матрице $Y$), т. е. при которых значение формы $|Y^{-1}[XC'+D']+Y[C']|$ от элементов $C$ и $D$ было бы *минимальным*, и затем выяснить, к какому виду можно привести $Z$ при помощи преобразований из подгруппы $\Delta$, состоящей из модулярных подстановок, для которых $C=0$.

Соотношения, которым удовлетворяют $A$, $B$ и $D$ для преобразований из подгруппы $\Delta$, имеют вид:

$$AB'=BA', \qquad AD'=E. \tag{45}$$

Таким образом, $D$ может быть любой унимодулярной матрицей, $A=D'^{-1}$, а $B=TA'^{-1}=TD$, где $T$ — произвольная симметрическая целочисленная матрица. Значит, общий вид преобразований из $\Delta$ есть

$$Z_1=D'^{-1}ZD^{-1}+T, \tag{46}$$

где $D$ — унимодулярная, а $T$ — симметрическая целочисленная матрица.

В случае, когда $p=1$, пары $c$, $d$, соответствующие преобразованиям из правого смежного класса по $\Delta$, либо совпадают, либо отличаются знаком. В общем случае это неверно. Пусть

$$M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}, \qquad M_1=\begin{pmatrix}D_1'^{-1} & T_1D_1\\ 0 & D_1\end{pmatrix} \tag{47}$$

— матрицы преобразований, соответственно, из $\Gamma$ и $\Delta$, тогда

$$M_1M=\begin{pmatrix}* & *\\ D_1C & D_1D\end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что два элемента $\Gamma$ принадлежат к одному правому смежному классу по $\Delta$ тогда и только тогда, когда последние $p$ строк

матрицы одного из них можно получить из последних $p$ строк матрицы другого умножением слева на унимодулярную матрицу порядка $p$. Последнее умножение на элементы $\Delta$ создает возможности, которых не было при $p=1$ (так как при $p=1$ единственными унимодулярными матрицами являются $\pm E$). Действительно, кроме параллельного переноса, у нас имеется возможность заменять пару $C$, $D$ на пару $D_1C$, $D_1D$ и $Y_1^{-1}$ на $D_1Y_1^{-1}D_1'=Y_1^{-1}[D_1']$, где $D_1$ — любая унимодулярная матрица. Значит, умножение слева на элементы из $\Delta$ не изменяет $|Y_1|$ и в то же время может быть использовано для замены (до и после параллельного переноса) положительной симметрической матрицы $Y_1$ более удобной матрицей, эквивалентной $Y_1$ относительно унимодулярных подстановок.

Пусть $S^{(p,p)}$ — положительная симметрическая вещественная матрица. Применим к квадратичной форме с матрицей $S$ унимодулярное преобразование с матрицей $U^{(p,p)}$. Матрица $S$ перейдет в $U'SU=S[U]$. Унимодулярные матрицы $U$ образуют дискретную группу автоморфизмов пространства $P$ положительных вещественных симметрических матриц $S$. Так как только $\pm U$ приводят к одинаковым отображениям, то мы получаем точное представление фактор-группы группы унимодулярных матриц по подгруппе $\{E, -E\}$. Как показал Минковский, можно найти такое точечное множество $R\in P$, что его образы при унимодулярных преобразованиях покрывают все $P$ без перекрытий (кроме точек границы). Если рассматривать $p(p+1)/2$ элементов $S$ как координаты, то $R$ окажется выпуклой пирамидой, ограниченной конечным числом гиперплоскостей, проходящих через начало координат. Если матрица $S[U]$ лежит в $R$, то мы будем называть $S[U]$ *приведенной* [1]).

Применим вслед за преобразованием $M\in\Gamma$ преобразование $M_1\in\Delta$; детерминант матрицы $Y_1^{-1}=(C\bar{Z}+D)Y^{-1}(ZC'+D')$ не изменится при последнем преобразовании. Однако $M_1$ можно выбрать так, чтобы матрица $Y_1^{-1}$ была приведенной в смысле Минковского. Значит, мы можем ограничиться с самого начала только такими отображениями $M$, в результате применения которых получается приведенная матрица $Y_1^{-1}$. Мы покажем, что $|Y_1|$ имеет максимум для таких отображений.

Лемма 16. *Пусть $Z=X+iY$ — некоторый элемент обобщенной верхней полуплоскости $H$. Тогда из модулярных матриц*

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{48}$$

---

[1]) Арифметическое обоснование теории приведения дано в [12] Обоснование с точки зрения геометрии чисел имеется в [18].

[См. также Делоне Б. Н., Геометрия положительных квадратичных форм, УМН, 3—4 (1937—1938), 52—62 и Венков Б. А., О приведении положительных квадратичных форм, Изв. АН СССР, серия мат., 4 (1940), 37—52. — *Прим. перев.*]

*для которых положительная вещественная симметрическая матрица*

$$Y_1^{-1} = (C\bar{Z} + D)\, Y^{-1} (ZC' + D') = Y^{-1} [XC' + D] + Y [C'] \qquad (49)$$

*приведена и* $|Y_1^{-1}|$ *меньше некоторой заданной положительной константы* $\rho$, *можно получить только конечное число различных матриц* $(C\ D)$.

Доказательство. Пусть $y_1, \ldots, y_p$ — диагональные элементы матрицы $Y_1^{-1}$, $c_k$ есть $k$-й столбец матрицы $C'$, а $d_k$ есть $k$-й столбец матрицы $D'$, тогда

$$y_k = Y [c_k] + Y^{-1} [Xc_k + d_k] \qquad (k = 1, \ldots, p).$$

Для $c_k \neq 0$ $Y[c_k]$ ограничено снизу положительной константой, так как вектор $c_k$ имеет целочисленные компоненты, а $Y$ — фиксированная положительная симметрическая матрица. Если же $c_k = 0$, то $d_k \neq 0$, ибо в противном случае $(p+k)$-я строка $M$ состояла бы целиком из нулей; следовательно, если $c_k = 0$, то $Y^{-1}[Xc_k + d_k]$ ограничено снизу положительной константой. Во всех случаях $y_k$ ограничено снизу положительной постоянной. Минковский показал, что для положительной симметрической матрицы $S$ из области приведения $R$ произведение диагональных элементов $S$ меньше $\gamma_p |S|$, где $\gamma_n$ — положительная постоянная, зависящая только от $p$. Следовательно, если $|Y_1^{-1}| < \rho$, то

$$y_1 \ldots y_p < \gamma_p |Y_1^{-1}| < \gamma_p \rho,$$

так что $y_1, \ldots, y_p$ ограничены также и сверху. Из равенств

$$y_k = Y [c_k] + Y^{-1} [Xc_k + d_k] \qquad (k = 1, \ldots, p)$$

и из условия положительности матриц $Y$ и $Y^{-1}$ мы получаем, что для каждого столбца $C'$ и $D'$ имеется только конечное число возможностей. Лемма 16 доказана.

Пусть нам задана матрица $Z = X + iY$, тогда из леммы 16 следует, что детерминант

$$|Y_1^{-1}| = |Y^{-1}|\, |CZ + D|\, |C\bar{Z} + D|$$

достигает свою нижнюю грань для модулярных матриц

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

таких, что матрица

$$Y_1^{-1} = (C\bar{Z} + D)\, Y^{-1} (ZC' + D') = Y^{-1} [XC' + D'] + Y [C']$$

приведена; другими словами, существует такая матрица $M$, что $Y_1^{-1}$ приведена и имеет минимальный детерминант. Наконец, мы можем

найти целочисленную симметрическую матрицу $T$, такую, что вещественные части всех элементов матрицы

$$(AZ+B)(CZ+D)^{-1}+T$$

не превосходят $^1/_2$ по абсолютному значению.

Таким образом, для каждой точки из $H$ имеется эквивалентная ей (относительно группы $\Gamma$) точка в множестве $F \subset H$, состоящем из тех точек $Z=X+iY$, для которых $Y^{-1}$ приведена; определитель $|Y|$ не меньше определителя любой точки $H$, эквивалентной $Z$, и все элементы $X$ не превосходят $^1/_2$ по модулю. Согласно теории приведения Минковского, первое из этих трех условий эквивалентно конечному числу линейных однородных неравенств для элементов $Y^{-1}$, третье же условие дает $p(p+1)/2$ неравенств для элементов $X$. Второе условие означает, что модуль детерминанта $|CZ+D|$ не меньше 1, когда $(CD)$ пробегает матрицы, составленные из последних $p$ строк модулярных матриц; на первый взгляд, оно дает бесконечное число неравенств. Однако можно показать, что, как и в случае $p=1$, все эти неравенства суть следствия конечного числа из них. Можно доказать, что точечное множество $F$, определенное этим способом, содержит внутренние точки, что ни одна внутренняя точка $F$ не может быть эквивалентна другой внутренней точке $F$ и что для каждой граничной точки $F$ существует только конечное число точек $F$, ей эквивалентных. Кроме того, каждая компактная область в $H$ покрывается конечным числом образов $F$, в то же время только конечное число образов $F$ граничит с $F$. [Значит, удалив часть границы $F$, мы получим фундаментальную область в точном смысле этого слова (см. [13], гл. VI).]

Покажем, что не может существовать компактное множество $G \subset H$, содержащее представителей из каждого класса эквивалентных точек. Действительно, допустим, что $G$ — такое множество. Пусть $Z=\lambda iE$, где $\lambda$ — положительное число (которое мы потом устремим к бесконечности), и

$$Z_1=X_1+iY_1=(A\lambda iE+B)(C\lambda iE+D)^{-1}$$

— эквивалентная ей точка в $G$. Тогда

$$Y_1^{-1}=\lambda^{-1}DD'+\lambda CC'.$$

Далее, при $X+iY \in H$ справедливы неравенства $|Y^{-1}|>0$ и $\sigma(Y^{-1})>0$; следовательно, при $X+iY$ из компактного множества $G$ как $|Y^{-1}|$, так и $\sigma(Y^{-1})$ имеют положительные верхние и нижние грани. Далее,

$$\sigma(Y_1^{-1})=\lambda^{-1}\sigma(DD')+\lambda\sigma(CC').$$

Возможны два случая: либо существуют сколь угодно большие $\lambda$, для которых $C \neq 0$, либо $C=0$ для всех достаточно больших $\lambda$. В первом случае $\sigma(CC') \geqslant 1$, так как матрица $C$ целочисленна,

и поэтому $\sigma(Y_1^{-1}) \geqslant \lambda$, что ведет к противоречию. Во втором случае матрица $D$ унимодулярна, и, значит, $|Y_1^{-1}| = \lambda^{-p}$, что опять приводит к противоречию.

## § 54. Модулярные функции степени $p$

Было бы неестественно определять модулярную функцию степени $p$ просто как функцию, мероморфную в обобщенной верхней полуплоскости $H$ и инвариантную при подстановках модулярной группы Г. При $p=1$, например, под такое определение подходит $e^{J(z)}$, где $J(z)$ — обычный модулярный инвариант

$$J(z) = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} = \frac{g_2^{*3}}{g_2^{*3} - 2g_3^{*2}},$$

$$g_2 = 60 \sum_{m,n}{}' (mz+n)^{-4} = 60\zeta(4) \sum_{(c,d)=1} (cz+d)^{-4} =$$

$$= 60\zeta(4) g_2^* = \frac{2}{3}\pi^4 g_2^*,$$

$$g_3 = 140 \sum_{m,n}{}' (mz+n)^{-6} = 140\zeta(6) \sum_{(c,d)=1} (cz+d)^{-6} =$$

$$= 140\zeta(6) g_3^* = \frac{4}{27}\pi^6 g_3^*,$$

где суммирование по $m$, $n$ распространено по всем парам целых чисел, не равных одновременно нулю, а суммирование по $c$, $d$ распространено на все пары взаимно простых целых чисел. Этот пример показывает, что при таком определении модулярной функции поле модулярных функций не будет полем алгебраических функций от $p(p+1)/2$ неизвестных. Для получения аналогичных теорем об алгебраической зависимости необходимо сделать дополнительные предположения о поведении функций при приближении к границе $H$.

При $p=1$ функция $f(z)$, мероморфная в верхней полуплоскости и инвариантная относительно модулярной группы, обязательно обладает тем свойством, что $f(z+1) = f(z)$; значит, $f^*(q) = f\left(\frac{1}{2\pi i}\ln q\right)$ есть мероморфная функция от $q$ в единичном круге, из которого удалено начало координат. Мы условимся говорить, что $f(z)$ — модулярная функция, если $f^*(q)$ является мероморфной функцией во всем единичном круге. Другими словами, функция $f(z)$, мероморфная в обычной верхней полуплоскости и инвариантная относительно модулярной группы степени 1, называется модулярной функцией, если она разлагается в „ряд Лорана“ по степеням $q = e^{2\pi i z}$, сходящийся при достаточно больших $\operatorname{Im} z$ и содержащий только конечное число отрицательных степеней $e^{2\pi i z}$. При таком определении можно доказать, что любые две модулярные функции связаны алгебраическим соот-

ношением и, более того, что любая модулярная функция есть рациональная функция от $J(z)$.

Можно обобщить предыдущее определение модулярной функции на случай любого $p$, однако при таком определении не удалось пока доказать, что любые $p(p+1)/2+1$ модулярные функции алгебраически зависимы. Поэтому мы дадим определение, содержащее больше ограничений.

Вначале определим *модулярную форму* степени $p$ как функцию $f(Z)$, которая регулярна как функция от переменных $z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{pp}$ в обобщенной верхней полуплоскости $H$, ограничена в фундаментальной области $F$ и удовлетворяет функциональному уравнению

$$f(Z_1) = |CZ+D|^g f(Z) \tag{50}$$

для каждой модулярной подстановки

$$Z_1 = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}.$$

Здесь $g$ — фиксированное четное число, которое называется *весом* формы. Это определение модулярной формы находится в согласии с определением автоморфной формы (см. стр. 106), так как легко доказать, что якобиан $Z_1$ относительно $Z$ равен $|CZ+D|^{-p-1}$.

Теперь определим *модулярную функцию степени* $p$ как отношение двух модулярных форм одинакового веса. При $p=1$ это эквивалентно определению, данному выше, так как $J(z)$ — отношение двух модулярных форм равного веса и так как любая функция, модулярная в смысле первого определения, является рациональной функцией от $J(z)$. Однако неизвестно, имеет ли место аналогичное положение при $p>1$.

В случае функций, автоморфных в ограниченной области относительно дискретной группы аналитических автоморфизмов, для которой выполнено условие компактности, мы доказали, что каждая автоморфная функция (т. е. функция, мероморфная в этой области и инвариантная относительно преобразований из этой группы) представима в виде отношений двух автоморфных форм (теорема 20). Фактически этот результат является простым следствием теоремы о том, что любые $n+1$ автоморфные функции алгебраически зависимы. В настоящих условиях мы предполагаем *в определении*, что модулярная функция есть отношение двух модулярных форм. Этого определения уже достаточно для доказательства того, что поле модулярных функций степени $p$ есть поле алгебраических функций от $n=p(p+1)/2$ переменных. Вначале мы строим $n+1$ модулярную форму так, чтобы они не удовлетворяли никакому алгебраическому соотношению; затем мы доказываем, что любые $n+2$ модулярные формы удовлетворяют однородному алгебраическому соотношению, причем, если мы будем рассматривать это соотношение с фиксированными $n+1$ модулярными формами, не удовлетворяющими никакому однородному алгебраиче-

скому соотношению, то степень его относительно $(n+2)$-й формы ограничена.

Успех, достигнутый при применении рядов Пуанкаре в случае дискретных групп в ограниченной области (§§ 36, 38), приводит к мысли рассмотреть ряды вида

$$\sum |CZ+D|^{-g}, \tag{51}$$

где $(C\,D)$ пробегает матрицы, составленные из $p$ последних строк модулярных матриц. Однако, как легко видеть, этот ряд расходится при $p>1$, так как если $(C\,D)$ есть такая матрица, то $(UC\,UD)$ для любой унимодулярной $U^{(p,p)}$ также есть матрица, состоящая из $p$ последних строк некоторой унимодулярной матрицы, так что все матрицы $(C\,D)$, эквивалентные относительно умножения слева на унимодулярные матрицы, дают в сумме (51) одинаковые члены. Однако, если мы условимся в сумму (51) включать только по одному члену из каждого класса эквивалентных матриц, мы получим ряд, который будет абсолютно сходиться при $g>p+1$, причем в области $F$ он будет сходиться равномерно [3]. Такие „обобщенные ряды Эйзенштейна" регулярны в $H$ и ограничены в $F$; нетрудно видеть, что они удовлетворяют функциональному уравнению (50). Значит, эти обобщенные ряды Эйзенштейна являются модулярными формами степени $p$. Можно доказать, что среди них существуют $n+1=p(p+1)/2+1$ рядов, не удовлетворяющих никакому однородному алгебраическому соотношению (см. [11], § 5).

Для доказательства этого, а также для доказательства теоремы об алгебраической зависимости нам потребуются ряды Фурье. Так как модулярные формы инвариантны относительно любого преобразования $Z\to Z+T$, где $T$ — симметрическая целочисленная матрица, то они разлагаются в сходящиеся в $H$ ряды Фурье, общий член которых имеет вид

$$ce^{2\pi i\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant p} r_{jk}z_{jk}},\quad r_{jk}\text{ — целые числа } (1\leqslant j\leqslant k\leqslant p),$$

или

$$ce^{2\pi i\sum\limits_{j,k=1}^{p} s_{jk}z_{kj}},\ s_{jk}=s_{kj}\text{ — полуцелое } (1\leqslant j,\ k\leqslant p,\ j\neq k)$$
$$s_{jj}\text{ — целое } (1\leqslant j\leqslant p).$$

Из ограниченности модулярных форм в $F$ следует, что симметрическая матрица $S=(s_{jk})$ неотрицательна. Таким образом, ряд Фурье для модулярной формы имеет вид

$$\sum_{S\geqslant 0} c(S)\,e^{2\pi i\sigma(SZ)}, \tag{52}$$

где суммирование распространено на все неотрицательные симметрические матрицы $S$, диагональные элементы которых являются целыми

числами, а остальные элементы полуцелыми. В специальном случае рядов Эйзенштейна можно доказать, что все коэффициенты $c(S)$ являются рациональными числами (см. [11], § 7).

Для доказательства того, что любые $n+2$ модулярные формы $f_0, f_1, \ldots, f_{n+1}$ связаны однородной алгебраической зависимостью, рассмотрим однородный многочлен

$$\sum \alpha_{a_0 a_1 \cdots a_{n+1}} f_0^{a_0} f_1^{a_1} \ldots f_{n+1}^{a_{n+1}}. \tag{53}$$

Пусть вес его равен $t$. Мы определим нетривиальную систему констант $\alpha$ таким образом, чтобы многочлен (53) имел по возможности более высокий порядок нуля в бесконечности, иными словами, мы выбираем $\alpha$ так, чтобы как можно больше начальных членов ряда Фурье многочлена (53) было равно нулю. Тогда для достаточно больших $t$ можно доказать, что многочлен (53) равен тождественно нулю, это и даст однородное алгебраическое соотношение, связывающее $f_0, f_1, \ldots, f_{n+1}$. Кроме того, если $f_0, f_1, \ldots, f_n$ — фиксированные модулярные формы, не удовлетворяющие никакому однородному полиномиальному соотношению, то степень указанного соотношения по $f_{n+1}$ ограничена (см. [11], § 4).

Идя по этому пути, можно доказать, что модулярные функции степени $p$ образуют поле алгебраических функций от $n = p(p+1)/2$ независимых переменных. Таким образом, наше определение модулярной функции как отношения двух модулярных форм одинакового веса является достаточно широким. Содержит ли это определение больше ограничений, чем определение, аналогичное используемому при $p=1$, остается неизвестным. Если мы докажем, что поле функций, модулярных в этом, повидимому, более слабом смысле является полем алгебраических функций от $n$ независимых переменных, то отсюда будет следовать (как и в случае автоморфных функций, рассматривавшемся в теореме 20, гл. X, § 44), что эти два определения эквивалентны.

# ЛИТЕРАТУРА


Behnke H., Thullen P., Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen, Ergebnisse der Math., Bd. 3, Nr 3, Berlin, 1934.

Braun H., Zur Theorie der Modulformen $n$-ten Grades, Math. Ann., **115** (1938), 507—517.

Braun H., Konvergenz verallgemeinerter Eisensteinscher Reihen, Math. Zeits., **44** (1939), 387—397.

Braun H., Hermitian modular functions, Ann. of Math. (2), **50** (1949), 827—855.

Cartan E., Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de $n$ variables complexes, Abh. Math. Sem. Hansischen Universität, **11** (1936), 116—162.

Cartan H., Sur les groupes de transformations analytiques, Actualités Sci. Ind., n° 198, Paris, 1935.

Cartan H., Idéaux de fonctions analytiques de $n$ variables complexes, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3), **61** (1944), 149—197.

Hua L., On the theory of automorphic functions of a matrix variable, Amer. J. Math., **66** (1944), 470—488, 531—563.

Hua L., On the theory of Fuchsian functions of several variables, Ann. of Math. (2), **47** (1946), 167—191.

Minkowski H., Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz, J. Reine Angew. Math., **129** (1905), 220—274.

Siegel C., Einführung in die Theorie der Modulfunktionen $n$-ten Grades, Math. Ann., **116** (1939), 617—657.

Siegel C., Einheiten quadratischer Formen, Abh. Math. Sem. Hansischen Univ., **13** (1940), 209—239.

Siegel C., Symplectic Geometry, Amer. J. Math., **65** (1943), 1—86.

Siegel C., Note on automorphic functions of several variables, Ann. of Math. (2), **43** (1942), 613—616.

Siegel C., Discontinuous groups, Ann. of Math. (2), **44** (1943), 674—689.

Siegel C., Some remarks on discontinuous groups, Ann. of Math. (2), **46** (1945), 708—718.

Sugawara M., Über eine allgemeine Theorie der Fuchsschen Gruppen und Theta-Reihen, Ann. of Math. (3), **41** (1940), 488—494.

Weyl H., Theory of reduction for arithmetical equivalence, Trans. Amer. Math. Soc., **48** (1940), 126—164.

Weyl H., Fundamental domains for lattice groups in division algebras I, Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr. Andreas Speiser, Zürich, 1945, p. 218—232.

Weyl H., Fundamental domains for lattice groups in division algebras II, Comment. Math. Helv., **17** (1945), 283—306.

Appell P., Sur les fonctions périodiques de deux variables, J. Math. Pures Appl. (4), **7** (1891), 157—219.

Conforto F., Funzioni Abeliani e Matrici di Riemann, vol. I, Rome, 1942.

Frobenius G., Über die Grundlagen der Theorie der Jacobischen Funktionen, J. Reine Angew. Math., **97** (1884), 16—48, 188—223.

Lefschetz S., L'analysis sytus et la géometrie algébrique, Paris, 1924.

Lefschetz S., Selected Topics in Algebraic Geometry, Bull. Nat. Res. Council, No 63 (1928), ch. 17.

Poincaré H., Sur les fonctions abéliennes, Acta Math., **26** (1902), 43—98.

Weierstrass K., Allgemeine Untersuchungen über $2n$-fach periodische Funktionen von $n$ Veränderlichen, Mathematische Werke, Bd. III, Berlin, 1903, S. 53—114.

# ПРИМЕЧАНИЯ ПЕРЕВОДЧИКА

I. (К стр. 92.) Теорема сложения для абелевых функций. Мы докажем теорему сложения в следующей форме. Обозначим через $K_C$ поле абелевых функций с матрицей периодов $C$. Как известно, существуют $r+1$ функций $f_0, f_1, \ldots, f_r$, таких что любая функция из $K_C$ выражается через них рационально. Тогда *для любой* $f \in K_C$

$$f(u+v) = R(f_0(u), \ldots, f_r(u), f_0(v), \ldots, f_r(v)), \tag{1}$$

*где $R$ — рациональная функция от $2r+2$ аргументов.*

Доказательство, излагаемое ниже, принадлежит Бохнеру [1]). Оно основано на следующей лемме.

Лемма Бохнера. Пусть $A$ и $B$ — некоторые области, соответственно, в $n$ и $m$-мерном комплексном пространствах. Предположим далее, что функции $\varphi_1(u), \ldots, \varphi_r(u)$ и $\psi_1(v), \ldots, \psi_s(v)$ регулярны, соответственно, в $A$ и $B$. Тогда, если $f(u, v)$ при любом фиксированном $v \in B$ — рациональная функция от $\varphi_1(u), \ldots, \varphi_r(u)$ и при любом фиксированном $u \in A$ — рациональная функция от $\psi_1(v), \ldots, \psi_s(v)$, то $f(u, v)$ — рациональная функция от

$$\varphi_1(u), \ldots, \varphi_r(u), \psi_1(v), \ldots, \psi_s(v).$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что, согласно теореме Гартогса [2]), функция $f(u, v)$ аналитична по совокупности переменных.

В дальнейшем мы используем следующий факт. Пусть $F_1(u, v), \ldots, F_N(u, v)$ — аналитические функции в $A \times B$, удовлетворяющие соотношению

$$c_1(v) F_1(u, v) + \ldots + c_N(v) F_N(u, v) = 0, \tag{2}$$

где $|c_1(v)| + \ldots + |c_N(v)| > 0$ для всех $v$ за вычетом, быть может, многообразия меньшей размерности. Тогда они удовлетворяют соотношению (2) с $c_n(v)$, принадлежащими кольцу, порожденному $F_n(a, v)$ при некоторых специальных значениях $u = a$. Действительно, рассмотрим определитель

$$D(u_1, \ldots, u_N, v) = \begin{vmatrix} F_1(u_1, v) \ldots F_N(u_1, v) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_1(u_N, v) \ldots F_N(u_N, v) \end{vmatrix}.$$

---

[1]) Bochner S., On the addition theorem for multiply periodic functions, Proc. Amer. Math. Soc., 3 (1952), 99—106.

[2]) Фукс Б. А., Теория аналитических функций многих комплексных переменных, М.— Л., 1948, стр. 95.

Очевидно, что $D \equiv 0$. Разлагая этот определитель по элементам последней строки и заменяя $u_N$ на $u$, получаем, что

$$\sum_{n=1}^{N} C_n(u_1, \ldots, u_{N-1}, v) F_n(u, v) = 0. \tag{3}$$

Если $C_n(u_1, \ldots, u, v)$ не равны нулю тождественно, то можно придать переменным $u_1, \ldots, u_{N-1}$ такие постоянные значения $a_1, \ldots, a_{N-1}$, при которых

$$\sum_{n=1}^{N} | C_n(a_1, \ldots, a_{N-1}, v) | > 0 \tag{4}$$

для всех $v$, кроме, быть может, многообразия меньшей размерности. Если же все $C_n$ равны тождественно нулю, то, выбрав отличный от нуля минор определителя $D$ и применив к нему аналогичное рассуждение, получим желаемый результат.

Так как $f(u, v)$ при любом фиксированном $v \in B$ является рациональной функцией от $\varphi_1(u), \ldots, \varphi_r(u)$, то

$$\Big(\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu(v) p_\mu(u)\Big) f(u, v) + \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu(v) p_\nu(u) = 0, \tag{5}$$

где $p_k(u)$ имеют вид $\prod_i \varphi_i^{n_i}(u)$. В этом равенстве нам пока ничего не известно относительно аналитической природы функций $a_\mu(v)$ и $b_\nu(v)$; более того, $m$ и $n$ зависят от $v$. Однако можно показать, что в $B$ существует подобласть, в которой соотношение (5) справедливо уже с фиксированными $m$ и $n$[1]).

Согласно сделанному выше замечанию, коэффициенты $a_\mu(u)$, $b_\nu(u)$ являются многочленами от

$$p_\mu(u_k) f(u_k, v) \quad \text{и} \quad p_\nu(u_k) \qquad (\mu = 1, \ldots, m, \ \nu = 1, \ldots, n),$$

где $u_1, \ldots, u_N$ — некоторые точки области $A$. Следовательно, согласно предположению леммы, коэффициенты $a$, $b$ представляют собой рациональные функции от

$$\psi_1(v), \ldots, \psi_s(v).$$

Мы можем считать, не уменьшая общности, что $p_\mu(u)$ линейно независимы, так как в противном случае мы смогли бы ограничиться линейно независимыми из них. Тогда

$$\sum | a_\mu(v) | > 0$$

всюду, кроме, быть может, многообразия меньшей размерности, и, следовательно, функция $f(u, v)$ есть рациональная функция от $\varphi$ и $\psi$.

Теперь нам уже нетрудно доказать теорему сложения. Заметим, что если функция $f(u)$ обладает периодами $c_1, \ldots, c_{2n}$, то при любом фиксированном $v$ $f(u+v)$ обладает теми же периодами. Таким образом, при любом фиксированном $v$ функция $f(u+v)$ есть рациональная функция от $f_0(u), \ldots, f_r(u)$, а при любом фиксированном $u$ — рациональная функция от $f_0(v), \ldots, f_r(v)$. Мы не можем непосредственно применить лемму Бохнера, взяв за $A$ и $B$ все пространство, потому что функции $f_0, \ldots, f_r$ не являются регулярными во всем пространстве. Однако нетрудно видеть, что существует точка $u_0$, в которой все функции $f_0(u), \ldots, f_r(u)$ регулярны, так что за $A$ можно взять

[1]) См. Бохнер С. и Мартин У., Функции многих комплексных переменных, М., 1951, стр. 278.

достаточно малую окрестность $u_0$. Аналогично можно определить $B$. Для завершения доказательства теоремы остается лишь применить теорему единственности для мероморфных функций.

II. (К стр. 89.) Теорема Лефшеца. *Всякое абелево многообразие можно рассматривать как алгебраическую поверхность без особенностей, расположенную в комплексном проективном пространстве*[1]).

Поясним формулировку теоремы. Пусть $\varphi_0(z), \ldots, \varphi_s(z)$ — якобиевы функции одного типа. Тогда уравнения

$$x_k = \varphi_k(z) \qquad (k = 0, \ldots, s) \tag{6}$$

определяют некоторую алгебраическую поверхность в $s$-мерном комплексном проективном пространстве (см. гл. VIII). Мы условимся говорить, что уравнения (6) дают представление абелева многообразия в виде алгебраической поверхности $S$ без особенностей, расположенной в проективном пространстве, если выполняются следующие условия.

1) $\sum_{k=0}^{s} |\varphi_k(z)| > 0$ для любого $z$.

2) $\sum_{k=0}^{s} |\varphi_k(z) - \lambda\varphi_k(z')| > 0$, если $z - z'$ не является периодом, а $\lambda$ — произвольное комплексное число; т. е. неконгруентным $z$ соответствуют разные точки на $S$.

3) Ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \varphi_0 & \cdots & \varphi_s \\ \frac{\partial\varphi_0}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_s}{\partial z_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\varphi_0}{\partial z_n} & \cdots & \frac{\partial\varphi_s}{\partial z_n} \end{pmatrix} \tag{7}$$

для любого $z$ равен $p+1$.

4) Каждая абелева функция с матрицей периодов $C$ может быть представлена в виде рациональной функции от $\varphi_0(z), \ldots, \varphi_s(z)$, т. е. поле рациональных функций от $x_1/x_0, \ldots, x_s/x_0$ совпадает с $K_C$.

Для удобства предположим, что

$$C = (E\ T),\ B = -2\pi i\,(0\ D),\ A = \pi i\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix},\ \Lambda \text{ — решетка с базисом } C,$$

где обозначения те же, что и в гл. IV настоящей книги.

Мы покажем, что если $N$ достаточно велико, то система якобиевых функций типа

$$\{C;\ 0, \ldots, 0, -2\pi i\, d_1 N z_1, \ldots, -2\pi i\, d_n N z_n\} \tag{8}$$

дает нужное представление абелева многообразия, соответствующего матрице $C$.

---

[1]) Lefschetz S., Numerical invariants of algebraic varieties, Trans. Am. Math. Soc., 22 (1921), 367—369.

Для доказательства нам потребуется понятие полной системы функций из $K_C$. Система $M$ функций поля $K_C$ называется *полной*, если 1) для любых двух точек $a$, $b$ $(a-b \bar{\in} \Lambda)$ существует функция $f \in M$, регулярная в $a$ и $b$ и такая, что $f(a) \neq f(b)$; 2) для любой точки $a$ существуют регулярные в этой точке функции $f_1, \ldots, f_n$, принадлежащие $M$, такие, что якобиан

$$\left.\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)}\right|_{z=a}$$

отличен от нуля.

Покажем, что существуют полные системы, состоящие из конечного числа рациональных сдвигов[1]) одной функции. Пусть $f(z) \in K_C$ — некоторая функция, не имеющая периодов, не принадлежащих $\Lambda$. Тогда множество функций вида $f(z+r)$, где $r$ пробегает все векторы вида $r_1c_1 + \ldots + r_{2n}c_{2n}$ $(r_1, \ldots, r_{2n}$ — рациональные числа), будет полной системой. Действительно, для любых двух точек $a$ и $b$ существует вектор $q$ (см. стр. 82), такой, что $f(a+q) \neq f(b+q)$. Очевидно, что это же будет иметь место для всех достаточно близких к $q$ рациональных векторов $r$. Аналогично проверяется условие 2).

Далее, каждая полная система содержит полную систему, состоящую из конечного числа функций. Чтобы установить это, заметим, что если $\varphi(z)$ — некоторая абелева функция и $\varphi(a) \neq \varphi(b)$, то существуют такие окрестности $U$ и $V$, соответственно, точек $a$ и $b$, что $\varphi(u) \neq \varphi(v)$ при $u \in U$ и $v \in V$. Обозначим теперь через $F$ совокупность точек вида $\xi_1c_1 + \ldots + \xi_{2n}c_{2n}$, где $0 \leqslant \xi_k \leqslant 1$. Тогда если $M$ — некоторая полная система функций, то ввиду сказанного выше для каждой пары точек $a$, $b$ из $F$ существует такая пара окрестностей $U$ и $V$ и такая функция $\varphi$ из $M$, что $\varphi(u) \neq \varphi(v)$ для $u \in U$ и $v \in V$. Так как $F$, а значит и множество пар $(a, b)$ $(a \in F, b \in F)$, компактно, то существует конечное множество пар окрестностей $U_k$, $V_k$, такое, что всякая пара точек $a$, $b$ принадлежит какой-нибудь паре окрестностей. Следовательно, $M$ содержит конечное множество $M_1$ функций $\varphi$, такое, что для любой пары точек $(a, b)$ существует функция в $M_1$, разделяющая эти точки.

Аналогичным способом легко показать существование в $M$ конечного множества функций $M_2$, для которого выполнено условие 2). Объединение множеств $M_1$ и $M_2$ будет, очевидно, полной системой.

Таким образом, мы доказали существование полных систем, состоящих из конечного числа рациональных сдвигов одной функции.

Пусть теперь $f(z+\rho_1), \ldots, f(z+\rho_m)$ — такая полная система. Обозначим через $N_0$ целое положительное число, такое, что $N_0\rho_k$ — вектор решетки $\Lambda$ для всех $k$. Без ограничения общности можно считать, что $f(z) = g(z)/h(z)$, где $(g, h) = 1$ и тип $g$ и $h$ определяется матрицами

$$C = (E \;\; T), \quad B = -2\pi i\,(0 \;\; D), \quad D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Рассмотрим теперь совокупность якобиевых функций типа

$$\{C, 0, \ldots, 0, -2\pi i N d_1 z_1, \ldots, -2\pi i N d_n z_n\}, \tag{10}$$

где $N = \nu n N_0$, а $\nu$ — достаточно большое целое число. Пусть $\varphi_0(z), \ldots, \varphi_s(z)$ — максимальная система линейно независимых функций с этими параметрами. Мы утверждаем, что соотношения

$$x_k = \varphi_k(z) \qquad (k = 0, \ldots, s) \tag{11}$$

[1]) Вектор $r$ мы здесь называем *рациональным*, если существует целое число $N$ такое, что $Nr \in \Lambda$.

определяют представление абелева многообразия в виде алгебраической поверхности без особенностей, расположенной в проективном пространстве.

Заметим вначале, что функция $f(z+\rho)$ может быть представлена в виде отношения якобиевых функций $g_0$ и $h_0$ типа

$$\{C,\ 2\pi i\alpha_1, \ldots, 2\pi i\alpha_n, -2\pi i(d_1z_1+\alpha_{n+1}), \ldots, -2\pi i(d_nz_n+\alpha_{2n}), \tag{12}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ — дроби со знаменателем $N_0$. (Мы предполагаем здесь, что $N_0\rho$ — вектор решетки $\Lambda$.)

Действительно положим

$$\begin{aligned} g_0(z) &= g(z+\rho)\, e^{2\pi i l\cdot z}, \\ h_0(z) &= h(z+\rho)\, e^{2\pi i l\cdot z}, \end{aligned} \tag{13}$$

где $l$ определяется следующим путем. Очевидно, что $\rho$ можно, и притом единственным образом, представить в виде $r_1e_1+\ldots+r_ne_n+\ldots+r_{2n}t_n$, где $r_1, \ldots, r_{2n}$ — рациональные числа; мы полагаем

$$l=\begin{pmatrix} d_1r_{n+1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ d_nr_{2n} \end{pmatrix}.$$

Легко показать, пользуясь соотношением $DT=T'D$, что функции $g_0$ и $h$ действительно будут обладать нужными свойствами.

Проверим теперь для нашего представления выполнение условий 1), 2), 3) и 4). Пусть $a$ — некоторая точка, тогда для некоторого $\rho_k$ функция $f(z+\rho_k)$ регулярна в $a$, и, следовательно, существует якобиева функция $h_0(z)$ типа (12), отличная от нуля в точке $a$. Тип $h_0^{\nu nN_0}$, очевидно, совпадает с типом $\varphi_k(z)$ $(k=0, \ldots, s)$, поэтому $h_0^{\nu nN_0}(z)$ есть линейная комбинация функций $\varphi_k(z)$. Следовательно, $\varphi_k(a)$ не все равны нулю, т. е. условие 1) выполнено. Аналогично проверяется условие 2).

Для того чтобы установить справедливость условия 3), очевидно, достаточно показать существование для любой точки $a$ $n+1$ якобиевых функций $\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_n(z)$ типа (10), для которых

$$\begin{vmatrix} \psi_0(z) & \ldots & \psi_n(z) \\ \dfrac{\partial\psi_0(z)}{\partial z_1} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_n(z)}{\partial z_1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial\psi_0(z)}{\partial z_n} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_n(z)}{\partial z_n} \end{vmatrix}_{z=a} \neq 0.$$

Выше мы показали, что для любой точки $a$ существуют регулярные в этой точке функции $f(z+\rho_k)$ $(k=1, \ldots, n)$ такие, что якобиан их отличен от нуля в этой точке. Представим каждую из функций $f(z+\rho_k)$ в виде

$$f(z+\rho_k)=\frac{g_k(z)}{h_k(z)} \qquad (k=1, \ldots, n), \tag{14}$$

где $g_k$ и $h_k$ — якобиевы функции типа (12). Положим теперь

$$\psi_0(z)=(h_1(z)\ldots h_n(z))^{\nu N_0}, \quad \psi_k(z)=f(z+\rho_k)\,\psi_0(z). \tag{15}$$

Тогда ясно, что $\psi_k(z)$ будут якобиевыми функциями желаемого типа.

Далее, ввиду тождества

$$\Delta = \begin{vmatrix} \psi_0(z) & \dots & \psi_n(z) \\ \dfrac{\partial\psi_0(z)}{\partial z_1} & \dots & \dfrac{\partial\psi_n(z)}{\partial z_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial\psi_0(z)}{\partial z_n} & \dots & \dfrac{\partial\psi_n(z)}{\partial z_n} \end{vmatrix} = \psi_0^{n+1}(z)\,\frac{\partial(f(z+\rho_1),\dots,f(z+\rho_n))}{\partial(z_1,\dots,z_n)},$$

определитель $\Delta$ будет заведомо отличен от нуля, если только

$$\psi_0(a) \neq 0.$$

Последнее справедливо ввиду того, что функции $f(z+\rho_1),\dots,f(z+\rho_n)$ регулярны в $a$ и, следовательно, $h_k(a)\neq 0$ $(k=1,\dots,n)$.

Осталось проверить выполнение условия 4). До сих пор мы не фиксировали значения $\nu$, так как все наши рассуждения были справедливы при любом целом $\nu$. Сейчас мы покажем, что для достаточно больших $\nu$ будет выполняться условие 4). Действительно, пусть $f_1(z),\dots,f_n(z)$ — аналитически независимые функции из $M$. Очевидно, что их можно представить в виде $f_k = g_k/h_0$ $(k=1,\dots,n)$, где $g_k$ и $h_0$ — якобиевы функции типа (10) с $\nu=1$.

Обозначим через $f_0$ такую функцию из $K_C$, что всякая функция из $K_C$ выражается рационально через $f_0, f_1, \dots, f_n$.

Очевидно, достаточно доказать, что $f_0$ можно представить в виде отношения якобиевых функций типа (10) с достаточно большим $\nu$. С этой целью рассмотрим алгебраическое соотношение, связывающее $f_0, f_1, \dots, f_n$,

$$p_0 f_0^s + \dots + p_{s-1} f_0 + p_s = 0, \tag{16}$$

где $p_0, p_1, \dots, p_s$ — многочлены от $f_1,\dots,f_s$. Пусть общая степень по $f_1,\dots,f_n$ каждого из $p_0,\dots,p_n$ не превосходит $t$. Тогда функция $h_0^t p_k$ $(k=0,\dots,s)$ регулярна и, значит, является якобиевой функцией типа (10). Умножим соотношение (16) на $h_0^{st} p_0^{s-1}$ и положим $h = h_0^t p_0 f_0$; мы получим

$$h^s + (h_0^t p_1)\,h^{s-1} + \dots + h_0^{st} p_0^{s-1} p_s = 0. \tag{17}$$

Пусть $a$ — любая точка, положим $h = p_a/q_a$, где $(p_a, q_a) = 1$. Подставляя это выражение для $h$ в (17) и умножая его на $q_a^{s-1}$, получаем, что $q_a$ — единица, и, следовательно, $h$ — якобиева функция одного типа с $h_0^t p_0$.

Таким образом, доказательство теоремы Лефшеца закончено.

Отметим, что аналогичная теорема справедлива для алгебраических многообразий, униформизируемых автоморфными функциями с ограниченной областью существования. Нужно только дополнительно предположить отсутствие неподвижных точек у всех преобразований из группы Г.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

К. Зигель

# АВТОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Редактор *М. С. АГРАНОВИЧ*

Художник *М. Г. Ровенский*

Технический редактор *Е. С. Герасимова*

Корректор *А. А. Смирнова*

Сдано в производство 15/X 1953 г.
Подписано к печати 22/XII 1953 г.
Т-09066. Бумага $60\times92^1/_{16}=5{,}3$ бум. л.
10,6 печ. л.
Уч.-издат. л. 10,7. Изд. № 1/1973.
Цена 9 р. Зак. 859.

Издательство иностранной литературы
Москва, Ново-Алексеевская, 52.

---

4-я типография им. Евг. Соколовой
Союзполиграфпрома Главиздата
Министерства культуры СССР.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

# ОПЕЧАТКИ

| *Стр.* | *Строка* | *Напечатано* | *Следует читать* |
|---|---|---|---|
| 19 | 18 сн. | рядов | элементов |
| 48 | 3 св. | $\gamma_{nr} c_r$ | $\gamma_{nr} c_n$ |
| 58 | 5 сн. | $\left(\frac{C_1'}{C_2'}\right)$ | $\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix}$ |
| 65 | 12 сн. | $u_u^{r}{}_n$ | $u_n^{r}{}_n$ |
| 79 | 5 св. | 13 | 11 |
| 82 | 5 сн. | $0 \leqslant s \leqslant n$ | $0 \leqslant s < n$ |
| 103 | 14 св. | $\geqslant \sum_{\gamma}' \int_{N}$ | $= \sum_{\gamma}' \int_{N}$ |
| 121 | 5 сн. | $Z'Z$ | $Z'\overline{Z}$ |
| 122 | 1 сн. | $G'K\overline{G} = K$ | $G'KG = K$ |
| 124 | 10 сн. | $-\overline{Z}$ | $-Z$ |
| 124 | 7 сн. | $e^{-\vartheta/2} E_p$ | $e^{-i\vartheta/2} E_p$ |
| 136 | 13 сн. | $L_1$ | $L$ |

Заказ 859.