

Г.Е.Зильберман

## ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Предлагаемая книга отличается от традиционных курсов электричества и магнетизма дедуктивным методом изложения: автор прежде всего дает основы представления о поле, о его источниках и вихрях, и с позиций теории векторного поля излагает весь дальнейший материал. Такое построение курса позволяет при сравнительно небольшом объеме книги рассмотреть широкий круг вопросов, охватываемых современной теорией электричества и магнетизма и электронной теорией. Подробно рассмотрена электронная теория металлов, полупроводников, диэлектриков и плазмы.

Книга рассчитана на студентов первых курсов и учителей, а также на школьников, избравших физику своей будущей специальностью.

### Содержание

Предисловие	7
<b>Глава I. Экспериментальные основания теории электричества и магнетизма</b>	<b>9</b>
§ 1. Взаимодействие тел	9
§ 2. Металлы и диэлектрики	10
§ 3. Электрическое поле	14
§ 4. Напряженность электрического поля	17
§ 5. Магнитное поле	20
§ 6. Связь между электрическим и магнитным полями	25
<b>Глава II. Основы теории векторного поля</b>	<b>32</b>
§ 7. Линии векторного поля	32
§ 8. Источники и вихри поля	85
§ 9. Поле одних источников	37
§ 10. Поле вихрей	40
§ 11. Поверхностные источники и поверхностные вихри	43
§ 12. Мощность источника и вихря	46
§ 13. Скалярное и векторное произведение векторов	49
<b>Глава III. Источники и вихри электрического и магнитного полей</b>	<b>53</b>
§ 14. Векторы $E$ и $B$	53
§ 15. Вектор электрической индукции $D$	54
§ 16. Вектор напряженности магнитного поля $H$	57
§ 17. Вихри и источники электрического и магнитного полей	62
§ 18. Граничные условия для векторов $E, D, B, H$	64
<b>Глава IV. Электростатика</b>	<b>65</b>
§ 19. Электрический заряд	65
§ 20. Элементарные частицы	69
§ 21. Точечные, поверхностные и объемные заряды	72
§ 22. Поле точечных и поверхностных зарядов	73
§ 23. Поле объемных зарядов	82
§ 24. Поле электрически нейтральных систем	84
§ 25. Потенциал электростатического поля	86

§ 26. Работа потенциального электрического поля над зарядом	89
§ 27. Связь между потенциалом и напряженностью	91
§ 28. Потенциальные диаграммы	94
§ 29. Проводники в электростатическом поле	99
§ 30. Плотность заряда на поверхности проводника	103
§ 31. Метод изображений	105
§ 32. Электростатическая экранировка. Заземление	107
§ 33. Заряд и поле Земли	108
§ 34. Электростатический генератор. Линейные ускорители	110
§ 35. Емкость	111
§ 36. Диэлектрики. Связанные заряды на поверхностях диэлектриков	117
§ 37. Диэлектрики. Вектор поляризации $P$	119
§ 38. Непосредственное измерение $E$ и $D$ в диэлектрике	120
§ 39. Макроскопическое, микроскопическое, действующее поле	124
§ 40. Сегнетоэлектрики и пьезоэлектрики	128
§ 41. Энергия электрического поля	133
§ 42. Энергия взаимодействия зарядов и энергия зарядов во внешнем поле	138
§ 43. Пондеромоторные силы в электрическом поле	141
§ 44. Неустойчивость электростатических систем	143
§ 45. Классический радиус электрона	146
§ 46. Образование атома	148
§ 47. Волновые свойства микрочастиц	150
§ 48. Атом водорода и многоэлектронные атомы	154
<b>Глава V. Постоянный электрический ток</b>	<b>159</b>
§ 49. Ток и плотность тока	159
§ 50. Скорость упорядоченного движения зарядов. Скорость распространения тока	162
§ 51. Электрическое сопротивление	163
§ 52. Фононы	167
§ 53. Сверхпроводимость	170
§ 54. Закон Ома. Электродвижущая сила	174
§ 55. Связь плотности тока и напряженности поля в проводнике	179
§ 56. Поверхностные и объемные заряды в цепи постоянного тока	184
§ 57. Закон непрерывности тока. Первый закон Кирхгофа	186
§ 58. Ток смещения	187
§ 59. Второй закон Кирхгофа. Расчет цепей постоянного тока	189
§ 60. Работа потенциальных и сторонних сил в цепи тока	191
§ 61. Поток энергии внутрь и вдоль проводника	193
<b>Глава VI. Основы электронной теории вещества</b>	<b>195</b>
§ 62. Электроны проводимости .	195
§ 63. Фермиевская энергия	198
§ 64. Функция распределения	202
§ 65. Закон дисперсии и ферми-поверхность	205
§ 66. Термоэлектронная и фотоэлектронная эмиссия из металла	208

§ 67. Автоионизация и автоэлектронная эмиссия	214
§ 68. Контактная разность потенциалов	219
§ 69. Термоэлектрические явления	225
§ 70: Энергетический спектр	229
§ 71. Зонный спектр электрона в кристалле	232
§ 72. Полупроводники и диэлектрики	236
§ 73. Металлы	241
§ 74. Примесные полупроводники	243
§ 75. Применение полупроводников	248
§ 76. Электрический ток через электролиты	252
§ 77. Ионизация, рекомбинация и возбуждение атомов газа	257
§ 78. Газовый разряд	260
§ 79. Плазма	267
<b>Глава VII. Магнитное поле</b>	<b>271</b>
§ 80. Магнитное поле тока	271
§ 81. Магнитное поле движущегося заряда	277
§ 82. Действие магнитного поля на электрический заряд	279
§ 83. Циклотрон	282
§ 84. Эффект Холла	284
§ 85. Электрический заряд в неоднородном магнитном поле	286
§ 86. Действие магнитного поля на электрический ток	287
§ 87. Взаимодействие токов. Взаимодействие движущихся зарядов	290
§ 88. Магнитный поток	293
<b>Глава VIII. Магнитные свойства вещества</b>	<b>294</b>
§ 89. Вектор намагниченности	294
§ 90. Парамагнетики	298
§ 91. Диамагнетики	304
§ 92. Природа ферромагнетизма	306
§ 93. <b><i>B</i></b> и <b><i>H</i></b> в ферромагнетике	312
§ 94. Поле постоянного магнита	319
§ 95. Антиферромагнетики и ферриты	321
<b>Глава IX. Электромагнитная индукция</b>	<b>323</b>
§ 96. Электрическое поле, создаваемое движущимся магнитным полем	323
§ 97. Электрическое поле, создаваемое переменным магнитным полем	329
§ 98. Бетатрон	334
§ 99. Индукционный генератор. Униполярная машина	335
§ 100. Магнитогидродинамический генератор	338
§ 101. Взаимная индукция и самоиндукция	340
§ 102. Переменный ток в цепи с индуктивностью	344
§ 103. Пондеромоторные силы в магнитном поле	351
§ 104. Трансформатор	353
§ 105. Переменный ток в цепи с индуктивностью и емкостью	355
§ 106. Колебательный контур	358
§ 107. Скин-эффект	361

<b>Глава X. Электромагнитные волны</b>	<b>354</b>
§ 108. Излучение движущегося заряда	364
§ 109. Эффект Черенкова — Вавилова	366
§ 110. Излучение колеблющегося диполя	368
§ 111. Излучение вибратора и антенны	372
§ 112. Электромагнитные волны в пустоте и в диэлектрике	377
§ 113. Электромагнитные волны вдоль проводов и в волноводах	380
§ 114. Уравнения Максвелла	383

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Современное учение об электричестве и магнетизме основано на уравнениях Максвелла, определяющих поля через их источники и вихри. В вузовских курсах общей физики, и тем более в школьных учебниках, об этих понятиях векторного анализа не говорится совсем. Из-за этого остается неясным смысл даже таких фундаментальных величин, как напряженности электрического и магнитного полей, векторы магнитной и электрической индукции. Однако современная теория электричества и магнетизма является одной из наиболее детально разработанных частей физики и вполне может быть изложена наглядно и вместе с тем достаточно строго. В предлагаемой книге делается попытка такого изложения.

Первые три главы содержат обзор основных понятий электричества и магнетизма. В остальных главах детально рассмотрен широкий круг вопросов электричества и магнетизма, в частности современной электронной теории металлов, полупроводников и плазмы. Главное внимание уделено не математическим выводам, а разъяснению качественной, физической стороны вопроса. Задача такого изложения очень трудна, и книга поэтому не может быть лишена множества недостатков. Замечания читателей будут встречены с благодарностью.

В каждом параграфе имеются ссылки на материал, изложенный ранее. Формулы записываются параллельно в системах СИ и СГС (гауссовой).

Книга рассчитана на студентов первых курсов университетов, технических вузов, на учителей физики, а также на учащихся старших классов специализированных физико-математических школ.

Автор весьма признателен Ф. И. Ицковичу, М. Я. Минцу, Ю. А. Соколовичу и своим рецензентам: проф. М. И. Каганову, проф. Б. М. Яворскому и М. И. Блудову за доброжелательную критику и множество ценных замечаний.

*Г. Зильберман*

## ГЛАВА I

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА И МАГНЕТИЗМА

### § 1. Взаимодействие тел

В основе всех физических явлений лежит взаимодействие между телами или частицами, участвующими в этих явлениях. Земля движется вокруг Солнца из-за того, что взаимодействует с ним. Этим взаимодействием является притяжение Земли и Солнца по закону всемирного тяготения. Притяжение или отталкивание двух электрических зарядов — это их электрическое взаимодействие. Отталкивание или притяжение магнитных полюсов или токов — это магнитное взаимодействие. Столкновение бильiardных шаров, сжатие человеком пружины, давление подошвы на землю — все это примеры взаимодействия тел.

Согласно представлениям современной физики всякое взаимодействие передается через некоторое поле. Земля взаимодействует с Солнцем через гравитационное поле. Солнце создает гравитационное поле, которое действует на Землю. Земля, в свою очередь, создает поле, которое действует на Солнце. Это второе поле гораздо слабее первого, но зато помещенное в него тело (Солнце) гораздо больше. В результате оказывается, что силы, действующие на оба тела, равны в соответствии с третьим законом Ньютона.

Электрические заряды взаимодействуют через электрическое поле, которое они создают, магниты и электрические токи — через магнитное поле. Частицы в атомном ядре — протоны и нейтроны — взаимодействуют через

так называемое  $\pi$ -мезонное поле. Каждая частица создает поле, и это поле уже действует на другую частицу.

Если всякое взаимодействие передается через поле, то спрашивается, через какое же поле взаимодействуют рука и камень, пружина и связывающая ее веревка, бильярдные шары, подошва и земля, т. е. чем объясняется существование обычных сил, возникающих при соприкосновении предметов? Оказывается, это электромагнитное взаимодействие. Атомы соприкасающихся тел сближаются на расстояния порядка размеров самих атомов. Быстро вращающиеся вокруг ядер отрицательно заряженные электроны и положительно заряженные ядра создают электромагнитное поле, которое и осуществляет взаимодействие при соприкосновении.

Но не только взаимодействие между различными телами, а и само существование твердых и жидких тел обусловлено взаимодействием между атомами. Именно благодаря этому взаимодействию твердые и жидкие тела не распадаются на отдельные атомы.

## § 2. Металлы и диэлектрики

**Металлы.** Валентные электроны металла слабо связаны со своими атомами. Когда атомы металла, конденсируясь из металлического пара, образуют жидкий или твердый металл, внешние электроны оказываются уже не связанными с отдельными атомами и могут свободно перемещаться по всему телу. Эти электроны обуславливают хорошо известную значительную проводимость металлов, они так и называются электронами проводимости.

Атомы металла, лишенные своих валентных электронов, т. е. положительные ионы, составляют кристаллическую решетку. В кристаллической решетке ионы совершают хаотические колебания около своих положений равновесия, называемых узлами решетки. Эти колебания представляют собой тепловое движение решетки и усиливаются с повышением температуры.

Электроны проводимости в отсутствие электрического поля в металле совершают беспорядочное движение со скоростями порядка тысяч километров в секунду. При приложении напряжения к металлическому проводнику электроны проводимости, не ослабляя своего хаотического движения, сравнительно медленно «сносятся»



электрическим полем вдоль проводника. При таком сносе все электроны получают, дополнительно к хаотической скорости, еще и небольшую скорость упорядоченного движения (порядка, например, миллиметров в секунду). Именно это слабое упорядоченное движение и обуславливает электрический ток в проводнике.

**Диэлектрики.** Совсем иначе обстоит дело в других веществах, которые носят название изоляторов (на языке физики — диэлектриков). В диэлектриках атомы точно так же колеблются вокруг положений равновесия, как и в металлах, но они имеют полный комплект электронов. Внешние электроны атомов диэлектрика сильно связаны со своими атомами, и разлучить их не так-то просто. Для этого нужно значительно поднять температуру диэлектрика или подвергнуть его какому-нибудь интенсивному облучению, которое смогло бы оторвать электроны от атомов. В обычном же состоянии электронов проводимости в диэлектрике нет, и диэлектрики не пропускают тока.

Большая часть диэлектриков является не атомными, а молекулярными кристаллами или жидкостями. Это значит, что в узлах решетки находятся не атомы, а молекулы. Многие молекулы состоят из двух групп атомов или просто из двух атомов, один из которых электрически положителен, а другой отрицателен (такие молекулы называются полярными). Например, у молекулы воды положительной частью являются оба атома водорода, а отрицательной — атом кислорода, около которого большую часть времени вращаются электроны водородных атомов.

Два заряда, равные по величине, но противоположные по знаку, находящиеся на очень малом расстоянии друг от друга, называются *диполем*. Полярные молекулы представляют собой пример диполей. Если молекулы не состоят из противоположных по заряду ионов (заряженных атомов), т. е. не являются полярными и не представляют собой диполей, то они *становятся* диполями под действием электрического поля. Электрическое поле тянет положительные заряды, входящие в состав молекулы (например, ядра), в одну сторону, а отрицательные — в другую и, раздвигая их, создает диполи. Такие диполи называются упругими — поле растягивает их, как пружину. Поведение диэлектрика с неполярными

молекулами мало отличается от поведения диэлектрика с полярными молекулами, и в дальнейшем мы всегда будем считать, что молекулы диэлектрика являются диполями.

Если кусок диэлектрика поместить в электрическое поле, т. е. поднести к диэлектрику электрически заряженное тело, обладающее, например, положительным зарядом, отрицательные концы молекул-диполей будут притягиваться к этому заряду, а положительные — отталкиваться. Из-за этого молекулы-диполи будут поворачиваться. Этот поворот называют ориентацией. Ориентация не представляет собой полного поворота всех молекул диэлектрика. Взятая наугад молекула в данный момент может оказаться повернутой против поля, и только в среднем у большого числа молекул существует слабая ориентация в сторону поля (т. е. больше молекул повернуто в сторону поля, чем в противоположную сторону). Ориентации препятствует тепловое движение — хаотические колебания молекул вокруг их положений равновесия. Чем ниже температура, тем сильнее ориентация молекул, вызываемая данным полем. С другой стороны, при данной температуре ориентация, естественно, тем сильнее, чем больше поле.

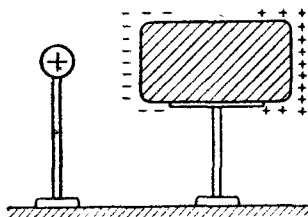


Рис. 1.

#### Поляризация диэлектрика.

В результате ориентации молекул диэлектрика на поверхность его, обращенную к положительному заряду (рис. 1), выступают отрицательные концы молекул-диполей, а на противоположную поверхность — положительные. На поверхностях диэлектрика образуются электрические заряды. Эти заряды носят название поляризационных, а их возникновение называется процессом *поляризации диэлектрика*.

Как следует из изложенного выше, поляризация, в зависимости от вида диэлектрика, может быть *ориентационной* (ориентируются готовые молекулы-диполи) и *деформационной*, или поляризацией электронного смещения (молекулы в электрическом поле деформируются, превращаясь в диполи).

Может возникнуть вопрос, почему поляризационные заряды образуются только на поверхностях диэлектрика, а не внутри его? Объясняется это тем, что внутри диэлектрика положительные и отрицательные концы молекул-диполей как раз компенсируют друг друга. Компенсация будет отсутствовать только на поверхностях диэлектрика или на границе раздела двух диэлектриков, а также в неоднородном диэлектрике.

Если диэлектрик поляризован, то это не значит, что он заряжен, т. е. что он имеет в целом электрический заряд. При поляризации общий заряд диэлектрика не меняется.

Однако диэлектрику можно сообщить заряд, перенося на него некоторое количество электронов извне или забирая некоторое число собственных электронов. В первом случае диэлектрик зарядится отрицательно, а во втором — положительно.

Такую электризацию можно произвести, например, путем трения. Если потереть стеклянную палочку о шелк, то палочка и шелк зарядятся противоположными по знаку зарядами (стекло — положительно, шелк — отрицательно)\*. У стеклянной палочки при этом будет отобрано некоторое число электронов (весьма малая доля общего числа электронов, принадлежащих всем атомам стеклянной палочки, — что-нибудь около  $10^{11}$ — $10^{17}$ ).

Итак, в металлах и других проводниках (например, электролитах) заряды могут свободно перемещаться по всему телу. Диэлектрики же не обладают проводимостью и в них заряды не могут перемещаться на макроскопические (т. е. большие по сравнению с размерами атомов и молекул) расстояния. В электрическом поле диэлектрик только поляризуется.

**Классификация зарядов.** Заряды, перемещающиеся в проводниках, а также наносимые извне на диэлектрик, мы будем называть *свободными*, а поляризационные заряды, выступающие на поверхностях диэлектрика, — *связанными*.

---

\*) Электризация при трении происходит из-за того, что при контакте двух разнородных веществ некоторое число электронов переходит из одного вещества в другое, трение же увеличивает площадь контакта между соприкасающимися телами.

### § 3. Электрическое поле

В пространстве вокруг заряженного тела (рис. 2) существует электрическое поле. Чтобы убедиться в этом, достаточно поднести к телу пробный заряд. На заряд будет действовать сила. Существование этой силы мы описываем словами: «в пространстве вокруг заряженного тела существует электрическое поле».

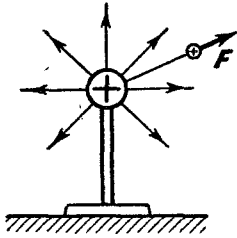


Рис. 2.

Даже в вакууме заряженное тело окружено не пустотой, а электрическим полем. Поле (электрическое, магнитное и другие) представляет собой один из видов материи. Подобно другому виду материи — веществу, состоящему из атомов, — поле обладает массой и, поэтому, весом. Электрические заряды взаимодействуют между собой через этот особый вид материи. Если очень быстро развести находившиеся первоначально в одной точке равные разноименные заряды, а пробный заряд расположить на достаточно большом расстоянии от них, то сила, действующая на пробный заряд, появится не сразу. Оказывается, поле (в этом случае оно будет электромагнитным, как мы увидим в дальнейшем) распространяется с конечной скоростью и поэтому достигает пробного заряда через конечный промежуток времени. Правда, скорость эта огромна, она равна 300 000 км/сек, однако все же взаимодействие распространяется не мгновенно.

В качестве пробного заряда нужно взять малое по размерам тело, обладающее малым зарядом. Малые размеры нужны для того, чтобы пробный заряд ощущал поле только в одной точке, не захватывая целой области. Его заряд должен быть малым для того, чтобы не смещать заряды, находящиеся на шарике, и тем самым не искажать поле, в которое пробный заряд помещен.

Взаимодействие точечных зарядов. Заряд, помещенный на теле, размеры которого малы по сравнению с расстоянием до других тел, с которыми он взаимодействует, мы будем называть точечным зарядом. Название «точечный заряд» не означает, что заряд размещен в математической точке. Все тела обладают конечными размерами, и одни и те же тела в различных случаях могут

считаться точечными или не считаться таковыми. Например, если мы возьмем два тела с размерами порядка сантиметра и будем рассматривать их взаимодействие на расстоянии тоже порядка нескольких сантиметров, то в этом случае точечными их никак нельзя будет считать. А если разнести их на расстояние, например, в несколько метров, то те же тела с достаточной степенью точности можно будет считать точечными. Чем большее (по сравнению с их размерами) расстояние будет между зарядами, тем с большей степенью точности их можно будет считать точечными. При этом форма тел и расположение на них заряда не будут играть роли.

С помощью измерительного прибора (например крутильных весов) можно установить, что сила взаимодействия точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$  всегда направлена по линии, их соединяющей. Величина этой силы пропорциональна произведению зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния  $r$  между ними (закон Кулона):

$$F = k \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2}. \quad (3.1)$$

Коэффициент пропорциональности  $k$  зависит от выбора системы единиц. В системе, называемой гауссовой (или СГС), коэффициент  $k$  полагается равным единице и стоящая в знаменателе величина  $\epsilon$  (смысл ее обсуждается ниже) безразмерна. Тогда, поскольку единица силы (дина) и единица расстояния (сантиметр) уже выбраны, единица заряда определяется из формулы (3.1). В системе СИ коэффициент  $k$  не равен единице и обозначается  $1/4\pi\epsilon_0$  (см. § 19).

Неточечные заряды (например, две близко расположенные заряженные пластинки) тоже взаимодействуют друг с другом, однако сила их взаимодействия уже непосредственно не выражается формулой (3.1). Кроме того, для справедливости формулы (3.1) требуется, чтобы среда, в которой находятся взаимодействующие точечные заряды, была однородной, изотропной\*) и

\*) Однородность среды означает, что свойства ее одинаковы во всех ее точках (в частности, всюду одинаков состав и нет никаких вкраплений). Изотропность означает, что свойства этой среды в окрестности каждой ее точки одинаковы во всех направлениях. Изотропность может нарушаться в кристаллах. Кристаллы могут иметь в различных направлениях различную прочность, различный коэффициент теплового расширения или электропроводность.

безграничной. Последнее означает на практике, что размеры однородного образца, в котором находятся заряды, должны во много раз превышать расстояние между ними. В противном случае формула (3.1) будет неточна. В дальнейшем слово «безграничная» мы будем большей частью опускать.

**Поле связанных зарядов.** Величина  $\epsilon$ , называемая *диэлектрической проницаемостью*, учитывает влияние среды на силу взаимодействия. В пустоте и приближенно в воздухе величина  $\epsilon$  в гауссовой системе единиц равна 1. Если поместить заряды в другую среду, например в керосин, который является диэлектрической жидкостью, то сила взаимодействия между ними уменьшится (в керосине — в два раза). Это означает, что диэлектрическая проницаемость керосина равна 2. У стекла  $\epsilon=5$ , у эбонита 3, у воздуха при нормальных условиях 1,0006. Таким образом, в любой среде  $\epsilon>1$  и электрическое поле ослабляется по сравнению с вакуумом.

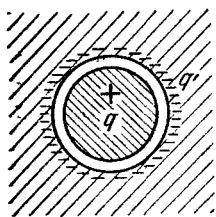


Рис. 3.

Причину этого ослабления объясняет рис. 3. На нем изображен заряженный шарик, окруженный диэлектриком. Для того чтобы лучше разобраться в том, что происходит на границе шарика и среды, мы изобразили маленький промежуток между ними. Поле шарика ориентирует молекулы диэлектрика, и на поверхность диэлектрика, примыкающую к шарiku, выступают отрицательные заряды. Ясно, что поле в любой точке диэлектрика будут создавать две противоположно заряженные сферы — поверхность шарика, заряженная положительно, и примыкающая к ней отрицательно заряженная поверхность диэлектрика. Суммарное поле будет более слабым, чем поле одного шарика. Таким образом, поле в диэлектрике ослабляется в  $\epsilon$  раз потому, что из поля свободных зарядов вычитается поле поляризационных, связанных зарядов.

Нетрудно найти величину связанного заряда  $q'$ , окружающего свободный заряд  $q$  (рис. 3). Как видно из закона Кулона, электрическое поле в диэлектрике ослабляется в  $\epsilon$  раз, т. е. оно будет таким, какое создавал бы заряд  $q/\epsilon$ . В действительности же это поле создает за-

ряд  $q + q'$ . Следовательно,  $q + q' = q/\epsilon$ , т. е.

$$q' = -q \frac{\epsilon - 1}{\epsilon}. \quad (3.2)$$

Отсюда видно, что связанный заряд противоположен по знаку создавшему его свободному и пропорционален ему по величине. Следовательно, будут пропорциональны и создаваемые ими поля \*). Пропорциональность полей вытекает, таким образом, из закона Кулона и является таким же опытным фактом, как и этот закон. Из опыта вытекает и то, что оба поля в изотропной среде коллинеарны (направлены по одной и той же линии).

Итак, *поле связанных зарядов коллинеарно внешнему полю (полю свободных зарядов) и пропорционально ему*. Направления этих полей противоположны.

#### § 4. Напряженность электрического поля

Сила взаимодействия заряженного шарика с пробным зарядом зависит от величины этого заряда. Если брать различные пробные заряды, то и сила, действующая на них в данной точке поля, будет различной. Однако отношение силы к заряду остается постоянным и характеризует уже само поле.

Отношение силы, действующей на заряд, к величине этого заряда называется *напряженностью поля*. Напряженность поля является основной его характеристикой. Она полностью характеризует поле в каждой его точке по величине и по направлению. Из формулы для напряженности поля

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} \quad (4.1)$$

видно, что *напряженность поля есть сила, действующая на единичный положительный заряд*.

Электрическое поле удобно графически изображать с помощью картины так называемых силовых линий, или линий напряженности. Линией напряженности называется линия, касательная к которой в каждой точке совпадает по направлению с напряженностью. Если поле создается заряженным шариком или точечным зарядом,

---

\*) Под термином «поле» понимается здесь и ниже *напряженность поля  $\mathbf{E}$*  (см. § 4).

линии напряженности представляют собой прямые, радиально расходящиеся от заряда или от центра шарика.

На рис. 4, *а* и *б*, изображены поля положительных зарядов, причем заряд на рис. 4, *б* вдвое больше, чем на

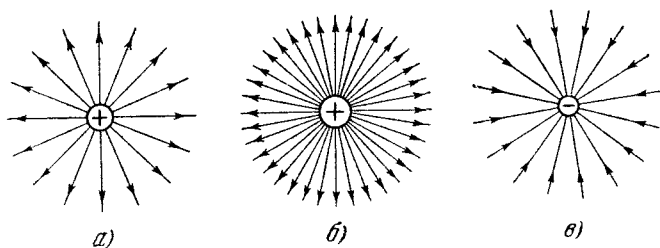


Рис. 4.

рис. 4, *а*. Более сильное поле изображается более плотно расположенными линиями напряженности. Такой способ изображения степени интенсивности поля совершенно естествен, поскольку в отсутствие поля силовых линий не должно быть совсем. Поле отрицательного заряда отличается лишь направлением линий (рис. 4, *в*).

Более сложная картина силовых линий получается в случае, когда поле создается не одним точечным зарядом, а несколькими, или неточечными зарядами. Результирующее поле находится по принципу суперпозиции

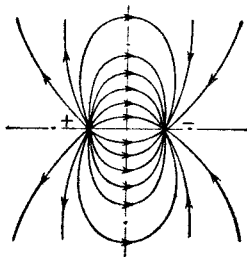


Рис. 5.

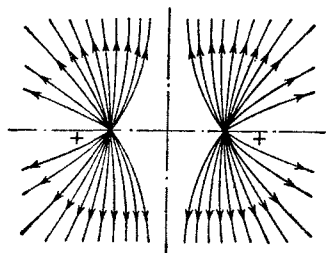


Рис. 6.

полей отдельных зарядов (см. стр. 34). Например, на рис. 5 изображено поле, создаваемое двумя равными по величине и противоположными по знаку зарядами, на рис. 6 — поле, создаваемое равными по величине и одинаковыми по знаку точечными зарядами. На рис. 7 —



однородное поле в плоском конденсаторе, возникающее при условии, что расстояние между обкладками конденсатора значительно меньше, чем размеры пластин. Однородным называется поле, в котором напряженность во всех точках имеет одну и ту же величину и одинаковое направление. В таком поле силовые линии параллельны и плотность их всюду одинакова (см. рис. 7).

Если конденсатор заполнен диэлектриком, то поле в нем ослабляется. Это получается, как мы видели, из-за

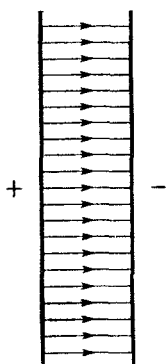


Рис. 7.

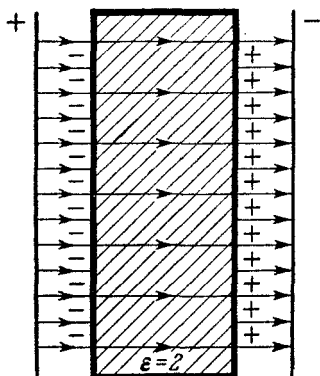


Рис. 8.

того, что на поверхностях диэлектрика выступают связанные заряды, поле которых противоположно полю свободных зарядов, находящихся на пластинках. Линии напряженности поля, создаваемого (неподвижными) зарядами, всегда начинаются и кончаются на зарядах\*). Например, на рис. 5 все линии поля начинаются на положительном заряде и заканчиваются на отрицательном. Соответственно этому в конденсаторе без диэлектрика все линии поля начинаются на положительной пластине и заканчиваются на отрицательной (рис. 7).

В конденсаторе, содержащем диэлектрик, часть линий, начинающихся на положительной пластине, заканчивается на ближайшей к этой пластине поверхности диэлектрика, как это показано на рис. 8. Поэтому внутри диэлектрика количество линий напряженности меньше,

\*) Или в бесконечности, как на рис. 4

чем в воздушном промежутке. Это — графическое выражение того факта, что напряженность поля там меньше (в  $\epsilon$  раз).

**Источники напряженности.** Во всех изображенных случаях электрическое поле создается так называемыми *источниками*. Под источниками мы будем в нашей картине линий напряженности понимать те точки, в которых эти линии начинаются или заканчиваются (точки, где линии заканчиваются, называются еще иногда отрицательными источниками, или стоками). Такими точками, как мы видели, являются электрические заряды. Итак, электрические заряды создают электрическое поле, *являются его источниками*.

Источниками напряженности, т. е. теми точками, где начинаются или кончаются линии напряженности, являются все заряды — как свободные, так и связанные. Это ясно уже из того, что  $E$  — это сила, действующая на единичный положительный заряд. На внесенный в поле заряд действует сила как со стороны свободных, так и со стороны связанных зарядов. Именно поэтому источниками вектора напряженности являются все без исключения заряды — как свободные, так и поляризацонные, т. е. связанные.

Линии поля, создаваемого источниками, начинаются и кончаются на этих источниках (или в бесконечности) и поэтому никогда не бывают замкнутыми.

## § 5. Магнитное поле

Неподвижные электрические заряды создают вокруг себя электрическое поле, магниты и токи — магнитное. Существование магнитного поля можно обнаружить, например, по силе, действующей в этом поле на пробный магнитный полюс.

**Взаимное индуктирование электрического и магнитного полей.** Электрическое и магнитное поля тесно связаны между собой. В природе существует единое электромагнитное поле, а чисто электрическое и чисто магнитное поля являются лишь его частными случаями.

Простейший опыт, обнаруживающий эту связь, таков. Возьмём два постоянных магнита и будем сближать или удалять их полюсы (рис. 9). При этом в пространстве между полюсами магнитное поле, разумеется,

будет меняться. Оказывается, это переменное магнитное поле обладает свойством создавать (индуктировать) электрическое поле. Существование последнего можно обнаружить с помощью чувствительного прибора. Линии напряженности этого электрического поля коренным образом отличаются от линий поля, создаваемого электрическими зарядами. Эти линии нигде не начинаются и нигде не кончаются — они замкнуты (см. рис. 9).

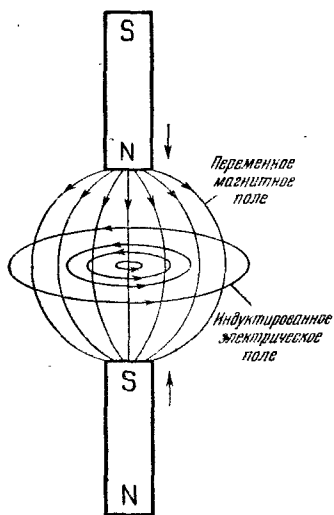


Рис. 9.

Итак, переменное магнитное поле создает электрическое. Но электрическое поле оказывает магнитному

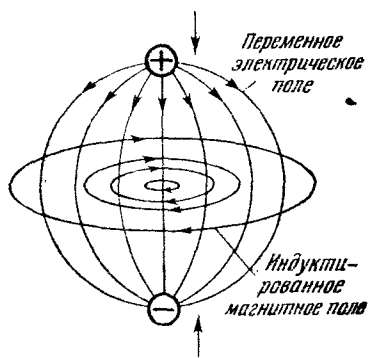


Рис. 10.

такую же услугу. Переменное электрическое поле двух сближаемых или удаляемых электрических зарядов (рис. 10) создает магнитное поле. Пока оба поля постоянны, они не имеют между собой ничего общего. Однако переменные электрическое и магнитное поля индуктируют друг друга и тем самым выдают свое родство.

**Вектор магнитной индукции.** Основной характеристикой электрического поля является напряженность  $E$ , определяемая через силу, действующую на заряд. Основной характеристикой магнитного поля является вектор магнитной индукции  $B$ , также определяющийся через силу, действующую на заряд в магнитном поле. Но магнитное поле действует на заряд совсем не так,

как электрическое. Магнит не притягивает и не отталкивает электрический заряд, а действует на него в направлении, перпендикулярном к полю и к скорости заряда.

Как показывает опыт, магнитное поле на неподвижные заряды вообще не действует. Для того чтобы на заряд со стороны магнитного поля действовала сила, требуется, чтобы он двигался (и притом не параллельно полю, иначе сила снова-таки обращается в нуль).

Результаты многочисленных опытов, в которых исследовалось действие магнитного поля на движущиеся электрические заряды, заключены в формуле (5.1). Эта формула определяет величину так называемой *силы Лоренца* — силы, действующей на заряд, движущийся в магнитном поле:

$$F = kqvB \sin \alpha. \quad (5.1)$$

Сила Лоренца направлена перпендикулярно к магнитному полю  $\mathbf{B}$  и к скорости заряда  $\mathbf{v}$ . В формуле (5.1)  $k$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц;  $q$  — величина заряда;  $\mathbf{B}$  — *магнитная индукция*, количественная характеристика магнитного поля, аналогичная напряженности электрического поля в том смысле, что как напряженность  $\mathbf{E}$ , так и магнитная индукция определяют силу, действующую на заряд. Угол  $\alpha$  — это угол между направлением скорости заряда и вектором магнитной индукции  $\mathbf{B}$ . Если заряд движется параллельно полю; то сила обращается в нуль. Максимального значения сила Лоренца достигает тогда, когда вектор скорости заряда перпендикулярен к магнитному полю, т. е. к вектору магнитной индукции  $\mathbf{B}$ . В этом случае формула (5.1) упрощается и принимает вид

$$F = kqvB. \quad (5.2)$$

В системе единиц СИ, где  $k = 1$ ,  $F = qvB$ , и тогда можно сказать, что вектор  $\mathbf{B}$  по величине равен силе, действующей на заряд, равный единице, движущийся со скоростью  $v = 1$  перпендикулярно к вектору  $\mathbf{B}$ .

Магнитное поле может быть создано постоянными магнитами, переменным электрическим полем и движущимися электрическими зарядами, в частности теми, которые движутся в проводнике, создавая электрический ток.

**Вихри вектора магнитной индукции.** Рис. 11 иллюстрирует магнитное поле электрического тока. На листе картона вокруг проводника  $AB$  размещены маленькие магнитные стрелки. В отсутствие тока эти стрелки, если они достаточно удалены друг от друга, ориентируются вдоль магнитного поля Земли. При включении сильного тока стрелки расположатся по касательным к окружности с центром в точке  $O$ . Это значит, что сила, действующая на полюсы стрелок, направлена по касательной к окружности, а окружность, следовательно, является силовой линией.

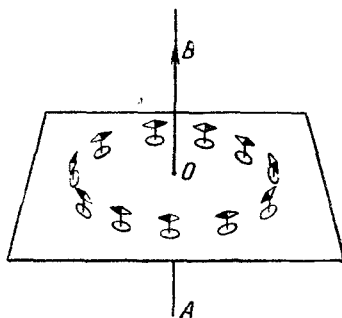


Рис. 11.

Сила, действующая на полюс магнита, обусловлена, в конечном счете, действием магнитного поля на движущиеся электрические заряды, входящие в состав атомов магнита. Можно доказать, что сила, действующая в пустоте (или в воздухе) на магнитный полюс, пропорциональна вектору  $\mathbf{B}$ , и, следовательно, линии вектора  $\mathbf{B}$  прямого проводника с током тоже являются окружностями и замкнуты. Оказывается, *линии вектора магнитной индукции замкнуты всегда*\*). Замкнутые линии нигде не начинаются и нигде не кончаются, и этим они радикально отличаются от линий поля, создаваемого источниками.

Как мы знаем, источниками вектора напряженности электрического поля являются все заряды — как свободные, так и связанные, поскольку все они действуют на внесенный в поле заряд. Аналогично этому, поле вектора  $\mathbf{B}$  создается всеми существующими токами. Это, прежде всего, обычные токи проводимости, текущие по большим (макроскопическим) проводникам. Но кроме них на заряд, движущийся в материальной среде, действуют также и те микроскопические круговые токи,

\*) В любой среде, в том числе и в неоднородной. Заметим, впрочем, что бывают и более сложные случаи, когда линии  $\mathbf{B}$  бесконечно близки к замкнутым. Пример см. в книге И. Е. Тамма «Теория электричества», Изд. «Наука», М., 1966, стр. 245.

которые текут в атомах вещества из-за того, что электроны вращаются вокруг ядер. Как макроток, так и микроток создают магнитное поле, и все они действуют своими магнитными полями на движущийся заряд. Поэтому поле вектора  $\mathbf{B}$ , определяющего полную силу, действующую на заряд, создается как макротоками, так и микротоками.

Отметим важное обстоятельство, относящееся к магнитным полям макро- и микротоков. Если макротоков и создаваемого ими магнитного поля (оно обычно называется внешним полем) нет, то микроток расположен в пространстве хаотически, беспорядочно, и их поля в среднем взаимно уничтожаются (это не происходит только в ферромагнетиках). Каждый круговой атомный ток создает свое магнитное поле, и этим он похож на маленький магнитик. Внешнее магнитное поле (поле макротоков) в какой-то степени ориентирует эти «магнитики»\*), так что среднее поле микротоков уже оказывается отличным от нуля. Чем сильнее внешнее поле, тем лучше оно ориентирует микроток (ориентация препятствует тепловому движению). Поэтому с возрастанием внешнего поля пропорционально ему возрастает и среднее поле микротоков. *Поле микротоков коллинеарно полю макротоков и пропорционально ему.*

Линии вектора  $\mathbf{B}$  всегда замкнуты. Это означает, что в природе не существует магнитных зарядов, в отличие от электрических. Поскольку магнитных зарядов нет, вектор  $\mathbf{B}$  не имеет источников, его линии нигде не начинаются и не кончаются, а замыкаются вокруг электрических токов. Электрические токи (макро- и микро-) служат, как говорят, *вихрями вектора  $\mathbf{B}$* .

Если ток, создающий магнитное поле, течет по очень тонкому прямому проводнику, то при пересечении этого проводника перпендикулярной к нему плоскостью на ней останется след в виде точки. Эту точку будут окружать замкнутые линии магнитного поля (рис. 12). Вихрь в данном случае точечный (точнее — линейный, так как вихрем магнитного поля является сам ток). Если проводник имеет большое сечение, то при пересечении его образуется целая область вихрей (рис. 13). Линии век-

---

\*) Подробно о процессе намагничивания, происходящем различным способом у пара-, диа- и ферромагнетиков, см. в гл. VIII.

тора **B** расположены как вне этой области, так и внутри нее.

Если проводник не прямой, то линии **B**, оставаясь замкнутыми, не являются уже, вообще говоря, плоскими кривыми. Ничего принципиально нового при этом не

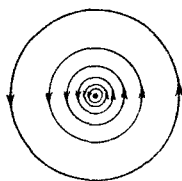


Рис. 12.

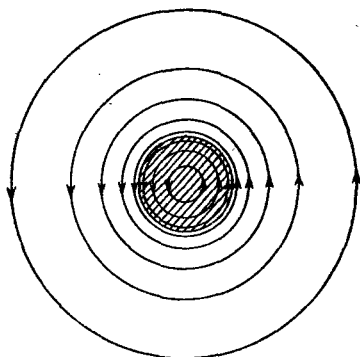


Рис. 13.

получается (за исключением обстоятельства, отмеченного в сноске на стр. 23), однако графическое изображение картины поля будет значительно более сложным. Поэтому мы ограничимся плоскими картинками поля.

### § 6. Связь между электрическим и магнитным полями

Изменяющиеся электрическое и магнитное поля индуктируют друг друга. Под изменением поля надо понимать не только изменение его интенсивности, но и, например, движение поля как целого. Мы рассмотрим ниже несколько опытов, иллюстрирующих это обстоятельство.

**Опыт 1.** На рис. 14 экспериментатор **A** равномерно и прямолинейно движется по лаборатории, перемещая заряженный металлический шарик на изолирующей подставке. Какое поле создает этот заряд? Так как заряд относительно экспериментатора **A** неподвижен (**A** движется вместе с зарядом), то **A** отмечает лишь электрическое поле, создаваемое заряженным шариком. Экспериментатор **B**, сидящий за столом, с этим не согласится. Он скажет, что поскольку заряд движется, он создает,

кроме электрического поля, еще и магнитное. Естественно напрашивается вопрос, какое же поле в действительности создает заряженный шарик? Только электрическое, или электрическое и магнитное вместе?

Оказывается, что ответ на этот вопрос *действительно* зависит от того, движемся ли мы вместе с зарядом или заряд движется относительно нас. Иными словами, ответ на этот вопрос зависит от того, в какой системе координат мы будем производить измерения. Если производить измерения в системе координат, движущейся

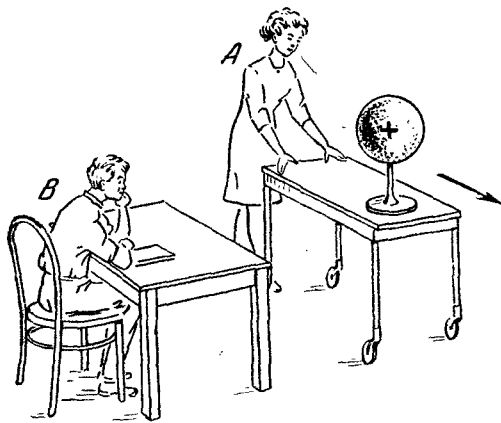


Рис. 14.

вместе с зарядом, т. е. с помощью приборов экспериментатора *A*, то эти приборы зарегистрируют присутствие только электрического поля. Приборы экспериментатора *B* регистрируют и электрическое, и магнитное поле.

**Опыт 2.** В опыте 1 магнитное поле возникает из-за движения электрического поля заряженного шарика. Можно поставить и такой опыт, в котором магнитное поле будет создаваться не движением электрического поля, а его изменением. Для этого подадим на плоский конденсатор (рис. 15) переменное напряжение большой частоты. Между пластинами конденсатора возникает быстро меняющееся электрическое поле, которое будет создавать магнитное.

**Опыт 3** (рис. 16). Дадим неподвижному экспериментатору *B* заряженный шарик, а движущемуся экспери-



ментатору  $A$  — постоянный магнит. Выясним, какая сила действует со стороны магнита на заряд. С точки зрения  $A$ , по отношению к которому заряд движется, на

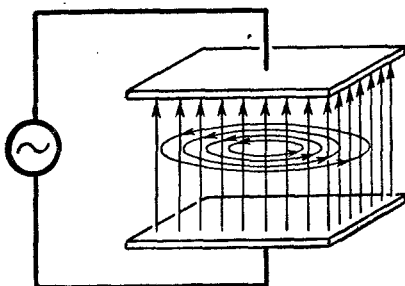


Рис. 15.

последний должна действовать сила Лоренца (движущийся заряд в магнитном поле). Сидящий за столом  $B$  скажет, что никакой силы Лоренца нет, так как скорость

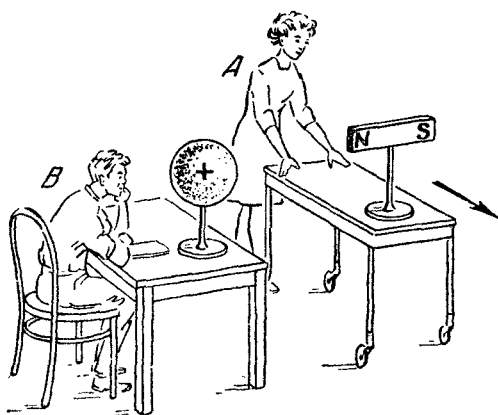


Рис. 16.

заряда равна нулю (см. (5.1)). Но наличие или отсутствие силы уже не является относительным, так как сила создает ускорение, а ускорение должно быть одинаковым в системах координат, которые движутся равномерно и прямолинейно относительно друг друга. Опыт

показывает, что сила, действующая на шарик, действительно существует. С точки зрения *A* это — сила Лоренца. Экспериментатор *B* скажет, что из-за изменения магнитного поля, вызванного движением магнита, возникло электрическое поле, и это электрическое поле действует на шарик.

Кто из них прав? Правы, разумеется, оба, так как оба отмечают то, что есть в действительности. Таким образом, оказывается, что в различных системах координат результат измерения таких физических величин, как электрическое и магнитное поле, различен. Это не должно нас удивлять. Вспомним, что и простейшая механическая величина, скорость, различна в различных системах координат, движущихся относительно друг друга. В частности, есть и такая система координат, где скорость тела равна нулю, — это система, связанная с самим телом. Поскольку различна скорость, то различна и кинетическая (а значит и полная) энергия в различных системах координат. Совершенно аналогичным образом в рассматриваемом опыте в одной системе координат есть электрическое поле, а в другой его нет. В первом опыте магнитное поле существует в неподвижной относительно лаборатории системе координат, а в системе, движущейся вместе с экспериментатором *A*, его нет.

**Опыт 4.** Легко поставить опыт, в котором индукционное электрическое поле образуется не из-за движения магнитного поля (как в опыте 3), а из-за изменения его величины. Включим в сеть переменного тока катушку 1 (рис. 17, *a*), имеющую длинный железный сердечник, и наденем на сердечник катушку 2, в которую включена лампочка от карманного фонарика. Лампочка будет гореть, так как в проводнике катушки 2 возникнет вихревое электрическое поле, созданное переменным магнитным полем железного сердечника. Это электрическое поле показано на рис. 17, *б*. Оно создает в катушке индукционный ток.

Первый и третий опыты мы трактовали как взаимное индуктирование, возникающее из-за движения одного из полей как целого. Другой подход — это подход теории относительности. Основным постулатом ее является принцип относительности: во всех инерциальных системах координат все физические явления протекают

одинаковым образом. По существу этот принцип означает объективность законов природы, независимость их от выбора системы координат. В частности, в различных инерциальных системах отсчета ускорение заряженной частицы, на которую действует поле, должно быть одним и тем же. Если масса частицы в этих системах отсчета тоже одинакова, то одинаковой должна быть и сила, о чем уже шла речь выше\*).

Из этого с необходимостью следует, что электрическое и магнитное поля преобразуются друг в друга при

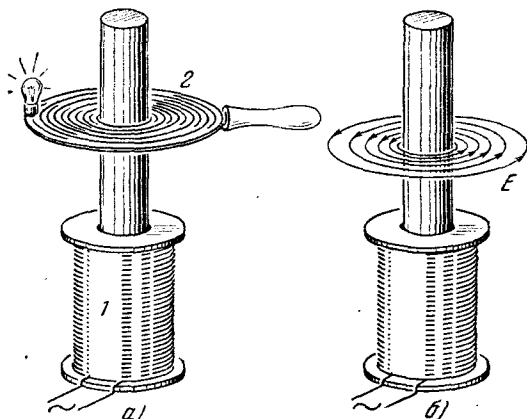


Рис. 17.

переходе из одной инерциальной системы в другую. Можно сказать, что разделение поля на электрическое и магнитное относительно и зависит от системы отсчета.

**История вопроса.** Взаимное индуктирование электрического и магнитного полей было открыто двумя великими учеными XIX в. Фарадеем и Максвеллом.

В 1831 г. Фарадей сделал крупнейшее открытие, заключающееся в том, что электрическое поле может быть создано не только электрическими зарядами, а и переменным магнитным полем (явление *электромагнитной*

\*) Приведенные рассуждения правильны, если относительная скорость движения систем отсчета  $v \ll c$ . В противном случае в разных системах различен ход времени и длины отрезков, а поэтому и ускорение. Различны также масса и сила. Однако эквивалентность систем отсчета, разумеется, остается.

*индукции* Фарадея). Вдвигая магнит в кольцевой проводник (еще лучше — в катушку), присоединенный к достаточно чувствительному гальванометру, мы обнаружим появление электрического тока. Ток в цепи идет оттого, что в проводнике появилась сила, действующая на заряды, заставляющая их перемещаться по проводнику. Такой силой является возникшее вихревое электрическое поле. Силовые линии этого поля замкнуты, часть их расположена вне проводника, часть — внутри.

Одновременно с Фарадеем связь между электрическим и магнитным полями исследовали и другие ученые. Один из них, по-видимому для того, чтобы гальванометр не подвергался тряске, вынес его в другую комнату. Вдвигая магнит в катушку, он затем шел в соседнюю комнату смотреть, отклонилась ли стрелка гальванометра. Так он и не обнаружил никакого электрического тока, потому что электрическое поле и ток возникают только при изменении магнитного. Когда магнит неподвижен, связь между магнитным и электрическим полями исчезает. Постоянное магнитное поле, которое он создает, уже не индуцирует электрического.

Через сорок лет после Фарадея Максвелл доказал, что переменное электрическое поле создает магнитное (явление *магнитоэлектрической индукции* Максвелла).

Такое явление экспериментально обнаружить значительно труднее, чем явление Фарадея. Этим и объясняется большой разрыв во времени открытия двух сторон по существу одного закона. Если в опыте 2 в конденсатор поместить магнитные стрелки, то они не будут успевать отклоняться, если электрическое поле будет быстропеременным. Если же поле будет меняться медленно, то возникающее магнитное поле будет слишком слабым и не отклонит стрелок.

**Электромагнитные волны.** Максвелл открыл свой закон, исходя из теоретических предположений, и лишь потом его открытие было подтверждено экспериментально. Самым важным экспериментальным подтверждением законов Фарадея и Максвелла является существование электромагнитных волн.

Неравномерно движущиеся заряды или проводник, по которому течет переменный ток, создают переменное магнитное поле. Это поле создает вихревое электриче-

ское, последнее будет снова индуцировать магнитное и т. д.

Взаимное индуцирование электрического и магнитного полей происходит в пространстве с огромной скоростью (со скоростью света) и представляет собой распространение электромагнитных волн. Такими электромагнитными волнами являются радиоволны, свет — инфракрасный, видимый, ультрафиолетовый, а также рентгеновские и гамма-лучи. Все эти виды излучения распространяются в пространстве благодаря процессу взаимного индуцирования электрического и магнитного полей.

В этой главе мы рассмотрели основные экспериментальные факты, лежащие в основе теории электричества и магнетизма. Но для того, чтобы правильно сформулировать их и иметь возможность использовать для решения конкретных задач электричества и магнетизма, нам необходимо познакомиться с основами теории векторных полей.

## ГЛАВА II ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

### § 7. Линии векторного поля

Поля  $E$  и  $B$  представляют собой лишь примеры векторных полей. Под *векторным полем* понимается пространство, каждой точке которого соответствует некоторый вектор. Например, в каждой точке гравитационного поля (поля силы тяжести) можно изобразить вектор силы, действующей на помещенную в эту точку единичную массу. Кстати, это поле у поверхности Земли однородно; сила, действующая на единичную массу, всюду одинакова по величине и направлению и равна  $g$  (ускорению силы тяжести, что следует из формулы  $P=mg$  при  $m=1$ ). Другим примером является электрическое поле, каждой точке которого можно приписать определенный

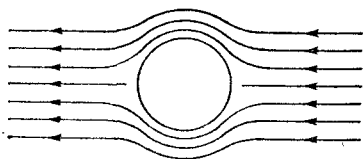


Рис. 18.

вектор напряженности. В магнитном поле каждой точке можно приписать определенный вектор магнитной индукции.

Кроме силовых полей, могут быть и другие векторные поля, например поле скоростей стационарно текущей жидкости (стационарное течение — такое, при котором скорость жидкости в любой точке пространства не зависит от времени). Каждой точке в этом случае можно приписать определенный вектор скорости. Пример поля скоростей жидкости, обтекающей цилиндр, приведен на рис. 18.

Всякая сила является вектором, но не всякая сила обладает векторным полем. Примером силы, не обла-

дающей векторным полем, является сила Лоренца. Вектор  $\mathbf{V}$ , входящий в выражение (5.1), в каждой точке имеет определенную величину и направление, но сила  $\mathbf{F}$  зависит не только от  $\mathbf{V}$ , но и от скорости заряда, пролетающего в данный момент через данную точку. Поэтому сила Лоренца  $\mathbf{F}$  не имеет ни в одной точке пространства никакого определенного значения. Аналогично этому не имеет векторного поля и сила трения скольжения или сила вязкого трения (трения в среде). Сила трения тоже зависит от скорости движения и меняет величину и направление при изменении величины и направления скорости движения.

Математическая теория векторного поля называется векторным анализом. Однако основные понятия теории векторного поля могут быть поняты без математики с помощью наглядной картины линий поля. Пользуясь этой картиной, нельзя, однако, забывать, что линии поля не существуют реально, а являются лишь средством изображения реального поля и что с помощью линий можно получить лишь качественную картину. Иными словами, картина линий поля не может заменить точного математического описания. Подчеркнем, что мы рассматриваем лишь плоские поля, которые удобно изображать графически.

В дальнейшем в этой главе мы будем говорить в основном о поле вектора  $\mathbf{E}$ .

**Циркуляция вектора.** При переходе к другим векторным полям придется произвести некоторую замену терминов. Наиболее важной заменой является следующая. Пусть необходимо вычислить работу, производимую электрическим полем над  $+1$  зарядом при перемещении его вдоль силовой линии, имеющей вид окружности (рис. 19). Если поле  $\mathbf{E}$  на всей линии постоянно, то работа будет равна произведению  $E$  на длину окружности. Однако если изображенная линия есть линия вектора  $\mathbf{V}$  или вектора скорости  $\mathbf{v}$ , то произведение модуля соответствующего вектора на длину окружности уже не будет работой. Такая величина называется в случае *любого*

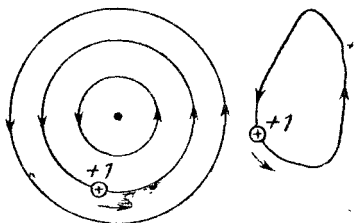


Рис. 19.

векторного поля *циркуляцией вектора* по замкнутому пути. В частности, если вектор, поле которого рассматривается, является силой (например силой, действующей на  $+1$  заряда, т. е. напряженностью), то циркуляция его есть работа этого вектора на замкнутом пути. Разумеется, можно вычислить работу на замкнутом пути любой формы, причем вовсе не обязательно, чтобы этот путь совпадал с линией поля. Аналогично этому и циркуляцию можно брать по любому замкнутому пути (см., например, правую часть рис. 19).

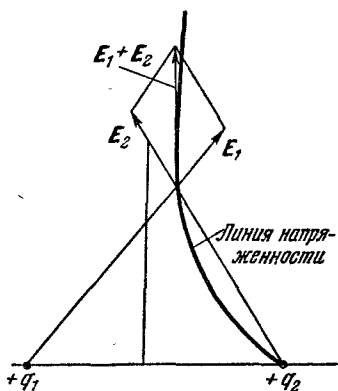


Рис. 20.

Итак, в дальнейшем термин «работа на замкнутом пути» в случае любого векторного поля (а не поля  $\mathbf{E}$ ) надо заменять термином «циркуляция вектора».

### Принцип суперпозиции.

Картина линий поля точечного заряда очень проста. Нарисовать поле двух таких зарядов уже несколько сложнее (рис. 20): нужно сначала в каждой точке векторно сложить напряженности  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$ , создаваемые в данной точке каждым из зарядов,

а затем уже провести линию напряженности. Линии напряженности складываемых полей могут пересекаться, однако линии напряженности результирующего поля, полученного путем векторного сложения полей отдельных зарядов, пересекаться уже не могут. В самом деле, в точке пересечения имелось бы сразу два направления напряженности, что невозможно.

Результирующее поле  $\mathbf{E}$  любой системы зарядов находится путем векторного сложения напряженностей, создаваемых в данной точке каждым из зарядов:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_n. \quad (7.1)$$

Если поля  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \dots, \mathbf{E}_n$  создаются электрическими зарядами, соотношение (7.1) означает, что поле данного фиксированного заряда не зависит от присутствия других зарядов. Поэтому поля налагаются так, как будто каждый заряд существует отдельно. Аналогичным обра-



зом складываются магнитные поля, создаваемые отдельными токами.

Этот принцип нахождения результирующего поля называется *принципом суперпозиции*. Он справедлив не только для полей, создаваемых зарядами, но и для поля электрического, создаваемого переменным магнитным, и для магнитного, создаваемого переменным электрическим. Принцип суперпозиции является опытным фактом, справедливым вплоть до очень сильных полей. По этому же закону складываются не только статические, но и быстро меняющиеся электромагнитные поля. Например, перекрещивающиеся пучки света не рассеиваются друг на друге, а лишь накладываются в том месте, где они пересекаются \*).

**Плотность линий поля.** Изображая линии напряженности, мы тем самым указываем, как направлено поле в различных точках пространства. Требуется еще указать, где поле слабее, а где сильнее. Это тоже можно сделать, так как в нашем распоряжении осталась еще произвольной плотность линий. Удобно проводить силовые линии с такой плотностью, чтобы *число линий, проходящих через единичную площадку, перпендикулярную к этим линиям, численно равнялось самой напряженности поля в данной точке*. Тогда картина линий поля будет характеризовать не только его направление, но и величину в каждой точке (рассмотрите с этой точки зрения рис. 4—8).

## § 8. Источники и вихри поля

Линии поля либо где-то начинаются и где-то кончаются, либо являются замкнутыми. Так, например, заряды создают электрическое поле, линии которого начинаются или кончаются на этих зарядах (или в бесконечности). Переменное магнитное поле тоже создает электрическое поле, но линии этого поля имеют совсем другой характер — они замкнуты.

Таким образом, *поле могут создавать физические объекты двух совершенно разных видов, называемые источниками и вихрями.*

\*) Иначе обстоит дело с пучками колоссальной интенсивности, которые могут быть созданы лазерами, — там принцип суперпозиции нарушается.

Источниками электрического поля ( $E$ ) служат заряды, а вихрем — переменное магнитное поле. У магнитного поля ( $B$ ), вихрями являются токи и переменное электрическое поле\*). Источников вектора  $B$  (магнитных зарядов) в природе не существует.

Всякое поле однозначно определяется своими источниками и вихрями (и условиями на бесконечности).

Если поле не имеет ни источников, ни вихрей, то оно не может существовать. В этом случае оно тождественно равно нулю.

Источники характеризуются только своей величиной, направления они, разумеется, не имеют. Вихри же характеризуются как величиной, так и направлением (например, проводник с током может быть по-разному расположен в пространстве). Иными словами, источники являются скалярными величинами, а вихри — векторными.

Источники (например заряды) могут быть точечными, поверхностными и объемными. Поверхностные источники располагаются на некоторой поверхности, например на поверхности заряженного проводника или поляризованного диэлектрика. Объемные источники заполняют некоторый объем. Облачко электронов вблизи накаленного катода электронной лампы представляет собой пример объемного заряда — источника электрического поля.

Вихри могут быть линейными, поверхностными или объемными. Примером линейного вихря магнитного поля может служить тонкий проводник с током. Макро- и микротоки, текущие по поверхности, являются поверхностными вихрями вектора  $B$ . Проводник с током, имеющий большое сечение, представляет собой объемный вихрь вектора  $B$  (область, заполненная линейными вихрями). Поле  $B$ , им создаваемое, изображено на рис. 13. Такой же вихревой областью, только для электрического поля, является железный сердечник катушки, питаемой переменным током (рис. 17, б).

Графическое изображение поля, имеющего много источников и вихрей, является очень сложным. К счастью, в силу принципа суперпозиции результирующее поле сложной системы является векторной суммой полей, создаваемых элементарными источниками и вихрями.

---

\*) Переменное электрическое поле называется еще *током смещения*, см. § 58.

Элементарным источником естественно считать точечный источник, а элементарным вихрем — линейный. В графической картине поля мы можем дать им следующее определение:

*Точка, в которой линии поля начинаются (или кончаются), называется источником (или стоком) поля. Линия, вокруг которой замыкаются линии поля (не имеющие источников или других вихрей), называется вихрем поля.*

В тех случаях, когда поле имеет сложный характер, при взгляде на картину линий поля трудно, на основании сформулированного определения, установить, есть ли у него вихри и если есть, то где они расположены. Как мы увидим ниже (§ 12), в этих случаях надо руководствоваться более общими положениями, справедливыми для любого поля.

## § 9. Поле одних источников

**Потенциальное поле.** Важнейшим свойством поля, не имеющего вихрей и созданного одними только неподвижными источниками, является его потенциальность. *Электрическое поле называется потенциальным, если работа, которую совершает поле над зарядом, при перемещении его по любому замкнутому пути равняется нулю.*

Вспомогательное сказанное на стр. 34, дополним это определение для других векторных полей так: *векторное поле называется потенциальным, если его циркуляция на любом замкнутом пути равна нулю.*

Хорошо известным примером потенциального поля является поле силы тяжести (гравитационное). Если поднять груз на некоторую высоту, а затем опустить его на прежний уровень, то полная механическая работа будет равна нулю. Если груз из точки  $A$  переместить в точку  $B$  по пути  $I$  (рис. 21), а затем опустить его из точки  $B$  в точку  $A$  по пути  $II$ , то полная механическая работа будет снова равняться нулю. Разумеется, работа, выполненная на этом пути человеком, перемещавшим груз из  $A$  в  $B$ , а затем из  $B$  в  $A$ , не равна нулю, так как

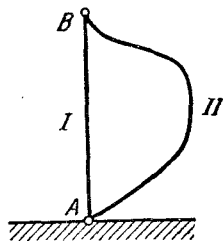


Рис. 21.

человек выполняет, кроме механической работы, еще и дополнительную работу, превращающуюся в его мышцах в тепло. Механическая же работа в точности равна нулю.

Свойством потенциальности, кроме гравитационного поля, обладает и поле, образованное неподвижными электрическими зарядами — *электростатическое поле*. Работа электростатического поля на замкнутом пути равна нулю. На рис. 22 и 23 приведены примеры замкнутых путей в однородном поле и в поле точечного заряда, из которых ясно, каким образом работа на замкнутом пути может обратиться в нуль. На участке 1—2

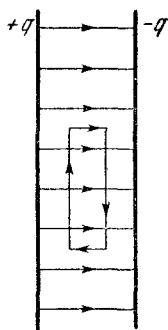


Рис. 22.

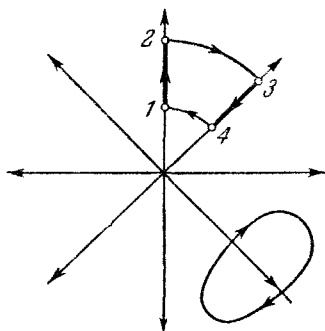


Рис. 23.

(рис. 23) поле перемещает положительный заряд вдоль своих линий и поэтому выполняет положительную работу. На участке 2—3 сила перпендикулярна к перемещению и работа не выполняется. На участке 3—4 выполняется отрицательная работа. Это значит, что для того, чтобы переместить заряд из точки 3 в точку 4, нужно приложить к нему внешнюю силу, которая двигала бы его против сил поля. При этом работа внешней силы будет равна по абсолютной величине работе поля на участке 1—2. На участке 4—1 работа снова не выполняется. Таким образом, полная работа на замкнутом пути действительно оказывается равной нулю. Таким свойством обладает любой замкнутый путь в поле, созданном одними источниками. Поле, созданное одними источниками, является потенциальным (доказательство этого см. в § 25).

Кроме определения «поле является потенциальным, если его работа на любом замкнутом пути равна нулю» («циркуляция равна нулю»), можно привести следующее эквивалентное определение: *поле является потенциальным, если работа перемещения заряда между любыми точками 1 и 2 (рис. 24) не зависит от формы пути, а зависит только от положения начальной и конечной точек пути.*

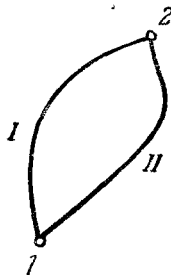


Рис. 24.

Обе формулировки эквивалентны. Действительно, переместим заряд сначала из точки 1 в точку 2 по пути I, а затем из точки 2 в точку 1 по пути II. Если работа на замкнутом пути равна нулю, то это как раз и означает, что работа на пути I равна работе на пути II с обратным знаком. Отсюда ясно, что если мы будем перемещать заряд по пути II в том же направлении, что и по пути I, то мы выполним ту же работу.

**Потенциал.** Только в потенциальном поле можно ввести понятие потенциала. *Потенциалом*  $\phi$  данной точки поля называется работа \*), которую нужно затратить, чтобы переместить  $+1$  заряда из бесконечности в данную точку поля (или, что то же, работа, которую затрачивает *поле*, перемещая  $+1$  заряда из данной точки поля в бесконечность).

Под «бесконечностью» понимается область пространства, столь далекая от всех электрических зарядов, что в этой области поле можно считать равным нулю.

В качестве точки, в которой потенциал полагается равным нулю, не обязательно выбирать бесконечность. Можно взять *любую фиксированную точку* пространства и положить в ней потенциал равным нулю. В физике в качестве такой точки обычно выбирается бесконечность, в электротехнике нулевым потенциалом обычно считается потенциал Земли.

Почему понятие потенциала может быть введено только для потенциального поля? Это нетрудно усмотреть из рис. 25. Представим себе, что на различных

\*) Работа эта положительна, если заряд мы перемещаем *против* сил поля, и отрицательна в противоположном случае.

путях, ведущих из бесконечности к точке поля  $P$ , работа перемещения единичного положительного заряда различна. Спрашивается, какую же работу тогда нужно считать потенциалом точки  $P$ ? Ясно, что в том случае, когда работа зависит от формы пути, понятие потенциала теряет смысл. «Потенциал» в этом случае будет характеризовать уже не только точку  $P$ , но и весь путь. И только тогда, когда работа перемещения заряда не зависит от формы пути, потенциал характеризует точку, куда мы переносим заряд из бесконечности. А работа не будет зависеть от формы пути только в потенциальном поле.

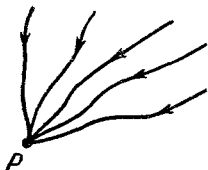


Рис. 25.

Итак, понятие потенциала относится только к потенциальному полю.

**Потенциальная энергия.** Известное из механики понятие потенциальной энергии тоже относится только к потенциальному полю. Если поле не потенциально, никакой потенциальной энергии не существует. Потенциальной энергией тела  $U$  мы как раз и называем ту работу, которую нужно затратить, чтобы переместить это тело из бесконечности\*) в данную точку. Только в том случае, если эта работа не зависит от формы пути, потенциальная энергия имеет определенное значение.

Потенциальная энергия заряда простым образом связана с потенциалом той точки поля, где этот заряд находится. Именно, потенциальная энергия равна произведению заряда  $q$  на потенциал  $\phi$  (так как потенциал есть работа перенесения единичного заряда). Следовательно, потенциальная энергия заряда в электрическом (потенциальном) поле равна

Потенциальная энергия заряда простым образом связана с потенциалом той точки поля, где этот заряд находится. Именно, потенциальная энергия равна произведению заряда  $q$  на потенциал  $\phi$  (так как потенциал есть работа перенесения единичного заряда). Следовательно, потенциальная энергия заряда в электрическом (потенциальном) поле равна

$$U = q\phi. \quad (9.1)$$

## § 10. Поле вихрей

Вихревое поле уже отнюдь не является потенциальным. Рассмотрим наиболее простой случай вихревого поля. Пусть совершенно отсутствуют источники, а вихри расположены перпендикулярно к плоскости и их пересечение с плоскостью представляет собой точки. На

\*) Или из другой, заранее зафиксированной точки.

рис. 26 изображены силовые линии такого поля, создаваемого одним линейным (на плоскости — точечным) вихрем, они имеют вид окружностей. Здесь уже никак нельзя утверждать, что работа на любом замкнутом пути равна нулю. Например, если взять в качестве замкнутого пути саму силовую линию, то при перемещении заряда вдоль этой силовой линии сила, действующая на заряд, будет все время направлена в сторону перемещения (а не так, как на рис. 22, 23, где на одной части пути сила направлена в сторону перемещения, а на другой — в обратную сторону).

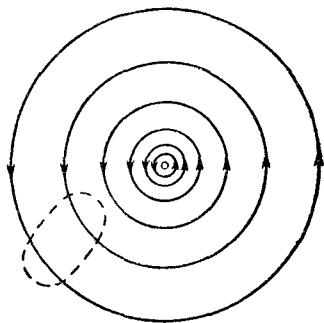


Рис. 26.

Таким образом, в вихревом поле существуют такие замкнутые пути, на которых работа (циркуляция) не равна нулю. Следовательно, вихревое поле не является потенциальным. Однако вихревое поле нельзя определить как такое, в котором работа на любом замкнутом пути не равна нулю. Существуют и такие контуры, на которых работа все же обращается в нуль. На рис. 26 один из таких контуров изображен пунктиром. Вообще любой контур, не включающий в себя вихрь (т. е. ту точку, вокруг которой замыкаются силовые линии), будет обладать тем же свойством.

Итак, в вихревом поле *существуют* замкнутые контуры, на которых работа (циркуляция) не равна нулю. Однако нельзя утверждать, что в вихревом поле циркуляция по любому замкнутому пути отлична от нуля.

Если поле создается источниками и вихрями совместно, то его линии уже, вообще говоря, не будут замкнутыми. Тем не менее такое поле не является потенциальным, потому что в нем всегда существуют замкнутые пути\*) (окружающие вихри), на которых работа будет отлична от нуля. Если же окажется, что в некотором поле работа на *всех* замкнутых контурах равна нулю, то такое поле будет потенциальным и может быть создано только источниками.

\*) Не замкнутые линии поля, а просто замкнутые пути.

«Неявные» вихри. При графическом изображении векторного поля источники всегда видны — это те точки, где линии начинаются или кончаются. А вот вихри, оказывается, видны не всегда. Они явно видны в тех случаях, когда линии поля представляют собой замкнутые кривые. В смешанном же поле, имеющем и источники, и

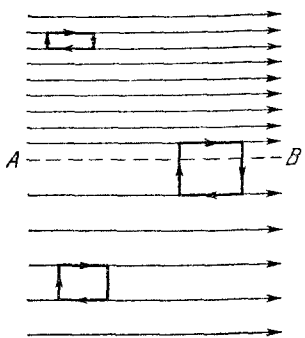


Рис. 27.

вихри, последние могут быть «неявными». Проиллюстрируем это утверждение примером.

На рис. 27 изображено течение жидкости, не обладающей вязкостью, так что один слой может без трения скользить относительно другого. Выше линии  $AB$  жидкость движется с большей скоростью, ниже линии  $AB$  — с меньшей. Проведем замкнутые контуры внутри верхней и нижней областей. Циркуляция вектора скорости по таким контурам равна нулю. Действительно, на

верхней части контура произведение скорости  $v$  на длину отрезка  $l$  равно  $vl$ , на нижней же  $-vl$ , поскольку скорость направлена против направления обхода на этой части контура. Разъясним это изменение знака на примере работы вектора  $E$ , считая временно, что на рис. 27 изображены линии этого вектора. На верхней части контура работа над  $+1$  зарядом равна  $El$ , на нижней же, где мы заряд двигаем против поля, работа равна  $-El$ . Таким образом, работа на замкнутом пути, а в общем случае — циркуляция по контуру, целиком расположенному в верхней или нижней области, равна нулю. Иначе будет обстоять дело, если контур расположен так, что его верхняя граница находится в верхней области, а нижняя — в нижней. В этом случае циркуляция будет равна  $v_1l - v_2l = (v_1 - v_2)l$ , т. е. отлична от нуля. В соответствующем силовом поле работа на таком замкнутом пути была бы также отлична от нуля. Это означает, что на границе между областями быстрого и медленного течения имеется «неявный» вихрь.

Этот неявный вихрь можно сделать явным, если наложить дополнительное однородное поле, которое само



по себе не может внести вихрей. На рис. 28 слева изображен контур, перенесенный с рис. 27 (контур в средней части рисунка). На верхней части контура поле ( $v_1$ ) более сильное, чем на нижней ( $v_2$ ). Найдем среднее арифметическое между ними  $(v_1 + v_2)/2$  и вычтем это среднее поле из  $v_1$  и  $v_2$ . Эта операция и представляет собой наложение дополнительного однородного поля, равного  $-(v_1 + v_2)/2$ . Появился уже явный вихрь (чертеж справа).

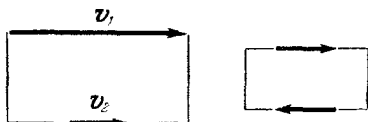


Рис. 28.

Вихрь здесь сосредоточен на поверхности раздела двух областей и поэтому называется **поверхностным**.

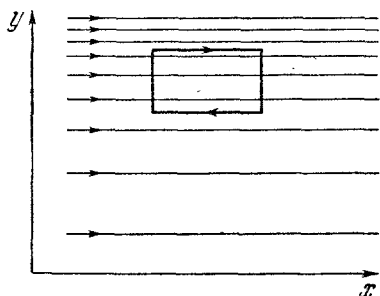


Рис. 29.

Могут существовать **невные вихри** и в объеме.

Примером может служить поле (рис. 29), в котором напряженность  $E$  (направленная вдоль оси  $Ox$ ) меняется с координатой  $y$ . На рис. 29 напряженность растет с увеличением  $y$  (возрастает плотность линий). Нетрудно сообразить, что циркуляция по любому замкнутому контуру, лежащему в плоскости чертежа, здесь будет отлична от нуля.

В качестве примера можно взять контур, изображенный на рисунке. На верхней части контура напряженность больше, чем на нижней, поэтому работа на всем контуре (т. е. циркуляция) отлична от нуля.

## § 11. Поверхностные источники и поверхностные вихри \*)

На границе раздела двух сред электрическое и магнитное поля, вообще говоря, меняются по величине и направлению. Удобно характеризовать изменение

\*) Материал этого параграфа, а также материал §§ 12, 13 и 18 понадобится в последующих главах.

вектора (назовем его вектором  $\mathbf{A}$ , чтобы не говорить отдельно о векторах  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ ) изменением двух его составляющих — перпендикулярной к границе раздела (она называется нормальной составляющей и обозначается  $A_n$ ) и параллельной границе (тангенциальной составляющей  $A_t$ ).

На рис. 30 показаны нормальная и тангенциальная составляющие вектора  $\mathbf{A}$  в обеих средах.

Все векторы, которые мы рассматриваем в первой части книги ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ), при переходе через границу раздела двух сред меняют только одну из составляющих — либо нормальную, либо тангенциальную\*).

Если нормальная составляющая вектора меняется при переходе через границу раздела, то это значит, что на границе есть источники. Если меняется тангенциальная, то это значит, что на границе есть вихри.

Чтобы доказать это, воспользуемся принципом суперпозиции и представим поле  $\mathbf{A}$  в виде наложения двух полей, одно из которых имеет только нормальную, а другое — только тангенциальную составляющую.

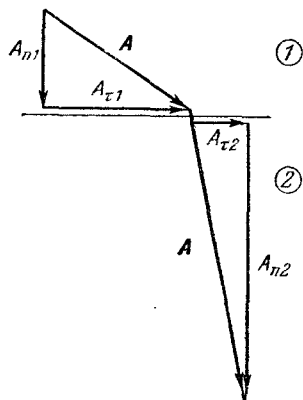


Рис. 30.

Если нормальная составляющая  $A_n$  в первой среде больше, чем во второй, то линии поля, соответствующего этой составляющей, в первой среде гуще, чем во второй (рис. 31). Это и значит, что на границе имеются источники. Их называют поверхностными источниками.

Вторая часть поля изображена на рис. 32. Если  $A_{t1} > A_{t2}$ , то линии поля  $A_{t1}$  в первой среде гуще, чем во второй. Мы уже доказали в предыдущем параграфе, что в этом случае на границе имеется (поверхностный) вихрь.

\*) В § 37 рассматривается вектор поляризации  $\mathbf{P}$ , изменяющийся, вообще говоря, обе составляющие. Аналогично ведет себя вектор намагниченности  $\mathbf{M}$  (§ 89).

На границе раздела двух диэлектриков с различными  $\epsilon$  у вектора  $\mathbf{E}$  (если он не параллелен границе) есть источники — связанные заряды. Поэтому нормальная составляющая  $E_n$  сверху и снизу от границы раздела разная, т. е.  $E_{n1} \neq E_{n2}$ .

Что касается тангенциальной составляющей напряженности  $E_\tau$ , то она не меняется при переходе через

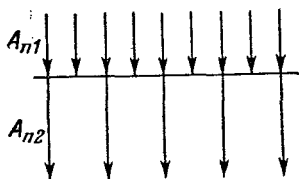


Рис. 31.

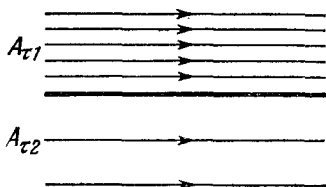


Рис. 32.

границу двух сред (независимо от того, диэлектрические эти среды или проводящие). Чтобы доказать это, рассмотрим малый контур на границе двух сред (рис. 33). Работа над  $+1$  зарядом (циркуляция) на этом замкнутом контуре равна  $E_{\tau 1}l - E_{\tau 2}l$  ( $E_{\tau 1}l$  — работа на верхней части контура,  $-E_{\tau 2}l$  — на нижней). В потенциальном поле работа на замкнутом пути равна нулю, т. е.  $E_{\tau 1}l - E_{\tau 2}l = 0$ , откуда  $E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$ .

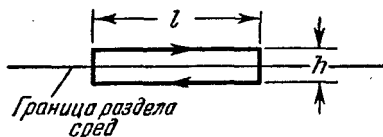


Рис. 33.

Непотенциальное электрическое поле может возникнуть *только* в том случае, если существует переменное магнитное. Но, как можно доказать (§ 96), в этом случае  $E_{\tau 1}l - E_{\tau 2}l = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ , где  $\Phi$  — магнитный поток, проходящий через площадь контура. Это равенство выражает примененный к рассматриваемому контуру закон электромагнитной индукции Фарадея. Если высоту контура  $h$  стремиться к нулю (а это *необходимо* сделать, так как нас интересуют составляющие  $E_{\tau 1}$  и  $E_{\tau 2}$  в непосредственной близости от границы по обе ее стороны), то магнитный поток через площадь контура  $\Phi$  тоже стремится к нулю.

Итак, всегда в любых условиях

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}. \quad (11.1)$$

У вектора  $\mathbf{B}$  источников нет вообще, поэтому нет и поверхностных источников. Следовательно,  $B_{n1} = B_{n2}$ . Тангенциальные составляющие  $B_{\tau 1}$  и  $B_{\tau 2}$  не равны друг другу. Они различны из-за микротокков на границе, которые представляют собой поверхностные вихри вектора  $\mathbf{B}$ .

Итак, у вектора  $\mathbf{E}$  есть поверхностные источники и нет поверхностных вихрей; у вектора  $\mathbf{B}$ , наоборот, есть поверхностные вихри и нет источников.

## § 12. Мощность источника и вихря

**Мощность вихря.** В отсутствие вихря внутри заданного контура циркуляция вектора по этому контуру обращается в нуль. Поэтому естественно считать *величину циркуляции* вектора по данному контуру *мерой мощности* *полного вихря*, заключенного в этом контуре.

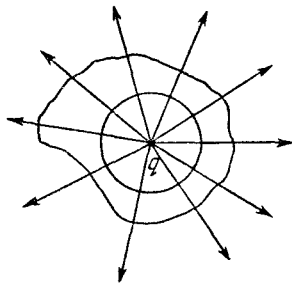


Рис. 34.

**Мощность источника.** Аналогично этому можно определить и мощность источника. Введем понятие *потока вектора через поверхность*. Потоком через поверхность называется число линий вектора, пересекающих эту поверхность. Мощность источника определяется потоком через замкнутую поверхность, окружающую этот источник.

Рассмотрим поток напряженности поля, создаваемого точечным зарядом  $q$  (находящимся в однородной среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ ), через сферу, в центре которой он находится. Напряженность поля на поверхности сферы радиуса  $r$  равна

$$E = \frac{q}{\epsilon r^2} \quad (\text{СГС}).$$

Напряженность численно равна количеству линий, проходящих через  $1 \text{ см}^2$ , поэтому поток  $N$  через сферу равен

$$N = \frac{q}{\epsilon r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi}{\epsilon} q \quad (\text{СГС}). \quad (12.1)$$

Ясно, что если вместо сферы взять любую другую замкнутую поверхность (рис. 34), поток останется тем же, так как все линии, проходящие через сферу, проходят и через эту поверхность (см. по этому поводу замечание в сноске на стр. 75—76).

**Теорема Остроградского — Гаусса.** Нетрудно записать математическое выражение для потока напряженности. Рассмотрим сначала поток через площадку  $\Delta S$ , настолько малую, что вблизи нее поле  $\mathbf{E}$  можно считать однородным. Воспользовавшись принципом суперпозиции, разделим поле на составляющие  $\mathbf{E}_n$  и  $\mathbf{E}_\tau$  — нормальную и касательную к площадке  $\Delta S$ . Площадку пересекают только линии поля  $\mathbf{E}_n$ . Число линий, пересекающих единицу площади, равно  $E_n$ . Число линий, пересекающих площадь  $\Delta S$ , равно  $E_n \Delta S$ . Поток через любую поверхность равен сумме  $\sum E_n \Delta S$ , где  $\Delta S$  — малые площадки, на которые разбита вся поверхность. Таковую сумму принято обозначать значком интеграла  $\int E_n dS$ , а интеграл по замкнутой поверхности обозначать  $\oint E_n dS$ .

Итак, в однородной среде согласно (12.1)

$$\oint E_n dS = \frac{4\pi}{\epsilon} q \quad (\text{СГС}).$$

Если внутри замкнутой поверхности находится не один заряд, а произвольное их число, то напряженность  $\mathbf{E}$  в любой точке равна сумме напряженностей, создаваемых отдельными зарядами:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots$ . Поэтому и нормальная к площадке  $dS$  составляющая  $E_n$  равна сумме нормальных составляющих:  $E_n = E_{n1} + E_{n2} + \dots$ . Поскольку интеграл от каждой  $E_{ni}$  равен  $\frac{4\pi}{\epsilon} q_i$ , то интеграл  $\oint E_n dS$  равен

$$\oint E_n dS = \frac{4\pi}{\epsilon} \sum q \quad (\text{СГС}). \quad (12.2)$$

Целесообразно исключить из формулы  $\epsilon$  и тем самым избавиться от допущения однородности среды. Для этой цели воспользуемся формулой (3.2), согласно которой  $q/\epsilon = q + q'$ , и запишем (12.2) в виде, пригодном и для неоднородной среды:

$$\oint E_n dS = 4\pi \sum (q + q') \quad (\text{СГС}). \quad (12.3)$$

Итак, полный поток напряженности через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных и связанных зарядов, находящихся внутри этой поверхности (теорема Остроградского — Гаусса). Формула (12.3) и есть математическое выражение того факта, что источниками вектора  $\mathbf{E}$  служат свободные ( $q$ ) и связанные ( $q'$ ) заряды. Для вектора электрической индукции  $\mathbf{D}$  (см. § 15), равного  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ , теорема Остроградского — Гаусса записывается в виде (см. (12.2))

$$\oint D_n dS = 4\pi \sum q \quad (\text{СГС}) \quad (12.4)$$

в полном соответствии с тем, что по определению вектора  $\mathbf{D}$  его источниками являются только свободные заряды. Формулы (12.3) и (12.4) справедливы для любой однородной или неоднородной среды.

В системе СИ напряженность поля точечного заряда выражается формулой  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$ , поэтому вместо (12.3) имеем

$$\epsilon_0 \oint E_n dS = \sum (q + q') \quad (\text{СИ}), \quad (12.5)$$

а вектор электрической индукции выражается формулой  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}$ , так что вместо (12.4) получим

$$\oint D_n dS = \sum q \quad (\text{СИ}). \quad (12.6)$$

Теорема Остроградского — Гаусса определяет поток вектора через замкнутую поверхность через мощность источников, заключенных внутри этой поверхности.

**Точное определение мощности источников и вихрей.** Итак, мощность источника пропорциональна создаваемому им полному потоку, а мощность вихря пропорциональна создаваемой им циркуляции.

Это дает возможность определять местонахождение и мощность источников и вихрей любого поля, обладающего как угодно сложной конфигурацией.

*Если поток вектора через замкнутую поверхность, окружающую некоторую область пространства, отличен от нуля, то в этой области находятся источники. Величина потока пропорциональна алгебраической сумме мощностей источников, находящихся внутри замкнутой поверхности.*

*Если циркуляция вектора по замкнутому контуру отлична от нуля, то через площадь, ограниченную этим контуром, проходят вихри данного вектора. Величина циркуляции пропорциональна полному вихрю, охватываемому контуром.*

### § 13. Скалярное и векторное произведение векторов

Известно, что векторы  $A$  и  $B$  складываются так: из точки, где оканчивается вектор  $A$ , проводится вектор  $B$ . Тогда вектор  $A + B$  начинается в начале вектора  $A$  и кончается в конце вектора  $B$ . На вопрос, почему именно так складываются векторы, а не иначе, ответ простой: таково определение действия сложения векторов.

Почему такое определение является целесообразным? Ведь можно было бы придумать множество других определений. Когда мы вводим новые величины и действия с ними, их определение зависит от нас.

Все дело в том, что в природе фактически существуют величины, которые складываются так, как по определению складываются векторы. Это — перемещения (не абсолютные длины путей, а именно перемещения), скорости, силы и другие величины, называемые векторными, в том числе напряженность электрического поля  $E$  и магнитная индукция  $B$ .

Теперь — о произведении векторов. Какое определение мы дадим этому понятию, зависит от нас. Ясно, что нельзя произведение векторов  $A$  и  $B$  понимать так: величину  $A$  взять  $B$  раз, так как  $B$  — это не «количество раз», т. е. не число, а вектор, имеющий направление.

Введено два типа произведения векторов — скалярное и векторное.

**Скалярное произведение векторов.** К необходимости ввести понятие скалярного произведения нас подводит

существование таких величин, как механическая работа. Если материальная точка перемещается прямолинейно на величину  $l$  и сила  $F$ , действующая на нее во время перемещения, постоянна, то работа этой силы равна  $A = Fl \cos \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между векторами  $F$  и  $l$  (между их положительными направлениями, т. е. направлениями от начала к стрелке).

Произведение  $F l \cos \alpha$  записывают короче:  $F \cdot l$  и называют скалярным произведением векторов  $F$  и  $l$ .

Скалярным произведением векторов  $A$  и  $B$  называется скаляр, равный произведению модулей (длин) этих векторов на косинус угла между ними. Оно обозначается  $A \cdot B$ :

$$A \cdot B = AB \cos \alpha. \quad (13.1)$$

Если угол  $\alpha$  между векторами меньше  $90^\circ$ , скалярное произведение положительно, если  $\alpha > 90^\circ$  — отрицательно. При перестановке перемножаемых векторов скалярное произведение не меняет знака, т. е.  $B \cdot A = A \cdot B$ . Скалярное произведение обращается в нуль, если векторы перпендикулярны друг к другу, т. е.  $\alpha = 90^\circ$ . Нельзя забывать про жирный шрифт, принятый для обозначения векторов (или же надо ставить стрелки над векторами —  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ ), так как иначе получится произведение модулей  $AB$  (без косинуса).

**Векторное произведение векторов.** Другой тип произведения векторов — векторное произведение  $C = A \times B$ .

Векторное произведение  $C$  векторов  $A$  и  $B$  — это (по определению) вектор, направленный перпендикулярно к плоскости векторов  $A$  и  $B$  в такую сторону, чтобы с конца вектора  $C$  вращение от  $A$  к  $B$  было видно происходящим против часовой стрелки (см. рис. 35). Имеется в виду вращение на угол  $\alpha$ , меньший  $180^\circ$ .

По модулю векторное произведение равно произведению модулей векторов  $A$  и  $B$  на синус угла между ними:

$$C = AB \sin \alpha. \quad (13.2)$$

Векторное произведение равно нулю, если перемножаемые векторы направлены по одной прямой (тогда

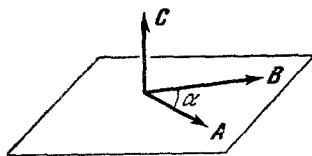


Рис. 35.



$\sin \alpha = 0$ ). При перестановке перемножаемых векторов векторное произведение меняет знак:

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B}.$$

Примером векторного произведения может служить момент  $\mathbf{N}$  силы  $\mathbf{F}$  относительно точки  $O$  (рис. 36):

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (13.3)$$

Здесь  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки  $P$  приложения силы. По абсолютной величине момент равен

$$N = rF \sin \alpha. \quad (13.4)$$

Из рис. 36 ясно, что плечо силы (обозначено пунктиром) равно  $r \sin(\pi - \alpha) = r \sin \alpha$ , следовательно, определенный нами момент силы (13.4) равен произведению силы на плечо, как и должно быть.

Направлен момент (13.3) перпендикулярно к плоскости вращения. Это тоже естественно, иначе моменты сил, вращающих в противоположные стороны, не смогут уравниваться.

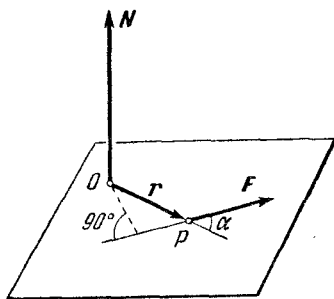


Рис. 36.

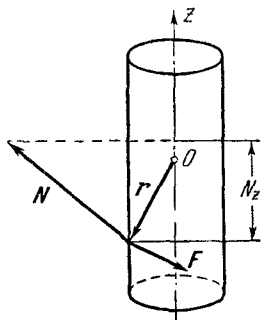


Рис. 37.

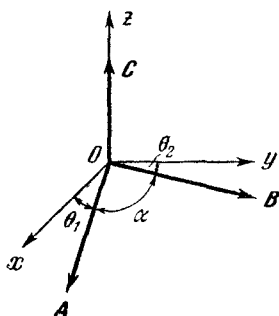


Рис. 38.

Во избежание недоразумения заметим, что кроме момента силы *относительно точки* в механике встречается еще момент силы *относительно оси*. Так называется проекция  $N_z$  момента силы относительно точки на ось, проходящую через эту точку (рис. 37). Проекция  $N_z$ ,

т. е. момент относительно оси  $Oz$ , не зависит от того, где именно на оси выбрана точка  $O$ .

Другим примером векторного произведения является сила Лоренца. Вместо длинного описания свойств этой силы, приведенного на стр. 22, можно записать короткую формулу, определяющую силу Лоренца по величине и направлению (мы полагаем  $k=1$ ):

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (13.5)$$

Есть и еще ряд векторных физических величин, представляющих собой векторные произведения других векторов. Таким образом, понятие векторного произведения вводится именно потому, что величины с такими свойствами встречаются в природе.

В последующих главах нам потребуются выражения для проекций вектора  $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$  на оси. Пусть векторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  лежат в плоскости  $xy$  (рис. 38). Тогда их векторное произведение (вектор  $\mathbf{C}$ ) имеет только одну проекцию — на ось  $Oz$ . Она равна  $C_z = AB \sin \alpha$ . Преобразуем это выражение, пользуясь тем, что, как видно из рис. 38,  $\alpha = \frac{\pi}{2} - (\theta_1 + \theta_2)$ . Подставляя, получим

$$C_z = AB \cos(\theta_1 + \theta_2) = A \cos \theta_1 \cdot B \cos \theta_2 - A \sin \theta_1 \cdot B \sin \theta_2.$$

Поскольку  $A \cos \theta_1 = A_x$ ,  $B \cos \theta_2 = B_y$ ,  $A \sin \theta_1 = A_y$  и  $B \sin \theta_2 = B_x$ , имеем

$$C_z = A_x B_y - A_y B_x.$$

Можно показать, что в общем случае, когда вектор  $\mathbf{C}$  имеет не равные нулю проекции на оси  $Ox$  и  $Oy$ , справедливы формулы

$$\begin{aligned} C_x &= A_y B_z - A_z B_y, \\ C_y &= A_z B_x - A_x B_z, \\ C_z &= A_x B_y - A_y B_x. \end{aligned} \quad (13.6)$$

## ГЛАВА III

### ИСТОЧНИКИ И ВИХРИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО И МАГНИТНОГО ПОЛЕЙ

#### § 14. Векторы $E$ и $B$

Всякое поле определяется своими источниками и вихрями. Все свойства поля вытекают из имеющихся у него источников и вихрей. Электрическое и магнитное поля характеризуются векторами напряженности электрического поля  $E$  и магнитной индукции  $B$ . Обе эти величины определяют силу, действующую на электрический заряд, хотя и определяют ее они по-разному. Напряженность поля представляет собой просто силу, действующую на  $+1$  заряда, в то время как вектор магнитной индукции равен силе, действующей на единичный заряд, движущийся с определенной скоростью (формула (5.2)). Но независимо от этого различия в их определении оба вектора определяют силу, действующую на заряд. Именно поэтому между ними имеется много общего.

Например, вектор напряженности электрического поля создается всеми зарядами, и свободными, и связанными. И те и другие заряды являются источниками вектора напряженности. Объясняется это тем, что на заряд, помещенный в поле, действуют как свободные, так и связанные заряды, т. е. все имеющиеся заряды. Аналогично этому, вектор магнитной индукции создается и макротоками, т. е. токами, текущими по проводникам и представляющими собой упорядоченное движение электрических зарядов в них, и микротоками (токами, текущими в атомах и молекулах). Все эти токи создают магнитное поле, и это магнитное поле действует на движущийся заряд.

Подчеркивая аналогию между векторами  $E$  и  $B$ , мы не должны забывать, что свободные и связанные заряды

являются *источниками  $E$* , а макро- и микротоки — *вихрями  $B$* .

**Какой смысл имеет «поле в данной точке».** Сделаем важное для понимания замечание. Все макроскопические электрические заряды состоят из отдельных микрочарядов — электронов и ядер. Электроны и ядра отнюдь не закреплены, а движутся. Электрический ток тоже состоит из токов отдельных электрических зарядов, в металле — электронов. Так вот, говоря об электрическом поле *в данной точке среды*, мы имеем в виду в действительности не поле в математической точке, а среднее поле в малом объемчике, окружающем эту точку. Малый объем вокруг точки должен содержать еще много атомов (о его точном выборе см. § 39).

Аналогично этому, магнитная индукция  $B$  также является *средним* полем, образованным электронами проводимости, создающими макротоки, и электронами в атомах, создающими микротоки. «Истинное» поле меняется от атома к атому и даже внутри атома. Рассматриваемое же в теории Максвелла поле (как  $E$ , так и  $B$ ) является усредненным и не меняется на малых расстояниях порядка размеров атома.

## § 15. Вектор электрической индукции $D$

Помимо основных векторов  $E$  и  $B$ , в теории электричества и магнетизма оказывается необходимым ввести еще два вектора. Со свойствами одного из них — вектора  $D$ , называемого вектором электрической индукции \*) (или вектором смещения), — мы сейчас познакомимся.

Определим поле вектора электрической индукции как такое, источниками которого служат только свободные заряды (напомним, что источниками вектора  $E$  служат и свободные, и связанные заряды). Одними источниками векторное поле еще не определяется, так что должны быть заданы еще и вихри вектора  $D$ . Определим вектор  $D$  так, чтобы *в однородном и изотропном диэлектрике он не имел вихрей*.

---

\*) Название носит исторический характер, и ему не надо придавать никакого наглядного смысла (в частности, нет никакой связи с явлением электромагнитной индукции).

**Связь между  $D$  и  $E$ .** Как должны быть связаны между собой в однородном диэлектрике два вектора, характеризующих электрическое поле, — вектор  $E$  и вектор  $D$ ? Первый представляет собой поле свободных и связанных зарядов, а второй — поле свободных зарядов. Известно, что связанные заряды возникают из-за поляризации диэлектрика полем свободных зарядов. Поле связанных зарядов параллельно полю свободных, направлено в противоположную сторону и пропорционально ему. Нетрудно сообразить, что по этой причине векторы  $E$  и  $D$  в однородном и изотропном диэлектрике тоже должны быть параллельны и пропорциональны друг другу. Это записывают в виде \*)

$$D = \epsilon E, \quad (15.1)$$

где  $\epsilon$  — это та же величина, которая уже была ранее нами введена в закон Кулона и названа диэлектрической проницаемостью. Действительно, формула (15.1), если ее переписать в виде

$$E = D/\epsilon,$$

означает, что в однородной среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  поле свободных зарядов  $D$  ослабляется в  $\epsilon$  раз, а это как раз соответствует закону Кулона.

Теперь распространим соотношение (15.1) на случай неоднородного (но изотропного) диэлектрика, например, состоящего из нескольких однородных сред (две сложенные вместе пластинки из диэлектриков с различными  $\epsilon$ ). Тем самым мы полностью определили вектор  $D$ , а значит, и его вихри. Можно сказать, что эти вихри мы «навязали» вектору  $D$ , определив его соотношением  $D = \epsilon E$ . На стр. 57 мы покажем, что если вектор  $D$  не перпендикулярен к границе раздела диэлектриков, то он имеет на границе поверхностные вихри. Без них  $D$  не сможет в каждой из сред удовлетворять соотношению (15.1).

Векторы  $E$  и  $D$  в изотропном диэлектрике параллельны, но численно (и, значит, по плотности линий) отнюдь не совпадают. В плоском конденсаторе со слоистым диэлектриком (рис. 39) линии  $D$  начинаются на

---

\*) В системе СИ векторы  $D$  и  $E$  имеют разную размерность, и связь между ними в этой системе записывается как  $D = \epsilon_0 \epsilon E$  (о величине  $\epsilon_0$  см. § 19).

положительной пластине и проходят свободно через все слои, так как связанные заряды на границах диэлектриков не являются источниками  $\mathbf{D}$  (рис. 39, а). Через постоянный во всем конденсаторе вектор  $\mathbf{D}$  можно выразить напряженность  $E = D/\epsilon$ . В воздухе  $E = D$ , в первом

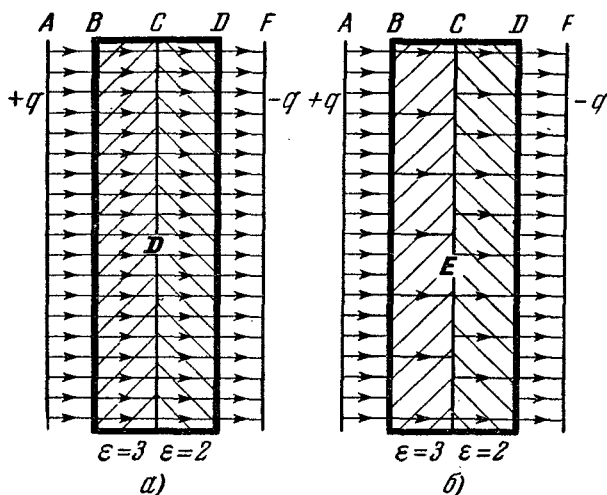


Рис. 39.

диэлектрике  $E = D/3$ , во втором  $E = D/2$  (рис. 39, б). Плоская граница  $B$  содержит отрицательный связанный заряд (на ней часть линий  $\mathbf{E}$  заканчивается), плоскости  $C$  и  $D$  — положительный.

В рассмотренном примере линии поля перпендикулярны к границам раздела диэлектриков. Если линии не перпендикулярны к границе, то они преломляются.

Поскольку  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ , согласно (15.1), в каждом из диэлектриков параллельны друг другу, их линии преломляются одинаково (рис. 40, а, б). При этом у вектора  $\mathbf{E}$  (рис. 40, а) на границе имеются источники (связанные заряды), в то время как у  $\mathbf{D}$  (рис. 40, б) источников на границе нет.

**Поверхностные вихри вектора  $\mathbf{D}$ .** Покажем, что из факта преломления линий и отсутствия источников  $\mathbf{D}$  на границе следует, что у  $\mathbf{D}$  на границе должны быть вихри. Как мы видели раньше (стр. 42, пример с тече-

нием жидкости), если составляющая некоторого вектора (в рассмотренном примере — вектора скорости), параллельная границе раздела, различна по обе ее стороны, то этот вектор имеет на границе вихри. Строго это показано

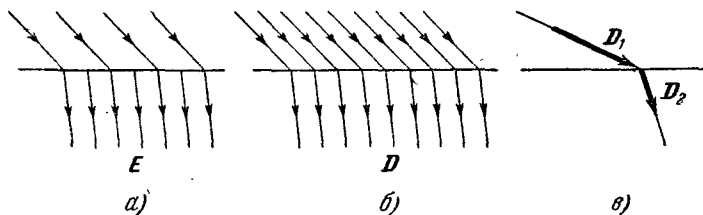


Рис. 40.

в § 11. Из рис. 40, б видно, что вектор  $D$  в первом диэлектрике больше, чем во втором (больше плотность линий). Итак, модуль  $D_1$  больше, чем  $D_2$  (рис. 40, в), и к тому же  $D_1$  наклонен под меньшим углом к границе раздела, поэтому его составляющая вдоль этой границы больше, чем у  $D_2$ . Следовательно, вектор  $D$  имеет на поверхности вихри. Их не будет только при нормальном падении линий  $D$  на границу.

## § 16. Вектор напряженности магнитного поля $H$

Аналогично тому как в теории электричества помимо вектора  $E$  вводится вектор  $D$ , так и в теории магнетизма помимо вектора  $B$  вводится вектор  $H$ , называемый (по историческим причинам) вектором напряженности магнитного поля. Определим  $H$  для однородной и изотропной среды как вектор, *вихрями которого являются только макроток* \*), т. е. токи, вызванные упорядоченным движением электрических зарядов в проводниках. Для полного определения вектора  $H$  нужно задать еще и его источники.

**Связь между  $B$  и  $H$ .** Включим в определение вектора  $H$  требование, чтобы в однородной и изотропной среде он не имел источников (ср. предыдущий параграф). Выясним, какие могут быть источники у вектора  $H$  в

\*) А также переменное электрическое поле (ток смещения) — см. § 58.

неоднородной среде. Вектор  $\mathbf{B}$ , как мы помним, имеет своими вихрями макро- и микротоки. Макротоки создают магнитное поле, которое ориентирует микротоки. В отсутствие такой ориентации микротоки различных атомов ориентированы беспорядочно и поэтому их результирующее (среднее) магнитное поле равно нулю. С появлением внешнего поля (поля макротоков) среднее поле микротоков возрастает пропорционально внешнему полю. Следовательно, между векторами  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  в однородном и изотропном магнетике также существует пропорциональность. Она выражается формулой\*)

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (16.1)$$

где  $\mu$  носит название магнитной проницаемости. Пропорциональность между  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  имеет место для всех веществ, кроме ферромагнетиков (веществ типа железа). Для ферромагнетиков пропорциональность  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  нарушается (см. §§ 92, 93).

**Источники вектора  $\mathbf{H}$ .** Распространим соотношение  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  на случай неоднородного магнетика, например, состоящего из нескольких однородных, соприкасающихся по поверхностям раздела (см. аналогичные рассуждения о векторах  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$  на стр. 55). Тем самым мы «навяжем» вектору  $\mathbf{H}$  источники, без которых соотношение  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  не сможет быть выполнено в обеих средах одновременно. Действительно, представим себе перпендикулярную к магнитному полю границу раздела двух магнетиков (рис. 41), имеющих магнитные проницаемости  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Линии вектора  $\mathbf{B}$  замкнуты, поэтому на границе раздела магнетиков они прерываться не могут (рис. 41, а). Кроме того, они перпендикулярны к границе раздела, поэтому плотность линий вектора  $\mathbf{B}$  в обоих магнетиках одинакова. Но вектор  $\mathbf{H}$  равен  $\mathbf{B}/\mu$ , а  $\mu$  в этих магнетиках различна, поэтому и поле  $\mathbf{H}$  в этих магнетиках будет различным. Это значит, что некоторые линии вектора  $\mathbf{H}$  должны либо начаться, либо закончиться на границе раздела магнетиков (рис. 41, б). Следовательно, граница раздела магнетиков содержит источники вектора  $\mathbf{H}$ . Аналогичное явление будет наблюдаться в местах, где магнетик неоднороден.

---

\*) В системе СИ связь между  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  записывается в виде  $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}$  (см. § 89).



Итак, вихрями вектора  $\mathbf{H}$  являются макроток (а также ток смещения), а источники его находятся на границах раздела магнетиков и в тех местах, где магнетик неоднороден.

$\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  в постоянном магните. Для иллюстрации свойств  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  рассмотрим постоянный магнит в виде

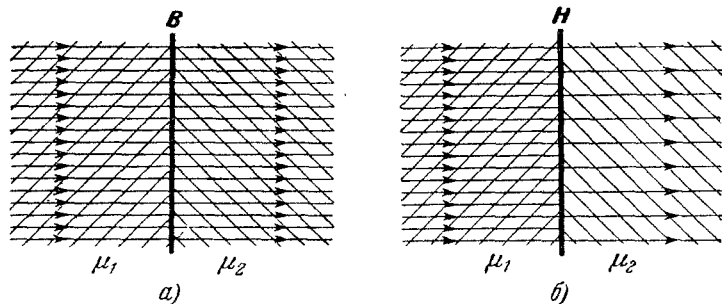


Рис. 41.

однородно намагниченного кольца с небольшим разрезом (рис. 42). Однородно намагниченным оно будет в том случае, если плотность ориентированных микротоков будет всюду одинаковой. Макроток нет, вихрями  $\mathbf{B}$  служат ориентированные микротоки\*), создающие постоянное во всем кольце поле  $\mathbf{B}$ .

При переходе через боковую поверхность составляющая  $\mathbf{B}$ , параллельная границе ( $\mathbf{B}_\tau$ ), меняется от значения  $\mathbf{B}$  внутри магнита до очень малой величины, почти до нуля. Этот скачок означает, что микротоки на границе являются вихрями вектора  $\mathbf{B}$ . Они и создают поле  $\mathbf{B}$ , так как остальные микротоки (если намагниченность однородная) внутри образца в среднем компенсируют друг друга (см. § 89).

Если разрез мал по сравнению с диаметром стержня магнита, то линии  $\mathbf{B}$  идут в разрезе практически параллельно друг другу. Плотность линий остается такой же, как и в железе, поэтому и величина  $\mathbf{B}$  в разрезе такая

\*) Для ферромагнетиков это не орбитальные токи, образованные вращением электронов по орбитам, а токи, которые можно грубо представить как образованные вращением электронов вокруг собственных осей. Это вращение электрона (точнее, его момент импульса) называется спином; to spin — по-английски вертеть, см. § 92.

же, как и в железе. Линии  $\mathbf{B}$  замкнуты и их число не меняется при переходе из магнита в воздух и обратно; это и означает, что источников у  $\mathbf{B}$  нет.

Иначе обстоит дело с вектором  $\mathbf{H}$ . Так как макроточек в данном случае нет, у вектора  $\mathbf{H}$  нет вихрей, а есть только источники. Источниками  $\mathbf{H}$  являются границы

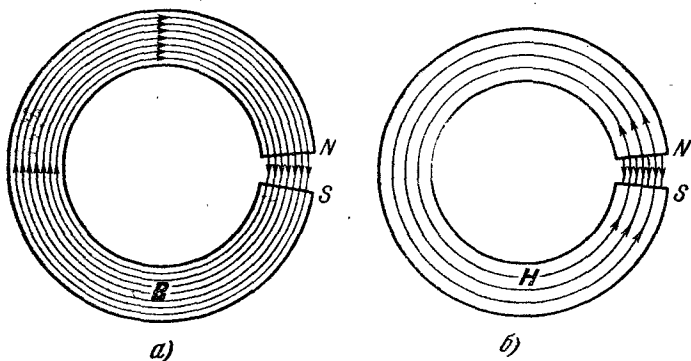


Рис. 42.

раздела магнетиков (если только  $\mathbf{H}$  не параллелен этим границам). В данном случае такими границами являются полюсы магнита (и области, близкие к полюсам, что на рис. 42 не показано). Линии  $\mathbf{H}$  начинаются на северном полюсе и идут как вне магнита, так и внутри его к южному полюсу, где и заканчиваются. В воздушном зазоре  $\mu=1$ , значит,  $\mathbf{B}=\mathbf{H}$ , а внутри магнита  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  направлены в противоположные стороны (см. рис. 42, а и б; на этих рисунках не показано слабое поле вне магнита, у боковой его поверхности).

Если бы кольцо было сплошным, источников  $\mathbf{H}$  не было бы совсем, и поле  $\mathbf{H}$  равнялось бы нулю. При этом поле  $\mathbf{B}$ , разумеется, не обратилось бы в нуль, так что не может быть и речи о выполнении внутри магнита соотношения  $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ .

**$\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  в электромагните.** Теперь намотаем на тот же кольцообразный магнит катушку и пропустим по ней ток (рис. 43). Пусть поле макроточек направлено так же, как и остаточное поле магнита (поле ориентированных микроточек), и следовательно, оба поля складываются.

Линии  $\mathbf{B}$ , естественно, станут гуще, никаких других изменений с  $\mathbf{B}$  не произойдет. Если ток в катушке достаточно сильный, то поле  $\mathbf{H}$  будет теперь создаваться в основном этим током и линии  $\mathbf{H}$  будут направлены как внутри сердечника, так и в зазоре в ту же сторону, что и линии  $\mathbf{B}$ . В зазоре по-прежнему  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ . Внутри магнита  $\mathbf{H}$  меньше  $\mathbf{B}$  по двум причинам: 1) ориентированные микротоки, создающие постоянный магнетизм, не являются вихрями вектора  $\mathbf{H}$ ; 2) источники вектора  $\mathbf{H}$  на

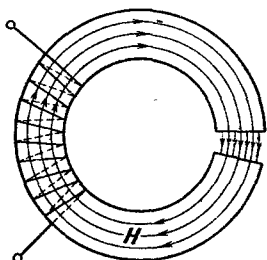


Рис. 43.

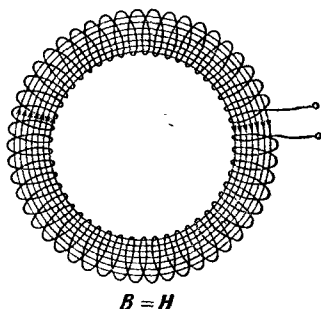


Рис. 44.

полюсах создают (слабое) поле, направленное против поля, создаваемого макротоками (катушкой).

**Сравнение магнита и соленоида.** Сравним кольцевой постоянный магнит (рис. 42) с таким же соленоидом (катушкой), не имеющим сердечника (рис. 44). Пропустим через соленоид ток такой силы, чтобы в зазоре соленоида магнитное поле совпадало с полем в зазоре магнита. Поскольку магнитная индукция  $\mathbf{B}$  всюду такая же, как в зазоре (отсутствует рассеяние линий, они идут практически параллельно), магнитная индукция в соленоиде и в магните будет совпадать. Этому не мешает то, что в магните  $\mathbf{B}$  будет создаваться только микротоками, а в соленоиде — только макротоками. Поля  $\mathbf{H}$  в магните и в соленоиде не имеют ничего общего: в соленоиде  $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ , а в магните  $\mathbf{H}$  создается источниками на полюсах и направлено против  $\mathbf{B}$ .

**Случай анизотропной среды.** Векторы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  (и аналогично  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ ) параллельны только в изотропной среде. В анизотропных средах (кристаллических телах)  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ , а также  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  могут иметь различные направления.

## § 17. Вихри и источники электрического и магнитного полей

Нам уже известны источники и вихри всех четырех векторов:  $E$ ,  $D$ ,  $B$  и  $H$ . Сведем полученные результаты в таблицу. Эта таблица эквивалентна полной системе уравнений, описывающих электромагнитное поле, — так называемой системе уравнений Максвелла, и включает, кроме них, уравнения связей между векторами  $D = \epsilon E$ ,  $B = \mu H$ . Поскольку каждый вектор определяется своими источниками и вихрями, в этой таблице заключены все свойства электрического и магнитного полей.

Источники и вихри электрического и магнитного полей

Вектор	Источники	Вихри
<b><math>E</math></b>	Свободные и связанные заряды	Переменное магнитное поле *)
<b><math>D</math></b>	Свободные заряды	Переменное магнитное поле *). Неоднородности диэлектриков или границы раздела между ними при перпендикулярном падении линий $D$ на границу.
<b><math>B</math></b>	Источников нет	Макро- и микроток. Переменное электрическое поле *) (ток смещения)
<b><math>H</math></b>	Неоднородности магнетиков или границы раздела между ними при скользком падении линий $H$ на границу	Макроток. Переменное электрическое поле *) (ток смещения)

\*) Величина вихря пропорциональна скорости изменения соответствующего поля.

Как видно из таблицы, простейшим случаем электромагнитного поля является поле, образованное одними только неподвижными электрическими зарядами. Если токи отсутствуют, а имеющиеся заряды неподвижны, то отсутствует и магнитное поле. Тогда остаются только поля  $E$  и  $D$ , причем поле  $E$  образуется только источниками (свободные и связанные заряды). Поле  $D$ , кроме источников, может иметь вихри на границе раздела диэлектриков. Поле  $E$ , создаваемое одними источниками,

является потенциальным, поэтому можно ввести понятие потенциала электрического поля.

Вторым по сложности случаем является тот, когда в системе, кроме неподвижных зарядов, имеются постоянные электрические токи. В этом случае существует как электрическое, так и магнитное поле, однако оба они будут постоянными. Постоянное магнитное поле не создает вихрей электрического, следовательно, поле  $E$  будет потенциальным. Именно поэтому можно говорить о потенциале отдельных точек цепи постоянного тока и о разности потенциалов между ними. Широкое применение этих понятий в электротехнике обусловлено потенциальным характером, т. е. отсутствием вихрей у электрического поля в цепи постоянного тока. Далее, поскольку электрическое поле в этой цепи постоянно, вихрями  $B$  и  $H$  являются только электрические токи — макроток для  $H$  и макро- и микроток для  $B$ .

Связь между верхней и нижней частями таблицы появляется, когда мы переходим от постоянного тока к переменному, который создает переменное магнитное поле. Ясно, что если переменный ток имеет малую частоту, т. е. меняется еще медленно, связь эта несущественна, так как вихри электрического поля малы. Это означает, что электрическое поле остается практически потенциальным. Чем больше частота переменного тока, тем быстрее меняется его магнитное поле и поэтому тем сильнее отличается его электрическое поле от потенциального. Такой случай имеет место, например, в колебательных контурах, применяемых в радиотехнике. При этом электрическое поле меняется тоже очень быстро (с той же частотой, что и магнитное), а следовательно появляются дополнительные вихри у магнитного поля, связанные не с электрическими токами, а с током смещения (переменным электрическим полем).

Это обстоятельство, как мы знаем, ведет к излучению электромагнитных волн. В электромагнитной волне магнитное поле является вихрем электрического, а электрическое — вихрем магнитного. Как можно показать, вследствие этого электрическое и магнитное поля в электромагнитной волне в свободном пространстве убывают при удалении от быстро меняющихся токов и зарядов антенны очень медленно — обратно пропорционально первой степени расстояния от антенны.

## § 18. Граничные условия для векторов $\mathbf{E}$ , $\mathbf{D}$ , $\mathbf{B}$ , $\mathbf{H}$

В § 11 было доказано, что тангенциальная составляющая вектора  $\mathbf{E}$  не меняется при переходе через границу раздела, т. е.  $E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$ . Из того факта, что вектор  $\mathbf{D}$  не имеет на границе источников, следует, что  $D_{n1} = D_{n2}$ . Подставляя в первое равенство  $E_{\tau 1} = \frac{1}{\epsilon_1} D_{\tau 1}$  и  $E_{\tau 2} = \frac{1}{\epsilon_2} D_{\tau 2}$ , а во второе  $D_{n1} = \epsilon_1 E_{n1}$  и  $D_{n2} = \epsilon_2 E_{n2}$ , получим окончательно соотношения между составляющими  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  по обе стороны границы:

$$\begin{aligned} D_{n1} &= D_{n2}, & \epsilon_1 E_{n1} &= \epsilon_2 E_{n2}, \\ E_{\tau 1} &= E_{\tau 2}, & \frac{1}{\epsilon_1} D_{\tau 1} &= \frac{1}{\epsilon_2} D_{\tau 2}. \end{aligned} \quad (18.1)$$

Сформулируем теперь граничные условия для векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ . Циркуляция  $\mathbf{H}$  по контуру, проведенному так, как на рис. 33, равна  $H_{\tau 1}l - H_{\tau 2}l$  (см. аналогичные рассуждения о векторе  $\mathbf{E}$  на стр. 45). Она должна быть равна вихрю, охватываемому контуром. Но микроток, имеющиеся на границе магнетиков, как и все другие микроток, не являются вихрями  $\mathbf{H}$ , так что циркуляция  $\mathbf{H}$  по этому контуру должна равняться нулю (если, случайно, по границе раздела не текут *макротоки*). Ничего не меняет в этих рассуждениях и существование тока смещения (переменного электрического поля). По причинам, вполне аналогичным тем, которые приведены на стр. 45, циркуляция  $\mathbf{H}$  все равно остается равной нулю. Итак,  $H_{\tau 1}l - H_{\tau 2}l = 0$ , откуда  $H_{\tau 1} = H_{\tau 2}$ .

У вектора  $\mathbf{B}$  источников нет, поэтому  $B_{n1} = B_{n2}$ . Следовательно, на границе двух сред для составляющих  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  имеют место такие соотношения:

$$\begin{aligned} B_{n1} &= B_{n2}, & \mu_1 H_{n1} &= \mu_2 H_{n2}, \\ H_{\tau 1} &= H_{\tau 2}, & \frac{1}{\mu_1} B_{\tau 1} &= \frac{1}{\mu_2} B_{\tau 2}. \end{aligned} \quad (18.2)$$

## ГЛАВА IV ЭЛЕКТРОСТАТИКА

### § 19. Электрический заряд

Электрическое поле (вектор  $\mathbf{E}$ ), создаваемое неподвижными зарядами, потенциально. Изучение этого поля составляет предмет важной части теории электричества — электростатики.

Два заряженных тела взаимодействуют между собой сильнее или слабее, в зависимости от величины зарядов этих тел. Следовательно, заряд данного тела есть характеристика электрического взаимодействия этого тела с другими телами.

Чем больше заряд, тем больше сила, действующая на него в заданном электрическом поле  $\mathbf{E}$ , причем между силой и зарядом существует прямая пропорциональность \*):  $F = qE$  (§ 4).

Приняв некоторый заряд за единицу, можно определить величину любого другого заряда по силе его взаимодействия с единичным или по силе, которая действует на этот заряд в заданном внешнем поле.

Определение единицы заряда влечет за собой выбор системы единиц. В физике наиболее распространена так называемая гауссова или СГС система, в электро- и радиотехнике — система СИ. В гауссовой системе в законе Кулона (3.1) коэффициент пропорциональности  $k$  полагается равным единице. Это значит, что закон Кулона (в пустоте) записывается в виде

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (\text{СГС}). \quad (19.1)$$

---

\*) Предполагается, что заряд точечный и напряженность поля в той точке, где он находится, равна  $\mathbf{E}$ .

Напомним, что в этой системе длина измеряется в сантиметрах, время — в секундах, масса — в граммах, сила — в динах:

Поскольку единицы силы и расстояния уже определены, единица заряда определяется из формулы (19.1). Единичным зарядом является такой заряд, который действует на равный ему, находящийся на расстоянии 1 см в пустоте, с силой в одну дину (для справедливости закона Кулона оба заряда должны быть точечными). Определенная нами единица заряда называется единицей заряда системы СГС и обозначается 1 СГС<sub>q</sub>.

В системе СИ единица заряда — кулон\*) определяется не из закона Кулона, а выражается через одну из основных единиц этой системы — ампер (кулон = ампер × секунду). Другими основными единицами системы СИ являются метр, секунда, килограмм (масса). Сила в этой системе измеряется в ньютонах (напомним, что 1 н = 10<sup>5</sup> дин), работа и энергия — в джоулях.

Разумеется, два заряда, по кулону каждый, находясь на расстоянии 1 м, не будут взаимодействовать с силой в 1 н. Если подставить в (19.1)  $q_1 = q_2 = 3 \cdot 10^9$  СГС<sub>q</sub>,  $r = 1$  м = 10<sup>2</sup> см, то получим  $F = 9 \cdot 10^{14}$  дин = 9 · 10<sup>9</sup> н. Поэтому, если мы захотим записать закон Кулона так, чтобы заряды выражались в нем в кулонах,  $r$  — в метрах, а сила — в ньютонах, мы не сможем уже положить коэффициент пропорциональности равным единице. При  $q_1 = q_2 = 1$  к и  $r = 1$  м сила  $F$  должна быть равна 9 · 10<sup>9</sup> н. Это значит, что коэффициент  $k$  должен иметь численное значение 9 · 10<sup>9</sup>. Принято записывать этот коэффициент в виде

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}. \quad (19.2)$$

Следовательно, в системе СИ закон Кулона в пустоте имеет вид

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (\text{СИ}). \quad (19.3)$$

Размерность величины  $\epsilon_0$  уравнивает размерности левой (н) и правой ( $\kappa^2/\text{м}^2$ ) сторон равенства. Очевидно, она должна быть такой:  $[\epsilon_0] = \kappa^2/\text{м}^2 \cdot \text{н}$ . Если воспользо-

\*) 1 к = 3 · 10<sup>9</sup> единиц заряда СГС<sub>q</sub>.



ваться тем, что джоуль = кулон × вольт (см. § 26) и что кулон = вольт × фарада (§ 35), то легко получить:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ м/ф.} \quad (19.4)$$

В однородной и изотропной диэлектрической среде с проницаемостью  $\epsilon$  в знаменателе формул (19.1) и (19.3) появляется  $\epsilon$ .

**Элементарный заряд.** Вся совокупность экспериментов показывает, что электрический заряд не может быть сколь угодно малым. Наименьший заряд, существующий в природе (см., впрочем, § 20), — это так называемый элементарный заряд  $e$ . Отрицательный элементарный заряд  $-e$  имеет электрон. Такой же по величине, но положительный заряд имеет протон (ядро атома водорода).

Заряженное тело имеет всегда либо избыток, либо недостаток электронов. Поэтому заряд любого тела равен целому числу элементарных зарядов. Несмотря на малую величину элементарного заряда, измерение его не является особенно трудной задачей.

Остроумный способ измерения элементарного заряда предложил в 1909 г. Милликен. Схема его опыта, доступного учебной лаборатории, видна из рис. 45. С помощью пульверизатора в пространство между пластинами конденсатора вдуваются видимые в микроскоп капельки масла. Из-за трения о воздух они заряжаются. В поле конденсатора на движущуюся капельку действуют три силы: вес  $mg$  (за вычетом силы Архимеда), электрическая сила  $qE$  и сила трения о воздух, пропорциональная скорости капельки. Меняя поле в конденсаторе, можно остановить капельку, тогда  $qE = mg$ , откуда

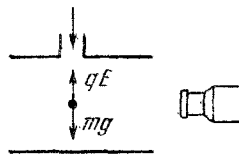


Рис. 45.

$$q = \frac{mg}{E}. \quad (19.5)$$

Наблюдая каплю в поле зрения микроскопа, можно заметить, что время от времени равновесие скачком нарушается. Это происходит из-за изменения заряда вследствие осаждения на капельке одного или нескольких ионов или из-за потери ею электронов при фотоэффекте

(вырывании электронов светом). Равновесие можно восстановить, меняя поле  $E$ .

Для вычисления заряда капельки  $q$  нужно знать массу капли. Ее можно определить, измеряя скорость падения капли при выключенном электрическом поле. После определения массы легко найти  $q$  и убедиться, что при всех изменениях заряда он остается кратным некоторой величине  $e$ .

Способ Милликона не является единственным способом измерения элементарного заряда. Наиболее достоверные современные измерения дают:

$$e = 4,803 \cdot 10^{-10} \text{ СГС}_q = 1,601 \cdot 10^{-19} \text{ К}. \quad (19.6)$$

**Закон сохранения заряда.** Помимо «силового» смысла, электрический заряд имеет еще и другой, очень важный физический смысл. Рассмотрим систему тел, изолированную от окружающей среды (при необходимости эту среду тоже можно включить в систему). В качестве такой системы можно, например, взять лабораторию, полностью изолированную от окружающего мира. Пусть в этой лаборатории исследователь производит любые интересные его эксперименты. Состояния входящих в состав системы тел, объектов опыта и приборов при этом меняются. Однако возможными являются не все изменения в состоянии тел, а лишь те, при которых остаются постоянными (сохраняются) некоторые физические величины. Например, полная энергия (сумма всех видов энергии) не может измениться в изолированной системе. Этот установленный в бесчисленном множестве опытов факт называется законом сохранения энергии. Но энергия — не единственная сохраняющаяся величина. Не может измениться полный импульс\*) всех тел, т. е. векторная сумма импульсов всех тел, входящих в систему. Сохраняющейся величиной является также суммарный спин (см. § 20) всех частиц.

К сохраняющимся величинам относится и полный электрический заряд всех тел, входящих в систему (закон сохранения электрического заряда). Этот закон не утверждает, что суммарные заряды всех положительно

---

\*) Импульс частицы — это то же, что количество движения  $p = mv$ . Импульс — величина векторная, что крайне существенно для понимания смысла этой величины и закона ее сохранения.

заряженных и всех отрицательно заряженных частиц должны, каждый в отдельности, сохраняться. Если в системе происходит ионизация атома, то возникают две частицы: положительно заряженный ион и отрицательно заряженный электрон. Как суммарный положительный заряд, так и суммарный отрицательный при этом увеличиваются, полный же электрический заряд остается неизменным. Нетрудно сообразить, что всегда сохраняется *разность* между общим числом всех положительных и всех отрицательных элементарных зарядов.

## § 20. Элементарные частицы

Электрон и протон, о которых мы упоминали в предыдущем параграфе, — не единственные элементарные частицы. Сейчас их насчитывается более трех десятков, а вместе с особыми короткоживущими частицами, называемыми резонансами, — несколько сот.

Некоторые элементарные частицы — электрон, протон, их античастицы (позитрон и антипротон) — имеют электрический заряд, другие — нейтрон, антинейтрон, фотон (квант света), нейтрино, антинейтрино — не имеют такового.

Элементарными мы считаем те частицы, которые в современной точке зрения не состоят из более простых. Как заметил великий итальянский физик Энрико Ферми, понятие «элементарный» относится скорее к уровню наших знаний, чем к природе частиц. По мере того как развивалась наука, многие «элементарные» частицы переходили в разряд неэлементарных.

События последнего времени снова подтверждают эти слова Ферми. Существует предположение, что большая группа частиц, считающихся элементарными, — так называемые барионы (тяжелые частицы), к которым относятся протон, нейтрон, их античастицы и гипероны, — «состоят» из «еще более элементарных», называемых кварками, имеющих заряд  $\frac{1}{3}e$  и  $\frac{2}{3}e$ . Слово «состоят» взято в кавычки потому, что оно плохо передает суть дела. У нас нет возможности подробно обсуждать смысл этого понятия в данном случае, но более простые частицы, образуя более сложную, настолько сильно меняются сами, что эту сложную частицу нельзя считать просто «состоящей» из простых.

Элементарные частицы характеризуются своей массой, электрическим зарядом, зарядами других видов (т. е. константами, определяющими интенсивность других, неэлектромагнитных взаимодействий частиц, — такие взаимодействия тоже существуют) и спином (см. ниже).

Античастицей, соответствующей данной, называется частица, имеющая ту же массу и спин и противоположные знаки всех видов зарядов. Из всех элементарных частиц только фотон и  $\pi$ -ноль мезон ( $\pi^0$ ) не имеют никаких зарядов и поэтому совпадают со своими античастицами.

**Спин.** В этой книге, помимо заряда, нам придется иметь дело лишь со спином элементарных частиц. Как известно из механики, импульс вращающегося вокруг неподвижной оси шарика равен нулю. Объясняется это тем, что импульс тела равен векторной сумме импульсов отдельных материальных точек. У вращающегося шарика эта сумма равна нулю, так как каждой точке с импульсом  $\mathbf{P} = m\mathbf{v}$  обязательно соответствует другая точка

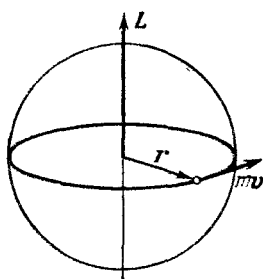


Рис. 46.

(симметричная относительно оси вращения) с импульсом, равным по величине и обратным по знаку. Интенсивность вращения шарика и направление этого вращения характеризуются не импульсом, а другой механической величиной, называемой моментом импульса (вращательным моментом). Момент импульса каждой точки  $\mathbf{L}$  в данном случае равен по величине произведению ее импульса  $m\mathbf{v}$  на радиус враще-

ния. Направлен момент импульса так, как показано на рис. 46. При изменении направления вращения вектор момента импульса меняет знак.

Момент импульса элементарных частиц называется их спином (точнее, спином называется максимальная проекция момента импульса на ось; в квантовой механике это не то же самое, что длина вектора момента). Из существования спина не следует, что можно представлять себе элементарные частицы в виде шариков, вращающихся вокруг собственных осей. В дальнейшем

(§ 47) мы выясним, что даже движение частицы как целого нельзя представлять себе подобным движению макроскопических, т. е. больших тел. Тем более это касается такого явления, как спин, обусловленного внутренним движением частицы.

Все известные нам элементарные частицы имеют спин, кратный величине  $\hbar/2$ . Здесь через  $\hbar$  обозначена величина  $\hbar/2\pi$ , где  $\hbar = 6,6 \cdot 10^{-27}$  эрг·сек — постоянная Планка, известная из школьного курса физики как коэффициент пропорциональности между энергией фотона (кванта света) и его частотой:  $E = h\nu$ . Оказывается, постоянная  $\hbar$  связана не только с энергией, но и с моментом импульса, поскольку у всех частиц момент импульса кратен величине  $\hbar/2$ . У таких частиц, как электрон, нейтрино, мюон, нейтрон, протон, спин равен  $\hbar/2$ , у фотона он равен  $\hbar$ , у  $\pi$ -мезона равен нулю. Встречаются короткоживущие тяжелые частицы (гипероны), у которых спин равен  $\frac{3}{2}\hbar$ .

Такие составные частицы, как атомные ядра и атомы, состоят из протонов, нейтронов и электронов. Если число элементарных частиц со спином  $\hbar/2$ , входящих в состав ядра или атома, четно, то общий спин такой сложной частицы равен четному числу  $\hbar/2$ , т. е. целому числу  $\hbar$ . Если же число указанных частиц нечетно, то и общий спин будет полуцелым, т. е. равным целому числу  $\hbar$  плюс  $\hbar/2$ .

**Фермионы и бозоны.** Те частицы (элементарные и составные), которые имеют полуцелый спин, называются фермионами (или ферми-частицами). По своим свойствам они резко отличаются от другого класса частиц, имеющих целый (т. е. равный целому числу  $\hbar$ ) спин, называемых бозонами (бозе-частицами). Главное отличие заключается в том, что фермионы подчиняются знаменитому принципу, сформулированному швейцарским физиком Вольфгангом Паули в 1925 г.

Принцип Паули заключается в том, что в каждом полностью определенном состоянии может находиться не более одной ферми-частицы. В атоме под определенным состоянием понимается определенная орбита и определенное направление спина электрона, в кристалле — определенное направление и величина скорости

движения электрона в пространстве и определенное направление его спина.

Принцип Паули — это своего рода «принцип вежливости», так как если данное состояние уже занято определенным электроном, никакой другой электрон такого же состояния иметь не будет. В частности, никакие два электрона в данном куске металла не могут находиться в одном и том же состоянии.

Что касается бозонов, то на них такие ограничения не распространяются и в каждом состоянии их может находиться любое количество.

## § 21. Точечные, поверхностные и объемные заряды

Если заряд находится на теле, размерами которого можно пренебречь, он называется точечным зарядом (стр. 14). Поверхностным называется заряд, расположенный на поверхности тела в таком тонком слое, что можно пренебречь его толщиной. Пренебречь толщиной слоя можно в том случае, если она во много раз меньше, чем интересующие нас расстояния от поверхности (т. е. расстояния от поверхности тех точек пространства, где нас интересует поле, создаваемое поверхностным зарядом). Если поверхностный заряд расположен на металлической поверхности, толщина слоя, в котором он сосредоточен, очень мала — порядка нескольких постоянных решетки, т. е. порядка  $10^{-8}$ — $10^{-7}$  см. Но на расстояниях, меньших чем  $10^{-7}$  см, уже нельзя, строго говоря, считать металл сплошным телом — надо рассматривать его как совокупность электронов и ионов. В этом случае задача об определении поля, создаваемого заряженной металлической поверхностью, неизмеримо усложняется. Если же интересоваться полем на расстояниях во много раз больших, чем постоянная решетки, то толщиной слоя, где располагается поверхностный заряд, можно пренебречь и считать этот слой поверхностью, не имеющей толщины.

Итак, поверхностный заряд металла можно считать бесконечно тонким на всех расстояниях, на которых справедливо макроскопическое рассмотрение металла как сплошного тела.

Степень заряженности поверхности естественно характеризовать зарядом, приходящимся на единицу

площади, — так называемой *поверхностной плотностью заряда*:

$$\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta S}. \quad (21.1)$$

Здесь  $\Delta q$  — заряд, приходящийся на площадку  $\Delta S$ . Деля  $\Delta q$  на число единиц площади, заключенных в площадке  $\Delta S$ , получим заряд, приходящийся на единицу площади. Если поверхностная плотность  $\sigma$  постоянна на всей поверхности, можно вместо (21.1) написать просто:

$$\sigma = \frac{q}{S}. \quad (21.2)$$

Кроме точечных и поверхностных зарядов приходится встречаться еще с объемными. Например, около раскаленного катода электронной лампы, при небольших напряжениях между катодом и анодом, имеется электронное облачко, представляющее собой объемный электрический заряд. В газоразрядной трубке около катода (отрицательного электрода) имеется объемный заряд, состоящий из положительных ионов, около анода — отрицательный объемный заряд, состоящий из электронов и отрицательных ионов. В полупроводниках вблизи так называемого  $p$  —  $n$ -перехода также существует объемный заряд, и т. д.

*Объемная плотность заряда* — это заряд, приходящийся на единицу объема:

$$\rho = \frac{\Delta q}{\Delta V}. \quad (21.3)$$

При постоянной во всех точках объемной плотности эта величина может быть записана проще:

$$\rho = \frac{q}{V}. \quad (21.4)$$

## § 22. Поле точечных и поверхностных зарядов

Напряженность поля, создаваемого точечным зарядом, следует из закона Кулона. Подставляя в закон Кулона вместо одного из зарядов  $+1$ , получаем напряженность поля в пустоте или однородном, изотропном и

безграничном диэлектрике:

$$E = \frac{q}{er^2} \quad (\text{СГС});$$
$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 er^2} \quad (\text{СИ}).$$
(22.1)

Здесь  $q$  — заряд, создающий поле.

*Единицей напряженности* в гауссовой системе (обозначается 1 СГС<sub>E</sub>) служит напряженность поля, создаваемого точечным зарядом в 1 СГС<sub>q</sub> в пустоте на расстоянии 1 см. В системе СИ единицей напряженности является 1 в/м. Эта размерность получается следующим образом:  $\frac{\kappa}{(\phi/m) \cdot m^2} = \frac{\kappa}{\phi \cdot m} = \frac{v}{m}$ . Связь между единицами гауссовой системы и СИ: единица напряженности гауссовой системы в  $3 \cdot 10^4$  раз больше, чем в/м (см. § 27).

Напряженность поля точечного заряда направлена по радиусу-вектору, из него исходящему, поэтому легко записать (22.1) в векторной форме:

$$\mathbf{E} = \frac{qr}{er^3} \quad (\text{СГС});$$
$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qr}{er^3} \quad (\text{СИ}).$$
(22.2)

Поле любой системы точечных зарядов можно найти (по принципу суперпозиции, § 7), беря векторную сумму полей отдельных точечных зарядов. Таким способом можно найти, например, поле диполя (§ 24). Любое заряженное тело тоже можно разбить на точечные заряды и затем сложить (фактически, конечно, проинтегрировать) поля, создаваемые ими в данной точке пространства. Однако в ряде случаев такое интегрирование слишком громоздко и более целесообразно применить для вычисления поля теорему Остроградского — Гаусса (§ 12). Два примера применения теоремы Остроградского — Гаусса будут рассмотрены ниже (стр. 80—82). В частности, мы покажем, что поле равномерно заряженной с поверхности сферы вне этой сферы выражается формулами (22.1) и (22.2), в которых под  $r$  надо понимать расстояние от центра сферы до точки, в которой мы ищем напряженность. Таким образом, заряженная сфера создает такое же поле, какое создавал бы



точечный заряд, равный заряду сферы, помещенный в ее центре.

**Поле внутри равномерно заряженной с поверхности сферы.** Указанный вывод, однако, никоим образом не относится к внутренней области поверхности заряженной сферы. Напряженность во всех точках внутренней области, если поверхностная плотность заряда на сфере постоянна во всех точках, в точности равна нулю.

Чтобы доказать это, рассмотрим поле, создаваемое очень малым участком заряженной поверхности  $\Delta S_1$  в точке  $P$ , находящейся на расстоянии  $r_1$  от площадки  $\Delta S_1$  (рис. 47). Поле в точке  $P$  вычисляется как поле точечного заряда и равно (в пустоте)

$$E = \frac{\sigma \Delta S_1}{r_1^2} \quad (\text{СГС}).$$

Проведем из точки  $P$ , как из вершины, коническую поверхность, опирающуюся на площадку  $\Delta S_1$ . Теперь заметим, что параллельные площадки  $\Delta S_1$  и  $\Delta S_2$  будут создавать в точке  $P$  одинаковое поле, так как отношение  $\Delta S/r^2$  будет для этих площадок одинаковым. Если площадка перпендикулярна к образующей конуса, то безразмерное отношение  $\Delta S/r^2$  называется телесным углом раствора конуса. Поскольку площадь сферы равна  $4\pi r^2$ , полный телесный угол равен  $\frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$  (подобно тому, как полный плоский угол равен  $2\pi$ ).

Итак, бесконечно малые площадки  $\Delta S_1$  и  $\Delta S_2$ , наклоненные под одинаковым углом к образующей конуса и видимые из точки  $P$  под одинаковым телесным углом, создают в этой точке одинаковое поле. Этот важный факт опирается на обратную пропорциональность поля точечного заряда квадрату расстояния, т. е. на закон Кулона\*). Если бы поле точечного заряда убывало

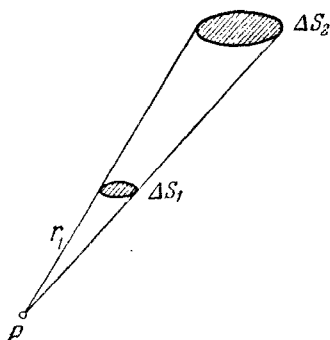


Рис. 47.

\*) Заметим, что изображение поля с помощью непрерывных силовых линий возможно только благодаря убыванию поля точеч-

более быстро, например по закону  $\frac{1}{r^3}$ , более далекая площадка создавала бы более слабое поле, поскольку площадь ее, а значит и заряд, возрастает только пропорционально  $r^2$ .

Применим доказанную теорему к точке внутри поверхности заряженной сферы (рис. 48). Два элемента  $\Delta S_1$  и  $\Delta S_2$  наклонены к соединяющей их линии под одним и тем же углом и видны из точки  $P$  под одинаковым телесным углом. Значит, эти элементы создают в точке  $P$

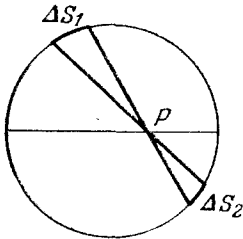


Рис. 48.

одинаковые по величине и противоположные по направлению напряженности  $E_1$  и  $E_2$ , в точности компенсирующие друг друга. Каждому элементу  $\Delta S_1$  в верхней полусфере найдется соответствующий ему элемент  $\Delta S_2$  в нижней полусфере. Таким образом, поля верхней и нижней полусфер компенсируют друг друга.

**Поле равномерно заряженной плоскости.** Найдем теперь поле равномерно заряженной плоскости на

расстоянии  $r$  от нее, малом по сравнению с линейными размерами  $L_1, L_2$  самой плоскости. При таком соотношении между  $r$  и линейными размерами плоскости ее можно считать бесконечно большой. Покажем, что напряженность поля, создаваемого такой плоскостью, не зависит от расстояния  $r$ . В самом деле, поле, создаваемое

заряда по закону  $\frac{1}{r^2}$ . Напряженность численно равна плотности линий, т. е. числу линий, пересекающих единичную площадку, нормальную к напряженности. Плотность линий убывает как  $\frac{1}{r^2}$ , а площадь поверхности возрастает как  $r^2$ , благодаря чему общее число линий, пересекающих любую замкнутую поверхность, окружающую заряды, остается постоянным, т. е. линии идут непрерывно от зарядов в бесконечность. Если бы напряженность поля точечного заряда убывала быстрее, чем  $\frac{1}{r^2}$ , убывало бы и число линий и некоторые линии кончались бы в пустоте. Понятие источников поля лишилось бы смысла. При более медленном, чем  $\frac{1}{r^2}$ , убывании, наоборот, некоторые линии начинались бы в пустоте и общее число линий при удалении от заряда нарастало бы.

мое на расстоянии  $r_1$  от плоскости площадкой  $\Delta S_1$  (рис. 49), таково же, как поле, создаваемое на расстоянии  $r_2$  большей площадкой  $\Delta S_2$  (включающей первую), так как обе площадки видны из точек  $P_1$  и  $P_2$  под одним и тем же телесным углом. При увеличении  $r$  от  $r_1$  до  $r_2$  в каждый заданный телесный угол попадает, следовательно, большая площадка, но она создает в точке  $P_2$  поле такое же, какое создает в точке  $P_1$  площадка  $\Delta S_1$ . Общий же телесный угол, под которым видна бесконечная плоскость из точки, находящейся на любом расстоянии от нее, постоянен и равен  $2\pi$ .

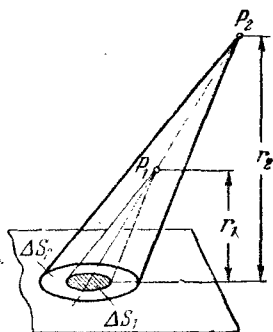


Рис. 49.

Итак, напряженность поля, создаваемого *бесконечной* плоскостью, не зависит от расстояния до нее. Величина напряженности может быть легко вычислена (см. ниже) и оказывается равной (соответственно в пустоте и в однородном диэлектрике):

$$E = 2\pi\sigma, \quad E = \frac{2\pi\sigma}{\epsilon} \quad (\text{СГС});$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon} \quad (\text{СИ}) \quad (22.3)$$

(закон Кулона в системе СИ по сравнению с гауссовой системой содержит в знаменателе дополнительный множитель  $4\pi\epsilon_0$ ).

Для доказательства формулы (22.3) мы рассмотрим сначала не бесконечную плоскость, а плоскую пластинку любой формы, обладающую центром симметрии (например круглую или прямоугольную), и найдем поле на оси, проходящей через этот центр перпендикулярно к плоскости.

Всякому элементу  $\Delta S_1$  (см. рис. 50) соответствует элемент  $\Delta S_2$ , симметричный относительно центра симметрии  $O$ . Суммарное поле этих двух элементов направлено по нормали  $PO$ . Складываются, следовательно, проекции напряженности на нормаль  $E_z = E \cos \theta = \frac{\sigma \Delta S_1 \cos \theta}{r^2}$ .

Из рисунка видно, что  $\Delta S_1 \cos \theta = \Delta S'$ , а отношение  $\Delta S'/r^2 = \Delta\Omega$  — телесный угол, под которым видна

площадка  $\Delta S_1$ . Итак,  $E_z = \sigma \Delta \Omega$ . Полное поле, создаваемое пластиной в некоторой точке на оси, равно, следовательно,

$$E = \sigma \Omega, \quad (22.4)$$

где  $\Omega$  — телесный угол, под которым видна пластинка из этой точки. Для круглой пластинки угол  $\Omega$  зависит от радиуса пластинки  $R$  и расстояния до пластинки  $z$ . Из элементарной геометрии легко получить:

$$E = 2\pi\sigma \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right).$$

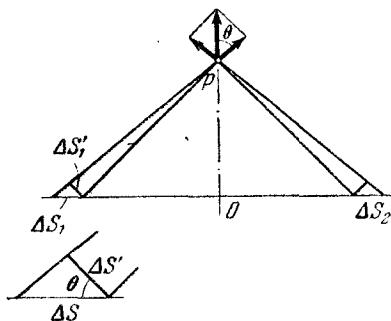


Рис. 50.

На расстояниях  $z$ , малых по сравнению с размерами пластинки  $R$ , можно вычеркнуть второй член в скобке и  $E = 2\pi\sigma$ . Для бесконечной плоскости ( $R \rightarrow \infty$ )  $E = 2\pi\sigma$  всегда.

Наоборот, при  $z \gg R$  имеем  $\sqrt{z^2 + R^2} \cong z \left(1 + \frac{R^2}{2z^2}\right)$ , и получается

$$E = \frac{\pi R^2 \sigma}{z^2} = \frac{q}{z^2}.$$

Этого и следовало ожидать — какова бы ни была форма заряженного тела, на расстояниях, больших по сравнению с его размерами, оно может рассматриваться как точечный заряд. Зависимость напряженности, создаваемой круглой пластинкой радиуса  $R$ , от расстояния  $z$  от нее изображена на рис. 51.

**Поле нескольких плоскостей.** Поле нескольких параллельных плоскостей легко находится по принципу суперпозиции. Напряженность поля положительно заряженной плоскости равна  $2\pi\sigma$  и направлена от нее, напряженность поля отрицательно заряженной плоскости

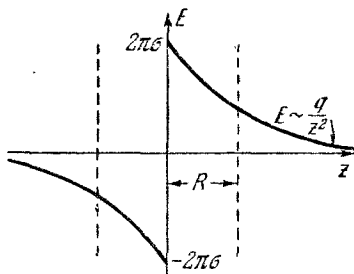


Рис. 51.

направлена к ней. Поэтому поля двух плоскостей, заряженных равными и противоположными по знаку зарядами (плоский конденсатор), складываются в области между плоскостями и взаимно уничтожаются во внешних областях (рис. 52).

Внутри конденсатора

$$E = 4\pi\sigma \quad (\text{СГС}),$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (\text{СИ}). \quad (22.5)$$

Если между пластинами имеется однородный диэлектрик, то вместо (22.5) получается:

$$E = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \quad (\text{СГС}),$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon} \quad (\text{СИ}). \quad (22.6)$$

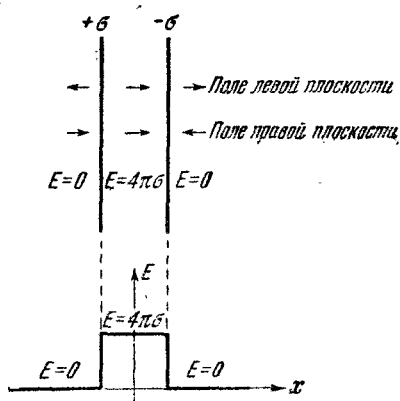


Рис. 52.

Если плоскости не бесконечно велики, поле

внутри конденсатора не будет строго однородным (определение однородного поля см. на стр. 19), а поле вне его не будет точно равно нулю (рис. 53). Поле вне конденсатора с обеих сторон направлено в одну и ту же сторону и быстро спадает при удалении от пластин.

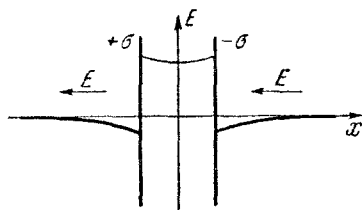


Рис. 53.

Поля плоскостей, заряженных равными по величине и знаку зарядами, компенсируют друг друга в пространстве *между* плоскостями и складываются во внешней области (рис. 54, а).

Поскольку плоскости бесконечны (очень велики по сравнению с расстоянием между ними), можно дополнить их до замкнутой коробки. Поле от этого не изменится, и внутри коробки напряженность будет равна нулю, а около ее поверхности равна  $4\pi\sigma$  и направлена по нормали к поверхности. Ничего не изменится также, если заполнить любым веществом — проводником или

диэлектриком — внутренность коробки, поскольку поле в ней все равно отсутствует (рис. 54, б).

Полученное тело можно опять рассматривать как бесконечную плоскость, только эта «плоскость» имеет

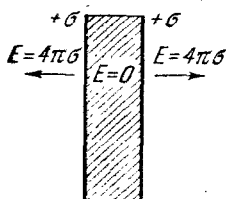
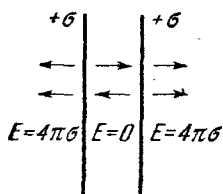


Рис. 54.

толщину, как и всякая реальная заряженная пластина. Общий заряд единицы площади (с обеих сторон) равен у нас  $2\sigma$ , поэтому и поле «толстой плоскости» равно не  $2\pi\sigma$ , а  $4\pi\sigma$ . Если бы заряд единицы площади (с обеих сторон) равнялся  $\sigma$ , то ее поле было бы равно  $2\pi\sigma$ , как и для воображаемой бесконечно тонкой плоскости.

**Поле заряженного цилиндра или прямой.** Очень часто напряженность поля заряженных тел находят, применяя теорему Остроградского — Гаусса. В частности, с ее помощью легко найти поле сферы, бесконечной плоскости (но не пластинки!) и цилиндра.

В качестве примера на применение теоремы Остроградского — Гаусса найдем напряженность поля, создаваемого равномерно заряженным длинным цилиндром (или заряженной прямой линией) на расстоянии  $r$  от оси цилиндра. Пусть  $r > R$ , где  $R$  — радиус цилиндра. В качестве замкнутой поверхности для применения теоремы Остроградского — Гаусса, выберем цилиндр  $C_1$  (рис. 55), окружающий заряженный цилиндр  $C$  и отсекающий от него участок длиной  $h$ . Согласно теореме Остроградского — Гаусса полный поток напряженности через любую замкнутую поверхность равен (в пустоте)  $4\pi q$ :

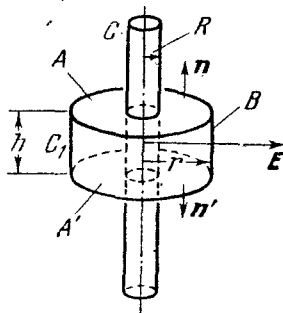


Рис. 55.

$$\oint E_n dS = 4\pi q \quad (\text{СГС}),$$

где  $q$  — полный заряд, содержащийся внутри этой поверхности. Для нахождения  $E$  поверхность, по которой берется интеграл, следует выбрать так, чтобы хотя бы на части этой поверхности напряженность была постоянна и нормальна к ней (т. е.  $E_n = E = \text{const}$ ). Тогда  $E$  можно будет вынести из-под знака интеграла (иначе ее не найдешь!). На остальной части поверхности нормальная составляющая должна обращаться в нуль. Так выбрать замкнутую поверхность можно не всегда, но в данном случае это возможно.

Из соображений симметрии ясно, что поле цилиндра направлено радиально, поэтому (см. рис. 55) проекции напряженности  $E$  на нормали  $n$  и  $n'$  к основаниям  $A$  и  $A'$  равны нулю. Остается лишь интеграл по боковой поверхности  $B$  цилиндра, на которой  $E_n = E = \text{const}$ . Поэтому

$$\oint E_n dS = \int_B E_n dS = ES = E \cdot 2\pi rh,$$

где  $h$  — высота цилиндра.

Обозначим через  $\tau$  заряд, приходящийся на единицу длины (линейная плотность заряда):

$$\tau = \frac{q}{l}. \quad (22.7)$$

Заряд, находящийся внутри цилиндра  $C$ , равен  $\tau h$ . Следовательно,  $E \cdot 2\pi rh = 4\pi\tau h$ , т. е.  $E = \frac{2\tau}{r}$ . В однородной диэлектрической среде

$$E = \frac{2\tau}{\epsilon r} \quad (\text{СГС}),$$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon r} \quad (\text{СИ}). \quad (22.8)$$

Итак, поле цилиндра убывает обратно пропорционально первой степени расстояния. Внутри цилиндра поле равно нулю (доказательство аналогично приведенному на стр. 77).

Чтобы найти поле заряженной сферы радиуса  $R$ , окружим ее концентрической сферой большего радиуса  $r$  и применим к этой последней сфере теорему

Остроградского — Гаусса. Поскольку поле направлено радиально, т. е. по нормали к поверхности, то  $E_n = E$ .

Кроме того, ясно, что поле  $E$  на сфере постоянно. Поэтому

$$\oint E_n dS = \oint E dS = ES = E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q.$$

Отсюда

$$E = \frac{q}{r^2}.$$

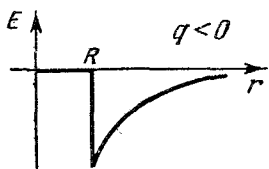
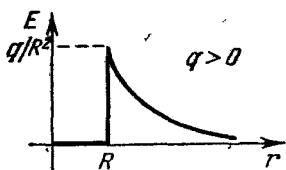


Рис. 56.

График напряженности поля  $E$  как функции расстояния  $r$  от центра сферы радиуса  $R$  будет иметь вид, изображенный на рис. 56. На заряженной поверхности сферы напряженность скачком меняется от нуля до  $q/R^2$ , а дальше убывает по закону  $q/r^2$ .

Заметим, что поле шара и других тел, конечных во всех измерениях, убывает как  $1/r^2$ , поле цилиндра, бесконечного в одном измерении, — как  $1/r$ , а поле плоскости, бесконечной в двух измерениях, не убывает с расстоянием вовсе.

### § 23. Поле объемных зарядов

Напряженность поля, создаваемого объемными зарядами, обладает интересной особенностью: она возрастает при удалении от «центра тяжести» облака объемного заряда. Рассмотрим такое заряженное «облако», имеющее форму шара (рис. 57). Общий заряд его обозначим  $q$ , объемная плотность заряда  $\rho$  предполагается постоянной.

Найдем поле в точке  $P$  внутри шара. Разобьем весь объемный заряд на две части: сферу радиуса  $r$  и остальную часть шара. Внешняя часть не создает никакого поля в точке  $P$ . Это ясно из того, что ее можно представить себе состоящей из вложенных друг в друга концентрических заряженных сфер, а каждая из них, как мы

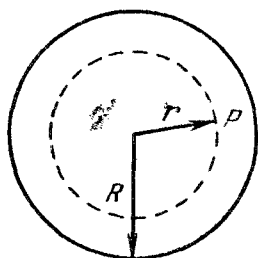


Рис. 57.



доказали в предыдущем параграфе, не создает никакого поля в своей внутренней области. Поэтому остается только поле сферы радиуса  $r$ , которое равно  $E = q/r^2$ , где  $q$  — ее заряд, равный произведению плотности заряда  $\rho$  на объем:  $q = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$ . Следовательно, поле в точке  $P$  равно

$$E = \frac{4}{3} \pi \rho r \quad (\text{СГС}),$$

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \quad (\text{СИ}).$$
(23.1)

Напряженность растет линейно с удалением от центра сферы. Как видно из вывода, этот рост объясняется тем, что при удалении от центра действующий заряд растет как  $r^3$ , в то время как его поле убывает как  $\frac{1}{r^2}$ . Как только мы переходим в область  $r > R$ , т. е. выходим за пределы шара, заряд, создающий поле, перестает возрастать и поле убывает обратно пропорционально  $r^2$  (рис. 58).

Рассмотрим теперь, как меняется с расстоянием напряженность поля, создаваемого бесконечным плоским

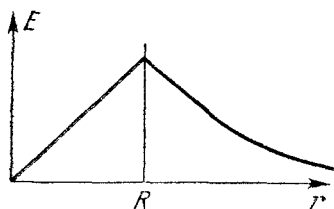


Рис. 58.

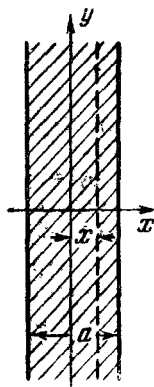


Рис. 59.

объемно заряженным слоем (рис. 59). Его можно мысленно разбить на ряд тонких параллельных плоскостей. Поле плоскости равно  $2\pi\sigma$  и не зависит от расстояния до нее, поэтому поля отдельных плоскостей будут просто складываться. Это значит, что будут складываться заряды, приходящиеся на единицу площади. Общий заряд, приходящийся на единицу площади слева от пунктирной плоскости, будет равен  $\left(\frac{a}{2} + x\right) \cdot 1 \cdot \rho$ , а справа

$\left(\frac{a}{2} - x\right) \cdot 1 \cdot \rho$ . Значит, поле, создаваемое зарядом, находящимся слева от пунктирной плоскости, равно  $2\pi\rho\left(\frac{a}{2} + x\right)$ , а поле заряда, находящегося справа,

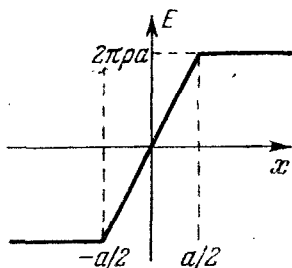


Рис. 60.

$2\pi\rho\left(\frac{a}{2} - x\right)$ . Направлены эти поля в противоположные стороны, поэтому результирующее поле будет равно их разности  $4\pi\rho x$ . Итак, внутри слоя

$$\begin{aligned} E &= 4\pi\rho x & (\text{СГС}), \\ E &= \frac{\rho x}{\epsilon_0} & (\text{СИ}). \end{aligned} \quad (23.2)$$

На границе слоя  $x = a/2$  и  $E = 2\pi\rho a$ . Это последнее значение совпадает с  $2\pi\rho a$ , так как на единицу площади слоя приходится заряд, равный  $a \cdot 1 \cdot \rho$ .

Получается зависимость  $E$  от  $x$ , представленная на рис. 60.

## § 24. Поле электрически нейтральных систем

Атом (и молекула) состоит из заряженных частиц — ядра и электронов, и хотя они в целом нейтральны, но все же создают электрическое (точнее — электромагнитное) поле. Правда, это поле гораздо слабее того, которое создавалось бы одним только ядром, и гораздо быстрее убывает с расстоянием. Тем не менее существование поля, создаваемого нейтральным атомом, имеет огромное значение: ведь благодаря ему атомы и молекулы взаимодействуют между собой и образуют кристаллы и жидкости.

Рассмотрим нейтральную систему, состоящую из неподвижных зарядов. Простейшей и самой важной такой системой является диполь (стр. 11). Два равных и противоположных по знаку заряда называют диполем в том случае, если расстояние между ними  $l$  во много раз меньше расстояния  $r$ , на котором ищут поле этой системы.

Поле диполя на заданном расстоянии от него, но под разными углами к его оси, различно. Иначе говоря, поле

диполя уже не обладает сферической симметрией, в отличие от поля точечного заряда (рис. 61).

Ориентация диполя определяется вектором  $l$ , который условились направлять от отрицательного заряда к положительному. Поле диполя в данной точке пространства зависит, как можно доказать, не в отдельности от  $q$  и  $l$ , а только от их произведения, называемого дипольным моментом:

$$p = ql. \quad (24.1)$$

Иными словами, если менять  $q$  и  $l$  так, чтобы их произведение оставалось постоянным, то получающиеся при этом диполи будут тождественными.

При увеличении расстояния от диполя напряженность убывает обратно пропорционально кубу расстояния. Кроме того, она пропорциональна моменту диполя:

$$E \sim \frac{p}{r^3}. \quad (24.2)$$

Диполь, помещенный в однородное электрическое поле, будет поворачиваться. Если ничто не будет препятствовать повороту, он расположится параллельно

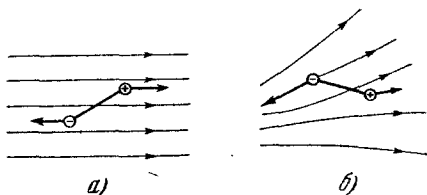


Рис. 62.

силовым линиям. Силы, действующие на оба заряда диполя, в однородном поле равны и противоположны по направлению (рис. 62, *a*). Такая пара сил лишь вращает, но не перемещает тело поступательно. В неоднородном поле силы имеют разную величину, поэтому

диполь будет не только поворачиваться, но и втягиваться в область более сильного поля (рис. 62, б).

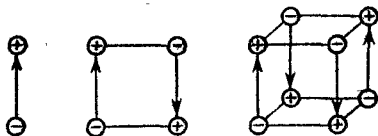


Рис. 63.

Из двух диполей с противоположными по направлению дипольными моментами можно составить так называемый *квадруполь*. Его поле убывает обратно пропорционально четвертой степени расстояния. Из двух квадрупольей можно составить *октуполь*, поле которого убывает как  $\frac{1}{r^5}$  (рис. 63).

Из двух диполей с противоположными по направлению дипольными моментами можно составить так называемый *квадруполь*. Его поле убывает обратно пропорционально четвертой степени расстояния. Из двух квадрупольей можно составить *октуполь*, поле которого убывает как  $\frac{1}{r^5}$  (рис. 63).

## § 25. Потенциал электростатического поля

Если поле не имеет вихрей, его можно полностью охарактеризовать более простой, чем напряженность, величиной — потенциалом (определение потенциала см. в § 9). Таким полем является, например, электростатическое. Если известен потенциал во всех точках электростатического поля, то можно найти и напряженность.

Напряженность — величина векторная, а потенциал — скалярная. В каждой точке потенциал  $\varphi$  имеет одно определенное значение, а напряженность задается в каждой точке тремя величинами — тремя проекциями на оси координат  $E_x, E_y, E_z$ .

Читатель вправе спросить, можно ли одной величиной определить три, если они независимы? Конечно, нельзя. Все дело в том, что величины  $E_x, E_y, E_z$  в безвихревом поле связаны между собой. Эта связь следует из условия потенциальности, согласно которому работа поля на замкнутом пути равна нулю.

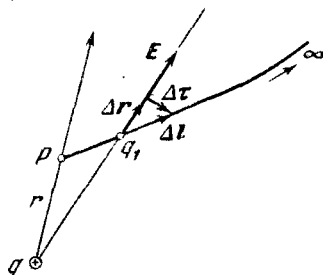


Рис. 64.

**Потенциал поля точечного заряда.** Найдем потенциал поля, создаваемого точечным зарядом  $q$  в точке  $P$ , находящейся на расстоянии  $r$  от этого заряда (рис. 64).

Потенциал равен работе поля по удалению  $q_1 = +1$  из точки  $P$  в бесконечность. Рассмотрим сначала работу, выполняемую полем при малом перемещении  $\Delta l$  заряда. Перемещение  $\Delta l$  можно записать как векторную сумму двух перемещений:  $\Delta l = \Delta r + \Delta \tau$ , где  $\Delta r$  — перемещение вдоль радиуса-вектора, а  $\Delta \tau$  — нормальное к нему. Работа выполняется лишь при перемещении  $\Delta r$ , так как перемещение  $\Delta \tau$  перпендикулярно к силе  $q_1 E$ .

Следовательно, работа выполняется лишь при изменении расстояния между зарядами  $q$  и  $q_1$ . К тому же поле заряда  $q$  сферически симметрично, т. е. безразлично, с какой стороны заряд  $q_1$  подходит к заряду  $q$ . Отсюда ясно, что форма пути, по которому мы перемещаем заряд  $q_1$ , не имеет значения, имеют значение лишь расстояния заряда  $q_1$  от заряда  $q$  в начальной и конечной точках пути. Это и значит, что поле неподвижного точечного заряда потенциально.

Легко распространить этот вывод на произвольную систему зарядов. Поле  $E$  любой системы есть векторная сумма полей точечных зарядов, на которые можно разбить заряд любого тела. Поэтому и работа поля произвольной системы неподвижных зарядов равна сумме работ, совершаемых полями отдельных точечных зарядов.

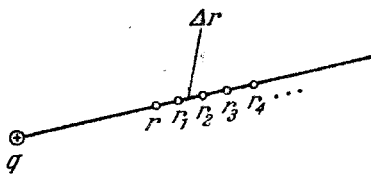


Рис. 65.

Поскольку работа поля каждого точечного заряда не зависит от формы пути, от нее не зависит и работа поля всей системы.

Мы доказали неоднократно встречавшееся утверждение, что любая система неподвижных зарядов создает потенциальное поле.

Вычислим теперь потенциал точечного заряда. Поскольку форма пути не имеет значения, целесообразно вычислить работу удаления заряда  $q_1$  вдоль радиуса-вектора (рис. 65). Разбивая весь путь от  $r$  до  $\infty$  на отрезки  $\Delta r$ , запишем работу в виде суммы

$$A = \sum \frac{q_1 q}{r^2} \Delta r = q_1 q \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{q_1 q}{r}.$$

Потенциал — это работа над зарядом  $q_1=1$ . Следовательно, точечный заряд  $q$  на расстоянии  $r$  в пустоте создает потенциал:

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{q}{r} & (\text{СГС}), \\ \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} & (\text{СИ}).\end{aligned}\tag{25.1}$$

Потенциал может быть положительным или отрицательным, в зависимости от знака заряда, который его создает.

Единицей потенциала в гауссовой системе 1 СГС $_{\varphi}$  служит потенциал, создаваемый точечным зарядом 1 СГС $_q$  на расстоянии 1 см. В системе СИ единицей потенциала является вольт  $\left(\frac{\kappa}{(\phi/m) \cdot m} = \text{в}, \text{ см. формулу (25.1)}\right)$ . Единица потенциала гауссовой системы равна 300 в (докажите это, используя соотношение 1  $\kappa = 3 \cdot 10^9$  СГС $_q$  и формулу (19.4)).

Такой же потенциал (25.1) создает заряженная сфера, если  $r$  (расстояние от ее центра) больше радиуса сферы. Это следует из того, что поверхностью заряженной и объемно заряженной сферы, имеющие сферически симметричное распределение заряда, создают такую же напряженность, как точечный заряд.

**Потенциал системы точечных зарядов.** Если нас интересует потенциал, создаваемый системой точечных зарядов, нужно просто сложить потенциалы, создаваемые в данной точке отдельными зарядами:

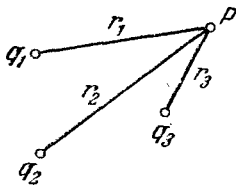


Рис. 66.

$$\varphi = \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (\text{СГС}). \tag{25.2}$$

Здесь  $i$  — номер заряда,  $r_i$  — его расстояние до заданной точки P (рис. 66). Напряженности, создаваемые отдельными зарядами, складываются как векторы, а потенциалы — величины скалярные, поэтому сложение их выполняется более просто. Доказательство соотношения (25.2) следует из принципа суперпозиции полей отдельных зарядов (стр. 34). Предоставляем это доказательство читателю.

## § 26. Работа потенциального электрического поля над зарядом

Работа по перемещению заряда в безвихревом электрическом поле выражается через разность потенциалов.

Для вычисления мы используем тот факт, что работа поля по удалению заряда  $q$  из точки, где потенциал равен  $\varphi$ , на бесконечность равна  $q\varphi$  (стр. 40). Соответственно работа поля по перемещению заряда  $q$  из бесконечности в данную точку равна  $-q\varphi$ . Если  $q > 0$  и  $\varphi > 0$ , то работа поля  $-q\varphi$  отрицательна\*).

Рассмотрим замкнутый путь (рис. 67), уходящий своими ветвями в бесконечность. Полная работа на этом контуре должна равняться нулю. Вместе с тем она равна сумме работы поля на пути I, равной  $-q\varphi_1$ , работы  $A_{12}$  поля на пути от точки I до точки 2 и работы  $q\varphi_2$  на пути II.

Итак,  $-q\varphi_1 + A_{12} + q\varphi_2 = 0$ , отсюда работа поля на пути  $I \rightarrow 2$  равна

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (26.1)$$

Соответственно, работа внешних сил на том же участке

$$A_{12}^{\text{внешн}} = q(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (26.2)$$

Работа поля положительна тогда, когда потенциал начальной точки  $\varphi_1$  выше, чем потенциал конечной  $\varphi_2$  (и  $q > 0$ ). Для пути  $I \rightarrow 2$  на рис. 67 это будет, например, в том случае, если поле создано положительным зарядом, расположенным левее точки I (или отрицательным зарядом, расположенным с обратной стороны).

Из (26.2) следует, что как в гауссовой системе, так и в системе СИ произведение единицы заряда на

\*) Отрицательный знак работы поля означает, что поле не расходует энергии, а наоборот энергия поля возрастает в результате действия внешних сил, преодолевающих силы поля.

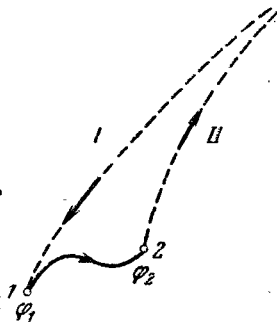


Рис. 67.

единицу потенциала дает единицу работы:

$$1 \text{ СГС}_q \cdot 1 \text{ СГС}_\varphi = 1 \text{ эрг}, \quad \backslash$$

$$1 \text{ к} \cdot 1 \text{ в} = 3 \cdot 10^9 \text{ СГС}_q \cdot \frac{1}{300} \text{ СГС}_\varphi = 10^7 \text{ эрг} = 1 \text{ дж}.$$

**Закон сохранения энергии частицы в потенциальном поле.** Если заряд, над которым совершает работу поле, движется равномерно, то это значит, что сила поля  $qE$  уравновешивается какой-либо другой силой. Поле, выполняя работу, увеличивает энергию тела, со стороны которого действует эта сила.

Если же никакой другой силы нет, заряд под действием поля будет двигаться ускоренно, увеличивая свою кинетическую энергию. Приобретенная кинетическая энергия равна работе поля над зарядом:

$$\frac{mv^2}{2} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (26.3)$$

Так, например, кинетическая энергия, приобретенная разгоняемым в поле электроном, равна произведению заряда электрона на пройденную им разность потенциалов.

Если последняя равна  $1 \text{ в} = \frac{1}{300} \text{ СГС}_\varphi$ , то кинетическая энергия электрона равна

$$e(\varphi_1 - \varphi_2) = 4,8 \cdot 10^{-10} \frac{1}{300} \text{ эрг} = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}.$$

Эта величина является весьма употребительной единицей энергии в атомной физике и называется *электронвольт*. Таким образом,  $1 \text{ эв}$  — это та энергия, которую приобретает электрон, или другая частица с тем же зарядом, проходя разность потенциалов в  $1 \text{ в}$ .

В формуле (26.3) предполагается, что кинетическая энергия заряда в точке  $1$  равна нулю, в противном случае надо было бы вместо (26.3) написать  $\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$  или

$$\frac{mv_2^2}{2} + q\varphi_2 = \frac{mv_1^2}{2} + q\varphi_1. \quad (26.4)$$

Эта формула выражает закон сохранения энергии: сумма кинетической и потенциальной энергии, называемая *полной энергией*, не меняется вдоль пути частицы.



Иными словами, при движении частицы в потенциальном поле ее полная энергия сохраняется.

Законы движения микрочастиц (например электронов) совсем не такие, как законы движения больших частиц. Микрочастицы описываются законами квантовой механики, а не классической, ньютоновской. Как мы увидим в конце главы, для микрочастицы далеко не всегда имеют смысл понятия кинетической и потенциальной энергии, но понятие полной энергии сохраняет смысл, и при движении в потенциальном поле она остается постоянной.

## § 27. Связь между потенциалом и напряженностью

Из формулы (26.1) нетрудно получить связь между потенциалом и напряженностью поля. Пусть точки 1 и 2 соединяет малый вектор  $\Delta l$  (рис. 68). Работу поля над зарядом  $q$  на участке  $\Delta l$  можно вычислить двумя способами. Во-первых, ввиду малости вектора  $\Delta l$  мы можем считать силу  $qE$  на всем его протяжении постоянной по величине и направлению и вычислять работу как  $FS \cos \alpha$ , т. е. в данном случае  $qE \Delta l \cos \alpha$ . С другой стороны, эта же работа равна, как мы показали в предыдущем параграфе,  $q(\varphi_1 - \varphi_2) = -q\Delta\varphi$ , где  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  есть разность между конечным и начальным значениями потенциала. Приравняв два выражения для работы, получим

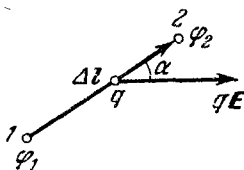


Рис. 68.

$$\Delta\varphi = -E \Delta l \cos \alpha. \quad (27.1)$$

Эта формула определяет разность потенциалов между двумя близкими точками, соединенными малым вектором  $\Delta l$ , составляющим угол  $\alpha$  с напряженностью поля  $E$ .

Используя введенное в § 13 понятие скалярного произведения векторов, запишем (27.1) в более компактном виде:

$$\Delta\varphi = -E \cdot \Delta l. \quad (27.2)$$

Если поле однородное, можно в качестве  $\Delta l$  взять любую, не обязательно малую, длину. Например, разность потенциалов между двумя точками внутри плоского

конденсатора (рис. 69) равна  $\varphi_2 - \varphi_1 = -El \cos \alpha$ . Если отрезок  $l$  соединяет пластины и направлен нормально к ним, т. е. вдоль линий напряженности поля, то  $\varphi_2 - \varphi_1 = -El$ , или

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l}. \quad (27.3)$$

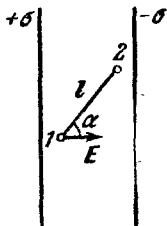


Рис. 69.

Если соотношения (27.2) или (27.1) выражают потенциал через напряженность, то (27.3) выражает напряженность через потенциал (в частном случае однородного поля).

Напряженность можно выразить через потенциал и в общем случае любого поля (разумеется, потенциального). Для этого возьмем в формулах (27.1) или (27.2) вектор  $\Delta l$ , параллельный  $E$ . Тогда получим  $\Delta\varphi = -E \cdot \Delta l$ , или

$$E = - \frac{\Delta\varphi}{\Delta l}. \quad (27.4)$$

Выражение  $\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}$ , очевидно, имеет смысл падения потенциала, приходящегося на единицу длины.

Формулы (27.3) и (27.4) имеют одинаковый вид в гауссовой системе и в системе СИ. Размерность напряженности в системе СИ, как было уже доказано,  $в/м$ . Эта размерность наглядно видна из формул (27.3) и (27.4).

#### Эквипотенциальные поверхности.

Точки, в которых потенциал имеет заданное фиксированное значение, располагаются на поверхностях, называемых *эквипотенциальными поверхностями* (рис. 70). Нетрудно доказать, что линии напряженности перпендикулярны к этим поверхностям. Для этого применим формулу  $\Delta\varphi = -E \Delta l \cos \alpha$  к вектору  $\Delta l$ , лежащему в одной из эквипотенциальных поверхностей (см. рис. 70). Естественно, что разность потенциалов  $\Delta\varphi$  между его началом и концом равна нулю (так как обе точки лежат на одной эквипотенциальной поверхности). Это значит, что  $\cos \alpha = 0$ , т. е.  $\alpha = \pi/2$  и  $E \perp \Delta l$ .

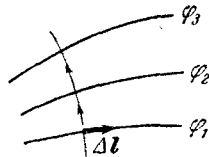


Рис. 70.

Например, эквипотенциальные поверхности поля точечного заряда представляют собой концентрические

сферы; а линии напряженности — исходящие из центра лучи (рис. 71, а). Эквипотенциальные поверхности поля плоского конденсатора — плоскости, параллельные пластинам, а линии напряженности — прямые, к ним перпендикулярные (рис. 71, б).

Изменение потенциала при переходе от одной эквипотенциальной поверхности к другой одинаково при перемещении на любой вектор, соединяющий эти поверхности. Самым коротким из них является тот, который

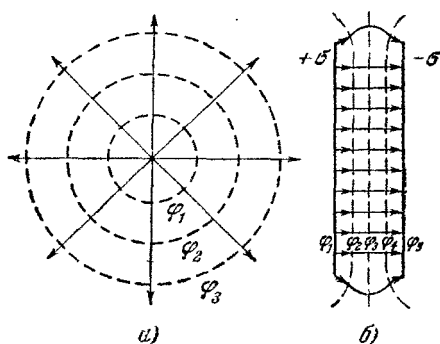


Рис. 71.

нормален к эквипотенциальным поверхностям. По этому направлению потенциал меняется наиболее быстро. Следовательно, наиболее быстро потенциал меняется вдоль линии напряженности.

Формулу  $E = - \frac{\Delta\varphi}{\Delta l}$  читают так: напряженность есть минус градиент потенциала. *Градиентом* скалярной величины называется вектор, имеющий направление наиболее быстрого возрастания этой величины, а по модулю равный ее изменению на единицу длины.

**Типичный метод решения электростатических задач.** Введение понятия потенциала чрезвычайно упростило решение электростатических задач. Зная потенциал, можно уже легко найти другие электрические величины — напряженность, емкость и др.

Для определения потенциала любой системы заряженных тел можно написать уравнение, которое непосредственно выражает потенциал через имеющиеся

заряды (уравнение Пуассона или его частный случай — уравнение Лапласа). Это уравнение — не алгебраическое, а дифференциальное уравнение в частных производных, поэтому здесь мы не выписываем его. Точное решение уравнения Лапласа можно получить в редких случаях. Один из них, и весьма важный, — поле заряженного эллипсоида.

Весьма облегчает решение электростатических задач принцип однозначности решения. Каким бы способом, хотя бы и путем догадки, мы ни нашли решение задачи, но если найденный потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа и граничным условиям, то решение является правильным и единственным. Значение этого принципа мы проиллюстрируем далее (§ 31) на важном электростатическом методе, называемом методом зеркальных изображений.

## § 28. Потенциальные диаграммы

Поле, создаваемое заряженным телом или несколькими телами, наглядно может быть представлено с помощью так называемой потенциальной диаграммы —

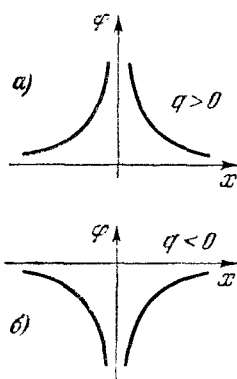


Рис. 72.

— графика зависимости потенциала или потенциальной энергии от координат.

Рассмотрим несколько типичных потенциальных диаграмм. В качестве первого примера построим зависимость потенциала положительного точечного заряда  $\varphi = q/r$  от расстояния  $r$  до этого заряда. График этой функции представлен на рис. 72, а (ось абсцисс проведена через заряд). Потенциал неограниченно возрастает (т. е. стремится к бесконечности) при приближении к заряду и медленно уменьшается при удалении от него. Для отрицательного заряда график такой же, только расположен в области  $\varphi < 0$  (рис. 72, б). Точно такой же вид имеет график потенциальной энергии взаимодействия положительного заряда  $+q_1$  и отрицательного  $-q_2$  (например электрона и ядра).

Если заряд размещен на поверхности сферы, то вне сферы потенциал  $\varphi = \frac{q}{r}$ , т. е. совпадает с потенциалом точечного заряда, помещенного в центре сферы. Внутри сферы  $E = 0$ , поэтому там потенциал постоянен. В результате имеем график, изображенный на рис. 73.

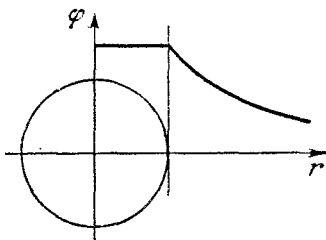


Рис. 73.

**Потенциал в плоском конденсаторе.** Построим теперь график хода потенциала внутри и вне плоского конденсатора *конечных размеров*. Внутри конденсатора напряженность поля постоянна. В формуле  $E =$

$= -\Delta\varphi/\Delta l$  можно взять в качестве  $\Delta l$  расстояние между началом координат и некоторой точкой, имеющей координату  $x$  (рис. 74, а). Тогда  $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$ , где  $\varphi$  — потенциал в точке с координатой  $x$ , а  $\varphi_0$  — в точке  $x = 0$ . Отсюда получаем  $E = -\frac{\varphi - \varphi_0}{x}$ , или

$$\varphi = \varphi_0 - Ex. \quad (28.1)$$

Следовательно, график  $\varphi(x)$  — линейная функция  $x$ , принимающая наибольшее значение на положительной пластине и наименьшее — на отрицательной. Вне конденса-

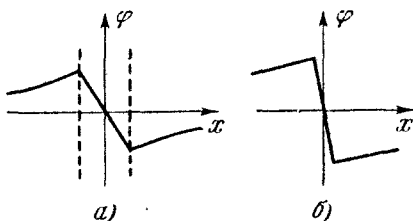


Рис. 74.

тора, при удалении на бесконечность, потенциал должен стремиться к нулю. Наконец, в начале координат, т. е. в центре конденсатора, потенциал  $\varphi_0$  должен равняться нулю, иначе потенциалы пластин не будут равны по величине и противоположны-

ны по знаку. В результате получаем график рис. 74, а. Чем больше размеры пластин, тем медленнее спадает потенциал вне конденсатора.

Если потенциал зависит от одной координаты (как, например, в плоском конденсаторе, где он зависит только от одной координаты  $x$ ), напряженность равна минус

производной от потенциала по этой координате:

$E = -\frac{d\varphi}{dx}$ . Графически на потенциальных диаграммах напряженность есть тангенс угла наклона касательной к кривой  $\varphi(x)$  с осью  $Ox$ . Следовательно, напряженность и сила, действующая на заряд, больше там, где график  $\varphi(x)$  идет круче, т. е. составляет больший (более близкий к  $90^\circ$ ) угол с осью  $Ox$ . Там, где график  $\varphi(x)$  параллелен оси  $Ox$ , напряженность равна нулю. Рассмотрите с этой точки зрения все потенциальные диаграммы этого параграфа.

**Скачок потенциала на двойном слое.** Чем ближе пластины друг к другу, тем круче ход потенциала между

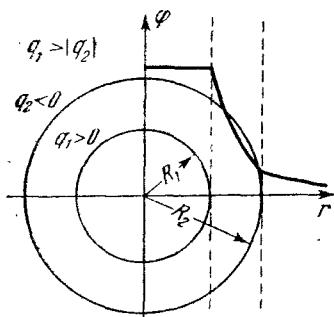


Рис. 75.

ними. Две близкие поверхности, имеющие равные и противоположные по знаку заряды, составляют так называемый *двойной слой*. Потенциал на двойном слое совершает скачок (см. рис. 74, б), подобно тому как на заряженной поверхности имеется скачок напряженности.

**Потенциал системы из двух заряженных сфер.** Рассмотрим ход потенциала, создаваемого системой из двух концентрических сфер. Пусть внутренняя сфера радиуса  $R_1$  имеет положительный заряд  $q_1$ , а внешняя радиуса  $R_2$  — отрицательный заряд  $q_2$  (см. рис. 75, на котором положено  $q_1 > |q_2|$ ). Тогда вне сфер потенциал будет равен

$$\varphi = \frac{q_1 + q_2}{r} \quad (\text{СГС}), \quad (28.2)$$

так как его создают совместно обе сферы. Напомним, что потенциал есть работа внешних сил, совершаемая при перемещении  $+1$  заряда в данную точку из бесконечности. Работа перенесения  $+1$  заряда из бесконечности в область между сферами будет равна сумме двух работ:  $q_2/R_2$  (работе против сил, действующих со стороны внешней сферы на пути из  $\infty$  до ее поверх-

ности) и  $q_1/r$  (работе против поля внутренней сферы):

$$\varphi = \frac{q_2}{R_2} + \frac{q_1}{r} \quad (\text{СГС}). \quad (28.3)$$

Наконец, внутри меньшей из сфер потенциал будет постоянен и равен  $\varphi = \frac{q_2}{R_2} + \frac{q_1}{R_1}$  (это значение получается из формулы (28.3) при подстановке в нее  $r=R_1$ ). По формулам (28.2), (28.3) легко построить график рис. 75.

Сферический конденсатор имеет заряды обкладок, равные по величине и противоположные по знаку:  $q_2 = -q_1$ , так что потенциал (28.2) во внешней области обращается в нуль, а между обкладками (28.3) равен

$$\varphi = q_1 \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (28.4)$$

Получается график рис. 76. Если внутренняя сфера имеет отрицательный заряд, а внешняя — положительный, график переворачивается (рис. 77).

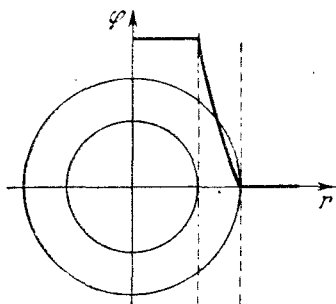


Рис. 76.

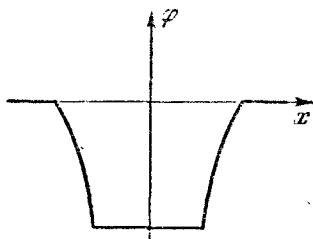


Рис. 77.

**Потенциальная яма.** Представим себе две концентрические сферы, сделанные из густой металлической сетки. Знак внутренней сферы положителен, внешней — отрицателен. Потенциальная энергия электрона,  $U=e\varphi$ , помещенного внутрь такой системы, выглядит так, как потенциал на рис. 77 (поскольку заряд электрона  $e$  отрицателен). Такой ход потенциальной энергии носит название *потенциальной ямы*. Происхождение названия ясно из рисунка. Пока электрон находится внутри меньшей из сфер, на него не действуют никакие силы. Если он попадает в промежуток между сферами, на него действуют

силы, возвращающие его во внутреннюю область (внешняя сфера заряжена отрицательно и отталкивает его, внутренняя — положительно). Электрон, двигаясь наружу, замедляется, выполняя работу против этих сил.

Потенциальная яма не обязательно имеет плоское «дно». На рис. 72, б тоже изображена потенциальная яма, которую заряд одного знака создает для заряда противоположного знака.

Объемно заряженная сфера (§ 23), т. е. заряженное «облако», также является потенциальной ямой для заряда противоположного знака. Ход потенциальной энергии  $U=q\phi$  показан на рис. 78. Помещенный в облако

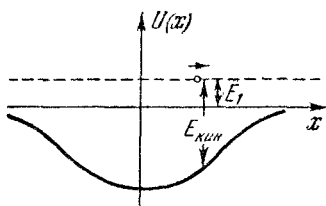


Рис. 78.

положительного заряда электрон будет притягиваться к центру облака.

**Кинетическая и потенциальная энергия частицы в потенциальной яме.** Полная энергия электрона (сумма кинетической и потенциальной энергий) при движении в потенциальном поле сохраняется. На рис. 78

пунктиром показан один из возможных уровней энергии электрона  $E_1$ . Энергия откладывается от оси  $x$ , так что рассматриваемый уровень соответствует положительной полной энергии ( $E_1 > 0$ ). Поскольку  $E_1 = E_{кин} + U$  (а  $U$  отрицательна!), нетрудно сообразить, что кинетическая энергия равна отрезку, проведенному от кривой  $U(x)$  до уровня  $E_1$ .

При движении из центра наружу, например вправо, на электрон действуют тормозящие силы, кинетическая энергия уменьшается, потенциальная возрастает. Когда электрон удалится достаточно далеко, потенциальная энергия станет близкой к нулю (см. график), а кинетическая станет равна полной энергии  $E_1$ .

Следовательно, частица, обладающая положительной полной энергией, может выйти из потенциальной ямы, и у нее еще останется кинетическая энергия, равная  $E_1$ .

На рис. 79 в такую же потенциальную яму помещена частица с отрицательной полной энергией  $E_2$ . Удивляться тому, что полная энергия может быть отрицательной, не следует: ведь полная энергия равна сумме кинетической



и потенциальной, а потенциальная энергия в данном случае отрицательна. Отрицательность полной энергии означает просто, что кинетическая энергия частицы мала. Кинетическая энергия на графике снова равна отрезку, проведенному от кривой  $U(x)$  до уровня энергии  $E_2$  (см. рис. 79).

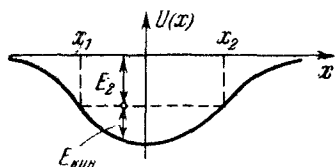


Рис. 79.

В точках пересечения уровня  $E_2$  с кривой  $U(x)$ , т. е. в точках с координатами  $x_1$  и  $x_2$ , кинетическая энергия равна нулю, т. е. частица останавливается и поворачивает обратно. Движение частицы с отрицательной полной энергией  $E_2$ , следовательно, колебательное — частица движется от левой «стенки» к правой и наоборот. Выйти из потенциальной ямы такая частица не может.

**Потенциальный барьер.** В заключение рассмотрим так называемый *потенциальный барьер*. Если облако

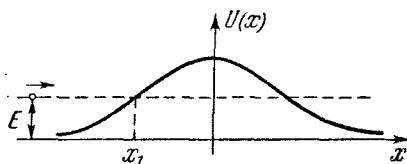


Рис. 80.

объемного заряда заряжено отрицательно, то график потенциальной энергии электрона, проходящего через такую область, имеет вид рис. 80. Электрон, подходящий к барьеру, тормозится. Если его

полная энергия  $E$  ниже гребня потенциального барьера, он остановится в точке  $x_1$  и повернет обратно. Пройти сквозь барьер он не сможет.

В § 66 мы увидим, что если барьер очень узок, то электрон, вопреки законам классической механики, сможет, с определенной вероятностью, пройти сквозь барьер (туннельный эффект). Причины такого парадоксального поведения электрона — в волновых свойствах частиц малой массы (микрочастиц).

## § 29. Проводники в электростатическом поле

Под словом «проводник» в физике понимается проводящее тело любых размеров и формы. Это может быть не только металл, но и электролит и вообще любое тело, содержащее свободные заряды, например электроны или

ноны. Для определенности мы будем ниже под проводником понимать металлическое тело.

Рассмотрим процесс внесения проводника в электростатическое поле (рис. 81). Как только проводник попадает в поле, электроны в нем начинают двигаться в сторону положительно заряженной пластины. На части поверхности проводника, обращенной к этой пластине,

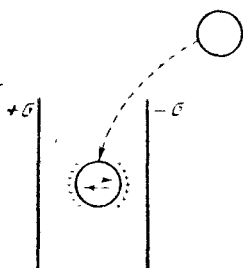


Рис. 81.

выступает отрицательный заряд, так что поверхностная область оказывается обогащенной электронами. На противоположной части поверхности электронов оказывается несколько меньше, чем нужно для нейтрализации положительного ионного заряда кристаллической решетки, и эта часть поверхности оказывается заряженной положительно. Положительная и отрицательная части поверхности создают свое собственное поле, по направле-

нию противоположное внешнему. Если проводник уже достаточно долго находится в поле\*) и ток в нем уже не идет, то оба поля — внешнее  $E$  и поле собственных поверхностных зарядов проводника ( $E_{\text{внутр}}$ ) — в точности компенсируют друг друга во всех точках внутри и на поверхности. Действительно, если бы в какой-нибудь области проводника поля  $E$  и  $E_{\text{внутр}}$  не компенсировали друг друга, то в этой области на электроны действовала бы сила и шел бы ток. Отсутствие тока означает полную компенсацию полей.

Плотность заряда на поверхности проводника, разумеется, зависит от напряженности поля, в которое проводник вносится. Полный заряд поверхности всегда чрезвычайно мал по сравнению с общим зарядом всех электронов металла. В каждом кубическом сантиметре объема металла находится около  $10^{22}$ — $10^{23}$  электронов с общим зарядом порядка  $4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 10^{22} = 4,8 \cdot 10^{12}$  СГС<sub>q</sub> ( $= 1,6 \cdot 10^3$  κ). Пусть во внешнем поле  $E \sim 4000$  в/см находится металлический кубик со стороной  $\sim 1$  см. На

\*) Фактически ток идет в течение очень короткого промежутка времени. В проводниках размером в несколько сантиметров это время порядка  $10^{-2}$ — $10^{-4}$  сек (см. § 102).

границ кубика в этом случае будет содержаться заряд порядка единицы СГС<sub>q</sub>:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} E = \frac{4000}{300} \cdot \frac{1}{4\pi} \sim 1 \text{ СГС}_q.$$

Следовательно, на поверхность выйдет менее одного электрона из  $10^{12}$ .

Таким образом, в металлах есть большие резервы электронов для компенсации даже очень сильных внешних полей. Однако есть предел, до которого эти поля можно увеличивать. Электрон в атоме находится в поле ядра. Заряд ядра — порядка элементарного заряда, а размеры атома, т. е. расстояние электрона от ядра,  $r \sim 10^{-8}$  см. При подстановке этих данных в формулу  $E = q/r^2$  получается  $E \sim 10^9$  в/см. Атом утрачивает свою устойчивость уже при значительно меньших внешних полях, порядка  $10^7$ — $10^8$  в/см. Приложение таких полей к металлу неизбежно разрушает его.

**Проникает ли внешнее поле в проводник?** Отсутствие поля внутри проводника не означает, таким образом, что внешнее поле не проникает в проводник. Наоборот, именно благодаря проникновению поля в проводник на его поверхности выступают заряды, поле которых компенсирует внешнее поле.

Было бы поистине странно, если бы поле не проникало в проводник, диэлектрик или любое другое тело, твердое, жидкое или газообразное. Если ядро атома изобразить в виде шарика радиусом 1 см, то ближайший электрон будет находиться на расстоянии порядка сотен метров. Настолько «пуст» атом. Трудно представить себе, как тело, состоящее из таких атомов, может препятствовать проникновению поля. Этого и не происходит. Ослабление поля вызывается, как мы видели, только зарядами, выходящими на поверхность тела.

Напряженность поля  $E$  в проводнике, находящемся в электростатическом поле, равна нулю. Из соотношения  $\Delta\varphi = -El \cos \alpha$  следует, что между любыми двумя точками проводника разность потенциалов  $\Delta\varphi$  также равна нулю. Все точки внутри и на поверхности проводника имеют в электростатическом поле одинаковый потенциал, а поверхность проводника является эквипотенциальной.

Проводник называется заряженным, если он имеет полный заряд, отличный от нуля. При этом на поверхности проводника существует не равная нулю поверхностная плотность зарядов  $\sigma$ , в общем случае различная в различных точках поверхности. Если проводник не заряжен, но находится во внешнем поле, на его поверхности также имеются, как мы видели, заряды. Одни части поверхности проводника имеют поверхностную плотность  $\sigma > 0$ , другие имеют  $\sigma < 0$ , а общий заряд равен нулю.

**Электростатическое поле у поверхности проводника.** Как установлено выше, электростатическое поле внутри проводника равно нулю. Выясним, каково будет поле вне проводника, у его поверхности. Прежде всего ясно, что вектор напряженности нормален к поверхности проводника, поскольку она является одной из эквипотенциальных поверхностей. Абсолютная величина  $E$  определяется

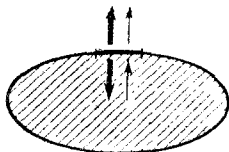


Рис. 82.

только плотностью заряда  $\sigma$  в данном месте и, как мы покажем ниже, равна в пустоте  $4\pi\sigma$ .

Действительно, в непосредственной близости от выделенного малого участка поверхности  $\Delta S$  (рис. 82) его можно считать бесконечной плоскостью. Поле ее равно  $2\pi\sigma$  и направлено (если  $\sigma > 0$ ) от участка  $\Delta S$  в обе стороны (жирные стрелки слева). Поле, создаваемое в этом же месте остальной поверхностью, должно погашать поле участка  $\Delta S$  внутри проводника, поэтому оно тоже должно быть равно  $2\pi\sigma$  (стрелки справа). Следовательно, вне проводника обе напряженности складываются и дают  $4\pi\sigma$  (в системе СИ  $\sigma/\epsilon_0$ ).

Мы уже ранее доказали это для частного случая проводящей пластины, т. е. параллелепипеда малой высоты (§ 22). Второй пример — поле поверхности заряженной сферы, равное на ее поверхности  $E = q/R^2$ . Выражая  $q$  через поверхностную плотность заряда  $\sigma$ , получим снова  $E = 4\pi\sigma$ .

Еще раз подчеркнем, что это справедливо, строго говоря, только для проводника в электростатическом поле. Если поле не электростатическое, т. е. ток в проводнике не равен нулю, то должна существовать составляющая напряженности вдоль поверхности, обеспечи-

вающая существование тока. Кроме того, в этом случае не равно нулю поле и внутри проводника — ведь для доказательства этого положения мы предполагали, что ток отсутствует.

### § 30. Плотность заряда на поверхности проводника

В известных нам случаях сферического, плоского и цилиндрического уединенных проводников плотность заряда во всех точках поверхности постоянна. Если, однако, кривизна поверхности в разных точках разная (или если существует внешнее поле), плотность заряда также будет различна в различных местах поверхности. Заряды скапливаются на тех участках, где больше кривизна, например у острия.

Свободные заряды (например лишние свободные электроны), попадая в проводник, вследствие взаимного отталкивания стараются удалиться друг от друга на возможно большее расстояние. Разумеется, для этой цели они, прежде всего, выходят на поверхность. На поверхности заряды располагаются так, чтобы потенциальная энергия их отталкивания была минимальна. Этот принцип минимальности полной потенциальной энергии определяет поверхностную плотность заряда в различных точках поверхности. На сфере, бесконечной плоскости и цилиндре  $\sigma$  всюду постоянна в силу симметрии этих тел, но на эллипсоиде, например, плотность заряда оказывается больше у заостренных его концов.

Плотности заряда в точках  $B$  и  $A$  эллипсоида вращения (т. е. такого, у которого полуоси  $a$  и  $b$  равны) относятся как полуоси эллипсоида  $c/a$  (рис. 83, а). Рас-

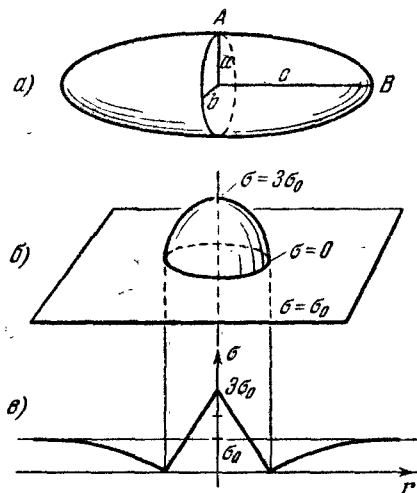


Рис. 83.

Плотности заряда в точках  $B$  и  $A$  эллипсоида вращения (т. е. такого, у которого полуоси  $a$  и  $b$  равны) относятся как полуоси эллипсоида  $c/a$  (рис. 83, а). Рас-

пределение заряда на плоскости с выступом, имеющим форму полусферы, показано на рис. 83, б и в.

Чрезвычайно большой может стать плотность заряда у острия конуса (например у острого кончика иголки). Если бы конус заканчивался точкой, плотность зарядов на острие была бы бесконечно велика. Наоборот, плотность зарядов в вершине конической впадины равна нулю. Вообще плотность заряда во впадинах значительно меньше, чем на выпуклых частях проводника. Если впадина представляет собой почти замкнутую полость, плотность заряда там почти равна нулю (в замкнутой полости точно равна нулю).

Мы доказали в § 29, что у поверхности проводника напряженность поля пропорциональна плотности заряда  $\sigma$ . О величине напряженности поля можно судить по

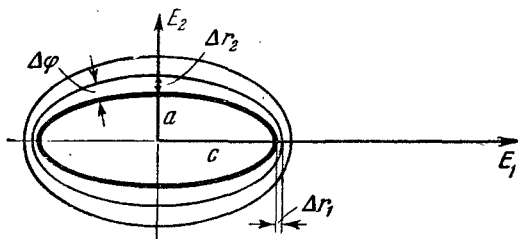


Рис. 84.

густоте эквипотенциальных поверхностей (т. е. по расстоянию их друг от друга). На рис. 84 показаны эквипотенциальные поверхности заряженного проводящего эллипсоида. Одной из этих поверхностей служит поверхность самого эллипсоида. Эквипотенциальная поверхность, находящаяся на большом расстоянии от эллипсоида, должна быть сферой (на большом расстоянии любой проводник может рассматриваться как точечный заряд). По мере удаления от эллипсоида эквипотенциальные поверхности постепенно приближаются к сферическим. Можно доказать, что вследствие этого  $\Delta r_2 > \Delta r_1$ , а следовательно  $E_1 = -\Delta\phi/\Delta r_1$  должна быть больше, чем  $E_2 = -\Delta\phi/\Delta r_2$  (в обоих выражениях  $\Delta\phi$  — разность потенциалов между одними и теми же эквипотенциальными поверхностями). Поэтому и  $\sigma_1 > \sigma_2$ . На рис. 84  $c/a = 3$ , поэтому  $E_1 = 3E_2$  и  $\sigma_1 = 3\sigma_2$ .

**«Стекание» зарядов с острия.** Сильное поле вблизи острия может привести к так называемому «стеканию зарядов с острия». В действительности никакого стекания нет. Для действительного стекания (вырывания электрическим полем) электронов из металла необходимы поля порядка  $10^6$ — $10^7$  в/см, металл при этом должен быть заряжен отрицательно. Такое явление называется автоэлектронной эмиссией (см. § 67). «Стекание зарядов» с острия происходит в значительно более слабых полях и при любом знаке острия.

Механизм этого явления следующий. Имеющиеся в воздухе в небольшом количестве свободные заряды (ионы обоих знаков и электроны) вблизи острия разгоняются сильным полем и, ударяясь об атомы газа, ионизируют их. Создается область пространственного заряда, откуда ионы того же знака, что и острие, выталкиваются полем, увлекая за собой атомы газа. Поток атомов и ионов, направленный от острия, создает впечатление «стекания зарядов». При этом острие разряжается (попадающими на него ионами противоположного знака) и одновременно получает импульс, направленный против стекания.

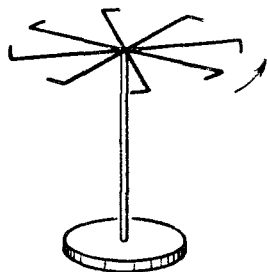


Рис. 85.

Это явление демонстрируется на вертушке (рис. 85), подключенной к электростатической машине. Если сообщить вертушке заряд, она начинает вращаться в направлении, показанном стрелкой. В вакууме вращение отсутствует.

### § 31. Метод изображений

Из свойств проводников в электростатическом поле вытекает важный метод решения электростатических задач, называемый методом изображений.

Пусть точечный заряд  $q$  находится на некотором расстоянии  $R$  от плоской поверхности проводящей среды (рис. 86, *a*). Если заряд  $q$  положителен, то вблизи точки  $O$  появится электронный отрицательный заряд, привлеченный из удаленных областей проводящей среды. Если  $q < 0$ , то, наоборот, некоторое число электронов уйдет из

области, близкой к заряду, и поверхностная плотность будет положительной. Так или иначе заряд  $q$ , поляризуя проводящую поверхность, будет притягиваться к ней.

Можно утверждать, что поле, создаваемое зарядом  $q$  и бесконечной проводящей средой, заполняющей левое полупространство \*) (рис. 86, а), в точности совпадает с полем, которое создают в правом полупространстве два

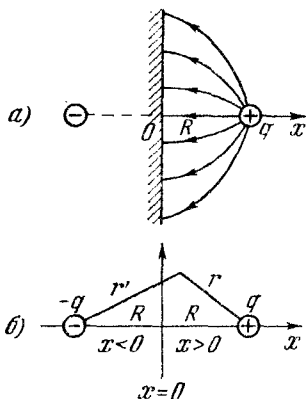


Рис. 86.

заряда: данный заряд  $q$  и фиктивный заряд  $-q$ , находящийся на том же расстоянии  $R$  от поверхности, что и данный (рис. 86, б).

Поле заряда и плоскости определяется источником (заряд  $q$ ) и граничными условиями (на проводящей поверхности). Эти условия состоят в том, что потенциал на поверхности должен быть равен нулю (поверхность уходит в бесконечность), а напряженность нормальна к поверхности. Поле двух зарядов  $+q$  и  $-q$  в правом полупространстве ( $x > 0$ ) удовлетворяет тем же усло-

виям. Действительно, на плоскости  $x = 0$  (рис. 86, б) потенциал обоих зарядов  $\varphi = \frac{q}{r} - \frac{q}{r'} = 0$ , так как  $r = r'$ . Кроме того, напряженность нормальна к этой поверхности. В силу теоремы об однозначности решения поле и потенциал будут в обоих случаях одинаковыми. Найти эти величины для заряда  $q$  и его зеркального изображения  $-q$  не представляет труда. Потенциал в любой точке пространства при  $x > 0$  равен  $\varphi = q \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right)$ , напряженность поля находится обычным векторным сложением. Сила взаимодействия между зарядом и плоскостью будет такой же, как между зарядом и его изображением, т. е. равна  $F = \frac{q^2}{(2R)^2}$ . Можно также показать, что общий заряд, индуцированный на плоскости, будет равен  $-q$ .

\*) Левым полупространством называется область, где  $x < 0$ , правым — область, где  $x > 0$ .



Вместо точечного заряда можно было бы взять заряженный прямолинейный провод (прямой цилиндр), расположенный параллельно поверхности. Поле этой системы (при  $x > 0$ ) совпадает с полем, которое создавал бы заряженный провод совместно со своим изображением.

Поле нескольких точечных зарядов или нескольких прямолинейных проводов вблизи плоской проводящей поверхности может быть также найдено методом изображений — оно совпадает с полем, создаваемым всеми зарядами совместно с их изображениями.

Метод изображений в широком смысле слова состоит в определении поля, создаваемого зарядами в присутствии проводников, путем введения вместо этих проводников фиктивных зарядов. Результирующее поле истинных и фиктивных зарядов должно быть таким, чтобы его эквипотенциальные поверхности совпадали с поверхностями проводников.

## § 32. Электростатическая экранировка.

### Заземление

Электростатическое поле внутри проводника равно нулю. Этим можно воспользоваться для экранировки электро- и радиоприборов от влияния электростатических полей.

Поскольку всюду внутри металлического тела электростатическое поле равно нулю, можно вырезать его внутреннюю область и оставить только оболочку, поместив в нее приборы (рис. 87). Электростатическое поле зарядов, находящихся *вне* этой оболочки, будет внутри ее точно равно нулю. Таким образом электростатическая экранировка осуществляется просто и эффективно.

Нельзя ли, вместо того чтобы окружать металлической оболочкой прибор, окружить ею источник поля — заряд? Пусть оболочка имеет сферическую форму, а заряд  $+q$  помещен в ее центр (рис. 88). На внутренней поверхности шара возникнет заряд  $-q$ , а на внешней — заряд  $+q$ . Все три заряда создают точно такое же поле, которое раньше создавал один заряд  $+q$ . Следовательно, так заэкранировать заряд нельзя.

Можно, однако, изменить ситуацию, соединив металлическую оболочку с земной поверхностью. Заземление

приведет к тому, что заряд, находящийся на внешней поверхности металлического шара, почти полностью уйдет в землю. Это объясняется огромной емкостью земного шара (емкости металлической оболочки и Земли относятся как их радиусы, емкость же соединяющего их провода при очень малом диаметре его также очень мала).

Под термином «заземление» понимают либо использование емкости земного шара, либо использование земли как проводящего тела. В линиях электропередач

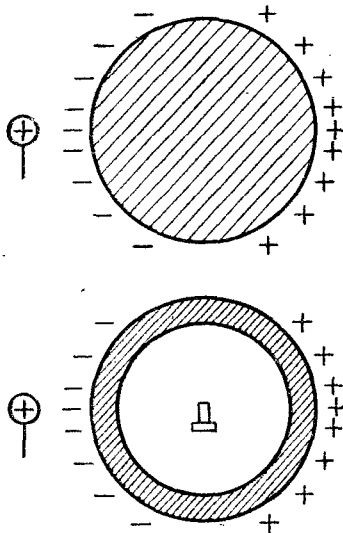


Рис. 87.

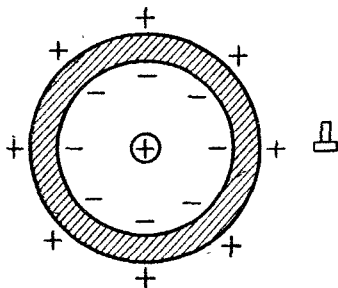


Рис. 88.

земля часто заменяет второй провод. Электрическое сопротивление между погруженными в землю листами не зависит от расстояния между ними. Объясняется это тем, что при увеличении расстояния между заземленными листами одновременно увеличивается и площадь «сечения» проводящей среды.

### § 33. Заряд и поле Земли

Земля обладает довольно значительным отрицательным электрическим зарядом. Равный ему положительный объемный заряд содержится в атмосфере, в слое высотой порядка десятков километров. Из-за этого электрическое поле на высотах порядка 10—20 км уже практически равно нулю. Это значит, что поле Земли не

похоже на поле заряженного шара, а скорее напоминает поле в сферическом конденсаторе. У поверхности Земли напряженность поля  $E \approx 1,3 \text{ в/см} = \frac{1,3}{300} \text{ СГС}_E$ .

Заряд атмосферы, если считать его сферически симметрично распределенным, не создает никакого поля у самой поверхности Земли. Поле заряда Земли на ее поверхности равно  $E = q/R^2$ . Поскольку радиус Земли  $R = 6370 \text{ км}$ , а напряженность известна, можно подсчитать заряд Земли  $q$ , который оказывается равным 0,6 миллиона кулонов.

Напряженность поля Земли можно измерить экспериментально. Для этой цели можно использовать плоский конденсатор (рис. 89). Если его пластины не соединены между собой, они приобретают в поле Земли потенциалы, соответствующие тем высотам, на которых находятся\*).

При этом полный заряд каждой из пластин равен нулю, хотя на внутренних и внешних поверхностях каждой из пластин, разумеется, есть заряды соответствующих знаков; плотность их равна  $\sigma = E/4\pi$ . Если теперь соединить пластины через гальванометр, пойдет кратковременный ток и имевшаяся разность потенциалов исчезнет. Соответствующее число электронов перейдет с нижней пластины на верхнюю. Поле пластин будет в точности равно и противоположно по направлению полю Земли. Пластины разрядятся, если повернуть их, поставив вертикально. При каждом повороте через гальванометр будет идти ток. Прошедший через прибор полный заряд  $q$  непосредственно связан с интересующей нас напряженностью поля Земли:

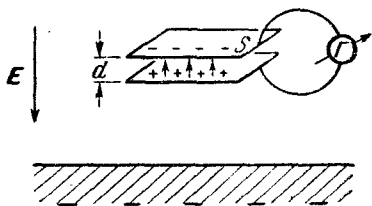


Рис. 89.

Если теперь соединить пластины через гальванометр, пойдет кратковременный ток и имевшаяся разность потенциалов исчезнет. Соответствующее число электронов перейдет с нижней пластины на верхнюю. Поле пластин будет в точности равно и противоположно по направлению полю Земли. Пластины разрядятся, если повернуть их, поставив вертикально. При каждом повороте через гальванометр будет идти ток. Прошедший через прибор полный заряд  $q$  непосредственно связан с интересующей нас напряженностью поля Земли:

$$E = 4\pi\sigma = \frac{4\pi}{S} q.$$

Существуют так называемые баллистические гальванометры, отброс которых пропорционален прошедшему

\*) Искажение, которое пластина вносит в поле, обращается в нуль вместе с толщиной пластины.

через гальванометр заряду. С помощью баллистического гальванометра можно непосредственно измерить заряд конденсатора, а следовательно и напряженность поля Земли.

### § 34. Электростатический генератор. Линейные ускорители

Отсутствие зарядов на внутренней поверхности полого проводника и их концентрация на внешней поверхности могут быть использованы для создания ускорителя заряженных частиц, так называемого электростатического генератора (генератора Ван-де-Граафа).

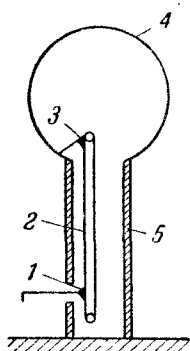


Рис. 90.

Простая электростатическая машина с помощью металлических кисточек 1 сообщает заряд бесконечной непроводящей ленте 2 (рис. 90). Заряд переносится лентой к кисточкам 3, соединенным с большим металлическим шаром 4, находящимся на изолирующей колонне 5. Попадая на внутреннюю поверхность шара, заряд немедленно переходит на внешнюю, так что внутренняя поверхность все время остается незаряженной. Таким путем удается поднять потенциал шара до нескольких миллионов вольт. Поле у поверхности  $E = q/\epsilon R^2$  не должно превышать напряженности пробоя диэлектрика, в котором находится шар (для воздуха  $\approx 30\,000$  в/см). Есть и другие технические причины, ограничивающие потенциал генератора, например разряды вдоль вакуумной ускорительной трубки (см. ниже). Потенциал шара  $\phi = q/\epsilon R = ER$ , так что при заданной напряженности потенциал тем больше, чем больше радиус шара (последний в реальных генераторах достигает нескольких метров). Пробивное напряжение можно значительно увеличить, помещая шар в жидкий диэлектрик, находящийся под давлением.

От внешней поверхности шара идет вакуумная трубка, в которой движутся ускоряемые частицы. Второй электрод трубки соединяется с землей или с другим генератором, имеющим противоположный знак заряда. Преимущество электростатического генератора — в

его простоте и стабильности работы. Однако по величине напряжения он не идет в сравнение с современными ускорителями. Большинство современных ускорителей заряженных частиц (электронов, ионов, атомных ядер) — циклические. Траектория частиц в этих ускорителях — спираль или окружность. Такая траектория достигается с помощью магнитного или вихревого электрического поля или обоих полей вместе (см. § 83 и § 98). Линейные ускорители выгодно отличаются от циклических весьма малым излучением движущихся зарядов (см. § 108), простотой впуска и выпуска частиц.

Современные линейные ускорители работают не от электростатического генератора, а от генератора переменного напряжения (резонансные линейные ускорители). Схема резонансного ускорителя приведена на рис. 91. Внутри каждой трубки потенциал постояен, соответственно этому постоянна и скорость частиц. Длины трубок увеличиваются так, чтобы время прохождения частицей каждой трубки (с учетом изменения массы со скоростью, т. е. эффектов теории относительности) равнялось половине периода генератора. Отрицательно заряженная частица должна подойти к зазору между трубками 2 и 3 в тот момент, когда потенциал трубки 3 положителен (а трубки 4 отрицателен). Тогда, проходя зазор 2—3, частица ускорится. За время движения частицы в трубке 3 потенциал трубки 4 должен изменить знак, для чего должна пройти половина периода, и т. д. При точном резонансе полная энергия частицы на выходе равна  $nu$ , где  $n$  — число ускоряющих трубок,  $u$  — напряжение генератора. Линейные резонансные ускорители строятся на энергии порядка  $10^8$ — $10^9$  эв.

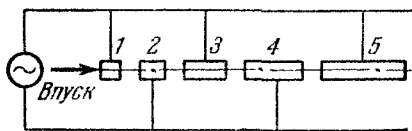


Рис. 91.

### § 35. Емкость

Проводник, вблизи которого нет никаких других проводников, будем называть *уединенным*. Потенциал, который он создает в любой точке пространства, в том числе потенциал самого проводника, пропорционален его

заряду. Иными словами, потенциал проводника и его заряд связаны между собой линейно. Например, потенциал заряженного шарика радиуса  $R$  равен  $\varphi = q/R$ , таким образом  $\varphi$  и  $q$  пропорциональны друг другу.

Эта связь вытекает из общего принципа линейности. Поля связаны линейно с их источниками и вихрями, а также между собой \*).

Пропорциональность заряда и потенциала единенного проводника записывается в виде

$$q = C\varphi. \quad (35.1)$$

Коэффициент  $C$  называется *емкостью* единенного проводника. Если заряд и потенциал измеряются в единицах СГС, то емкость имеет размерность длины и выражается в сантиметрах. Для шарика в пустоте, как видно из приведенной выше формулы,  $q = R\varphi$ , т. е.  $C = R$ . Следовательно, емкость шарика в гауссовой системе равна его радиусу.

Если проводник имеет не сферическую форму, то емкость по порядку величины обычно совпадает с большим из его линейных размеров. Так, например, емкость плоского диска радиуса  $R$  равна  $C = \frac{2}{\pi} R$ . Емкость вытянутого эллипсоида вращения с полуосями  $a$ ,  $a$ ,  $b$ , причем  $b \gg a$ , равна

$$C = \frac{b}{\ln(2b/a)}. \quad (35.2)$$

**Емкость провода.** Эта же формула определяет емкость очень длинного цилиндра, например цилиндрического провода, так как длинный цилиндр почти не отличается от вытянутого эллипсоида вращения. Для провода величина  $a$  является его радиусом, а  $b = l/2$ , где  $l$  — длина провода, так что емкость провода целесообразнее записывать в виде

$$C = \frac{l}{2 \ln(l/r)}. \quad (35.3)$$

---

\*) Линейность нарушается в среде, диэлектрическая проницаемость в которой не постоянна, а зависит от напряженности поля, как это имеет место в сегнетоэлектриках (§ 40). Аналогично этому, линейная связь между магнитной индукцией  $B$  и током нарушается в ферромагнетиках, магнитная проницаемость  $\mu$  которых зависит от поля (§ 93).

С увеличением длины  $l$  емкость увеличивается почти пропорционально длине, так как  $\ln(l/r)$ , стоящий в знаменателе, очень медленно растет с увеличением  $l$ . Однако этот логарифм оказывается весьма существенным, если зафиксировать длину провода и устремить к нулю его диаметр. Тогда емкость будет стремиться к нулю из-за медленного, но неограниченного роста  $\ln(l/r)$ .

Эллипсоид является одним из немногих тел, для которых можно *точно* решить задачу определения потенциала по заданному заряду. Зная потенциал как функцию координат, можно определить напряженность поля, плотность заряда, емкость и все прочие величины. Удачным является то обстоятельство, что, меняя соотношение между полуосями эллипсоида  $a, b, c$  (рис. 83, а), можно получать тела разнообразной формы: при  $a=b=c$  — сферу, при  $a=b$  и очень малом  $c$  — диск, при  $a=b$  и  $c \gg a$  — почти цилиндр, при  $a \ll b, b \ll c$  — плоскую удлиненную пластинку и т. д.

В системе СИ заряд измеряется в кулонах ( $\kappa$ ), потенциал в вольтах ( $\vartheta$ ), емкость в фарадах ( $\phi$ ). Поскольку  $1 \kappa = 3 \cdot 10^9$  СГС<sub>q</sub>, а  $1 \vartheta = \frac{1}{300}$  СГС<sub>φ</sub>, емкость  $1 \phi = 9 \cdot 10^{11}$  см. Это огромная емкость. Уединенные проводники такой емкостью не обладают (радиус и емкость Земли  $\approx 6,4 \cdot 10^8$  см). В радиотехнике употребляемыми единицами емкости являются микрофарада (миллионная доля фарады,  $10^{-6}$  фл) и пикофарада ( $10^{-12}$  фл = 0,9 см).

**Емкость конденсатора.** Значительно большая емкость может быть получена, если вместо уединенного проводника взять конденсатор — два проводника, имеющих равные и противоположные по знаку заряды, причем конфигурация проводников такова, что поле, ими создаваемое, сосредоточено в основном между проводниками.

Емкостью конденсатора называется коэффициент пропорциональности между зарядом и разностью потенциалов его обкладок:

$$q = C (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (35.4)$$

Емкость не зависит от заряда обкладок, если диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  заполняющего конденсатор диэлектрика не зависит от поля, как это обычно и бывает. Если же между обкладками конденсатора находится диэлектрик,  $\epsilon$  которого меняется при изменении

поля (сегнетоэлектрик, см. § 40), то пропорциональность между  $q$  и  $\varphi_1 - \varphi_2$  нарушается. Емкость такого конденсатора по определению равна  $C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$ , но смысл емкости, как коэффициента пропорциональности между  $q$  и  $\varphi_1 - \varphi_2$ , конечно, теряется, так как никакой пропорциональности в этом случае нет. Подобные конденсаторы называются *нелинейными* (у них нет линейной связи между  $q$  и  $\varphi_1 - \varphi_2$ ).

Емкость конденсатора зависит от формы и расположения его обкладок, а также от  $\epsilon$  диэлектрика, его заполняющего. В плоском конденсаторе

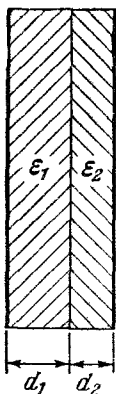


Рис. 92.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} d = \frac{4\pi qd}{\epsilon S}.$$

Подставляя это в формулу (35.4), получим

$$\begin{aligned} C &= \frac{\epsilon S}{4\pi d} \quad (\text{СГС}), \\ C &= \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d} \quad (\text{СИ}). \end{aligned} \quad (35.5)$$

Емкость плоского конденсатора, содержащего несколько слоев диэлектрика (рис. 92), вычисляется аналогичным образом. Поскольку линии поля нормальны к поверхностям раздела диэлектриков, вектор  $\mathbf{D}$  «не замечает» присутствия диэлектриков (см. § 15 и § 36) и равен  $4\pi\sigma$ . Поэтому напряженность в первом диэлектрике равна  $E_1 = D/\epsilon_1 = 4\pi\sigma/\epsilon_1$ , во втором  $E_2 = D/\epsilon_2 = 4\pi\sigma/\epsilon_2$ . Падение потенциала между обкладками складывается из падения в каждом из слоев:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon_1} d_1 + \frac{4\pi\sigma}{\epsilon_2} d_2.$$

Деля  $q = \sigma S$  на  $\varphi_1 - \varphi_2$ , получаем емкость:

$$\begin{aligned} C &= \frac{S}{4\pi \left( \frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right)} \quad (\text{СГС}), \\ C &= \frac{\epsilon_0 S}{\frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2}} \quad (\text{СИ}). \end{aligned} \quad (35.6)$$



Ясно, что аналогичным способом записывается емкость конденсатора с любым числом слоев диэлектрика \*).

Емкость сферического конденсатора, состоящего из двух concentрических сфер (рис. 93), выражается формулой

$$C = \frac{\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (35.7)$$

Нетрудно показать, что если расстояние между обкладками  $R_2 - R_1$  мало по сравнению с каждым из радиусов, эта формула сводится опять к (35.5). Для доказательства обозначим  $R_2 - R_1 = d$  и заменим в числителе  $R_1 R_2 \approx R_1^2 = S/4\pi$ , где  $S$  — площадь сферы, все равно какой, внешней или внутренней. Получим опять формулу (35.5). Этот результат понятен. Если расстояние между обкладками мало, то кривизна поверхности не имеет значения и конденсатор фактически ничем не отличается от плоского. Этот вывод относится к конденсатору любой формы, если только расстояние между обкладками во много раз меньше радиуса их кривизны.

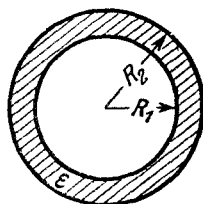


Рис. 93.

Покажите это для цилиндрического конденсатора, емкость которого выражается формулой

$$C = \frac{\epsilon l}{2 \ln(R_2/R_1)} \quad (\text{СГС}),$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln(R_2/R_1)} \quad (\text{СИ}), \quad (35.8)$$

где  $l$  — длина, а  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы цилиндрических обкладок.

**Соединения конденсаторов.** Конденсаторы можно соединять различным образом, образуя из них емкости большие или меньшие, чем исходные. Определить емкость соединения конденсаторов значит определить емкость, эквивалентную данному соединению, т. е. емкость такого конденсатора, который имел бы тот же заряд, что

\*) Емкость такого конденсатора можно вычислить еще и как емкость соответствующего числа последовательно соединенных конденсаторов (см. (35.9)), считая каждый слой за конденсатор.

и данная система, при том же общем падении потенциала на нем.

При последовательном соединении конденсаторов (рис. 94, а) заряд обоих конденсаторов одинаков, так как нижняя пластина конденсатора  $C_1$  и верхняя пластина конденсатора  $C_2$  образуют замкнутую систему, полный заряд которой равен нулю. Записав тождество  $\varphi_1 - \varphi_2 = (\varphi_1 - \varphi'_1) + (\varphi'_1 - \varphi_2)$ , поделим обе его части на заряд пластины. Слева получится  $\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{q} = \frac{1}{C}$ , где  $C$  — эквивалентная емкость, справа — сумма обратных емкостей обоих конденсаторов:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (35.9)$$

Отсюда

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (35.10)$$

Из способа вывода соотношения (35.9) ясно, что он пригоден для любого числа последовательно соединенных конденсаторов (сделайте этот вывод сами).

При параллельном соединении (рис. 94, б) одинаково падение напряжения  $\varphi_1 - \varphi_2$  на обоих конденсаторах, а заряды их складываются, т. е. общий заряд  $q = q_1 + q_2$ . Поделив это на  $\varphi_1 - \varphi_2$ , получим емкость эквивалентного конденсатора:

$$C = C_1 + C_2. \quad (35.11)$$

Ясно, что этот результат относится к любому числу параллельно соединенных конденсаторов. Смысл формул

(35.9) и (35.11) нетрудно понять: грубо говоря, при последовательном соединении складываются расстояния между обкладками  $d_1$  и  $d_2$ , а при параллельном — площади пластин.

**Емкостная связь между проводниками.** Рассмотрим систему проводников, обладающих электрическими зарядами. Изменение одного из зарядов повлечет за

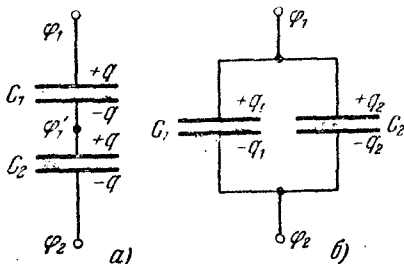


Рис. 94.

собой большее или меньшее изменение потенциалов остальных проводников. В этом смысле говорят о емкостной связи между проводниками. Схема емкостной связи между тремя проводниками представлена на рис. 95 (примером такой системы является электронная лампа с тремя электродами — триод). Она осуществляется как непосредственно через ту часть линий поля, которые идут от одного проводника к другому (через так называемые «взаимные емкости»  $C_{12}$ ,  $C_{13}$ ,  $C_{23}$ ), так и через землю или окружающие предметы (т. е. через так называемые «собственные емкости»  $C_{11}$ ,  $C_{22}$ ,  $C_{33}$  проводников).

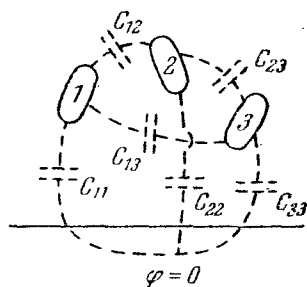


Рис. 95.

### § 36. Диэлектрики. Связанные заряды на поверхностях диэлектриков

В первой части книги мы уже рассмотрели процесс поляризации диэлектрика. В результате поворота молекул-диполей (ориентационная поляризация) или в результате поляризации молекул под действием поля (деформационная поляризация) на поверхностях диэлектрика выступают связанные заряды. Вычислим поверхностную плотность этих зарядов.

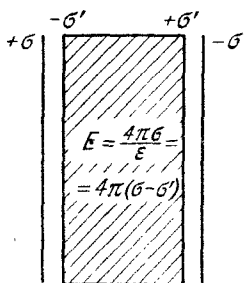


Рис. 96.

Сделать это можно следующим образом. Нам известно, что напряженность поля в диэлектрике, находящемся в плоском конденсаторе (рис. 96), при поверхностной плотности на обкладках  $\sigma$  равна  $4\pi\sigma/\epsilon$ .

С другой стороны, ясно, что эта напряженность создается четырьмя параллельными заряженными плоскостями (рис. 96), поскольку источниками  $E$  являются в равной мере свободные и связанные заряды. Поле этих четырех плоскостей равно  $4\pi\sigma - 4\pi\sigma'$  (см. § 22).

Следовательно,  $4\pi(\sigma - \sigma') = 4\pi\sigma/\epsilon$ , т. е.

$$\sigma' = \sigma \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \quad (\text{СГС и СИ}). \quad (36.1)$$

Плотность связанных зарядов оказывается всегда меньше плотности свободных зарядов, создающих эти связанные. В противном случае поле в диэлектрике изменило бы знак по сравнению с полем, его создающим!

Поскольку в конденсаторе  $E = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon}$ , то  $\sigma' = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E$ . Эту формулу легко обобщить на случай, когда поле  $E$  не перпендикулярно к поверхности диэлектрика. Очевидно, заряды выступают под действием только составляющей  $E_n$ , нормальной к границе диэлектрика. Поэтому

$$\begin{aligned} \sigma' &= \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E_n & (\text{СГС}), \\ \sigma' &= \epsilon_0 (\epsilon - 1) E_n & (\text{СИ}). \end{aligned} \quad (36.2)$$

Существенно подчеркнуть, что поле  $E$  здесь — это поле *внутри* диэлектрика, а не вне его, хотя бы и у его поверхности.

В воздушном промежутке между пластиной и поверхностью диэлектрика (рис. 96) поле создают только пластины конденсатора и оно равно  $4\pi\sigma$ . На границе диэлектрика напряженность поля испытывает скачок  $4\pi\sigma - \frac{4\pi\sigma}{\epsilon}$ , вызванный связанными зарядами.

Что касается вектора индукции  $D$ , то связанные заряды не являются его источниками. Известно из § 18, что на границе диэлектриков испытывает скачок тангенциальная составляющая вектора  $D$ . Если же вектор  $D$  нормален к границе раздела, как это имеет место в плоском, сферическом и цилиндрическом конденсаторах, то  $D_{\tau 1} = D_{\tau 2} = 0$  и вектор  $D$  вообще не меняется, он, так сказать, «не замечает» границ раздела диэлектриков. Из соотношения  $D = \epsilon E$  следует, что в плоском конденсаторе вектор  $D$  равен

$$D = 4\pi\sigma = \frac{4\pi q}{S} \quad (\text{СГС}). \quad (36.3)$$

В системе СГС  $E$  и  $D$  не отличаются по размерности, так как  $\epsilon$  безразмерно. В системе СИ напряженность имеет размерность  $\text{в/м}$ , а индукция  $\text{к/м}^2$ , поэтому связь

между  $D$  и  $E$  не может быть прежней. В системе СИ  $D$  определяется равенством

$$D = \epsilon_0 \epsilon E \quad (\text{СИ}). \quad (36.4)$$

Отсюда, в частности, следует для плоского конденсатора (см. (22.5)):

$$D = \sigma = \frac{q}{S} \quad (\text{СИ}). \quad (36.5)$$

### § 37. Диэлектрики. Вектор поляризации $P$

В однородном изотропном диэлектрике (разумеется, в отсутствие переменного магнитного поля) ни  $E$ , ни  $D$  не имеют вихрей и создаются только источниками (см. § 17). В этом случае можно сказать, что  $D$  — поле свободных зарядов, а  $E$  — поле свободных и связанных зарядов. Естественно ввести еще поле, источниками которого являются связанные заряды. Обозначим это поле (в гауссовой системе)  $-4\pi P$  (следовательно,  $+4\pi P$  будет полем, обратным ему по направлению). Тогда

$$E = D + (-4\pi P) = D - 4\pi P \quad (\text{СГС}) \quad (37.1)$$

или

$$D = E + 4\pi P. \quad (37.2)$$

Введенный нами вектор  $P$  называется *вектором поляризации*. В системе СИ в отсутствие диэлектрика и, следовательно, связанных зарядов  $D = \epsilon_0 E$ . Далее, в этой системе вместо  $4\pi P$  принято писать просто  $P$ . Поэтому в СИ

$$D = \epsilon_0 E + P. \quad (37.3)$$

Мы уже неоднократно отмечали, что поле связанных зарядов пропорционально полю свободных. Естественно поэтому, что вектор  $P$  пропорционален напряженности поля. Найти связь между  $P$  и  $E$  весьма легко. Действительно, вектор  $D = \epsilon E$ . С другой стороны, он определяется формулой (37.2), из которой получим  $E + 4\pi P = \epsilon E$ , т. е.

$$P = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E \quad (\text{СГС}). \quad (37.4)$$

Обозначая

$$\kappa = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \quad (\text{СГС}), \quad (37.5)$$

получим

$$\mathbf{P} = \kappa \mathbf{E}. \quad (37.6)$$

В системе СИ формула (37.6) тоже справедлива, только  $\kappa = \epsilon_0(\epsilon - 1)$  (покажите это сами).

Величина  $\kappa$  называется *поляризуемостью диэлектрика*. В вакууме  $\epsilon = 1$  и  $\kappa = 0$ .

Вектор  $\mathbf{P}$  полностью определяет поляризацию диэлектрика во всех его точках. Если вектор  $\mathbf{P}$  во всех точках диэлектрика имеет одну и ту же величину и направление, то поляризация называется *однородной*.

В большинстве случаев поляризация не является однородной. Например, если в диэлектрик погружен точечный заряд или заряженный шар, то поле его  $\mathbf{E}$  убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от заряда. В силу формулы (37.6) это же можно сказать и о  $\mathbf{P}$ . Таким образом, в этом случае поляризация неоднородна. Однако это не означает, что где-либо внутри диэлектрика появятся объемные связанные заряды, т. е. что где-либо не будут полностью компенсироваться положительные и отрицательные заряды ориентированных диполей.

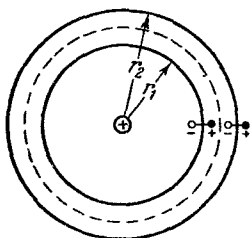


Рис. 97.

Для доказательства отсутствия объемных связанных зарядов в однородном диэлектрике рассмотрим сферическую поверхность, окружающую точечный заряд (рис. 97, пунктирная сфера). С внутренней стороны на нее выходят положительные заряды диполей, расположенных на сфере радиуса  $r_1$ , с внешней стороны — отрицательные заряды диполей, расположенных на сфере  $r_2$ . Общее число молекул-диполей на сфере  $r_2$  больше, чем на сфере  $r_1$ , в  $\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$  раз, зато поле  $E$  там слабее во столько же раз, поэтому относительное число ориентированных диполей во столько же раз меньше. Следовательно, с обеих сторон на обозначенную пунктиром сферу выходит равное число положительных и отрицательных зарядов.

Таким образом, в объеме поляризационные заряды не возникают, они появляются только на поверхности. Иначе будет обстоять дело в неоднородном диэлектрике, т. е. в таком, у которого  $\epsilon$  в различных точках различна. Здесь появляются и объемные поляризационные заряды.

В каких условиях диэлектрик будет однородно поляризован? Для этого поле в нем также должно быть однородно. Этого легко достичь, если, например, вставить в плоский конденсатор плоскую диэлектрическую пластинку, толщина которой мала по сравнению с другими ее размерами (рис. 98, а). В случае другого соотношения между линейными размерами пластинки она исказит однородное поле, в которое помещена, да и внутри ее поле не будет однородным (рис. 98, б).

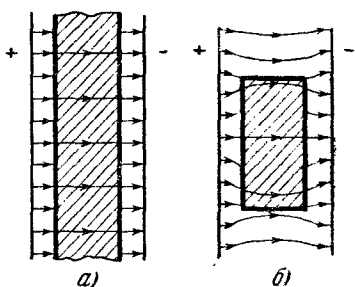


Рис. 98.

Если поместить в однородное поле эллипсоид (с произвольным соотношением полуосей), то поле внутри его, как оказывается, будет также однородным (рис. 99).

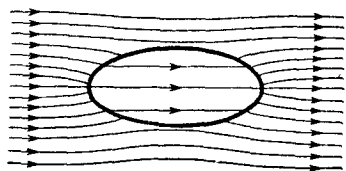


Рис. 99.

Таким же свойством, как эллипсоид, обладает очень длинный цилиндр, расположенный вдоль линий поля. Мы не сможем здесь привести доказательство, так как оно основано на решении уравнения Лапласа для

потенциала с соответствующими граничными условиями. Поле *вне* эллипсоида или цилиндра будет при этом приближенно однородным только в том случае, если эти тела будут очень длинными.

**Вихри вектора  $P$ .** Полностью ли определен нами вектор поляризации  $P$ ? Разумеется, нет; ведь мы определили его только для однородной безграничной диэлектрической среды, как поле, источниками которого являются связанные заряды (с обратным знаком). Вихри

вектора  $\mathbf{P}$  еще не определены нами, следовательно, не полностью определен и сам вектор  $\mathbf{P}$ .

Для полного определения вектора  $\mathbf{P}$  допустим, что и в неоднородном (но изотропном) диэлектрике, например в среде, состоящей из нескольких областей с различными  $\epsilon$ , вектор  $\mathbf{P}$  по-прежнему определяется формулой (37.4). В частности, в вакууме  $\mathbf{P} = 0$ .

Нетрудно видеть, что это требование определяет и вихри вектора  $\mathbf{P}$ . Рассмотрим однородно поляризованный диэлектрический образец (рис. 100), имеющий форму очень длинного цилиндра. В вакууме (а практически и в воздухе)  $\mathbf{P} = 0$ , поскольку там  $\epsilon = 1$ . Вектор  $\mathbf{P}$  параллелен боковой поверхности цилиндра. Следовательно, на



Рис. 100.

боковой поверхности тангенциальная составляющая  $\mathbf{P}$  (составляющая, параллельная образующей) совершает скачок от значения  $P$  внутри образца до нуля. Как мы отмечали в конце § II, это означает существование вихрей вектора  $\mathbf{P}$  на границе. На торцах цилиндра существует разрыв нормальной составляющей  $\mathbf{P}$ , а это означает (см. там же), что на торцах имеются источники  $\mathbf{P}$  (связанные заряды).

**Другой смысл вектора поляризации.** Связанные заряды на торцах превращают цилиндр в диполь, момент которого равен  $q'h = \sigma'Sh$  ( $S$  — площадь основания,  $h$  — высота цилиндра). Плотность связанных зарядов  $\sigma'$  равна абсолютной величине вектора  $\mathbf{P}$ \*). Следовательно, дипольный момент нашего цилиндра, имеющего объем  $V = Sh$ , равен  $PSh = PV$ . Отсюда ясно, что вектор поляризации  $\mathbf{P}$  есть дипольный момент единицы объема. Дипольный момент единицы объема — это *векторная сумма дипольных моментов всех молекул, заключенных в единице объема*. Направление вектора  $\mathbf{P}$  совпадает с направлением дипольного момента диполя (см. рис. 100),

\*) Согласно (36.2) и (37.4)  $\sigma' = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E_n = P_n$ . В данном случае на торцах  $P_n = P$ , так что  $\sigma' = P$ .



т. е.  $\mathbf{P}$  направлен от отрицательного заряда к положительному.

Обратимся теперь к началу параграфа. Если бы поле связанных зарядов обозначили не  $-4\pi\mathbf{P}$ , а  $+4\pi\mathbf{P}$ , то вектор  $\mathbf{P}$  не имел бы такого же направления, как дипольный момент диполя.

### § 38. Непосредственное измерение $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ в диэлектрике

Можно указать способ непосредственного измерения  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$  в твердом диэлектрике. Зная  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ , можно определить и вектор поляризации  $\mathbf{P}$ . Для определения  $\mathbf{E}$  нужно вырезать в диэлектрике длинную и узкую цилиндрическую полость, образуемая которой параллельна

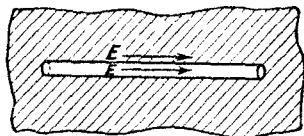


Рис. 101.

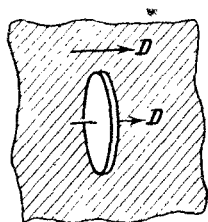


Рис. 102.

линиям поля (рис. 101). Если в диэлектрике поле было однородным, оно останется таковым и в присутствии полого длинного цилиндра (§ 37).

Докажем, что поле  $\mathbf{E}$  внутри вырезанного цилиндра будет таким же, как в диэлектрике. Поле может измениться только в том случае, если меняются его вихри или источники. Мы знаем (стр. 62), что в отсутствие переменного магнитного поля вихрей у вектора  $\mathbf{E}$  нет. Источники же могут появиться только там, где начинаются или заканчиваются линии  $\mathbf{E}$ , т. е. на торцах. Связанный заряд на торце равен  $\sigma'S$ , а его поле, как поле точечного заряда, в центре полости, т. е. на расстоянии  $h/2$  от торца, равно  $\sigma'S / \left(\frac{h}{2}\right)^2$ . Если  $\frac{S}{h^2} = \frac{\pi r^2}{h^2}$  очень мало (длинный цилиндр), то полем торцов можно пренебречь. Следовательно,  $\mathbf{E}$  в диэлектрике =  $\mathbf{E}$  в полости.

Для измерения  $\mathbf{D}$  надо вырезать цилиндр, у которого, напротив, мало отношение не  $r/h$ , а  $h/r$  (рис. 102).

Источниками  $D$  являются свободные заряды, которые, разумеется, из-за образования полости в диэлектрике не возникают. На боковой поверхности цилиндра, там, где линии  $D$  параллельны границе, возникают вихри вектора  $D$ , мощность которых пропорциональна высоте цилиндра  $h$ . Поле этих вихрей в центре обратно пропорционально  $r$ . При  $h/r \rightarrow 0$  поле также стремится к нулю\*).

Следовательно, индукция  $D$  в полости, равная (по-скольку там  $\varepsilon = 1$ ) напряженности  $E$ , такая же, как индукция в диэлектрике.

Подытожим полученное: измерение  $E$  в цилиндрической полости малого радиуса и большой длины дает  $E$  в диэлектрике, а измерение  $E$  в полости большого радиуса и малой высоты дает  $D$  в диэлектрике.

### § 39. Макроскопическое, микроскопическое, действующее поле

Как мы уже отмечали (стр. 54), истинное электрическое (и магнитное) поле в веществе меняется весьма быстро в пространстве и во времени. Поле различно в различных точках атома и промежутков между атомами. Для того чтобы определить величину и направление этого поля в данный момент времени, нужно было бы сложить поля всех отдельных ядер и электронов вещества. Решение задачи точного определения такого «истинного» (так называемого микроскопического) поля является совершенно нереальным. С другой стороны, результат оказался бы настолько сложным, что его нельзя было бы использовать. Более того, для решения макроскопических задач такое поле не нужно, а задачи о движении частиц атомных размеров (например электронов) решаются квантовой механикой совсем иным путем.

**Макроскопическое и микроскопическое поле.** Электрическое поле  $E$  (а также магнитное поле  $B$ ) в веществе — это пространственное среднее значение микроскопического поля. Его мы и называем *макроскопическим*

---

\*) В гл. VIII мы столкнемся с совершенно аналогичной ситуацией для вектора магнитной индукции. Вихри вектора  $B$  (электрические токи, в данном случае микротоки) гораздо более наглядны, чем вихри вектора  $D$ , поэтому за более наглядным объяснением того, что поле в центре полости пропорционально величине  $h/r$ , рекомендуется обратиться к § 93.

полем (после пространственного усреднения временное усреднение уже не требуется). Пространственное усреднение производится по так называемым *физически бесконечно малым элементам объема*. Этот термин означает малый объем, содержащий большое число атомов, но все же имеющий размеры  $l$  во много раз меньше, чем те расстояния  $R$ , на которых значительно меняется поле\*). Следовательно, на  $l$  накладывается условие

$$a \ll l \ll R, \quad (39.1)$$

где  $a \sim 10^{-8}$  см — размеры атома.

Поясним сказанное примером. Рассмотрим поле  $E$ , создаваемое заряженным шариком, помещенным в диэлектрик. Нас интересует поле «в данной точке диэлектрика». Поле «в данной точке» есть результат усреднения микроскопического поля по малому объему, окружающему эту точку. Размеры элемента объема должны быть очень малы по сравнению с радиусом шарика (рис. 103). Вместе с тем выбранный объем должен содержать еще очень много атомов. Если радиус шарика  $R = 0,01$  см, то требуемым условиям удовлетворяет, например, элемент объема в виде кубика со стороной  $l$  порядка  $10^{-5}$  см. Такой объем будет содержать еще миллиарды атомов. Вообще, если поле создается макроскопическим заряженным телом, условию (39.1) удовлетворить несложно.

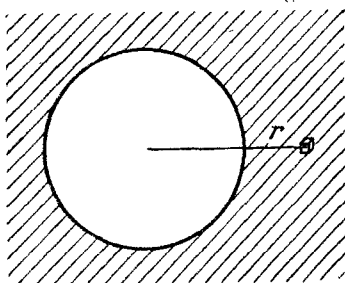


Рис. 103.

Значительно хуже обстоит дело в том случае, когда поле создается электромагнитной волной, распространяющейся в веществе. Ясно, что размеры элемента объема, по которому производится усреднение, должны быть в этом случае во много раз меньше длины волны:

$$a \ll l \ll \lambda \quad (39.2)$$

\*) Эти расстояния обычно порядка размеров тел, создающих поле.

(см. рис. 104). Иначе нельзя будет говорить о поле в данной точке волны. Для радиоволн с длинами волн порядка сантиметров и миллиметров, для инфракрасных лучей с  $\lambda$  порядка  $10^{-3}$ — $10^{-4}$  см и даже для видимого света с  $\lambda \sim 5 \cdot 10^{-5}$  см требованию (39.2) еще можно удовлетворить. Например, в случае видимого света  $l$

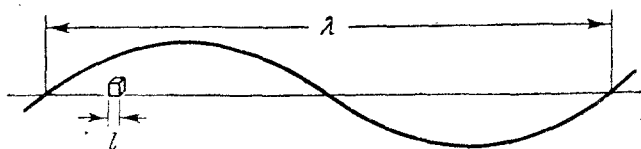


Рис. 104.

может быть порядка  $10^{-6}$ — $10^{-7}$  см, при этом в объемике таких размеров будет еще много атомов. Но если длина волны еще меньше (ультрафиолетовые лучи), то пространственное усреднение станет весьма сомнительной операцией. Например, если длина волны  $\lambda \sim 10^{-7}$ — $10^{-8}$  см, невозможно выбрать  $l$  так, чтобы было  $l \ll \lambda$  и вместе с тем чтобы  $l$  было во много раз больше размеров атомов.

Таким образом, пространственное усреднение здесь невозможно. Может быть, для получения макроскопического поля можно применить усреднение по времени? Но и это невозможно, так как период колебаний коротковолнового излучения очень мал. Если  $\lambda = 10^{-7}$  см, то частота  $\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{10^{-7}} = 3 \cdot 10^{17} \frac{1}{\text{сек}}$ , т. е. период колебаний  $T = 1/\nu \approx 3 \cdot 10^{-18}$  сек, что существенно меньше, чем период обращения внешних электронов атомов ( $10^{-15}$  сек).

Поэтому при описании распространения в веществе коротковолнового излучения, например, рентгеновских лучей (их длина волны порядка  $10^{-8}$  см, т. е. порядка размеров атома), от усреднения по физически бесконечно малым элементам объема приходится отказаться. Здесь следует считать, что электромагнитная волна распространяется в пустоте, в которой имеются центры рассеяния волны — электроны\*). Из-за большой частоты

\*) Рассеяние электромагнитных волн на ядрах несущественно. Вследствие большой массы ядра практически не успевают смещаться и поэтому не излучают вторичных волн (см. гл. X).

рентгеновских лучей электроны за период колебания волны не успевают далеко переместиться внутри атома, и не важно, обращаются ли они вокруг ядра или движутся поступательно, т. е. являются свободными. Возможность считать электроны свободными очень облегчает теоретическое рассмотрение распространения рентгеновских лучей через вещество. Существенно то, что смысл величин  $E$  и  $B$ , описывающих поле такой высокочастотной волны, как рентгеновская, не совпадает с обычным смыслом этих величин, усредненных по физически бесконечно малым элементам объема. Иначе говоря,  $E$  здесь — не обычное усредненное поле (усредненное оно входит в уравнения Максвелла).

С проблемой определения смысла величин  $E$  и  $B$  приходится сталкиваться и при рассмотрении прохождения через вещество (например через кристалл) ультразвуковой волны. Длина волны высокочастотного ультразвука может быть порядка  $10^{-6}$ — $10^{-7}$  см. Проходя через кристалл, эта волна заставляет колебаться электроны и ионы, создавая электрическое и магнитное поля, существенно меняющиеся на расстояниях порядка  $10^{-7}$  см. Можно ли считать эти поля макроскопическими (т. е. усредненными)? Подчиняются ли они обычным макроскопическим уравнениям Максвелла (описывающим вещество с помощью величин  $\epsilon$  и  $\mu$ ), или здесь нужен другой подход? Ясно, что, строго говоря, эти поля не совпадают с максвелловскими. Трудности, возникающие в теории коротковолнового ультразвука, свидетельствуют о необходимости найти такую модель происходящих явлений, которая больше соответствовала бы сути задачи, чем обычный макроскопический подход.

**«Действующее» поле.** Своеобразным промежуточным между макроскопическими и микроскопическими полями является так называемое «действующее» поле.

Поместим в однородное электрическое поле кристаллический диэлектрик, обладающий кубической решеткой. Нас интересует поле  $E$ , которое действует на одну из молекул-диполей этого кристаллического тела. Молекула находится не в любой точке диэлектрика, а именно в узле кристаллической решетки (рис. 105), поэтому действующее на нее поле не совпадает со средним полем, получающимся при усреднении по физически бесконечно

малому элементу объема. Мы не будем приводить здесь вывода величины этого *действующего* поля, важного потому, что оно определяет степень поляризации каждой молекулы. Приведем только результат:

$$\mathbf{E}_{\text{действ}} = \bar{\mathbf{E}} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P}, \quad (39.3)$$

где  $\mathbf{P}$  — вектор поляризации диэлектрика. Конечно, это поле не является микроскопическим, оно тоже *среднее*,

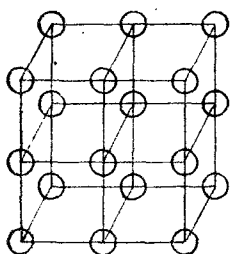


Рис. 105.

хотя бы потому, что в действительности молекулы кристалла и составляющие их электроны и ядра, вносящие вклад в поле (39.3), не неподвижны, а движутся. Вместе с тем оно не является и полем, усредненным обычным способом.

Приведенные примеры показывают, что в каждой конкретной физической задаче следует уяснить себе, какое именно поле определяет интересующие нас величины, и искать именно это поле, а не обязательно обычное макроскопическое поле  $\mathbf{E}$ . Впрочем, в подавляющем большинстве случаев именно макроскопическое (усредненное) поле и является искомым.

#### § 40. Сегнетоэлектрики и пьезоэлектрики

Среди диэлектриков есть кристаллы, обладающие особыми свойствами. Некоторые из них при сжатии, растяжении или сдвиге приобретают дипольный момент. Другими словами, вектор поляризации  $\mathbf{P}$  может возникать в этих кристаллах без электрического поля, из-за деформации. Такие кристаллы называются *пьезоэлектрическими*. Примером пьезоэлектрического кристалла является кварц.

Другие кристаллы, называемые *сегнетоэлектриками*, обладают не равным нулю  $\mathbf{P}$  (т. е. являются поляризованными) уже в недеформированном состоянии. При этом у одних сегнетоэлектриков (например у титаната бария  $\text{BaTiO}_3$ ) температура должна быть ниже так называемой точки Кюри (у титаната бария точка Кюри равна  $120^\circ\text{C}$ ), у других (сегнетова соль  $\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \times 4\text{H}_2\text{O}$ ) должна лежать в более или менее узком

температурном интервале (у сегнетовой соли от  $-18^{\circ}\text{C}$  до  $+24^{\circ}\text{C}$ ). Выше  $120^{\circ}\text{C}$  у титаната бария и вне указанного интервала у сегнетовой соли самопроизвольная поляризация исчезает. Все сегнетоэлектрики обладают также пьезоэлектрическими свойствами, обратное же утверждение несправедливо.

Для того чтобы кристалл был сегнетоэлектриком или пьезоэлектриком, необходимо (но не достаточно), чтобы этот кристалл не имел центра симметрии (понятие центра симметрии фигуры известно из элементарной геометрии). На рис. 106, а показана плоская решетка, имеющая

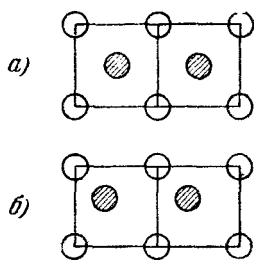


Рис. 106.

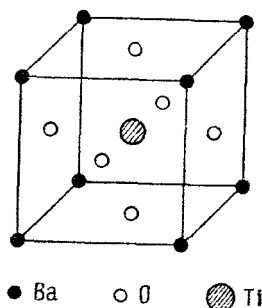


Рис. 107.

центр симметрии. В качестве такового можно взять любой атом. Если центральный атом (точнее — его равновесное положение) сдвинется и не будет находиться уже на пересечении диагоналей квадрата, решетка не будет обладать центром симметрии (рис. 106, б). При этом неважно, велико смещение атома или мало. Существенно лишь то, что кристалл уже не имеет одного из элементов симметрии \*) — центра симметрии.

Кристалл  $\text{BaTiO}_3$  при температуре выше  $120^{\circ}\text{C}$  обладает решеткой, состоящей из кубических ячеек (рис. 107).

\*) Пусть кристалл будет бесконечным. Если сдвинуть весь кристалл, не поворачивая его, на постоянную решетки  $a$  (см. рис. 106, а), он совместится сам с собой. Если повернуть его в плоскости рисунка на  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{3}{2}\pi$  вокруг одного из атомов, он снова совместится сам с собой. Все преобразования, при которых такие совмещения происходят, называются *элементами симметрии* кристалла. К элементам симметрии относится и центр симметрии.

На каждый кубик приходится по одному атому Ва (можно считать, что на ячейку приходится по  $\frac{1}{8}$  от каждого из восьми атомов Ва, находящихся в вершинах кубика; остальные  $\frac{7}{8}$  приходятся на ячейки, имеющие с данной общей вершины). Атомов кислорода шесть; на ячейку приходится  $\frac{1}{2}$  каждого атома, следовательно всего три атома кислорода. Наконец, на каждый кубик приходится по одному атому Тi, находящемуся в его центре. При температуре ниже  $120^\circ\text{C}$  решетка перестает быть кубической вследствие небольшого смещения атомов. Куб превращается в прямую призму с квадратным основанием (такая кристаллическая система называется тетрагональной). Одновременно атом Тi смещается по направлению к одному из атомов кислорода, и это смещение лишает решетку центра симметрии.

Все эти смещения объясняются тем, что при температуре ниже  $120^\circ\text{C}$  прежняя структура решетки титаната бария уже не соответствует минимуму энергии электрического взаимодействия частиц кристалла. Частицы перемещаются и занимают такие положения, при которых энергия взаимодействия всех атомов кристалла минимальна.

Изменение параметров решетки при переходе через точку Кюри происходит постепенно, однако, как уже отмечалось, симметрия кристалла меняется скачком. Симметрия любой фигуры не может измениться постепенно. Данный элемент симметрии либо есть, либо его нет.

**Фазовые переходы второго рода.** Постепенное изменение решетки с резким изменением ее симметрии называется фазовым переходом второго рода в отличие от общеизвестного фазового перехода первого рода. При фазовом переходе первого рода, например плавлении или превращении кристалла из одной кристаллической модификации в другую, происходит ликвидация решетки или резкое изменение ее геометрической структуры. Для такого изменения требуется затрата тепла, в то время как при фазовом переходе второго рода затраты тепла нет. Однако, поскольку решетка выше и ниже точки Кюри все же различна, в этих областях температуры для нагревания кристалла на один градус требуется различное количество тепла. Это значит, что теплоемкость выше и ниже точки Кюри у кристалла различна. В точке



Кюри имеется скачок теплоемкости, являющийся наиболее характерным признаком фазового перехода второго рода.

**Домены в сегнетоэлектрике.** Мы говорили все время об атомах титана, бария, кислорода. В действительности металлы Ti и Ba, осуществляя химическую связь с кислородом, отдают ему свои электроны, поэтому все частицы являются ионами. Вследствие этого сдвиг Ti означает появление у элементарной ячейки дипольного момента. Казалось бы, это означает, что дипольный момент автоматически приобретает и весь кристалл. Однако в действительности весь кристалл может и не иметь такого. Получается это оттого, что кристалл разбивается на небольшие области, называемые доменами, причем каждая область поляризована, т. е. имеет дипольный момент, но направления дипольных моментов отдельных доменов не параллельны, а составляют замкнутые цепи. Точно такие же явления наблюдаются в ферромагнетиках и объяснение их дано в § 92.

Ориентировка дипольных моментов отдельных доменов может быть произведена электрическим полем, и тогда кристалл приобретает весьма большой общий момент. Этот большой момент  $P$  создается уже относительно слабым полем  $E$ .

**Вектор поляризации сегнетоэлектрика.** Поскольку  $P = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} E$ , то, следовательно,  $\epsilon$  у сегнетоэлектрического

кристалла может быть очень велико (порядка  $10^2 - 10^3$ ; о смысле диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  для сегнетоэлектрика см. ниже). Кроме того, при изменении внешнего поля  $E$  вектор поляризации  $P$  не будет меняться пропорционально  $E$ . Если взять кристалл с  $P = 0$  (т. е. с полностью разориентированными доменами) и, увеличивая внешнее поле  $E$ , добиваться постепенной ориентировки,



Рис. 108.

то  $P$  будет расти так, как показано на рис. 108. Как видно из рисунка, между  $P$  и  $E$ , вообще говоря, пропорциональности нет. Когда  $E$  станет достаточно большим,  $P$  достигнет насыщения и дальше уже увеличиваться не будет (ориентированы все домены). Таким

образом, величина диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ , которую можно записать в виде

$$\epsilon = 1 + 4\pi \frac{P}{E} \quad (\text{СГС}), \quad (40.1)$$

не постоянна, а зависит от  $E$ .

Поскольку при введении  $\epsilon$  (в законе Кулона) эта величина, разумеется, предполагалась постоянной (зависимость ее от  $E$  означала бы в законе Кулона зависимость от  $r$ ), определение  $\epsilon$  для сегнетоэлектриков носит формальный характер. Определенная по формуле (40.1)  $\epsilon$  зависит от поля. Эта зависимость показана на рис. 109. При  $E \rightarrow \infty$   $\epsilon \rightarrow 1$ .

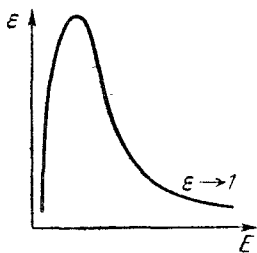


Рис. 109.

Если довести  $P$  до насыщения, а потом уменьшать внешнее поле, то при  $E = 0$  еще не все домены успеют разориентироваться. Останется некоторый постоянный дипольный момент, вполне аналогичный магнитному моменту постоянного магнита. Это явление называется гистерезисом (см. § 93).

Поляризованный сегнетоэлектрический образец имеет на поверхностях связанные заряды большой величины и создает электрическое поле.

Если образец находится в воздухе, это поле притягивает из воздуха ионы, постепенно нейтрализующие поверхностные заряды.

**Пьезоэлектрики.** В кристалле кварца в недеформированном состоянии дипольный момент каждой ячейки равен нулю вследствие компенсации нескольких дипольных моментов, направленных не по одной прямой (пример такой компенсации см. на рис. 110, а). При сжатии кристалла в направлении оси  $Oz$  происходит небольшой поворот дипольных моментов  $p_1$  и  $p_2$  (рис. 110, б), из-за чего ячейка

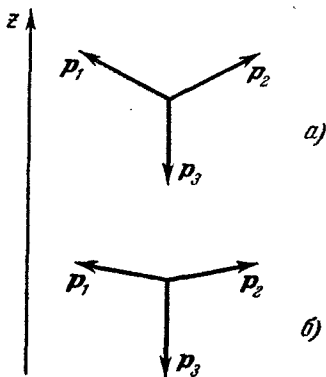


Рис. 110.

приобретает результирующий электрический момент в направлении  $p_3$ . Таков один из возможных механизмов пьезоэлектрического эффекта, т. е. возникновения дипольного момента при деформации кристалла.

Эффект, обратный пьезоэлектрическому, заключается в малой деформации (например сжатии или растяжении) кристалла при приложении к нему электрического поля. Механизм этого эффекта может быть объяснен с помощью рис. 110: внешнее поле, действуя на моменты  $p_1$  и  $p_2$ , несколько поворачивает их, деформируя ячейку, а с ней и весь кристалл.

Этот обратный пьезоэлектрический эффект весьма широко применяется на практике, например для воспроизведения звука. На поверхность кварцевой или другой пьезоэлектрической пластинки наносятся электроды. Если подавать на них переменное электрическое напряжение, кварцевая пластинка будет менять толщину или деформироваться иным способом и при этом излучать звук (при большой частоте приложенного напряжения — ультразвук).

На прямом пьезоэлектрическом эффекте основан пьезоэлектрический манометр, который измеряет давление по величине зарядов, появляющихся на гранях пластинки пьезокварца. Эти пластинки позволяют измерять весьма большие (до 1000 атм) и очень быстро меняющиеся давления.

Есть и множество других применений пьезоэлектрического эффекта, использующих существующую в пьезоэлектрике непосредственную связь механических деформаций с электрическим полем.

## § 41. Энергия электрического поля

Взаимодействующие между собой электрические заряды обладают потенциальной энергией. Закрепим точечный заряд  $q_1$  и будем из бесконечности приближать к нему точечный заряд  $q_2$  того же знака. Работа, которую при этом выполняют внешние силы, будет в  $q_2$  раз больше, чем потенциал  $q_1/r$ , т. е. будет равна  $\frac{q_1 q_2}{r}$ , где  $r$  — расстояние между зарядами в конечной точке пути. Вся эта работа целиком идет на увеличение (от нуля) потенциальной энергии взаимодействия зарядов.

Следовательно, потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся на расстоянии  $r$  в пустоте, равна

$$U = \frac{q_1 q_2}{r} \quad (\text{СГС}),$$
$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{СИ}).$$
(41.1)

При бесконечно большом расстоянии между зарядами  $U = 0$ .

Если заряды отталкиваются, т. е. имеют одинаковый знак, что мы и предполагали выше, потенциальная энергия зарядов *положительна*. Если заряды притягиваются, т. е. имеют разные знаки, потенциальная энергия их взаимодействия *отрицательна*. Такой знак потенциальной энергии притягивающихся зарядов легко пояснить наглядно. Для увеличения расстояния между притягивающимися зарядами от  $r$  до бесконечности требуется работа внешних сил. Эта работа идет на увеличение потенциальной энергии. В конце пути, т. е. при очень большом расстоянии между зарядами, потенциальная энергия обращается в нуль. Отсюда ясно, что первоначально она была отрицательной.

Обратите внимание на то, что *силы всегда направлены в сторону уменьшения потенциальной энергии*. Отталкивающиеся одноименные заряды стремятся увеличить взаимное расстояние, т. е. уменьшить их положительную потенциальную энергию. Притягивающиеся разноименные заряды стремятся сблизиться, а сближение приводит снова-таки к уменьшению потенциальной энергии (она отрицательна, поэтому увеличение ее абсолютной величины означает уменьшение самой величины  $U$ ).

Как мы увидим ниже, потенциальная энергия взаимодействия двух зарядов представляет собой часть энергии того электрического поля, которое они совместно создают. Часть — потому, что нужно из полной энергии создаваемого ими поля вычесть энергию поля, создаваемого каждым из зарядов порознь.

**Энергия электрического поля в конденсаторе.** Рассмотрим сначала энергию поля заряженного плоского конденсатора. Очевидно, *полная энергия* заряженного конденсатора равна той работе, которую надо произвести для его зарядки.

Будем заряжать конденсатор, перенося положительные (или отрицательные) заряженные частицы с одной пластины на другую (рис. 111). Этими частицами могут быть, например, положительные ионы металла или свободные электроны. В качестве мысленного эксперимента такой способ зарядки, во всяком случае, годится.

Представим себе, что в результате переноса заряда к какому-то моменту времени пластины приобрели заряд  $q$ , а разность потенциалов между ними стала равной  $u = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{C}$ . Для переноса очередной порции зарядов  $\Delta q$  потребуется работа  $\Delta A = (\varphi_1 - \varphi_2) \Delta q = \frac{q}{C} \Delta q$ . Следовательно, полная работа, затраченная на зарядку конденсатора, равна

$$A = \sum \frac{q}{C} \Delta q = \frac{1}{C} \int_0^q q dq = \frac{q^2}{2C}.$$

Итак, энергия заряженного конденсатора равна

$$W_E = \frac{q^2}{2C}. \quad (41.2)$$

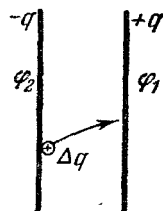


Рис. 111.

Подставляя сюда  $q = Cu$ , получим еще одно важное выражение:

$$W_E = \frac{Cu^2}{2}. \quad (41.3)$$

Рассмотрим сначала случай, когда  $\epsilon = 1$ , т. е. конденсатор, между пластинами которого пустота. Подставляя в (41.3) емкость плоского конденсатора  $C = \frac{S}{4\pi d}$  и выражая разность потенциалов  $u$  через напряженность поля,  $u = Ed$ , получим

$$W_E = \frac{E^2}{8\pi} V \quad (\text{СГС}),$$

$$W_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} V \quad (\text{СИ}). \quad (41.4)$$

Здесь энергия конденсатора выглядит как энергия электрического поля  $E$ , заполняющего объем конденсатора  $V$ . В противоположность этому формулы (41.2) и (41.3), в которые входят заряды или потенциалы

пластин, как будто говорят о том, что энергия конденсатора сосредоточена на его заряженных пластинах.

Поскольку каждая из формул для энергии электрического поля в электростатике совершенно эквивалентна двум другим, может показаться, что вопрос о *локализации* (т. е. размещении в пространстве) энергии электрического поля не имеет смысла. В действительности же этот вопрос имеет глубокий смысл, и ответ на него вытекает из существования электромагнитных волн, распространяющихся в пространстве от передатчика к приемнику и переносящих энергию. Возможность такого переноса свидетельствует о том, что энергия локализована в поле и переносится вместе с ним.

В плоском конденсаторе и вообще в однородном поле плотность энергии  $\omega_E$ , т. е. энергия, содержащаяся в единице объема, постоянна и равна полной энергии (41.4), деленной на объем:

$$\begin{aligned}\omega_E &= \frac{E^2}{8\pi} & (\text{СГС}), \\ \omega_E &= \frac{\epsilon_0 E^2}{2} & (\text{СИ}).\end{aligned}\tag{41.5}$$

Можно показать, что эта формула для плотности электрической энергии справедлива всегда, в том числе и для переменного электромагнитного поля.

Возвратимся теперь к случаю, когда  $\epsilon \neq 1$ , т. е. к случаю конденсатора, заполненного диэлектриком. Из формулы (41.2), подставляя  $C = \frac{\epsilon S}{4\pi d}$ , получаем вместо (41.5):

$$\begin{aligned}\omega_E &= \frac{\epsilon E^2}{8\pi} = \frac{DE}{8\pi} & (\text{СГС}), \\ \omega_E &= \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{DE}{2} & (\text{СИ}).\end{aligned}\tag{41.6}$$

Поскольку это выражение мы получили, вычисляя работу, необходимую для зарядки конденсатора, ясно, что сюда, помимо энергии электрического поля, вошла и энергия диэлектрика, которую он приобрел под действием этого поля. Например, если диэлектрик содержит упругие диполи (§ 2), в (41.6) вошла и энергия упругого состояния диполей, возникшего под действием поля в диэлектрике. Иногда (41.6) называют полной энергией

поля. Формула же (41.5), относящаяся к пустоте, определяет плотность энергии собственно только поля.

**Энергия взаимодействия — часть энергии поля.** Теперь мы можем вернуться к вопросу об энергии взаимодействия. Два электрических заряда создают поле, представляющее собой геометрическую сумму полей отдельных зарядов,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ . Плотность энергии этого поля будет равна (в пустоте)

$$w_E = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 = \frac{E_1^2}{8\pi} + \frac{E_2^2}{8\pi} + \frac{\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2}{4\pi}. \quad (41.7)$$

Полная энергия получится суммированием (интегрированием) этого выражения по всему пространству. Величина  $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2$  означает скалярное произведение векторов  $\mathbf{E}_1$  и  $\mathbf{E}_2$  (см. § 13), т. е. произведение модулей этих векторов на косинус угла между ними:  $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = E_1 \cdot E_2 \cos \alpha$ .

Три члена в правой части равенства (41.7) имеют простой физический смысл.  $E_1^2/8\pi$  — это энергия поля, создаваемого первым зарядом,  $E_2^2/8\pi$  — вторым, а  $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2/4\pi$  — энергия взаимодействия (все — в единице объема). После интегрирования по всему объему последний член даст известное нам выражение для энергии взаимодействия  $\frac{q_1 q_2}{r}$  (41.1). Что же касается первых двух, то они дают бесконечно большие величины, если заряды, создающие поле, точечные. Действительно,

$$E_1 = \frac{q_1}{r^2}, \text{ т. е. } \frac{E_1^2}{8\pi} = \frac{q_1^2}{8\pi r^4}.$$

Вблизи заряда  $q_1$ , т. е. при  $r \rightarrow 0$ , это выражение неограниченно и очень быстро растет, так что полная собственная энергия *точечного* заряда оказывается бесконечной. Разумеется, это означает лишь, что точечный, в буквальном смысле слова, заряд, т. е. заряд, не имеющий размеров, является абстракцией\*) (см. определение точечного заряда в § 3).

Если заряды распределены на телах конечных размеров, никаких бесконечностей (или, как говорят

\*) Что касается элементарных частиц (например, электрона), то до построения теории элементарных частиц вопрос о точечности или неточечности их вряд ли имеет смысл.

в физике, расходимостей) не получается. Например, энергия поля, создаваемого заряженным шариком радиуса  $a$ , равна

$$W = \frac{q^2}{2a}, \quad (41.8)$$

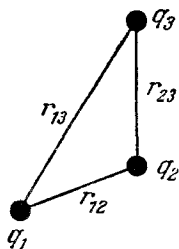
что следует из (41.2). В классической (доквантовой) электронной теории считалось допустимым представление об электроны как о заряженном шарике с энергией  $e^2/2a$ . Отсюда с помощью весьма общих следствий теории относительности можно сделать любопытные заключения о величине  $a$  (см. § 45).

## § 42. Энергия взаимодействия зарядов и энергия зарядов во внешнем поле

Полученную в начале предыдущего параграфа формулу энергии взаимодействия двух зарядов можно распространить на любое их число. Если имеем три заряда, то полная энергия их взаимодействия равна

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23} = \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}},$$

где  $r_{12}$  — расстояние между первым и вторым зарядами, и т. д. (рис. 112). Более удобной формой записи этой же энергии взаимодействия является следующая:



$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \left[ 2 \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + 2 \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + 2 \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ q_1 \left( \frac{q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{13}} \right) + q_2 \left( \frac{q_1}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{23}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + q_3 \left( \frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right) \right] = \frac{1}{2} (q_1 \Phi_1 + q_2 \Phi_2 + q_3 \Phi_3). \end{aligned}$$

Здесь

$$\Phi_1 = \frac{q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{13}}$$

Рис. 112.

— потенциал поля, создаваемого всеми зарядами, кроме первого, в точке, где находится первый заряд, и т. д. Для произвольного числа  $N$  зарядов энергия взаимодействия будет равна

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \Phi_i \quad (\text{СГС и СИ}); \quad (42.1)$$



$\varphi_i$  — потенциал поля, создаваемого всеми зарядами, кроме  $q_i$ , в точке, где находится заряд  $q_i$ .

**Энергия взаимодействия заряженных проводников.** Формулу (42.1), выведенную для точечных зарядов, можно распространить на систему заряженных проводящих тел, имеющих конечные размеры (а не точечных) (рис. 113). В электростатическом поле потенциал во всех точках данного проводника один и тот же. Если мысленно разбить заряд первого проводника на точечные заряды  $\Delta q_i$  (см. рисунок) и суммировать в формуле (42.1) сначала только по точечным зарядам, находящимся на данном проводнике, то получится  $\sum_i \varphi \Delta q_i = \varphi q_1$ , поскольку потенциал во всех точках поверхности данного проводника

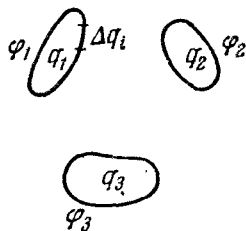


Рис. 113.

один и тот же и его можно вынести за знак суммы. Итак, под  $q_i$  в (42.1) можно понимать не только точечные заряды, но и заряды взаимодействующих проводящих тел.

Однако смысл выражения  $\frac{1}{2} \sum q_i \varphi_i$  для точечных зарядов и для проводников различен. Для точечных зарядов  $\varphi_i$  — потенциал поля *всех остальных* зарядов в точке, где находится  $q_i$ , в то время как для проводников  $\varphi_i$  — потенциал поля, создаваемого всеми зарядами, в том числе и зарядами данного проводника. Поэтому для проводников

$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i$$

представляет собой не энергию взаимодействия, а *полную* энергию системы.

**Потенциальная энергия взаимодействия.** Когда речь идет о *взаимодействии*, нельзя приписывать определенную потенциальную энергию каждому заряду в отдельности. В самом деле, энергия взаимодействия зависит не только от положения данного заряда, но и от положения всех остальных. Можно говорить лишь об общей потенциальной энергии взаимодействия всех зарядов системы.

Потенциальная энергия взаимодействия заряженных тел убывает с расстоянием очень медленно, как  $\frac{1}{r}$ .

Поэтому, вообще говоря, нельзя пренебречь взаимодействием данного заряда с зарядами, расположенными от него далеко. Но кроме кулоновского бывает и другое взаимодействие. Например, две молекулы при удалении их на достаточно большое\*) расстояние взаимодействуют с силой  $\sim \frac{1}{r^7}$ , а их потенциальная энергия  $\sim \frac{1}{r^6}$ .

Из-за такого быстрого убывания с расстоянием можно приближенно считать, что каждая молекула обычной жидкости (состоящей из молекул, а не, например, из ионов) взаимодействует лишь с ближайшими соседями. Такие же соображения относятся и ко многим кристаллам, например к молекулярным (в узлах решетки которых находятся молекулы), но, например, совсем не годятся для ионных кристаллов (подобных NaCl).

**Энергия зарядов во внешнем поле.** Если электрические заряды находятся во внешнем потенциальном поле, то каждый заряд будет обладать потенциальной энергией. Сумма этих потенциальных энергий, совместно с энергией взаимодействия, будет представлять собой полную потенциальную энергию системы. Энергия каждого заряда во внешнем поле равна  $U = q\varphi$ , где  $\varphi$  — потенциал внешнего поля, так что для всех зарядов

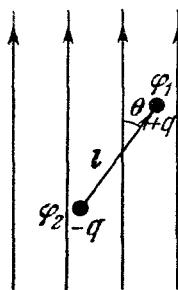


Рис. 114.

$$U = \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i \quad (\text{СГС и СИ}), \quad (42.2)$$

где  $\varphi_i$  — потенциал внешнего поля в точке, где находится заряд  $q_i$ .

В качестве примера применения этой формулы рассмотрим потенциальную энергию диполя в однородном внешнем поле (рис. 114). Энергия диполя равна  $U = q\varphi_1 + (-q)\varphi_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q\Delta\varphi$ . Здесь  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — потенциалы в точках, где находятся заряды  $+q$  и  $-q$  соответственно.

Пользуясь соотношением между потенциалом и напряженностью (§ 27)  $\Delta\varphi = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{l}$  и определением момента диполя  $\mathbf{p} = ql$  (§ 24), получим

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} \quad (\text{СГС и СИ}) \quad (42.3)$$

\*) На самом деле на расстояние, немного превышающее их диаметр.

или, иначе,  $U = -pE \cos \theta$ . Энергия принимает наибольшее значение, когда угол  $\theta$  между моментом  $p$  и полем  $E$  равен  $\pi$ , т. е. когда диполь направлен «против поля». Тогда  $\cos \theta = -1$  и энергия равна  $U = pE$ . Наименьшее значение энергия имеет, когда диполь ориентирован по полю ( $\theta = 0$ ), тогда  $U = -pE$ . Существование потенциальной энергии, зависящей от угла между  $p$  и  $E$ , приводит к появлению вращающего момента, стремящегося ориентировать диполь по полю (как мы уже говорили на стр. 134, силы всегда направлены в сторону уменьшения потенциальной энергии). Ориентированный по полю диполь будет иметь наименьшую потенциальную энергию.

### § 43. Пондеромоторные силы в электрическом поле

Под термином «пондеромоторные силы» понимаются силы, действующие на проводящие и диэлектрические тела в электрическом поле.

Примером пондеромоторной силы является кулоновская сила взаимодействия двух точечных зарядов. Можно, однако, найти силы, действующие на проводники произвольных размеров и формы. Для этого, как будет видно ниже, требуется знать полную энергию системы.

Если проводники не подключены ни к каким источникам эдс, то при перемещении проводников их заряды остаются постоянными. В этом случае работа  $\Delta A$  действующих между ними пондеромоторных сил выполняется за счет уменьшения полной энергии электрического поля  $\Delta W_E$  (§ 41). Таким образом,

$$\Delta \bar{A} = -(\Delta W_E)_q \quad (\text{СГС и СИ}), \quad (43.1)$$

где значок  $q$  означает, что заряды проводников остаются постоянными. Зная работу, нетрудно вычислить и действующие силы.

**Пондеромоторные силы в жидком диэлектрике.** Применим формулу (43.1) к определению силы, действующей между пластинами конденсатора, погруженного в жидкий или газообразный диэлектрик. Поскольку энергия конденсатора согласно формуле (41.2) равна  $W_E = \frac{q^2}{2C} = \frac{2\pi q^2 d}{S\epsilon}$  (СГС), то изменение энергии, обусловленное увеличением расстояния  $d$  между обкладками, будет рав-

но  $\Delta W_E = \frac{2\pi q^2}{S\epsilon} \Delta d$ . Работа  $\Delta A$ , которую можно записать как произведение пондеромоторной силы  $F$  на  $\Delta d$ , равна изменению энергии с обратным знаком. Знак минус означает, что сила направлена против перемещения, т. е. в сторону сближения пластин. Иначе говоря, это — сила притяжения, а не отталкивания. По абсолютной величине сила равна

$$F = \frac{2\pi q^2}{S\epsilon} \quad (\text{СГС}),$$

$$F = \frac{q^2}{2S\epsilon_0\epsilon} \quad (\text{СИ}). \quad (43.2)$$

Если подставить в (43.2) вместо одного из множителей  $q = \sigma S$ , то получим, что сила, действующая на пластину, равна

$$F = \frac{2\pi\sigma}{\epsilon} q = qE, \quad (43.3)$$

где  $E$  — напряженность поля, создаваемого *другой пластиной*.

Интересное и важное выражение получается для так называемой поверхностной плотности силы, т. е. для силы, действующей на единицу площади,  $f = F/S$ . Легко показать, что эта величина равна как раз объемной плотности энергии электрического поля. Действительно,

$$f = \frac{F}{S} = \frac{2\pi q^2}{\epsilon S^2} = \frac{2\pi\sigma^2}{\epsilon} = \frac{DE}{8\pi}.$$

Таким образом,

$$f = \omega_E. \quad (43.4)$$

Аналогичное соотношение имеет место для пондеромоторной силы в магнитном поле (§ 103).

**Пондеромоторные силы в конденсаторе, содержащем твердый диэлектрик.** Рассмотрим теперь силу, действующую на пластину конденсатора, содержащего не жидкий, а *твердый* диэлектрик, причем пластины отделены от диэлектрика зазорами (рис. 115). Емкость такого конденсатора (см. § 35) равна

$$C = \frac{S}{4\pi \left( d_1 + \frac{1}{\epsilon} d_2 + d_3 \right)}.$$

Отсюда энергия конденсатора

$$W = \frac{2\pi q^2}{S} \left( d_1 + \frac{1}{\epsilon} d_2 + d_3 \right).$$

Изменение энергии, обусловленное перемещением левой пластины, равно  $\Delta W = \frac{2\pi q^2}{S} \Delta d_1$ . Следовательно, сила, действующая на эту пластину, будет равна

$$F = \frac{2\pi q^2}{S} = qE \quad (\text{СГС}), \quad (43.5)$$

т. е. в  $\epsilon$  раз больше, чем в жидком диэлектрике (43.3), в соответствии с тем, что напряженность поля, создаваемого правой пластиной в воздухе, где находится левая пластина, равна  $E = 2\pi\sigma$  (а не  $2\pi\sigma/\epsilon$ ).

Возникает вопрос: отчего уменьшается сила, действующая на пластину в жидком диэлектрике? Ответ заключается в том, что пластина, давящая на жидкость, испытывает обратное гидростатическое давление втягиваемой в конденсатор диэлектрической жидкости. Это давление уменьшает электрическую силу в  $\epsilon$  раз.

Силу, действующую на прилегающую вплотную к твердому диэлектрику пластину, можно найти, только если учесть упругие напряжения, возникающие в диэлектрике вследствие его деформации.

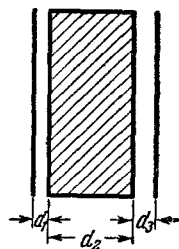


Рис. 115.

#### § 44. Неустойчивость электростатических систем

Для того чтобы две частицы могли быть в устойчивом равновесии, находясь на конечном расстоянии  $r_0$  друг от друга, требуется, чтобы они притягивались на расстояниях  $r$ , больших чем  $r_0$ , и отталкивались при  $r < r_0$ . В самом деле, если они не притягиваются при  $r > r_0$ , то сколь угодно малый толчок заставит их разойтись. Если частицы не отталкиваются при  $r < r_0$ , они будут сближаться вплоть до взаимного проникновения (невозможность взаимного проникновения — это тоже отталкивание). Следовательно, зависимость сил между такими частицами от расстояния должна быть примерно

такой, как на рис. 116. Здесь еще учтено, что силы притяжения на очень большом расстоянии должны убывать до нуля.

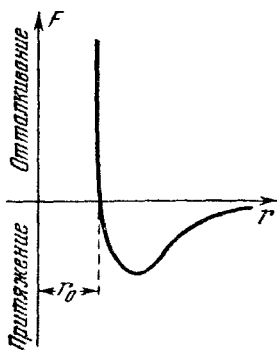


Рис. 116.

Именно такой характер носят силы взаимодействия между атомами, образующими устойчивую молекулу, и между молекулами, образующими кристалл.

Однако силы взаимодействия между двумя зарядами являются либо силами притяжения (если заряды имеют разный знак), либо силами отталкивания (если знаки зарядов одинаковы). В первом случае (рис. 117) заряды будут стремиться неограниченно сблизиться, во втором — неограниченно удалиться друг от друга

(рис. 118). Следовательно, статическая система из двух зарядов не может находиться в равновесии.

Из трех зарядов можно построить систему, находящуюся в неустойчивом равновесии. Если расположить заряды  $-4q$ ,  $q$ ,  $-4q$  в указанном порядке на равных

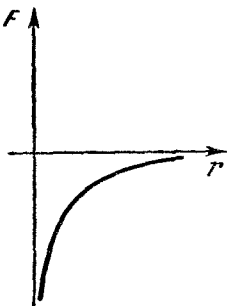


Рис. 117.

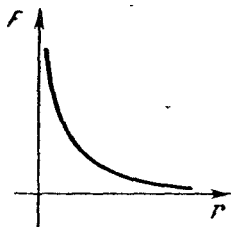


Рис. 118.

расстояниях друг от друга, они будут в равновесии, которое, однако, нарушится при сколь угодно малом смещении любого из трех зарядов.

Можно доказать общую теорему: из неподвижных электрических зарядов невозможно образовать устойчивую систему. Любой сдвиг одного из зарядов приведет

к нарушению равновесия — одноименные заряды начнут удаляться друг от друга, а разноименные — сближаться.

**Необходимость неэлектростатических сил для равновесия.** Чем же объяснить, что заряды на заряженном проводнике или поляризованном диэлектрике находятся в устойчивом равновесии? Их равновесие обусловлено существованием неэлектростатических сил. Существуют силы, препятствующие выходу электронов с поверхности металла, иначе заряд не удержался бы на его поверхности. Более того, одни электростатические силы не могут обеспечить и самого существования металла (и в равной мере любого другого тела, состоящего из атомов и молекул). Ведь в конечном счете вещество состоит из заряженных частиц.

Чтобы понять, в чем дело, начнем с простейшей системы, состоящей из заряженных частиц, — с атомов. Атом водорода состоит из протона и электрона, связанных силами притяжения. Они не падают друг на друга, т. е. не сближаются неограниченно, по той же причине, по которой Земля не сближается с Солнцем, а спутник — с Землей. Нельзя сказать, что спутник не падает на Землю, — напротив, он падает. Но, имея достаточно большую начальную скорость, направленную параллельно земной поверхности, он движется не по кривой, заканчивающейся на поверхности Земли, а по окружности. Другими словами, спутник падает на Землю, но не сближается с ней из-за того, что быстро движется. То же самое имеет место в классической модели атома (насколько справедлива сама модель, см. §§ 46, 47).

Состояние электрона в атоме устойчиво вследствие того, что электрон движется. Примерно по той же причине в устойчивом «равновесии» (обусловленном движением) находятся заряды на проводнике или диэлектрике. Следует иметь в виду, что ситуация в атоме и тем более в твердом теле описывается этими словами очень грубо, поскольку правильное описание строения атома и связи между атомами полностью опирается на квантовые свойства микрочастиц.

Сил отталкивания между ядром и электроном нет, и их заменяет движение. Из механики известно, что в инерциальной системе, связанной с вращающимся телом, на последнее действуют две уравновешивающиеся силы: сила притяжения к центру (центростремительная).

и центробежная. Вследствие этого расстояние между вращающимся телом и центром вращения не меняется. Что касается атомов, образующих молекулу, то для равновесия они не должны обязательно двигаться. Между ними действуют настоящие силы притяжения и отталкивания. Эти силы имеют частично обычный электростатический, частично квантовомеханический характер, связанный с тем, что атомы быстро и интенсивно обмениваются электронами (возникающие из-за этого силы называются обменными и составляют основу химической связи). Таким образом, хотя атомы в целом и не движутся, их равновесие обусловлено все же движением электронов.

### § 45. Классический радиус электрона

В теории относительности доказывается, что существует пропорциональность между массой  $m$  любого тела и его энергией  $E$  — суммой всех видов энергии, которые оно имеет:

$$E = mc^2. \quad (45.1)$$

Здесь  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/сек — скорость света в пустоте.

Если увеличить энергию тела, например нагреть его или сообщить ему кинетическую энергию, то масса тела увеличится на

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}, \quad (45.2)$$

где  $\Delta E$  — увеличение его энергии.

Масса электрона, так же как и любой другой частицы, связана с его энергией. С какими именно ее видами? Ответить на этот вопрос — значит указать, в каких взаимодействиях участвует электрон. Электрон создает электрическое (движущийся электрон — электромагнитное) поле, с помощью которого он взаимодействует с другими заряженными частицами. Это электрическое поле обладает энергией и массой. Если частица участвует в неэлектромагнитных взаимодействиях, то она должна создавать соответствующие поля, также обладающие энергией. Например, протон создает кроме электрического поля еще и  $\pi$ -мезонное, осуществляющее взаимодействие с нуклонами (нейтронами и протонами;



с последними имеется еще и электромагнитное взаимодействие). Электрон участвует в так называемом слабом взаимодействии. По мере развития теории элементарных частиц количество известных взаимодействий, в которых они участвуют, возрастает.

Однако можно предположить, что энергия электрического поля электрона составляет существенную часть его полной энергии. Тогда связанная с этой энергией масса составляет также существенную долю всей массы. Такое предположение, хотя и не может быть доказано вследствие отсутствия последовательной теории элементарных частиц, является правдоподобным.

Вместе с тем *вся* масса электрона не может иметь электростатического происхождения. В предыдущем параграфе мы говорили о том, что чисто электростатическая система неустойчива. Заряженный твердый шарик, элементы поверхности которого взаимно отталкиваются, не разлетается только вследствие существования сил упругости, т. е. поля сил механических напряжений. Итак, только по порядку величины можно приравнять электростатическую энергию  $e^2/2a$  величине  $mc^2$ . Отсюда получаем так называемый *классический радиус электрона*:

$$a \sim \frac{e^2}{mc^2}. \quad (45.3)$$

Заряд электрона  $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$  СГС<sub>q</sub>, его масса  $m = 9 \cdot 10^{-28}$  г,  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/сек, откуда

$$a \sim 10^{-13} \text{ см.}$$

Таков классический радиус электрона. Классический радиус протона в 1836 раз меньше. Из формулы (45.3) видно, что чем тяжелее частица, тем меньше ее классический радиус.

Имеет ли какой-либо смысл такая величина, как классический радиус частицы? Даже движение частицы как целого описывается не классической физикой, а квантовой механикой. Тем более это должно относиться к такому тонкому вопросу, как внутреннее строение частицы. Тем не менее классический радиус сохраняет смысл вследствие того, что его выражение построено из мировых констант.

В природе есть небольшое число универсальных, так называемых мировых, констант. Среди них: элементарный

заряд  $e$ , скорость света  $c$ , постоянная Планка  $h$ , масса электрона  $m$ . Как видно из формулы (45.3), из  $e$ ,  $m$ ,  $c$  можно сконструировать величину с размерностью длины. Поскольку в любую теорию константы  $e$ ,  $m$ ,  $c$  все равно будут входить, несомненно, что величина  $e^2/mc^2$  имеет физический смысл линейных размеров, характеризующих электрическую сторону природы электрона. Хотя электрон уже никто не сравнивает с заряженным шариком, классический радиус его не становится бессмысленной величиной.

Этот пример иллюстрирует часто встречающуюся в физике ситуацию. Если первоначальная, более грубая теория ввела в рассмотрение некоторые характеризующие явления константы, то их комбинации, имеющие размерность длины, времени и т. д., не потеряют физического смысла и в новой теории, хотя смысл этот может стать другим. Разумеется, если в новой теории появляются новые константы, то могут появиться и новые величины с размерностями длины, времени и т. д.

Так, в квантовой теории появилась новая константа  $h$  ( $h = 6,62 \cdot 10^{-27}$  эрг·сек). Из констант  $h$ ,  $m$ ,  $c$ , так же как из  $e$ ,  $m$ ,  $c$ , можно сконструировать величину с размерностью длины. Эта величина  $\lambda_k = \frac{h}{mc}$ , для электрона равная  $3,8 \cdot 10^{-11}$  см, а для протона  $0,2 \cdot 10^{-13}$  см, называется комптоновской длиной волны. Мы не можем здесь обсудить вопрос о том, какие свойства частиц она характеризует, и отсылаем читателя к книге К. И. Щелкина «Физика микромира».

## § 46. Образование атома

Соотношение Эйнштейна  $E = mc^2$  относится в равной мере и к системе тел, например к двум взаимодействующим зарядам. В этом случае в энергию  $E$  надо включить полную энергию совместно создаваемого зарядов поля. Последняя состоит из двух «собственных энергий» и энергии взаимодействия. Энергия взаимодействия  $q_1 q_2 / r$  для разноименных зарядов отрицательна. Это, конечно, не означает отрицательности какой-либо массы, а только то, что общая масса зарядов (при заданной их кинетической энергии) будет меньше, если заряды будут ближе друг к другу.

Рассмотрим, как происходит уменьшение массы при сближении притягивающихся зарядов, на примере образования атома водорода. Пусть составные части атома водорода — протон и электрон — находятся сначала на большом расстоянии друг от друга. Поскольку протон в 1836 раз тяжелее электрона, его можно в дальнейших рассуждениях считать покоящимся. Электрон, предварительно также покоявшийся, притягиваясь к протону, начинает двигаться ускоренно. Кинетическая энергия его будет возрастать за счет уменьшения потенциальной энергии от нуля до отрицательной величины  $U = -e^2/r$  (см. (41.1)). Если не произойдет потери энергии (а вместе с ней и массы), то электрон будет разгоняться и, проскочив мимо протона, удалится опять в бесконечность. При этом в течение всего движения полная энергия (включая кинетическую), а следовательно, и общая масса меняться не будут. Однако возможен и другой исход. Электрон может потерять часть кинетической энергии, испустив квант электромагнитного излучения — фотон. После этого он не может уже удалиться на бесконечность, а начнет вращаться вокруг протона по одной из возможных в получившемся атоме водорода орбит. Фотон унесет с собой энергию  $h\nu$  ( $h$  — постоянная Планка,  $\nu$  — частота излучения), а следовательно и массу

$$m_{\phi} = \frac{h\nu}{c^2}. \quad (46.1)$$

Получившийся атом водорода будет иметь меньшую массу, чем первоначально существовавшие протон и электрон. Если мы хотим снова отделить протон от электрона (ионизировать атом), нужно сообщить атому энергию, равную выделившейся, и тем самым увеличить и массу системы.

С точки зрения классической (доквантовой) электродинамики (§ 108) всякий ускоряющийся электрический заряд излучает электромагнитные волны. Это же происходит и с электроном, приближающимся к протону. Правда, излучение, согласно законам электродинамики, не может закончиться и тогда, когда электрон уже начал вращаться вокруг протона. Вращение — движение ускоренное (есть центростремительное ускорение), и электрон, непрерывно излучая, в конце концов должен свалиться на протон.

Нельзя сказать, чтобы эти представления классической электродинамики не имели никакой аналогии в современной квантовой теории. В атоме водорода имеется бесконечное множество дозволённых орбит электрона (см. § 48). Если электрон первоначально испустит лишь небольшой квант и потеряет малое количество энергии, он попадет на далекую от ядра орбиту. С этой орбиты он может перескочить на следующую, более близкую к ядру, снова испуская небольшой квант, и т. д. Правда, более вероятно, что свободный электрон, приближающийся к ядру, попадет сразу на одну из ближайших к ядру орбит.

В классической теории электрон в конце концов упадет на ядро, в квантовой же (и в действительности) он попадет в конце концов на ближайшую к ядру орбиту, где его энергия будет минимальна. На этой орбите (или, как говорят, в *основном состоянии*) электрон может находиться неограниченно долго, ничего не излучая. На более далеких от ядра орбитах (они называются *возбужденными состояниями*) электрон не может находиться постоянно: через время порядка  $10^{-8}$  сек он излучит квант или несколько квантов и перейдет в основное состояние. Такое время является, по атомным масштабам, большим: согласно классическим представлениям, за  $10^{-8}$  сек совершается около  $10^7$  оборотов.

## § 47. Волновые свойства микрочастиц

Существование стационарных орбит, в особенности основного состояния, противоречит законам классической физики, установленным для микрочастиц. Микрочастицы, особенно такие легкие, как электрон, ведут себя, в зависимости от условий, то почти так же, как «настоящие» частицы, то совсем иначе. Если при движении частицы ее импульс \*)  $p = mv$  не меняется или меняется медленно, то микрочастица ведет себя почти так же, как классическая частица. Но если импульс меняется быстро, как это имеет место, например, при движении электрона вокруг ядра по орбите малого радиуса (когда импульс быстро меняет свое направление),

---

\*) Называемый еще количеством движения. Не путать с так называемым импульсом силы  $F \Delta t$ !

то микрочастица ведет себя совершенно не так, как привычные нам макроскопические частицы, а скорее как волна. Говорят, что микрочастицы обладают волновыми свойствами. Эти волновые свойства выражены сильнее или слабее, в зависимости от быстроты изменения импульса. В атоме волновые свойства микрочастицы являются определяющими, вокруг ядра устанавливается стоячая электронная волна — стационарное состояние (т. е. состояние, не зависящее от времени), в котором нет никакого излучения. Излучение имеет место лишь при переходе из одного стационарного состояния (с большей энергией) в другое состояние (с меньшей энергией).

**Волна де-Бройля.** Какую же роль играет в волновых свойствах электрона его импульс  $p$ ? Идея о существовании у микрочастиц волновых свойств и о связи длины волны частицы с ее импульсом принадлежит французскому физiku Луи де-Бройлю. Не имея возможности приводить здесь всю аргументацию де-Бройля (ее можно найти в курсах атомной физики), обратим внимание лишь на то, что связь между длиной волны и импульсом другой элементарной частицы — кванта света (фотона) — хорошо известна. Масса фотона вычисляется из соотношения Эйнштейна:  $m = h\nu/c^2$ , импульс его равен  $p = mc = h\nu/c = h/\lambda$ , откуда для фотона получаем

$$\lambda = \frac{h}{p}. \quad (47.1)$$

Де-Бройль предположил, что эта формула универсальна и относится к любой частице — к электрону, протону, нейтрону, атомному ядру, к целым атомам и молекулам и т. д.

Для частиц, движущихся со скоростью  $v$ , отличной от скорости света  $c$ , импульс  $p = mv$ , так что

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}. \quad (47.2)$$

Универсальность этой формулы, т. е. пригодность ее для любых частиц, как простых, так и сложных, показывает, что она не связана с внутренней структурой частицы, а описывает лишь ее движение как целого.

**Дифракция волн.** То, что микрочастицы обладают волновой природой, не означает, что они никогда не

двигаются подобно макрочастицам. Ведь и волны иногда движутся так, как обыкновенные частицы. Например, если свет проходит через щель, ширина которой очень велика по сравнению с длиной волны, его поведение весьма подобно поведению потока обычных классических частиц (корпускул). Из светового потока и из потока корпускул в равной мере вырезается щелью некоторая часть, остальное же поглощается непрозрачными краями (рис. 119, а). Если уменьшать ширину щели  $\Delta x$ , то поток проходящих корпускул становится только уже, в то время как поведение волн будет все больше отличаться от прежнего. Отличие будет заключаться в том,

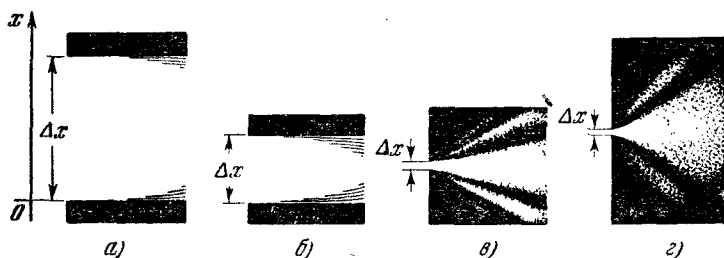


Рис. 119.

что волны начнут распространяться не только в первоначальном направлении, т. е. перпендикулярно к плоскости щели, но и в других направлениях (рис. 119, в). Такая картина возникает тогда, когда ширина щели  $\Delta x$  в несколько раз больше длины волны  $\lambda$ . Когда же  $\Delta x$  становится меньше, чем  $\lambda$ , из щели распространяется почти сферическая волна (рис. 119, г). В случаях в, г волны огибают края щели — это явление называется *дифракцией* волн.

**Соотношение неопределенностей.** Можно ли предсказать, когда волны (и, следовательно, микрочастицы) будут вести себя подобно макрочастицам и когда их поведение будет качественно другим? Оказывается, это возможно. Микрочастицы будут двигаться в данном направлении подобно обычным, большим частицам, если их движение в этом направлении не определяется большими действующими силами или не стеснено узкими рамками. На рис. 119 движение в направлении, перпендикулярном к щели, не стеснено ничем, в то время как

в направлении самой щели ограничено ее размерами. Чем уже щель, тем сильнее это ограничение, и, как бы протестуя против этого, микрочастицы огибают края щели, приобретая разнообразные импульсы в направлении  $Ox$ . До щели импульс частиц в направлении  $Ox$  равнялся нулю, т. е. был строго определенным. После щели импульс в направлении  $Ox$  уже не является столь определенным. Отдельные части волны могут распространяться в разные стороны, соответственно этому отдельные микрочастицы могут иметь разные импульсы  $p_x$ .

Обозначим неопределенность (максимальный разброс) в импульсе вдоль оси  $Ox$  через  $\Delta p_x$ , а импульс до прохождения через щель  $p$ . Отношение разброса в импульсах к первоначальному импульсу  $\Delta p_x/p$  безразмерно. Чем больше отношение  $\lambda/\Delta x$ , т. е. чем больше отношение длины волны к ширине щели, тем больше возможное отклонение микрочастицы от первоначального направления, т. е. тем больше отношение  $\Delta p_x/p$ . Можно предположить, что эти две безразмерные величины должны быть одного порядка (никаких других величин с размерностью длины или с размерностью импульса в данной задаче нет):

$$\frac{\Delta p_x}{p} \sim \frac{\lambda}{\Delta x}. \quad (47.3)$$

Отсюда, принимая во внимание, что  $\lambda = h/p$ , получаем

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \sim h. \quad (47.4)$$

Это — знаменитое *соотношение неопределенностей*, принадлежащее одному из основателей квантовой механики В. Гайзенбергу. Его смысл — реакция частицы на локализацию, т. е. на ограничение ее пространственного движения. Чем меньше область  $\Delta x$ , в которой вынуждена двигаться частица, тем больше у нее неопределенности в импульсе  $\Delta p_x$ . Соотношение (47.4) относится не только к электрону, но и к любой частице, в том числе и к сложным частицам, например атомам.

Если  $\Delta x$  велико по сравнению с атомными размерами (т. е. с  $10^{-8} - 10^{-7}$  см), то ограничения на движение частицы, накладываемые соотношением неопределенностей (47.4), не являются существенными. Например, если мы рассматриваем след, который оставил быстрый электрон в камере Вильсона, то, поскольку ширина следа  $\Delta x$

велика, импульс можно считать точно заданным. Если, например,  $\Delta x \sim 0,01$  см, то  $\Delta p \sim 10^{-25}$  г·см/сек (см. (47.4)). Сам же импульс  $p$  при скорости  $v \sim 10^8$  см/сек порядка  $10^{-19}$  г·см/сек, т. е. относительная неопределенность в импульсе  $\Delta p/p \sim 10^{-6}$ . Таким образом, в этом случае можно считать, что электрон имеет определенный импульс и, с точностью до ширины следа  $\Delta x$ , определенную координату.

Совсем иначе обстоит дело в атоме. Размеры атома как раз и представляют собой ту область, в которой движется электрон. Следовательно, для электрона в атоме  $\Delta x \sim 10^{-8}$  см. Поэтому согласно (47.4)  $\Delta p \sim 10^{-19}$  г·см/сек. Сам же классически определенный импульс  $p = mv$  того же порядка величины, так как масса электрона  $m = 9 \cdot 10^{-28}$  г, а скорость его  $v \sim 10^8$  см/сек. Поскольку неопределенность в импульсе оказывается сравнимой с самим импульсом, то ни о каком подобии движению классической частицы здесь не может быть и речи. Электрон в атоме движется по совсем другим законам. В частности, он может длительно находиться в стационарном состоянии на избранных орбитах, не излучая при этом энергию (а в основном состоянии, т. е. на ближайшей к ядру орбите, — неограниченно долго).

**Смысл понятия «орбита».** Состояние электрона на одной из допустимых орбит можно представлять себе как установившуюся в пространстве вокруг ядра стоячую волну, но ни в коем случае не как движение классической частицы. Термин «орбита», таким образом, не надо понимать буквально, как определенную траекторию электрона в атоме, а просто как обозначение определенного *состояния* электрона.

## § 48. Атом водорода и многоэлектронные атомы

Согласно первоначальным идеям де-Бройля, избранными орбитами в атоме водорода являются те, на которых укладывается целое число длин волн электрона. Это дает некоторое представление о том, почему одни состояния электрона могут быть избранными, т. е. могут фактически осуществляться, в то время как другие состояния не являются возможными.

Чтобы полностью описать состояние электрона в атоме, надо, кроме орбитального его движения, задать



еще одну величину — направление его спина, точнее — проекцию спина на заданное направление в пространстве.

*Под определенным квантовым состоянием электрона в атоме понимается определенное орбитальное движение и определенная проекция спина.* Как уже говорилось в § 20, согласно принципу Паули в определенном таким образом квантовом состоянии может находиться только один электрон.

Та орбита, на которой, согласно представлениям де-Бройля, укладывается одна длина волны, называется *основным состоянием* электрона в атоме водорода. Остальные орбиты называются *возбужденными* состояниями. Атом называется невозбужденным, если электрон движется по основной орбите. Однако другие орбиты также являются дозволёнными. Поглощение кванта света, удар быстрого электрона или другое достаточно сильное воздействие может перевести электрон на одну из этих орбит.

Основываясь на этих полуклассических представлениях, нетрудно найти дозволённые энергетические уровни электрона в атоме водорода. Орбита с номером  $n$ , согласно вышесказанному, определяется тем, что ее длина  $2\pi r$  равна  $n\lambda$ . Поскольку  $\lambda = h/mv$ , мы получаем  $2\pi r m v = n h$  или

$$mvr = n\hbar \quad \left( \hbar = \frac{h}{2\pi} \right). \quad (48.1)$$

Соотношение (48.1), написанное Бором из других соображений (гипотезы де-Бройля тогда еще не существовало), представляет собой основу теории атома водорода, называемой *теорией Бора*. К соотношению (48.1) Бор добавляет обычное для механики вращательного движения уравнение:

$$\frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \text{или} \quad mv^2 r = e^2, \quad (48.2)$$

означающее, что кулоновская сила  $e^2/r^2$  обуславливает центростремительное ускорение  $v^2/r$ .

Из уравнения (48.1) и (48.2) легко получить выражение для радиусов разрешенных орбит:

$$r_n = \frac{\hbar^2}{me^2} n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (48.3)$$

(для этого надо возвести (48.1) в квадрат и разделить на (48.2), так чтобы сократился множитель  $v^2$ ).

Радиус основной орбиты ( $n=1$ )

$$r_1 = \frac{\hbar^2}{me^2} \approx 0,5 \cdot 10^{-8} \text{ см}$$

называется *боровским радиусом*. Радиус второй орбиты ( $n=2$ ) в четыре, третьей — в девять и т. д. раз больше боровского радиуса.

Энергия электрона  $E$  равна сумме кинетической  $mv^2/2$  и потенциальной  $-e^2/r$ . Сокращая в первом из выражений (48.2) на  $r$  в знаменателе, получим  $mv^2 = e^2/r$ , и поэтому

$$E = \frac{mv^2}{2} + \left(-\frac{e^2}{r}\right) = -\frac{e^2}{2r}.$$

После подстановки сюда дозволённых радиусов орбит (48.3) получим окончательно

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (48.4)$$

Таким образом, энергия электрона в основном состоянии атома водорода равна

$$E_1 = -\frac{me^4}{2\hbar^2} = -13,59 \text{ эв}. \quad (48.5)$$

Следовательно, для того чтобы оторвать от атома водорода электрон, находящийся в основном состоянии,

надо затратить 13,59 эв. Эта энергия является *энергией ионизации* атома водорода. Для других атомов, имеющих много электронов, энергией *однократной ионизации* называется энергия, необходимая для отрыва от атома внешнего электрона (входящего в число валентных). У разных атомов эта энергия составляет от нескольких электроновольт до 24,6 эв (гелий).

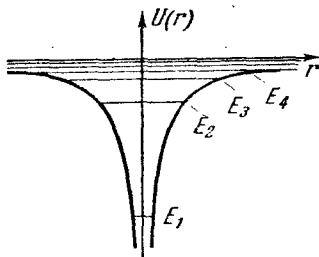


Рис. 120.

Несколько первых разрешённых уровней энергии электрона в атоме водорода представлены на рис. 120. Они изображены в потенциальной яме  $U = -\frac{e^2}{r}$ , в которой находится электрон. Как видно из рисунка,

основной уровень расположен значительно ниже всех остальных.

Разрешенных уровней бесконечное количество. В течение времени порядка  $10^{-8}$  сек электрон может находиться на любом из них. Энергия связи электрона с ядром при больших  $n$  ничтожно мала, а радиус орбиты очень велик. Практически любое соударение такого «разбухшего» возбужденного атома с другим атомом газа приведет к ионизации.

Электрон, заброшенный на возбужденные уровни (светом, ударом быстрого электрона или атома и т. д.), переходя на уровни с меньшей энергией, излучает кванты электромагнитной энергии (инфракрасного, видимого или ультрафиолетового диапазонов в зависимости от разности уровней исходного и конечного состояний).

**Многоэлектронные атомы.** Первоначальные представления де-Бройля о волновых свойствах частиц легли в основу квантовой механики — теории, последовательно и точно описывающей движение микрочастиц. Методами квантовой механики удалось решить задачу о поведении электронов в многоэлектронных атомах.

С достаточной степенью точности можно считать, что в атоме каждый электрон движется независимо от других в поле, образованном зарядом ядра и средним объемным зарядом всех остальных электронов. Состояние движения электрона в атоме описывается тремя целыми числами (они называются *квантовыми числами* и обозначаются  $n$ ,  $l$ ,  $m$ ), подобно тому как точный адрес можно было бы задать тремя числами: номером улицы, номером дома и номером квартиры.

Разумеется, квантовые числа имеют определенный физический смысл. Однако нас сейчас они интересуют лишь как *средство нумерации* электронных состояний.

Первое квантовое число  $n$  (главное квантовое число) — номер оболочки, второе —  $l$  (азимутальное квантовое число) можно назвать номером слоя в данной оболочке, третье —  $m$  (магнитное квантовое число) нумерует орбиты, находящиеся в данном слое. В оболочке с номером  $n$  имеется  $n$  слоев ( $l$  меняется от 0 до  $n - 1$ ). В слое с номером  $l$  имеется  $2l + 1$  орбит \*). На каждой

---

\*) По поводу смысла понятия «орбита» см. конец предыдущего параграфа.

орбите, согласно принципу Паули, может находиться максимум два электрона. Легко подсчитать, что в оболочке с номером  $n$  может содержаться

$$2 \cdot \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = 2n^2 \text{ электронов.}$$

Например, первая оболочка ( $n=1$ ) имеет один слой, в нем имеется всего одна орбита, т. е. два электрона. Заполненной оболочкой такой структуры обладает атом гелия. Следующий за ним в таблице Менделеева атом лития имеет еще один электрон (валентный), который помещается в первом слое второй оболочки.

У атома неона (№ 10) имеются две заполненные оболочки, с  $n=1$  и  $n=2$ . Вторая оболочка имеет два слоя и содержит 8 электронов.

Атом меди (№ 29) имеет три заполненные оболочки ( $n=1, 2, 3$ , с числом электронов 2, 8, 18), и, кроме того, в первом слое четвертой оболочки имеется один электрон.

Электроны заполненных оболочек сильно связаны с атомом и обладают большой энергией ионизации (у гелия 24,6 эв, у неона 21,6 эв). Если атом содержит небольшое число электронов вне заполненных оболочек, то эти электроны связаны относительно слабо (энергия ионизации валентного электрона лития 5,4 эв, меди — 7,7 эв).

Энергия электронов возрастает с увеличением номера оболочки  $n$  и номера слоя  $l$ . При увеличении числа электронов в атоме заполняются те свободные состояния, которые соответствуют наименьшей энергии. В начале таблицы Менделеева заполнение идет «по порядку», т. е. вторая оболочка начинает заполняться после первой, третья — после второй. Дальше же такая простая закономерность нарушается. Например, оказывается, что первый слой четвертой оболочки соответствует меньшей энергии, чем третий слой третьей оболочки. У атома железа (№ 26) заполнены первые две оболочки (10 электронов), первые два слоя третьей оболочки (8 электронов), в третьем же слое заполнено 6 мест из 10 вакантных. Оставшиеся 2 электрона размещаются в первом слое четвертой оболочки. Такая электронная структура оказывается очень существенной для магнитных свойств железа (см. § 92),

## ГЛАВА V

### ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

#### § 49. Ток и плотность тока

Иногда складывается превратное представление, что в проводящей среде (например, в металлическом проводнике) электрическое поле всегда равно нулю. Но на самом деле, как видно из гл. IV, отсутствие поля в проводящей среде является лишь условием неподвижности зарядов, т. е. условием отсутствия тока. Поскольку проводящая среда содержит заряды, способные перемещаться, электрическое поле в ней обязательно вызывает ток.

В металле такими зарядами являются электроны проводимости, в электролитах — ионы обоих знаков, в газах — электроны и ионы, в полупроводниках (и некоторых металлах) — электроны и дырки\*).

В отсутствие электрического поля электроны в металле совершают хаотическое «тепловое»\*\*) движение. Если создать внутри металла поле, то электроны, не прекращая этого хаотического движения, будут медленно «сноситься» против вектора напряженности  $\mathbf{E}$  (поскольку заряд электронов отрицателен и сила, действующая на электрон, равна  $\mathbf{F} = -|e|\mathbf{E}$ ). Появляющееся частично упорядоченное движение представляет собой электрический ток. Об этом мы уже говорили в гл. I, стр. 11.

---

\*) «Дырка» на атоме полупроводника означает отсутствие в этом атоме полагающегося ему «штатного» электрона, а движение дырки есть коллективное, «эстафетное» перемещение электронов (см. § 72).

\*\*) Почему слово «тепловое» мы взяли в кавычки, выяснится в гл. VI.

**Величина тока.** Интенсивность и направление тока характеризуется двумя важными величинами: величиной тока (или просто током)  $I$  и плотностью тока  $j$ . Током через данную площадку (не обязательно через все поперечное сечение проводника!) называется заряд\*), проходящий через эту площадку за одну секунду:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \quad (49.1)$$

Если  $\Delta q$  измеряется в кулонах ( $\kappa$ ), а  $\Delta t$  — в секундах, ток будет измеряться в амперах ( $a$ ). При токе  $1 a$  за секунду через данную площадку проходит заряд  $1 \kappa^{**}$ ).

Единица тока в гауссовой системе во столько же раз меньше ампера, во сколько единица заряда СГС<sub>q</sub> меньше кулона (в  $3 \cdot 10^9$  раз).

Отличный от нуля ток может возникнуть, лишь если движение свободных зарядов хотя бы в слабой степени упорядочено. В противном случае числа зарядов, пересекающих за секунду любую поверхность слева направо и справа налево, будут в среднем одинаковыми, а ток — равным нулю. Именно так обстоит дело в отсутствие поля, когда свободные заряды совершают лишь хаотическое, тепловое движение.

Правда, и в этом случае в течение коротких промежутков времени числа заряженных частиц, пересекающих какую-либо поверхность в противоположных направлениях, именно из-за полной хаотичности их движения могут случайно оказаться неравными. Следовательно, в отсутствие электрического поля могут возникать хотя и очень слабые, но отличные от нуля токи. Такие токи, вызванные хаотичностью теплового движения,

\*) Точнее: физическая величина, численно равная заряду (по размерности ток и заряд, разумеется, не совпадают). Ради краткости мы используем сокращенные формулировки, подобные приведенной в тексте.

\*\*) Как мы отмечали на стр. 66, единица заряда в системе СИ — кулон, определяется как  $1 a \cdot 1 \text{ сек}$ . Ампер же определяется независимо от кулона, по силе взаимодействия двух токов. Именно, из формулы (87.1) следует, что  $1 a$  — это ток, который, протекая по двум прямым бесконечно длинным параллельным проводникам ничтожно малого сечения, находящимся в вакууме на расстоянии  $1 \text{ м}$ , вызывает силу  $2 \cdot 10^{-7} \text{ н}$  на метр длины каждого из проводников.

называются *флуктуационными*. Они очень малы по величине и беспорядочно меняют направление. Достаточно чувствительный гальванометр, замкнутый сам на себя или даже вообще не замкнутый, должен регистрировать флуктуационные токи (флуктуационное дрожание зеркала у зеркального гальванометра). Существование флуктуационных токов, таким образом, ставит предел чувствительности электроизмерительных приборов. Если измеряемый ток порядка флуктуационных, измерить его сколько-нибудь точно невозможно.

Отметим попутно, что флуктуируют все макроскопические величины — плотность, давление, температура и т. д. Например, плотность воздуха в малом объемчике, выделенном мысленно в комнате, беспорядочно колеблется вокруг своего среднего значения из-за того, что там случайно оказывается то большее, чем среднее, то меньшее число молекул.

**Плотность тока.** Введем теперь понятие плотности тока. Рассмотрим место сужения проводника (рис. 121). Заряд, проходящий за секунду через сечение  $S_1$ , равен заряду, проходящему за секунду через сечение  $S_2$ , иначе между этими двумя сечениями будет происходить накопление зарядов того или иного знака. При постоянном токе это невозможно, так как возрастание заряда со временем приведет к изменению со временем потен-

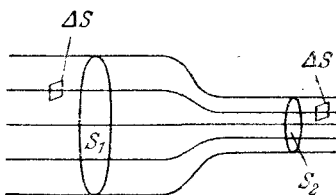


Рис. 121.

циала данного места проводника, а отсюда и тока. Следовательно, полный ток через оба сечения одинаков, но ток через единицу площади больше там, где сечение меньше. Говорят, что в узком сечении больше *плотность тока*. Плотностью тока  $j$  называется вектор, имеющий направление скорости упорядоченного движения положительных зарядов  $u$ , а по величине равный току через единичную площадку, перпендикулярную к  $u$ .

Если через площадку  $\Delta S$  проходит ток  $\Delta I$  (и площадка нормальна к  $u$ , т. е. к  $j$ ), то плотность тока, очевидно, равна

$$j = \frac{\Delta I}{\Delta S}. \quad (49.2)$$

На рис. 121 направление упорядоченного движения зарядов показано сплошными тонкими линиями; по касательным к ним направлена плотность тока  $\mathbf{j}$ . Линии эти называются *линиями тока* (или линиями вектора плотности тока). Условились считать, что число линий, проходящих через единичную площадку, к ним перпендикулярную, должно быть равно величине вектора  $\mathbf{j}$  в данной точке проводника.

Существенно отметить, что  $\mathbf{j}$ , так же как напряженность поля  $\mathbf{E}$ , индукция  $\mathbf{D}$  и другие векторы полей, является величиной локальной, т. е. имеет определенное значение и направление в каждой точке, в то время как ток  $I$  — величина интегральная, он определяется как заряд, проходящий за секунду через все сечение или через заданную площадку. Ток  $I$  не вектор, а скаляр, в то время как плотность тока — вектор.

### § 50. Скорость упорядоченного движения зарядов. Скорость распространения тока

Электроны проводимости в металле, ионы в электролите, ионы и электроны в газе, одним словом — все заряженные частицы, содержащиеся в различных телах, совершают хаотическое (тепловое) движение совершенно так же, как и незаряженные атомы и молекулы. Скорости этого теплового движения зависят от температуры и массы частиц. При температурах, близких к комнатной, тяжелые частицы (атомы, молекулы, ионы) имеют тепловую скорость порядка сотен метров или нескольких километров в секунду ( $10^1$  —  $10^5$  см/сек), легкие частицы — электроны и дырки — скорости порядка сотен и тысяч километров в секунду ( $10^7$  —  $10^8$  см/сек).

Электрическое поле  $\mathbf{E}$  в веществе сообщает всем свободным заряженным частицам дополнительную скорость упорядоченного движения, которое и обуславливает ток. Скорость упорядоченного движения  $\mathbf{u}$  в твердых и жидких проводящих телах обычно весьма мала по сравнению со скоростью теплового движения. Она составляет что-нибудь около  $10^{-1}$  —  $10^{-3}$  см/сек.

Таким образом, в цепи постоянного тока электроны движутся вдоль проводника довольно медленно. Если же ток переменный, то за первую половину периода электроны успевают сдвинуться лишь на сотые доли



миллиметра (при частоте 50 периодов в секунду), а за вторую — возвращаются обратно.

Однако эта скорость упорядоченного движения не имеет никакого отношения к скорости распространения тока вдоль проводника. Рассмотрим сначала разомкнутую цепь, содержащую источник тока, например гальванический элемент. Полюсы его имеют избыточные заряды — положительный и отрицательный. Если присоеди-

единить к ним проводники, оставив между ними разрыв  $AB$  (рис. 122), то в точках  $A$  и  $B$  возникают заряды соответствующих знаков, располагающиеся на поверхностях проводников. При замыкании происходит переход электронов из  $B$  в  $A$ . Этот сдвиг электронов вызывает переменные электрическое и магнитное поля, т. е. электромагнитную волну, распространяющуюся вдоль всей цепи. Электроны, до которых доходит электромагнитная волна, начинают двигаться (причем в первый момент — ускоренно), излучая вторичные электромагнитные волны, складывающиеся с подошедшей. Результирующая электромагнитная волна движется вдоль проводов со скоростью, равной скорости света в среде, окружающей провода. Скорость этой волны и является скоростью распространения тока вдоль проводника.

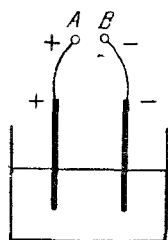


Рис. 122.

Когда на электростанции включается рубильник, ток в квартире появляется в момент прихода электромагнитной волны. Электроны, содержащиеся в проводах и рубильнике электростанции, если бы можно было их пометить, дошли бы до квартирной сети через весьма большое время (порядка года) после включения тока (если ток постоянный, а если переменный, то не дошли бы вообще никогда).

## § 51. Электрическое сопротивление

Под действием электрического поля электроны движутся вдоль проводника. На каждый электрон действует сила  $F = eE$ . Если бы электроны двигались в пустом пространстве, скорость их постоянно увеличивалась бы, соответственно увеличивался бы со временем и создаваемый

ими ток. В проводнике этого не происходит — постоянная разность потенциалов создает постоянный ток \*).

Причина этого состоит в том, что электроны в своем движении через кристаллическую решетку постоянно сталкиваются с ионами решетки, отдавая им накопленную в поле кинетическую энергию. В классической (доквантовой) электронной теории предполагалось, что электрон сталкивается со всеми ионами, случайно оказавшимися на его пути. В кристаллической решетке ионы расположены почти вплотную, поэтому длина свободного пробега  $l$  (среднее расстояние между двумя соударениями) должна была бы быть порядка постоянной решетки  $a$  ( $a \sim 10^{-8}$  см). Можно, однако, показать, что тогда сопротивление металла было бы в сотни и тысячи раз

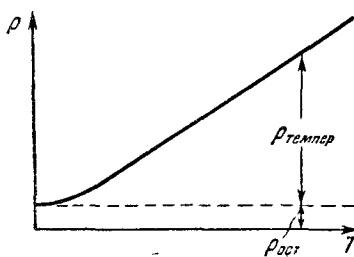


Рис. 123.

больше, чем в действительности. Такое грубое расхождение с экспериментом указывает, что указанное выше предположение классической электронной теории неверно.

На это же указывают и другие экспериментальные факты. Известно, что сопротивление металлов возрастает с температурой. На рис. 123 показана типичная зависимость удельного сопротивления \*\*\*)  $\rho$  несверхпроводящего металла от температуры. При  $T \rightarrow 0$  сопротивление достигает минимального, не зависящего от температуры значения, называемого *остаточным сопротивлением*. При повышении температуры сопротивление (примерно линейно) возрастает в сотни и тысячи раз. Все это невозможно объяснить, если считать, что длина свободного пробега электронов близка к постоянной

\*) Имеется в виду нормальный проводник. О сверхпроводниках см. § 53.

\*\*) Сопротивление цилиндрического проводника постоянному току равно  $R = \rho \frac{l}{S}$ , где  $l$  — длина,  $S$  — поперечное сечение и  $\rho$  — удельное сопротивление. Величина  $1/\rho = \sigma$  называется удельной проводимостью (в физике ее называют просто *проводимостью*). Эта же величина фигурирует в формуле (55.6).

решетки, так как постоянная решетки при повышении температуры меняется очень слабо (как мы увидим в гл. VI, число электронов проводимости в металлах также не меняется с температурой). Остаточное сопротивление  $\rho_{ост}$  (рис. 123) зависит от чистоты металла и способа его обработки. Чем больше в металле атомов примесей и различного рода атомных дефектов (искажений решетки атомных размеров, например ионов, вышедших из узлов решетки и находящихся в междоузлиях, или вакансий, оставшихся после выхода ионов из узлов), тем больше остаточное сопротивление, а следовательно и сопротивление при любой температуре.

Если вспомнить, что повышение температуры увеличивает интенсивность хаотического движения ионов и, таким образом, тоже нарушает правильность решетки, создается определенное впечатление, что сопротивление решетки тем выше, чем она «хуже», т. е. чем больше в ней искажений идеальной периодичности.

**Сопротивление сплавов.** Указанные выше соображения полностью подтверждаются экспериментальными данными, относящимися к сопротивлению сплавов (рис. 124). На оси абсцисс отложен процент содержания металла  $B$  — от нуля в начале координат (чистый

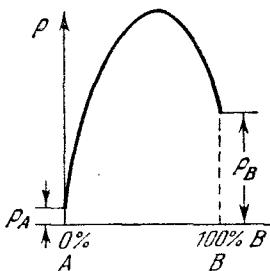


Рис. 124.

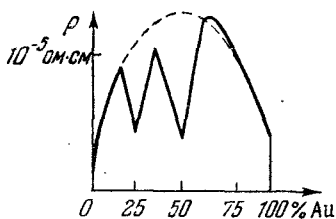


Рис. 125.

металл  $A$ ) до 100%. Металл  $A$  обладает меньшим удельным сопротивлением, чем металл  $B$ , однако если добавить небольшое его количество к металлу  $B$ , то сопротивление возрастает. Это объясняется тем, что решетка металла  $B$  при добавлении примеси  $A$  становится еще более испорченной.

Некоторые металлы образуют, при определенном соотношении компонент, упорядоченные сплавы (например

сплав, состоящий из 25% Au и 75% Cu или 50% Au и 50% Cu, см. рис. 125). Упорядоченный сплав имеет решетку, в которой атомы *A* и *B* или кристаллические плоскости, заполненные атомами *A* или *B*, правильно чередуются. Сопротивление упорядоченных сплавов, как видно из рис. 125, значительно меньше, чем сопротивление сплавов соседних концентраций. Пунктиром показано сопротивление неупорядоченного сплава.

Все приведенные экспериментальные данные совершенно необъяснимы с точки зрения классической электронной теории, незаконно переносящей свойства макроскопических частиц на электроны в металле.

Из § 47 нам уже известно, что электроны, так же как и другие микрочастицы, обладают волновыми свойствами. Электрон в кристалле должен рассматриваться как волна, и именно волновые свойства определяют его поведение. Дело в том, что в кристалле характерным размером является постоянная решетки *a* — величина порядка размера атома ( $\sim 10^{-8}$  см). Поэтому волновые свойства электронов в кристалле столь же существенны, как и в атоме.

**Как возникает электрическое сопротивление.** Квантовая механика выяснила, что если кристалл абсолютно лишен искажений и его решетка идеально периодична, т. е. все ионы неподвижны и находятся в узлах решетки, то электронная волна, формируясь в этой решетке, «приспосабливается» к ней и проходит через решетку, как бы «не замечая» ее. Электроны движутся через такую решетку почти так же, как через пустое пространство\*), не изменяя направления движения и ни с чем не сталкиваясь (или, как говорят, не рассеиваясь ни на чем).

Зато любые нарушения периодичности решетки — дефекты, примеси, тепловые колебания — являются причиной рассеяния электронных волн, т. е. изменения направления их движения. Это рассеяние уменьшает ток (уменьшая упорядоченность движения электронов), т. е. вызывает электрическое сопротивление. Повышение температуры, усиливающее тепловые колебания ионов

---

\*) Действие на электрон такой идеальной кристаллической решетки часто можно свести лишь к изменению инертности электрона по сравнению с его инертностью в пустом пространстве — к замене его массы *m* так называемой эффективной массой *m*\*. Последняя в разных кристаллах может быть как больше, так и меньше *m*.

решетки, должно увеличивать сопротивление, что и наблюдается в действительности.

Исходя из квантовых представлений о природе сопротивления, можно дать рекомендации металлургам по созданию металлических проводников с большим сопротивлением. В качестве таких проводников надо брать сплавы с возможно более испорченной решеткой. Одним из таких сплавов является, например, нихром, содержащий 67,5% никеля, 15% хрома, 16% железа, 1,5% марганца. Он имеет удельное сопротивление примерно в 65 раз большее, чем серебро.

Нетрудно понять также, почему столь малое сопротивление имеют упорядоченные сплавы (рис. 125). В таких сплавах атомы компонент чередуются периодически, и этого достаточно для резкого падения сопротивления.

Поскольку электрон рассеивается отнюдь не на каждом ионе, а только на «испорченных местах» решетки, длина его свободного пробега  $l$  гораздо больше, чем постоянная решетки. При комнатной температуре  $l \sim 10^{-5} - 10^{-6}$  см, и это дает правильную по порядку величины проводимость. Разумеется,  $l$  зависит от температуры, уменьшаясь с повышением ее (чем выше температура, тем больше рассеяние на колебаниях решетки). В области температур, далекой от абсолютного нуля, длина свободного пробега  $l$  обратно пропорциональна температуре:

$$l \sim \frac{1}{T}. \quad (51.1)$$

## § 52. Фононы

Рассмотрим несколько подробнее, как происходит рассеяние электрона на колебаниях кристаллической решетки.

При абсолютном нуле температуры ионы (в металле), атомы (в атомных кристаллах) и вообще частицы в узлах кристаллической решетки не совершают *теплого* движения. Тем не менее они не находятся в состоянии покоя. Это следует непосредственно из соотношения неопределенностей  $\Delta x \cdot \Delta p \sim \hbar$  (47.4). Если предположить, что частица неподвижна, то ее импульс  $p$  равен нулю, и никакой неопределенности в импульсе нет;  $\Delta p = 0$ . Но тогда неопределенность в координате  $\Delta x = \infty$ ,

т. е. частица не может быть локализована ни в какой точке пространства. Частица «размазана» равномерно по всему пространству. В действительности при  $T = 0$  частицы в узлах решетки совершают слабые, так называемые «нулевые» колебания. Эти колебания не входят в тепловое движение и не имеют отношения к температуре кристалла.

Таким образом, при  $T = 0$  *теплого* движения действительно нет. Начнем теперь постепенно повышать температуру кристалла. Для этого он должен получить энергию от какого-нибудь другого тела. Получение даже самого малого количества энергии означает возникновение дополнительного движения атомов сверх нулевых колебаний. Атомы связаны между собой большими силами взаимодействия, движение одного атома вызывает движение его ближайших соседей и т. д., т. е. упругую волну. Поэтому увеличение энергии кристалла означает появление в нем слабой упругой волны.

Если частота этой волны  $\nu$ , то ее энергия, как показывает квантовая механика, равна  $\varepsilon = h\nu$ . Такая волна несет с собой и импульс  $p$ . Можно доказать, что импульс волны связан с длиной волны тем же соотношением, которое имеет место для частиц, т. е. соотношением де-Бройля  $p = h/\lambda$  (§ 47). Поскольку волна, имеющая *определенную частоту*  $\nu$ , является волной гармонической, длина волны и частота связаны соотношением  $\nu\lambda = v$ , где  $v$  — скорость упругой волны (скорость звука в кристалле). Следовательно, между энергией и импульсом элементарной упругой волны в кристалле существует связь:

$$\varepsilon = h \frac{v}{\lambda} = vp. \quad (52.1)$$

Рассмотренная нами элементарная волна данной частоты обладает своеобразной «индивидуальностью». Она имеет совершенно определенную энергию и импульс и в этом отношении напоминает частицу.

Элементарные упругие волны, или, как говорят, *элементарные возбуждения* кристалла, носят название *фононов*. Фононы весьма похожи на «настоящие» частицы и отличаются от последних по существу лишь тем, что настоящие частицы могут существовать и в пустоте, в то время как фононы являются результатом коллективного движения настоящих частиц (атомов кристалла),

т. е. могут возникать лишь на материальном фоне. В отличие от настоящих частиц, такие частицы, как фононы, называют *квазичастицами* \*) (т. е. «почти частицами»). Семейство квазичастиц кроме фононов содержит множество других представителей, в их числе электроны проводимости (§ 62), дырки в полупроводниках и некоторых металлах (§ 72), спиновые волны (§ 92), плазмоны (§ 79) и др.

Квазичастицы, так же как и «настоящие» частицы, делятся на фермионы и бозоны (§ 20). Электроны проводимости и дырки — примеры фермионов; фононы, плазмоны, спиновые волны — бозе-частицы.

Отличаются фермионы от бозонов по спину (§ 20). Однако ферми-квазичастицы и бозе-квазичастицы удобнее отличать по другому признаку: по тому, как возникают новые квазичастицы — парами или поодиночке. Фононы и другие бозе-частицы могут возникать поодиночке. Электрон, возбужденный в состоянии с большей энергией, оставляет на своем месте дырку; таким образом появляется пара частиц — возбужденный электрон и дырка. Такое возникновение парами — отличительное свойство ферми-квазичастиц.

При низких температурах число фононов в кристалле мало \*\*) и они почти не взаимодействуют между собой. Это значит, что упругие волны малой интенсивности проходят «друг через друга», не рассеиваясь при этом. Отсутствие взаимодействия между фононами обеспечивает «сохранение индивидуальности» каждого.

Тепловое движение кристалла представляет собой весьма сложную картину, если следить за колебаниями отдельных частиц. Представление о фононах делает эту сложную картину простой. Кристалл можно (при низких температурах) рассматривать как сосуд, содержащий своеобразный газ — газ фононов. При этом роль элементарных колебательных систем (так называемых элементарных осцилляторов), из колебаний которых складывается общее движение, играют не отдельные атомы, а отдельные элементарные волны — фононы.

---

\*) Более подробно о квазичастицах см. в статье И. М. Лифшица «Квазичастицы в современной физике», журнал «Природа», № 5 за 1958 г.

\*\*) Число фононов в кристалле  $N_{\text{ф}}$  растет при повышении температуры пропорционально кубу температуры,  $N_{\text{ф}} \sim T^3$ .

Такое представление о тепловом движении позволяет рассматривать рассеяние электронов на колебаниях решетки как процесс взаимодействия частиц двух газов — электронного и фононного (столкновения электронов с фононами, порождение и поглощение фононов электронами).

Если электрическое поле отсутствует и кристалл находится в состоянии термодинамического равновесия\*), процессы порождения и поглощения фононов электронами взаимно компенсируются. Это значит, что электронный газ находится в термодинамическом равновесии с фононным. Если же в (проводящем) кристалле существует электрическое поле, разгоняющее электроны, т. е. сообщаемое им дополнительную энергию, процесс порождения фононов начинает преобладать, их число увеличивается, а это и означает повышение температуры проводника — нагревание, вызываемое электрическим током.

Рассеяние электронной волны на дефектах решетки и примесях также приводит к потере электронами энергии, накопленной в электрическом поле. Эта энергия превращается в энергию колебательного движения атома примеси или другого дефекта, а от него передается всей решетке, из-за чего, в конечном счете, число фононов тоже увеличивается.

### § 53. Сверхпроводимость

В 1911 г. Камерлинг-Оннес (Голландия) обнаружил замечательное явление, названное сверхпроводимостью. У некоторых металлов (свинца, ртути, олова, цинка и ряда других) при достижении достаточно низкой температуры, называемой *критической*, сопротивление резко падает до нуля и при дальнейшем понижении температуры остается равным нулю (рис. 126). Для свинца критическая температура  $T_K = 7,22^\circ\text{K}$ , для цинка  $0,79^\circ\text{K}$ , для ртути  $4,15^\circ\text{K}$  и т. д. Ток в сверхпроводящем кольце, вызванный изменением потока магнитной индукции, циркулирует в этом кольце до тех пор, пока оно поддерживается при температуре  $T < T_K$  (опыт показывает, что

\*) Состояние термодинамического равновесия — это состояние изолированной от других тел системы, в котором все физические величины, характеризующие ее, остаются со временем постоянными.



сверхпроводящий ток в такой системе может существовать годами). Сверхпроводимость можно разрушить не только нагреванием, но и достаточно сильным магнитным полем. Разрушающее поле может быть создано и самим сверхпроводящим током, если он достигнет достаточно большой величины. Иными словами, слишком сильный ток разрушает сверхпроводимость.

Механизм возникновения сверхпроводимости оставался неясным вплоть до 1957—58 гг., когда Бардиным, Купером и Шриффером в США и Н. Н. Боголюбовым в СССР была создана последовательная квантовомеханическая теория этого явления.

**Сверхтекучесть.** Еще в 1939 г. Л. Д. Ландау предположил, что сверхпроводимость родственна открытому в 1938 г.

П. Л. Каплицей явлению сверхтекучести жидкого гелия-II. Явление сверхтекучести заключается в том, что жидкий гелий при  $T < 2,18^\circ\text{K}$ , не обнаруживая никакой вязкости, проходит через тончайшие капилляры. Выяснилось, что сверхтекучую жидкость можно рассматривать как состоящую из двух компонент — сверхтекучей (которая и проходит через капилляры) и нормальной (которая не проходит). При  $T = 0$  вся жидкость является сверхтекучей.

Тепловое движение в жидком гелии, как и в кристалле, имеет характер фононов, причем сверхтекучая часть лишена фононов. Ее называют еще конденсатом. Несверхтекучая (нормальная) часть состоит из газа элементарных возбуждений (фононов). При движении нормальной части фононы обмениваются импульсом и энергией со стенкой капилляра, что вызывает торможение этой компоненты \*).

\*) Не следует считать, что одни атомы гелия входят в нормальную часть, а другие — в сверхтекучую. В действительности одни и те же атомы участвуют в двух движениях, одно из которых «нормально» и обладает вязкостью, а другое — сверхтекучее. Наглядную картину этих двух движений создать невозможно, как это часто бывает в квантовой механике, поскольку закономерности движения микрочастиц (в особенности связанных между собой, как, например, атомы жидкости) значительно отличаются от наглядных закономерностей движения макрочастиц.

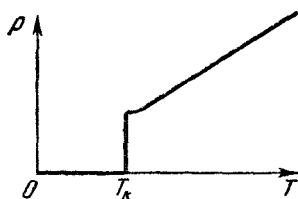


Рис. 126.

Представим себе жидкий гелий-II, текущий по капилляру при температуре  $T = 0$ . При этой температуре нормальной компоненты, т. е. фононов, в гелии нет, он целиком состоит из сверхтекучей части. Торможение текущего гелия означает изменение его состояния. Но состояние может измениться только одним способом: в гелии должен возникнуть фонон. Фонон обладает некоторой энергией  $\epsilon$ , однако оказывается, что полное изменение энергии жидкости\*) может быть как отрицательным (что и означает торможение), так и положительным. Ландау показал, что если скорость гелия меньше определенной величины, то полное изменение энергии жидкости, возникающее вследствие появления в ней фонона, положительно, что не соответствует торможению. Это значит, что в таких условиях фонон вообще не появится, и гелий будет течь без всякого трения о стенки. Торможение и появление фононов могут иметь место лишь в том случае, когда скорость жидкости будет больше указанной определенной величины.

**Механизм сверхпроводимости.** Движение электронов в сверхпроводнике во многом аналогично течению сверхтекучей жидкости. Прежде всего «электронная жидкость» также имеет свой конденсат (сверхтекучую часть). При  $T = 0$  все электроны входят в конденсат. Этот конденсат состоит не из отдельных электронов, а из электронных пар (так называемых куперовских пар). Выяснилось, что в пары объединяются электроны с противоположными импульсами и спинами. Для объединения между указанными электронами должно возникнуть притяжение. В то же время известно, что электроны отталкивают друг друга, будучи одноименно заряжены. Поэтому долгое время было непонятно, откуда могло бы взяться притяжение между электронами, и именно это служило препятствием к развитию теории сверхпроводимости.

Оказывается, за это притяжение ответственна кристаллическая решетка. Каждый из электронов пары своим полем немного деформирует решетку (притягивает к себе положительные ионы), и к этой области положительного заряда притягивается второй электрон.

---

\*) Оно не равно энергии фонона  $\epsilon$ . Жидкость имеет такую энергию в системе отсчета, движущейся вместе с ней, а в системе, связанной с капилляром, энергия жидкости будет отличаться от  $\epsilon$ .

При этом из-за инертности ионов, не успевающих разойтись, второй электрон может находиться на сравнительно большом расстоянии от первого. Это расстояние, называемое радиусом корреляции, имеет порядок  $10^{-5}$  см, т. е. во много раз больше постоянной решетки (последняя порядка  $10^{-8}$  см).

Электроны пары образуют связанное состояние. Это означает, что разрыв пары требует определенной (хотя и малой) затраты энергии, что весьма существенно для дальнейшего.

В отсутствие электрического поля оба электрона пары имеют, как уже говорилось, противоположные по направлению импульсы. Только такие электроны и связываются в пары. Центр тяжести пары, естественно, имеет скорость, равную нулю.

В электрическом поле центр тяжести пары движется в направлении силы поля. Оба партнера при этом находятся на большом расстоянии друг от друга. Поэтому, если один из электронов наталкивается на дефект решетки, второй находится еще далеко от дефекта.

На рис. 127 точка  $C$  между электронами означает их центр тяжести, движущийся со скоростью, равной средней арифметической  $(v_1 + v_2)/2$ . В системе отсчета, связанной с центром тяжести  $C$ , электроны имеют равные и противоположно направленные импульсы. Если бы электроны не составляли связанную пару, первый электрон рассеялся бы на дефекте.



Рис. 127.

Однако для спаренного электрона изменение направления движения означает, что он теряет партнера (так как спариваются только электроны с противоположными импульсами). Потеря партнера означает разрыв пары, на что требуется затрата энергии. При небольшой скорости упорядоченного движения электронов (т. е. небольшой плотности тока) энергии на это не хватает, и пара не разрывается. Это значит, что первый электрон «обтекает» дефект, не рассеявшись на нем. Устойчивость по отношению к рассеянию обусловлена, таким образом, взаимной «поддержкой» электронов пары.

Совокупность куперовских пар составляет сверхтекучую часть электронной жидкости. Кроме нее (при температуре, отличной от абсолютного нуля) имеются еще разорванные пары, т. е. индивидуальные электроны. Разрыв происходит не из-за рассеяния на дефектах, а из-за поглощения парами достаточно энергичных фононов, появляющихся при повышении температуры. Поэтому с повышением температуры увеличивается количество нормальных электронов, аналогичных нормальной части сверхтекучей жидкости. Эта часть электронной жидкости испытывает обычное сопротивление, поэтому сверхпроводящий ток переносится исключительно конденсатом, т. е. куперовскими парами. При критической температуре сверхтекучая часть исчезает совсем, и проводник становится нормальным.

#### § 54. Закон Ома. Электродвижущая сила

В нормальном, несверхпроводящем металлическом проводнике имеет место закон Ома. Для участка проводника, не содержащего источника электродвижущей силы (гальванического элемента, аккумулятора, динамомашин, термодпары, источника фотоэдс и т. д.), закон Ома заключается в том, что сила тока пропорциональна разности потенциалов\*) на концах участка. Коэффициент пропорциональности обозначается  $\frac{1}{R}$  и величину  $R$  называют *сопротивлением*. Поэтому закон Ома для участка цепи без эдс имеет вид

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{u}{R}, \quad (54.1)$$

где  $u = \varphi_1 - \varphi_2$ .

По сложившейся традиции направлением тока считается направление движения положительных зарядов, поэтому если потенциал начальной точки участка  $\varphi_1$  больше потенциала конечной точки  $\varphi_2$ , то ток течет от точки 1 к точке 2. В действительности в металлических проводниках ток переносят электроны, которые движутся от точки 2 к точке 1, если  $\varphi_1 > \varphi_2$ .

---

\*) В § 17 было доказано, что в цепи постоянного тока электрическое поле потенциально.

Закон Ома не является универсальной связью между током и напряжением. Для металлов (в несверхпроводящем состоянии) закон Ома имеет место вплоть до весьма больших плотностей тока. Для полупроводников и газов (см. гл. VI) пропорциональность между  $I$  и  $u$  наблюдается лишь при малых  $u$ . Термоэлектронный ток в вакууме не подчиняется закону Ома даже и при малых  $u$  — в этом случае сила тока пропорциональна  $u^{3/2}$ . В вольтовой дуге с увеличением тока напряжение падает (падающая вольтамперная характеристика), так что не может быть и речи о выполнении закона Ома.

Выражение (54.1), однако, записывают даже в случае, когда закон Ома не выполняется. Тогда оно служит определением сопротивления  $R = u/I$ . Если сопротивление не зависит от величины тока, закон Ома имеет место. Если сопротивление само меняется с изменением тока (как, например, сопротивление газа при газовом разряде), то никакой пропорциональности между  $u$  и  $I$  нет, а значит, нет и закона Ома.

**Электродвижущая сила.** Рассмотрим цепь, состоящую из источника тока и сопротивления (рис. 128), подключенного к полюсам источника, которые мы обозначили буквами  $A$  и  $K$  (анод и катод). Тогда в формуле (54.1)  $\varphi_1$  — это потенциал полюса  $A$ , а  $\varphi_2$  — потенциал  $K$ . Для того чтобы ток был постоянным, очевидно, необходимо, чтобы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  не менялись со временем (точнее, требуется, чтобы не менялась разность  $\varphi_1 - \varphi_2$ , но в данном случае оба требования эквивалентны). Для этого нужно, чтобы *заряды* полюсов  $A$  и  $K$  не менялись со временем, несмотря на то, что каждую секунду определенное число электронов уходит с полюса  $K$  и столько же приходит на полюс  $A$ . Очевидно, внутри источника должны действовать силы, которые бы за секунду переносили все пришедшие на полюс  $A$  электроны обратно на полюс  $K$ . Этим силам придется преодолевать притяжение электронов к  $A$  и отталкивание их от  $K$ , т. е. они должны действовать против сил потенциального электрического поля, создаваемого зарядами полюсов и других точек цепи, где такие заряды имеются.

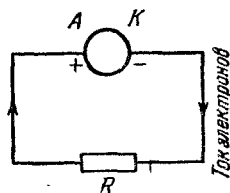


Рис. 128.

Отсюда ясно, что действие источника эдс может быть вызвано силами любого происхождения; но только не теми, которые создаются неподвижными электрическими зарядами, т. е. не силами потенциального электрического поля. Такие силы принято называть *сторонними*. Фактически это могут быть индукционные электрические силы, т. е. силы вихревого электрического поля, созданного переменным магнитным полем, «химические» силы в аккумуляторах и гальванических элементах и др.

**Простой пример сторонней эдс.** Мы рассмотрим сейчас простой, хотя и воображаемый, источник сторонних сил механического происхождения. Возьмем проводящее кольцо (рис. 129) с разрезом  $AK$ . Воображаемым «пинцетом» будем извлекать электроны из  $A$  и препровождать их через зазор  $AK$  в  $K$ . Тогда в  $K$  создастся избыточный отрицательный заряд, в  $A$  — избыточный положительный (избыток положительных ионов), и электроны под действием сил электрического поля устремятся по кольцу от  $K$  к  $A$ .

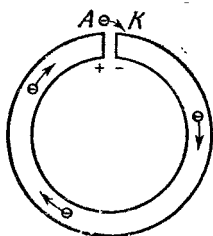


Рис. 129.

Путь из  $A$  в  $K$  они совершат уже не под действием электрических сил, а против них, но действием механических сил нашего «пинцета». Во внешней цепи  $KA$  работу совершают электрические силы — она расходуется на выделение тепла. Однако вся эта работа полностью возмещается работой сторонних сил в зазоре  $AK$ . Это видно из того, что электрическое поле в кольце со временем не уменьшается, значит, и энергия его не меняется. Итак, истинным работником в цепи являются сторонние силы. Электрические силы тратят лишь то, что они получают от сторонних.

Интересно выяснить, каков ход потенциала в цепи. Наивысший потенциал будет в точке  $A$ , от этой точки он понижается в обе стороны (рис. 130). Потенциальная энергия электронов равна  $U = e\varphi$ , т. е. имеет знак, обратный знаку потенциала (заряд электрона  $e$  отрицателен). Ход  $U$  изображен на рис. 131. На участке  $KA$  (во внешней цепи) электроны «скатываются с горки», на участке  $AK$  — взбираются на нее под действием сторонних сил.

Если точки  $A$  и  $K$  близки друг к другу, ход потенциала между ними будет очень крутым. В этом случае говорят о существовании *скачка потенциала*. Такие скачки потенциала имеются, например, в источниках эдс химического происхождения. Электрод и электролит

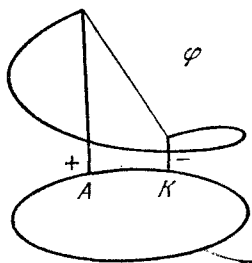


Рис. 130.

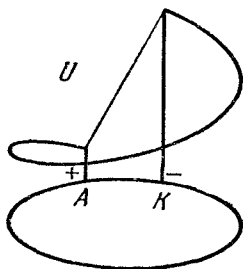


Рис. 131.

имеют разные потенциалы, поэтому на границе между ними потенциал совершает скачок.

**Закон Ома для любого участка цепи.** Поскольку мы выяснили, что в источниках сторонней эдс действуют, помимо потенциальных электрических сил, еще и силы другого происхождения, необходимо обобщить закон Ома так, чтобы он годился также и для тех участков цепи, где есть сторонние силы. Запишем закон Ома (54.1) в виде

$$IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (54.2)$$

( $R_{12}$  — сопротивление участка  $1 \rightarrow 2$ ). Стоящая справа разность потенциалов есть, как нам известно (§ 26), работа потенциальных электрических сил над  $+1$  зарядом на данном участке.

Если на участке  $1 \rightarrow 2$  (рис. 132) кроме этих сил есть еще сторонние силы, следует добавить в правую часть формулы (54.2) еще и работу этих сторонних сил (см. § 55). Обозначим *работу сторонних сил над  $+1$  зарядом на участке  $1 \rightarrow 2$*  через  $\mathcal{E}_{12}$  и назовем эту величину *электродвижущей силой на участке  $1 \rightarrow 2$* . Тогда закон Ома для такого участка запишется в виде

$$IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}. \quad (54.3)$$

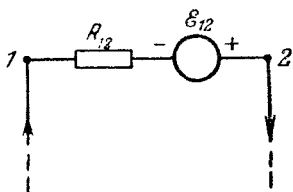


Рис. 132.

Стоящую в правой части формулы работу потенциальных и сторонних сил над  $+1$  зарядом на участке  $1 \rightarrow 2$  называют *напряжением* на этом участке.

Под  $R_{12}$  надо понимать полное сопротивление участка (включая сопротивление источника эдс). В правой части эдс  $\mathcal{E}_{12}$  считаем положительной, если при движении в направлении  $1 \rightarrow 2$  мы проходим источник эдс от минуса к плюсу. Знак силы тока  $I$  нужно взять положительным, если ток течет в направлении  $1 \rightarrow 2$ , и отрицательным в обратном случае. Если направление тока не ясно, можно приписать ему любое направление, тогда

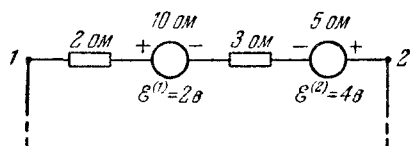


Рис. 133.

истинный знак тока получится из решения уравнения (54.3).

Проиллюстрируем это на следующих двух задачах (рис. 133).

Пусть ток на участке  $1 \rightarrow 2$  положителен, т. е.

ток течет в направлении  $1 \rightarrow 2$ , и равен  $3a$ . Первая задача: найти  $\varphi_1 - \varphi_2$ , т. е. разность потенциалов между точками 1 и 2. Подставляя все известные величины в (54.3), находим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = IR - (\mathcal{E}^{(1)} + \mathcal{E}^{(2)}) = 3 \cdot 20 - (-2 + 4) = 58 \text{ в.}$$

Вторая задача: найти ток  $I$ , если разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2 = -4$  в. Из уравнения (54.3) находим

$$I \cdot 20 = -4 - 2 + 4, \text{ т. е. } I = -0,1 a.$$

Отрицательный знак указывает на то, что ток течет в направлении  $2 \rightarrow 1$ .

Связь с остальной частью цепи, обозначенной на рис. 132 и 133 пунктиром, обеспечивается членом  $\varphi_1 - \varphi_2$  в (54.3). На вопрос, может ли ток идти от точки цепи с меньшим потенциалом к точке с большим потенциалом, следует ответить положительно. Например, если в цепи рис. 132  $\varphi_1 - \varphi_2 = -5$  в, общее сопротивление  $R_{12} = 5$  ом, а эдс  $\mathcal{E} = +10$  в, то ток идет в направлении  $1 \rightarrow 2$ , т. е. от меньшего потенциала к большему, и равен  $1 a$ .

**Закон Ома для всей цепи.** Из закона Ома (54.3), пригодного для любого участка цепи, можно получить в качестве частного случая закон Ома для всей цепи. Для



этого нужно, зафиксировав точку 1, двигать точку 2 через всю цепь до слияния ее с точкой 1 (рис. 134). Тогда в правой части уравнения (54.3) разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  обратится в нуль, и уравнение примет вид

$$IR = \mathcal{E} \quad (54.4)$$

или

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}, \quad (54.5)$$

где  $R$  — полное сопротивление всей цепи, а  $\mathcal{E}$  — алгебраическая сумма всех эдс.

*Полная эдс во всей цепи равна (по определению эдс, см. стр. 177) работе сторонних сил над +1 зарядом во всей цепи.*

Работа сторонних сил во всей цепи, т. е. на замкнутом пути, равна эдс, включенной в цепь, а не нулю. Это лишним раз подчеркивает, что *сторонние силы не потенциальны.*

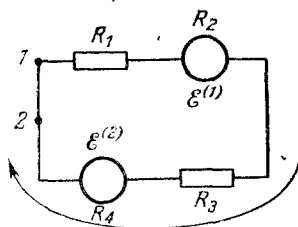


Рис. 134.

## § 55. Связь плотности тока и напряженности поля в проводнике

Выразим плотность тока  $j$  через среднюю скорость  $u$  упорядоченного движения зарядов в проводнике. Внутри проводника выделим цилиндр с длиной, равной  $u$ , и поперечным сечением, равным единице (рис. 135). Те

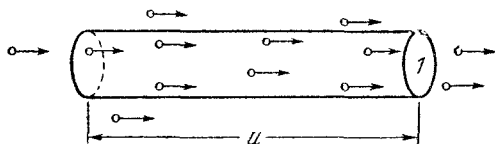


Рис. 135.

заряды, которые находятся в данный момент на левом основании цилиндра, через секунду дойдут до правого основания (длина цилиндра равна их пути за секунду). Следовательно, за секунду через правое основание

пройдут как раз все те заряды, которые содержатся внутри цилиндра.

Заряд, проходящий за секунду через единичную площадку, нормальную к направлению тока, называется плотностью тока (§ 49). Следовательно, плотность тока равна общему заряду, содержащемуся в цилиндре. Этот общий заряд равен величине заряда одной частицы  $e$ , умноженной на число частиц. Последнее равно объему цилиндра  $u \cdot 1$ , умноженному на число частиц в единице объема \*)  $n$ . Итак, плотность тока равна  $j = enu$ . Так как векторы  $j$  и  $u$  направлены одинаково (если  $e > 0$ ), это равенство может быть записано в виде

$$j = enu. \quad (55.1)$$

Соотношение (55.1) устанавливает связь между плотностью тока и средней скоростью его носителей. Из него еще не видна связь между током и напряжением. Чтобы найти эту связь, необходимо выразить среднюю скорость через напряженность поля в проводнике. Если плотность тока окажется пропорциональной напряженности, то сила тока будет пропорциональна напряжению, т. е. будет справедлив закон Ома.

Найдем среднюю скорость электронов в металле. Как нам известно из § 51, электроны, ускоряемые полем, периодически сталкиваются с решеткой, отдавая ей накопленную в поле кинетическую энергию. В результате столкновения электрон должен полностью «забыть» о той скорости упорядоченного движения, которую он приобрел в промежутке между столкновениями. Иначе после каждого столкновения скорость упорядоченного движения увеличивалась бы, т. е. ток рос бы со временем, чего в действительности нет.

Следовательно, непосредственно после столкновения начальная скорость упорядоченного движения  $u_0 = 0$ . Ускорение электрона  $a = F/m = eE/m$ , и поэтому скорость в конце пробега равна

$$u_{\max} = a\tau = \frac{eE}{m} \tau, \quad (55.2)$$

---

\*) Число частиц в единице объема  $n$  называется их концентрацией.

где  $\tau$  — время свободного пробега \*). Средняя скорость упорядоченного движения  $u$  равна  $\frac{1}{2}(u_0 + u_{\max})$ , т. е.

$$u = \frac{eE\tau}{2m}. \quad (55.3)$$

Подставляя это выражение в (55.1), получим \*\*)

$$j = \frac{e^2 n \tau}{2m} E. \quad (55.4)$$

Коэффициент пропорциональности между  $j$  и  $E$  называется *проводимостью*. Обозначим проводимость буквой  $\sigma$

$$\sigma = \frac{e^2 n \tau}{2m} \quad (55.5)$$

и запишем (55.4) в виде

$$j = \sigma E. \quad (55.6)$$

Из формулы (55.5) мы видим, что проводимость тем больше, чем больше концентрация электронов проводимости, чем больше время (и длина) их свободного пробега, и тем меньше, чем больше инертность переносчиков тока, т. е. их масса.

Формула (55.6) называется *законом Ома в дифференциальной форме*, в то время как обычный закон Ома  $IR = \varphi_1 - \varphi_2$  называют еще *законом Ома в интегральной форме*. Эти названия должны подчеркнуть, что левая и правая части формулы (55.6) относятся к данной *точке* внутри проводящей среды, в то время как обычный закон Ома — к *участку* линейного проводника.

\*) Если учесть, что отнюдь не во всех столкновениях время свободного пробега одинаково, т. е. что различные времена свободного пробега имеют различную вероятность, то в формуле (55.3) и соответственно в (55.5) исчезает в знаменателе двойка (см. по этому поводу «Фейнмановские лекции по физике», том 5). Поскольку, однако, сами понятия длины и времени свободного пробега имеют лишь качественный смысл, так как не определено, какое взаимодействие достаточно интенсивно, чтобы считать его столкновением, такое исправление мало существенно.

\*\*) Векторы  $j$  и  $E$  имеют одинаковое направление только в изотропном проводнике. В некоторых кристаллах направления тока и поля отличаются, хотя между  $j$  и  $E$  остается линейная связь, т. е. пропорциональность. Плотность тока в данном направлении может зависеть от составляющих напряженности по всем трем направлениям, например  $j_x = \sigma_{11}E_x + \sigma_{12}E_y + \sigma_{13}E_z$ .

Из (55.6) вытекает, что плотность тока в данной точке проводника однозначно связана с напряженностью поля в этой же точке. В узкой части проводника (рис. 121) плотность тока больше, чем в широкой, поэтому там и напряженность поля больше, причем в такое же количество раз.

**Вывод закона Ома для любого участка цепи.** Закон Ома в дифференциальной форме (55.6) легко может быть записан так, чтобы он годился также и для тех точек проводника, где на заряды действуют, кроме потенциальных электрических, еще и сторонние силы. Для такого обобщения надо просто добавить к напряженности потенциального электрического поля напряженность сторонних сил, т. е. стороннюю силу, действующую на  $+1$  заряда:

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{стор}}). \quad (55.7)$$

Отсюда легко получить уже известный нам закон Ома для любого участка цепи (54.3). Рассмотрим для этой цепи цепь, составленную из так называемых линейных проводников\*). Поделим (55.7) на  $\sigma$  и умножим скалярно (§ 13) на элемент длины проводника  $\Delta l$  (совпадающий по направлению с  $\mathbf{j}$ ). Тогда

$$\frac{1}{\sigma} \mathbf{j} \cdot \Delta l = \frac{1}{\sigma} j \Delta l = \frac{1}{\sigma S} I \Delta l = I \rho \frac{\Delta l}{S},$$

и мы получаем

$$I \rho \frac{\Delta l}{S} = \mathbf{E} \cdot \Delta l + \mathbf{E}_{\text{стор}} \cdot \Delta l.$$

Просуммируем это выражение по всем  $\Delta l$  вдоль проводника между двумя его точками 1 и 2. Величину

$$\sum \mathbf{E} \cdot \Delta l = \int_{1 \rightarrow 2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

называют *линейным интегралом* напряженности.

Для потенциального поля  $\mathbf{E} \cdot \Delta l = -\Delta\varphi$ , так что

$$\sum \mathbf{E} \cdot \Delta l = - \sum \Delta\varphi = - (\varphi_2 - \varphi_1) = \varphi_1 - \varphi_2.$$

---

\*) *Линейным* называется проводник, в каждой точке сечения которого плотность тока, напряженность поля, проводимость и все другие физические величины можно считать постоянными.

Далее,  $\sum \rho \frac{\Delta l}{S}$ , очевидно, есть сопротивление участка между точками 1 и 2, которое мы уже обозначили  $R_{12}$ . Таким образом, получим

$$IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \int_{1 \rightarrow 2} \mathbf{E}_{\text{стор}} \cdot d\mathbf{l}. \quad (55.8)$$

Линейный интеграл в правой части формулы (55.8) представляет собой работу сторонних сил над  $+1$  зарядом на пути вдоль проводника между точками 1 и 2. Действительно, скалярное произведение  $\mathbf{E}_{\text{стор}} \cdot \Delta \mathbf{l}$  есть работа на пути  $\Delta \mathbf{l}$ , а интеграл — не что иное, как сумма таких элементарных работ. Работу сторонней силы над  $+1$  зарядом на пути  $1 \rightarrow 2$  в § 54 мы называли эдс на участке  $1 \rightarrow 2$ , обозначая ее  $\mathcal{E}_{12}$ . Таким образом, закон Ома для участка можно записать в уже известном нам виде:

$$IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}. \quad (55.9)$$

Остается рассмотреть, как надо записать закон Ома, когда трудно отделить потенциальную часть поля в проводнике от непотенциальной. Это бывает тогда, когда эдс (т. е. непотенциальное поле) распределена по всему проводнику, а не локализована в источниках, например когда в проводнике возбуждается вихревое индукционное поле (§§ 96, 97). В этом случае надо, не разделяя  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{E}_{\text{стор}}$ , обозначить полное поле  $\mathbf{E}$  и записать

$$IR_{12} = \int_{1 \rightarrow 2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}. \quad (55.10)$$

Надо заметить, что при выводе закона Ома мы сделали предположение, которое не всегда оправдывается. Именно, мы предполагали, что величина тока постоянна вдоль всего проводника и что ток замкнут. Это действительно имеет место для постоянного тока и для токов, достаточно медленно меняющихся со временем, так называемых *квазистационарных* (см. § 102). Очень быстро меняющиеся токи могут не удовлетворять этим условиям и, в частности, быть не замкнутыми. В этом случае ток проводимости замыкается током смещения (см. § 58).

## § 56. Поверхностные и объемные заряды в цепи постоянного тока

Если проводник неоднороден, например имеет участки с различной проводимостью, но постоянное сечение (рис. 136), плотность тока  $j = I/S$  по необходимости постоянна, но этого нельзя сказать о напряженности поля. Если участок  $BC$  обладает меньшей проводимостью, чем остальная часть проводника, напряженность

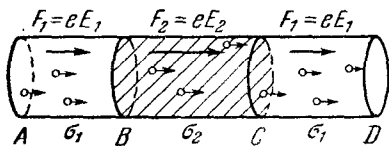


Рис. 136.

поля  $E_2$  в нем будет больше, чем  $E_1$ , во столько же раз, во сколько проводимость этого участка  $\sigma_2$  меньше, чем  $\sigma_1$  (на рис. 136 изображена не напряженность, а сила, действующая на электрон; из-за отрицательно-

сти заряда электрона сила направлена в сторону, обратную напряженности).

Рассмотрим, как устанавливается большая напряженность поля на участке  $BC$ . Пусть сначала поле всюду одинаково. Большая проводимость участка  $AB$  означает, что концентрация электронов или время свободного пробега на этом участке больше, чем на участке  $BC$ . Пусть, например, больше время свободного пробега  $\tau$ , тогда на  $AB$ , согласно формуле (55.3), больше средняя скорость упорядоченного движения. Быстро движущиеся электроны замедляют движение, переходя через сечение  $B$ , и, наоборот, медленно движущиеся на участке  $BC$  ускоряют движение, выходя в проводник  $CD$ . В результате около сечения  $B$  электроны скапливаются, образуя отрицательный объемный заряд\*), около сечения  $C$  создается положительный объемный заряд. Отталкиваясь друг от друга, избыточные электроны выходят и на поверхность проводника, образуя вблизи сечения  $B$  отрицательный поверхностный заряд. Положительный поверхностный заряд образуется вблизи сечения  $C$ , где

\*) Строго говоря, объемный заряд образуется, только если проводимость меняется постепенно. При скачкообразном изменении проводимости заряды концентрируются около поверхности сечения ( $B$  или  $C$ ) в таком тонком слое металла, что их надо считать снова поверхностными, только поверхность расположена внутри проводника.

на поверхности оказывается меньше электронов, чем нужно для компенсации заряда ионов. Объемные и поверхностные заряды, возникающие вблизи сечений  $B$  и  $C$ , создают свое собственное поле, увеличивающее напряженность (и скорость зарядов) на участке  $BC$  и уменьшающее ее на участках  $AB$  и  $CD$ .

Объемные заряды появляются лишь в местах неоднородности проводника, т. е. в тех местах, где меняется от точки к точке проводимость. Поверхностные же заряды существуют и на тех участках, где проводимость постоянна.

Пусть на рис. 137, а  $A$  и  $K$  — полюсы источника, которые мы можем считать точечными. Тогда их поле не является однородным, в то время как поле внутри проводника между точками  $A$  и  $K$

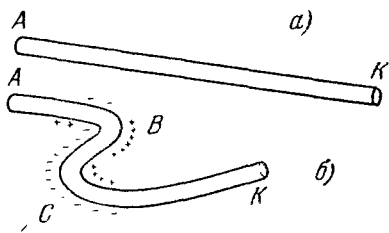


Рис. 137.

должно быть однородным, иначе плотность тока была бы различной в различных сечениях. «Подправить» поле до однородного могут только заряды, располагающиеся на поверхности проводника.

Процесс возникновения поверхностных зарядов особенно наглядно виден на примере изогнутого проводника (рис. 137, б). Электроны, движущиеся от  $K$  к  $A$ , должны в точке  $C$  повернуть в направлении  $CB$ , а в точке  $B$  — в направлении  $BA$ . Для этого поле, управляющее движением электронов, должно следовать всем изгибам проводника. Несложно проследить, как появляются поверхностные заряды, обеспечивающие такое изменение направления поля. Электроны, движущиеся от  $K$  к  $C$ , в точке  $C$  тормозятся, из-за чего на поверхности проводника появляется отрицательный заряд. Появление этого заряда (и положительного заряда с противоположной стороны) приводит к изменению направления поля. Итак, заряды располагаются так, что поле всюду направлено вдоль проводника. Это ясно из  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ , поскольку плотность тока  $\mathbf{j}$  имеет именно такое направление.

В частности, около поверхности проводника плотность тока и напряженность поля в проводнике параллельны поверхности (так как ток течет вдоль проводника) —

см. рис. 138. При переходе через поверхность проводника тангенциальная составляющая напряженности  $E_{\tau}$  остается неизменной, как доказано в § 11.

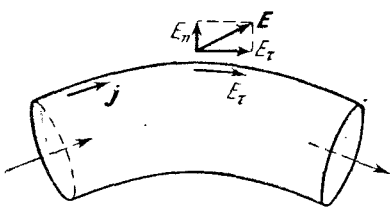


Рис. 138.

Нормальная же составляющая  $E_n$  совершает скачок от нуля внутри проводника до  $4\pi\sigma$  вне его (здесь  $\sigma$  — плотность зарядов на поверхности проводника, см. § 30). Если поверхностных зарядов нет, электрическое поле вне проводника направлено вдоль его поверхности и тем больше по величине, чем больше плотность тока.

Если поверхностных зарядов нет, электрическое поле вне проводника направлено вдоль его поверхности и тем больше по величине, чем больше плотность тока.

## § 57. Закон непрерывности тока.

### Первый закон Кирхгофа

Законы Кирхгофа позволяют рассчитать любую, как угодно разветвленную, цепь постоянного тока. *Первый закон Кирхгофа* формулируется так: сумма токов, входящих в точку разветвления, равна сумме токов, уходящих из нее. Иначе говоря, алгебраическая сумма токов, при-

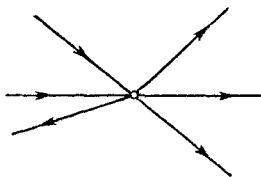


Рис. 139.

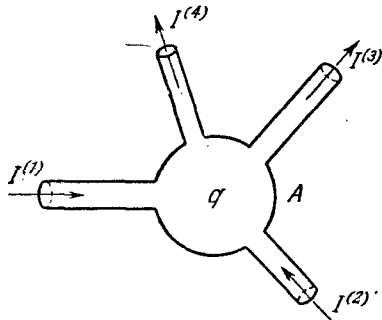


Рис. 140.

ходящих в точку разветвления, равна нулю (рис. 139).

Этот закон кажется почти очевидным. В действительности же он представляет собой не всегда имеющий место частный случай *закона непрерывности тока*, который мы сейчас рассмотрим.

Пусть проводящее тело  $A$  (рис. 140) имеет в данный момент времени заряд  $q$ . Если алгебраическая сумма



токов  $I^{(1)}$ ,  $I^{(2)}$ ,  $I^{(3)}$ ,  $I^{(4)}$  равна нулю, т. е. если сумма токов входящих (обозначим ее  $I_2$ ) равна сумме токов уходящих ( $I_1$ ), то заряд  $q$  не будет меняться со временем. Однако может иметь место и такой случай, когда входящие и уходящие токи не компенсируются. Ток через сечение проводника равен заряду, проходящему через это сечение за секунду. Поэтому разность  $I_2 - I_1$  есть заряд, добавляющийся к заряду  $q$  за секунду. Если за время  $\Delta t$  секунд заряд  $q$  изменился на  $\Delta q$ , то за 1 сек его изменение будет равно  $\Delta q/\Delta t$ . Следовательно,

$$I_2 - I_1 = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \quad (57.1)$$

Это уравнение носит название закона непрерывности тока: *разность между суммой токов, входящих в замкнутую область пространства, и суммой токов, из нее уходящих, равна изменению заряда этой области за секунду.*

В цепи постоянного тока заряд, содержащийся в любой области цепи, не должен меняться со временем, иначе будут меняться потенциалы, а следовательно и ток. Поэтому для цепи постоянного тока в (57.1) надо положить  $\frac{\Delta q}{\Delta t} = 0$ , т. е.  $I_2 = I_1$ , а это и есть первый закон Кирхгофа.

## § 58. Ток смещения

Если ток в цепи быстро меняется, то обычный закон Кирхгофа  $I_2 = I_1$  не имеет места, в то время как закон непрерывности тока (57.1) справедлив всегда.

Рассмотрим конденсатор, включенный в цепь переменного тока (рис. 141). На левую пластину поступает ток  $I$ , уходящего с пластины тока нет, поэтому заряд пластины  $q$  за время  $\Delta t$  увеличивается, согласно (57.1), на величину  $\Delta q = I\Delta t$ .

Все линии напряженности, начинающиеся на левой пластине, оканчиваются на правой. Это значит, что заряд второй пластины равен заряду первой и следует за его изменением\*). Поэтому с отрицательной (в данный

---

\*) Точнее, следует за изменением, запаздывая на величину  $d/c$ , где  $d$  — расстояние между пластинами,  $c$  — скорость электромагнитной волны. Обычно расстояние между пластинами конденсатора столь мало, что этим временем запаздывания в конденсаторе можно пренебречь даже при очень быстро меняющемся токе.

момент) пластины направо течет такой же ток, какой подходит слева к положительной (рис. 141). Создается впечатление, как будто ток проходит через конденсатор «насквозь», однако в пространстве между пластинами тока проводимости нет — его заменяет переменное электрическое поле, имеющееся там. Это переменное электрическое поле называют, вслед за Максвеллом, *током смещения* \*). Если в число токов зачислить также и ток

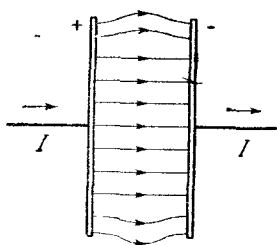


Рис. 141.

смещения, то первый закон Кирхгофа снова будет выполняться: к левой пластине подходит ток проводимости, а уходит ток смещения, равный току проводимости.

Ток смещения равен току проводимости, т. е.  $I_{\text{см}} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ . Согласно формуле (36.3) заряд пластины  $q$  связан с вектором  $D$  соотношением  $q = \frac{S}{4\pi} D$ , так что

$I_{\text{см}} = S \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta D}{\Delta t}$ . Следовательно, *плотность тока смещения равна изменению вектора электрической индукции за единицу времени:*

$$j_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta D}{\Delta t}. \quad (58.1)$$

Переменное электрическое поле названо током смещения не только потому, что с его помощью удастся формально «замкнуть» ток проводимости. Из § 17 известно, что переменное электрическое поле создает магнитное, являясь его вихрем. Максвелл предположил, что *ток смещения*, замыкающий ток проводимости (т. е. равный ему), *создает такое же магнитное поле.*

Построенная на этом предположении теория электричества и магнетизма подтверждена бесчисленным количеством экспериментов, в частности, существованием электромагнитных волн, поэтому нет основания сомневаться в том, что предположение Максвелла соответствует действительности (см. также § 6).

\*) Название «ток смещения» имеет историческое происхождение и связано с гипотезой о существовании эфира.

## § 59. Второй закон Кирхгофа. Расчет цепей постоянного тока

Рассмотрим как угодно разветвленную цепь постоянного тока, содержащую источники эдс и сопротивления (рис. 142). Цель расчета цепи заключается в определении токов на всех ее участках. Обозначим токи на участках  $I_1, I_2, I_3, I_4, \dots$  и произвольным образом зададим их предполагаемые направления (поскольку они заранее не известны). Выберем теперь произвольный замкнутый контур, например  $ABCD$ , зададим направление обхода этого контура (например против часовой стрелки) и запишем закон Ома (54.3) для каждого из участков:

$$I_1 R_1 = \varphi_D - \varphi_A + \mathcal{E}_1,$$

$$I_2 R_2 = \varphi_A - \varphi_B + \mathcal{E}_2,$$

$$I_3 R_3 = \varphi_B - \varphi_C + \mathcal{E}_3,$$

$$I_4 R_4 = \varphi_C - \varphi_D + \mathcal{E}_4;$$

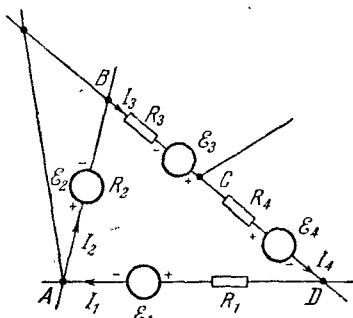


Рис. 142.

здесь каждая из эдс должна быть записана с соответствующим знаком. Складывая эти уравнения, получим

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_4 R_4 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4.$$

Разности потенциалов выпадают. Следовательно, в произвольном замкнутом контуре, выбранном из разветвленной цепи, сумма падений напряжения (произведений  $IR$ ) равна сумме эдс. Это и есть второй закон Кирхгофа:

$$\sum I_i R_i = \sum \mathcal{E}_i. \quad (59.1)$$

Заметим, что, поскольку разности потенциалов все равно выпадают, второй закон Кирхгофа целиком относится и к случаю «распределенной эдс», т. е. к случаю, когда непотенциальное электрическое поле возникает в самих проводниках вследствие электромагнитной индукции.

Можно доказать, что уравнений, полученных с применением 1-го и 2-го законов Кирхгофа, достаточно для

определения токов, а следовательно, и всех других величин.

В некоторых случаях можно обойтись при расчете цепи без законов Кирхгофа. Сюда относятся цепи, содержащие только последовательно или параллельно соединенные проводники, и некоторые более сложные случаи, когда, из соображений симметрии или других, можно найти так называемое *эквивалентное сопротивление* разветвленного участка цепи. Например, сопротивление  $R$ , эквивалентное нескольким параллельно соединенным проводникам, как известно, определяется по формуле

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots = \sum_i \frac{1}{R_i}.$$

В качестве другого примера определим сопротивление, эквивалентное сопротивлению шестиугольника, составленного из двенадцати одинаковых сопротивлений

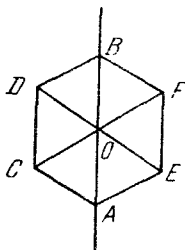


Рис. 143.

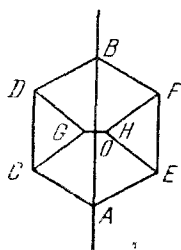


Рис. 144.

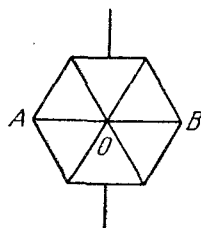


Рис. 145.

$R$  (рис. 143). Перерисуем шестиугольник так, как показано на рис. 144 (включим малый проводник  $GH$  вместо точечного контакта  $O$ ). Из соображений симметрии ясно, что ток по  $GH$  не идет. Следовательно, проводник  $GH$  можно выбросить, после чего  $CD$  и  $CGD$  оказываются включенными параллельно. Сопротивление треугольника  $CGD$  равно  $\frac{2}{3}R$ . Поэтому сопротивление левой стороны шестиугольника равно  $2R + \frac{2}{3}R = \frac{8}{3}R$ ,

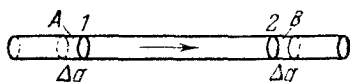
таково же сопротивление правой стороны. Сопротивление проводника  $AB$  равно  $2R$ . Поскольку эти три сопротивления включены параллельно, эквивалентное всему шестиугольнику сопротивление равно  $\frac{4}{5}R$ .

Другой пример — шестиугольник, включенный так, как показано на рис. 145. В точке  $O$  правую и левую части можно разъединить, после чего очевидно, что проводники  $AO$  и  $OB$ , по которым ток не идет, можно выбросить. Задача становится элементарной, и эквивалентное шестиугольнику сопротивление оказывается равным  $R$ .

### § 60. Работа потенциальных и сторонних сил в цепи тока

Потенциальные электрические и непотенциальные сторонние силы совершают в проводнике над перемещаемыми ими зарядами работу. За время  $\Delta t$  через сечение 1 участка  $1 \rightarrow 2$

(рис. 146) проходит заряд  $\Delta q = I \Delta t$ ; такой же заряд выходит через сечение 2.



Можно считать, что заряд, содержащийся между точками 1 и 2, остается на месте,

Рис. 146.

а заряд  $\Delta q$  перемещается из малой области  $A$  в такую же область  $B$ , т. е. фактически из точки 1 в точку 2.

Работа электрических сил над  $+1$  зарядом равна  $\varphi_1 - \varphi_2$ , работа сторонних сил над таким же зарядом равна  $\mathcal{E}_{12}$ . Полная работа всех сил на участке  $1 \rightarrow 2$  за время  $\Delta t$  равна

$$\Delta A = \Delta q (\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}) = I (\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}) \Delta t. \quad (60.1)$$

Пользуясь законом Ома для участка цепи, можно переписать эту работу в виде

$$\Delta A = I^2 R \Delta t. \quad (60.2)$$

Если  $I$  измеряется в амперах,  $R$  — в омах и  $\Delta t$  — в секундах, то работа получится в джоулях. Вся эта работа превращается в тепло, поэтому естественно выразить ее в калориях:

$$\Delta Q = 0,24 I^2 R \Delta t. \quad (60.3)$$

Мощность, т. е. работа за единицу времени  $N = \Delta A / \Delta t$ , на участке  $1 \rightarrow 2$  равна

$$N = I (\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}). \quad (60.4)$$

В частности, если на участке нет эдс, то

$$N = I (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (60.5)$$

А мощность всей замкнутой цепи

$$N = I\mathcal{E}. \quad (60.6)$$

Из последней формулы видно, что работу во всей цепи совершают только сторонние силы. Это было уже отмечено в § 54.

**Нетепловые потребители электрической энергии.** Поскольку  $\mathcal{E} = IR$ , где  $R$  — сопротивление всей цепи, мощность, выделяющаяся во всей цепи, можно записать в виде:  $N = I^2R$ . Но  $I^2R$  есть выделенное тепло, и получается, что электрический ток в самом общем случае всю свою мощность расходует на выделение тепла. Вместе с тем известно, что ток может приводить в действие электромоторы, заряжать аккумуляторы и т. д., а не только нагревать провода.

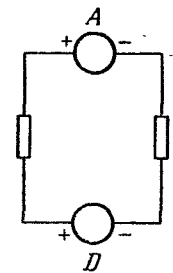


Рис. 147.

Чтобы выяснить, в чем здесь дело, представим себе цепь с динамомашинной  $D$  и заряжаемым ею аккумулятором  $A$  (рис. 147). Аккумулятор должен быть включен так, как показано на рисунке, иначе он будет не заряжаться, а разряжаться. Но при таком включении эдс аккумулятора  $\mathcal{E}_2$  направлена против эдс динамомашинны  $\mathcal{E}_1$ , следовательно, полная эдс в цепи  $\mathcal{E}$  равна разности  $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$  и мощность в цепи  $I\mathcal{E} = I(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) = I^2R$ . Запишем это в виде

$$I\mathcal{E}_1 = I\mathcal{E}_2 + I^2R. \quad (60.7)$$

Это уравнение отвечает на поставленный вопрос. Мощность источника (динамомашинны)  $I\mathcal{E}_1$  равна сумме мощности, расходуемой на зарядку аккумулятора  $I\mathcal{E}_2$ , и тепловой мощности  $I^2R$ . Электромотор ведет себя аналогично аккумулятору — при его работе в обмотках ротора возникает противоэдс.

В тепло превращается действительно полная мощность  $I\mathcal{E}$ , но полная мощность меньше мощности источника — она состоит из положительной ( $I\mathcal{E}_1$ ) и отрицательной ( $-I\mathcal{E}_2$ ) частей\*).

\*) «Отрицательная мощность» означает, очевидно, *потребление* энергии.

## § 61. Поток энергии внутрь и вдоль проводника

Когда по проводнику идет ток, в каждом участке проводника выделяется тепло. Очевидно, выделяющаяся энергия должна каким-то образом транспортироваться от источника к данному участку. Оказывается, существует стационарный поток энергии электромагнитного поля, текущий в пространстве вокруг проводника.

Введем вектор  $\mathbf{S}$ , направление которого совпадает с направлением движения энергии электромагнитного поля, а величина равна количеству энергии, проходящему за 1 сек через единичную площадку, нормальную к направлению переноса\*). В теории Максвелла доказывается, что этот вектор, называемый *вектором Пойнтинга — Умова*, равен векторному произведению (см. § 13) векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (\text{СГС}), \quad \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (\text{СИ}). \quad (61.1)$$

Электрическое поле  $\mathbf{E}$  (§ 56) у поверхности проводника имеет тангенциальную  $E_\tau$  и нормальную  $E_n$  составляющие. Составляющая  $E_\tau$  обуславливает течение тока вдоль проводника и равна  $(\varphi_1 - \varphi_2)/l$ , т. е. падению потенциала на единицу длины. Составляющая  $E_n = 4\pi\sigma$ , где  $\sigma$  — плотность поверхностных зарядов. Очевидно, полное поле равно геометрической сумме  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\tau + \mathbf{E}_n$ . Вектор Пойнтинга (61.1), куда мы подставим это выражение, тоже разбивается на две части:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E}_\tau + \mathbf{E}_n) \times \mathbf{H} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}_\tau \times \mathbf{H} + \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}_n \times \mathbf{H}.$$

Обозначим первую из них  $\mathbf{S}_1$ , вторую  $\mathbf{S}_2$ .

**Поток энергии внутрь проводника.** Рассмотрим составляющую

$$\mathbf{S}_1 = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}_\tau \times \mathbf{H}.$$

Магнитное поле  $\mathbf{H}$  направлено по касательной к силовым линиям, замыкающимся вокруг электрического тока (рис. 148), следовательно, вектор Пойнтинга  $\mathbf{S}_1$  направлен внутрь проводника. Это значит, что электромагнит-

---

\*) Такая величина называется *плотностью потока энергии*.

ная энергия течет из диэлектрика (или вакуума), окружающего проводник, внутрь проводника.

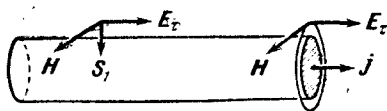


Рис. 148.

В § 80 будет показано, что магнитное поле прямого проводника с током  $I$  вне проводника, на расстоянии  $r$  от его оси, равно  $H = 2I/cr$  (СГС). Электрическое поле равно  $E_r = (\varphi_1 - \varphi_2)/l$ . Поскольку  $E_r$  и  $H$  ортогональны друг другу,  $S_1 = \frac{c}{4\pi} E_r H$ . Следовательно, полная энергия, втекающая за секунду в участок длины  $l$  и радиуса  $r$ , равна

$$2\pi r l S_1 = 2\pi r l \frac{c}{4\pi} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l} \frac{2I}{cr} = (\varphi_1 - \varphi_2) I = I^2 R,$$

т. е. как раз равна выделяющемуся на участке за секунду теплу. Втекающая в проводник энергия превращается в нем в тепло.

**Поток энергии вдоль проводника.** Выясним теперь, как распространяется энергия *вдоль* проводника. Мы уже говорили, что всегда существуют поверхностные заряды и, следовательно, существует составляющая напряженности  $E_n = 4\pi\sigma$ , нормальная к поверхности проводника (рис. 149). Эта составляющая напряженности и дает составляющую потока энергии

$$S_2 = \frac{c}{4\pi} E_n \times H,$$

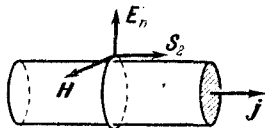


Рис. 149.

направленную вдоль проводника.

Чем меньше сопротивление, тем меньше поток энергии внутрь проводника  $S_1$ . Для идеального проводника (сверхпроводника) составляющая  $E_r$  отсутствовала бы и линии  $E$  были бы нормальны к поверхности проводника. У реального проводника всегда должна быть составляющая  $E_r$ , тем бо́льшая, чем больше его сопротивление.

Всю цепь энергией снабжает источник эдс. Напряженность поля сторонних сил  $E_{\text{стор}}$  направлена в сторону, противоположную  $E$ , поэтому вектор Пойнтинга — Умова  $S_1$  на участке, содержащем сторонние эдс, имеет обратное направление (из проводника — наружу) и представляет собой поток энергии, выходящий из источника.



## ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕОРИИ ВЕЩЕСТВА

## § 62. Электроны проводимости

Электроны в металле сильно взаимодействуют с кристаллической решеткой, в узлах которой находятся положительные ионы, и между собой. Электрон, движущийся в пустоте, и электрон, движущийся в металле, — это частицы, которые ведут себя различным образом. Когда электрон движется в кристалле, он своим полем поляризует газ остальных электронов (отталкивает их). Еще более значительно его взаимодействие с ионами кристаллической решетки (§§ 51, 52). Таким образом, движение электрона в кристалле фактически является коллективным движением большого количества частиц — электронов и ионов решетки.

При абсолютном нуле температуры интенсивность движения всех частиц достигает минимума, совместимого с самим существованием материи\*). При температуре, отличной от нуля, но близкой к нему, коллектив электронов движется несколько более энергично, чем при  $T=0$ . Это значит, что в нем появляются элементарные возбуждения (квазичастицы).

**Плазмоны.** Элементарные возбуждения одного из возможных типов движения электронов представляют собой коллективные колебания (напоминающие фононы в кристалле), при которых электрический заряд лишь колеблется, сгущаясь и разрежаясь. Плотность электрон-

---

\*) Это обстоятельство применительно к движению решетки обсуждалось в § 52, который нужно обязательно прочесть для лучшего понимания изложенного в настоящем параграфе.

ного газа совершает колебания, однако никакого переноса заряда на большие («макроскопические», т. е. большие по сравнению с атомными размерами) расстояния не происходит. Квазичастицы, соответствующие этим волнам плотности, носят названия *плазмонов*. Такие же колебания возможны в любой плазме\*). Электронная плазма в металле отличается от обычной плазмы — сильно ионизированного газа — весьма большой концентрацией заряженных частиц. Можно доказать, что из-за этого частота колебаний электронной плазмы  $\omega$  весьма велика, а соответствующая ей энергия плазмона\*\*\*)  $\hbar\omega$  может быть порядка десятка электроновольт (§ 79). Такие энергичные плазмоны могут возникнуть в том случае, если, например, через металл пролетает быстрая заряженная частица с большой энергией. Нагреванием металла таких плазмонов не создать, так как для этого нужны температуры, которых ни один металл не выдерживает.

**Электроны проводимости.** Второй тип элементарных возбуждений электронов металла связан с переносом заряда на большие расстояния. Это, так сказать, «одетый в шубу» электрон. «Шубой» ему служат сопровождающие его движения коллектива электронов и кристаллической решетки. Такую квазичастицу мы называем *электроном проводимости*. Свойства электрона проводимости, в зависимости от вида металла и в особенности от состояния его движения, могут быть либо очень похожими на свойства «неодетого» электрона, т. е. электрона в пустоте, или совсем не похожими на эти свойства.

«Одетые» электроны, т. е. электроны проводимости, взаимодействуют между собой гораздо слабее, чем свободные, так как каждый электрон окружает себя зарядами противоположного знака (разгоняя другие электроны) и вместе с ними представляет собой почти нейтральную частицу.

Эти соображения поясняют, почему оказалась столь плодотворной первоначальная модель квантовой электронной теории металлов — так называемая модель сво-

\*) То есть в газе, в целом нейтральном, но состоящем из заряженных частиц, а не нейтральных атомов, см. § 79.

\*\*)  $\hbar\omega = \frac{h}{2\pi} 2\pi\nu = h\nu$ .

бодных электронов, или модель Зоммерфельда \*). В этой модели полностью игнорировалось взаимодействие электронов между собой и действие на них электрического поля решетки. Учитывались только столкновения электронов с решеткой, поскольку эти столкновения обуславливают электрическое сопротивление (см. § 51).

С современной точки зрения Зоммерфельд рассматривал не свободные электроны в пустоте, а электроны проводимости (без учета, правда, особенностей движения электронов проводимости по сравнению со свободными).

**Свободные электроны в металле.** Металлический кристалл рассматривался в модели Зоммерфельда как пустой ящик, содержащий невзаимодействующие свободные электроны. *Главное отличие* такого газа от классического газа, состоящего из атомов или молекул, заключается в том, что электроны, как и все фермионы, подчиняются принципу Паули, согласно которому в каждом квантовом состоянии может находиться не более одной частицы. Квантовое состояние электрона в ящике полностью определено, если задать его импульс  $p = mv$  по величине и направлению (или три проекции импульса на оси:  $p_x, p_y, p_z$ ) и направление спина. Это значит, что в металле заданную величину и направление импульса и направление спина может иметь только один электрон.

Если бы ящик, в котором находится электрон, был бесконечно большим, проекции импульса  $p_x, p_y, p_z$  могли бы быть заданы точно. Однако, в силу соотношения неопределенностей (§ 47), в импульсе электрона, область движения которого есть  $\Delta x$ , существует неопределенность  $\Delta p_x \sim h/\Delta x$ . Для электрона в кубическом ящике со стороной  $L$  неопределенность в координате есть  $L$ . Следовательно, задавать  $p_x$  точнее, чем с неопределенностью  $h/L$ , бессмысленно.

Внутри интервала  $\Delta p_x = h/L$  не может быть никаких различных квантовых состояний, так как сам интервал есть лишь минимально возможная неопределенность в

---

\*) Есть еще одна причина, из-за которой электроны в металле взаимодействуют слабее, чем свободные электроны в пустоте. Она заключается в том, что электроны подчиняются принципу Паули (§ 20), который управляет их движением гораздо жестче, чем кулоновское отталкивание (см. об этом ниже, стр. 201).

импульсе. Это же касается, разумеется, и двух других проекций импульса  $p_y$  и  $p_z$ , имеющих такие же неопределенности.

Следовательно (рис. 150), если отложить на осях пространственной системы координат составляющие импульса \*)  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$ , то задать импульс электрона — это значит задать не точку, в которой оканчивается вектор  $p$ , а маленькую ячейку, кубик со стороной  $h/L$ . Внутри этой ячейки не может быть различных квантовых состояний, так как вся ячейка в целом представляет собой ту

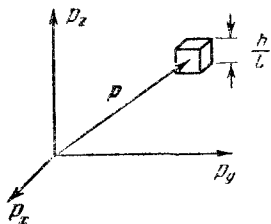


Рис. 150.

неопределенность, с которой можно задать импульс электрона. В силу принципа Паули импульсом, попадающим в эту ячейку, могут во всем металле обладать только два электрона (с двумя противоположными направлениями спина).

Следовательно, если разбить все импульсное пространство на ячейки с объемом  $(h/L)^3$ , то в каждой ячейке смогут поместиться только два электрона («поместиться» — в том смысле, что векторы импульсов этих электронов попадают в данную ячейку \*\*)).

Этот вывод является фундаментальным для электронной теории металлов. По сути, он предопределил успех модели свободных электронов, так как в ней ухвачено основное в поведении электронов — подчинение их принципу Паули. Конечно, современная электронная теория этим не ограничивается, однако уже из указанного факта можно сделать важнейшие выводы.

### § 63. Фермиевская энергия

Рассмотрим, как ведут себя электроны металла при температуре  $0^\circ\text{K}$ . Температура, равная нулю, — это абсолютно наименьшее энергетическое состояние. В таком

\*) Полученное пространство называется *пространством импульсов* (или *фазовым пространством*).

\*\*\*) Принцип Паули в сочетании с принципиальной неразличимостью одинаковых частиц и разбиением импульсного пространства на ячейки составляет основу так называемой статистики Ферми, которой подчиняются все фермионы.

состоянии все электроны стремятся как можно ближе к началу координат в импульсном пространстве, где их кинетическая энергия  $E_{\text{кин}} = mv^2/2 = p^2/2m$  (вспомним, что  $p = mv$ ) наименьшая. Однако в каждой ячейке может поместиться не более двух электронов. Поскольку электронов много, после того как будут заполнены ячейки вблизи начала координат, начнут заполняться те, которые расположены дальше от начала. При  $T=0$  будет заполнена сфера (рис. 151, а), радиус которой нетрудно

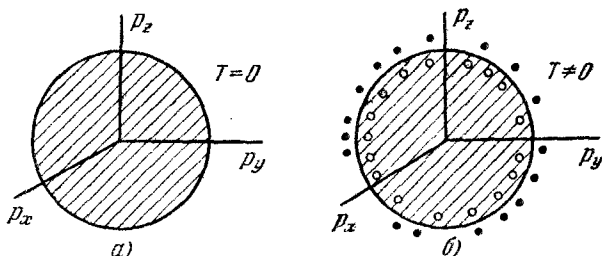


Рис. 151.

вычислить, исходя из того, что должны быть размещены все  $N$  электронов металла. Объем сферы равен  $\frac{4}{3} \pi p_F^3$  ( $p_F$  — радиус сферы). Объем одной ячейки равен  $\frac{h^3}{L^3} = \frac{h^3}{V}$ , где  $V$  — объем металла. Следовательно, число ячеек внутри сферы равно  $\frac{4}{3} \pi p_F^3 \cdot \frac{h^3}{V}$ , а число электронов вдвое больше (спин):

$$2 \frac{4}{3} \frac{\pi p_F^3}{h^3/V} = N.$$

Отсюда получаем

$$p_F = h \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{1/3}. \quad (63.1)$$

Здесь  $n = N/V$  — концентрация электронов, т. е. их число в единице объема.

Импульс, определяемый формулой (63.1), — это максимальный импульс, который может иметь электрон при  $T = 0$ . Он называется фермиевским импульсом, а

соответствующая ему кинетическая энергия  $E_F = p_F^2/2m$  — фермиевской энергией:

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3}. \quad (63.2)$$

Таким образом, при  $T=0$  электроны металла обладают кинетическими энергиями от 0 до  $E_F$ . Обычно  $E_F$  — порядка нескольких электроновольт или десятка электроновольт. Например, при концентрации электронов  $n = 6 \cdot 10^{22} \frac{1}{\text{см}^3}$  ( $\hbar = 6,6 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}$ ,  $m = 9 \cdot 10^{-28} \text{ э}$ ) получим  $E_F \approx 8,5 \cdot 10^{-12} \text{ эрг} \approx 5 \text{ эв}$ .

Сравним с этой величиной среднюю энергию теплового движения атомов или молекул обычного газа при комнатной температуре ( $T=300^\circ\text{К}$ ). Как известно из молекулярной физики, средняя кинетическая энергия атома выражается формулой  $\bar{E}_{\text{кин}} = \frac{3}{2} kT$  (где  $k = 1,38 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/град}$  — так называемая постоянная Больцмана). При комнатной температуре эта энергия составляет около  $4 \cdot 10^{-14} \text{ эрг} \approx \frac{1}{40} \text{ эв}$ .

Таким образом, у нормального металла фермиевская энергия, т. е. предельная (максимальная) энергия электрона при абсолютном нуле, в сотни раз больше энергии теплового движения обычных атомов при комнатной температуре. Это значит, что, подчиняясь принципу Паули, электроны и при абсолютном нуле совершают интенсивное хаотическое движение (которое нельзя назвать тепловым, поскольку оно имеет место при  $T=0$ ).

Кстати, и хаотическим его можно назвать лишь в том смысле, что равноправны все направления движения. Сами же импульсы строго заданы — каждый из них соответствует определенной ячейке.

При температуре, отличной от нуля, общая энергия электронов больше, чем при  $T=0$ . Это значит, что некоторые электроны выходят из сферы Ферми, а внутри сферы появляются свободные места (занятые при  $T=0$ ) — так называемые «дырки» (рис. 151, б).

Переходя в незанятые состояния вне сферы Ферми, электроны увеличивают свою энергию в общем на столько же, на сколько бы ее увеличивали атомы обычного газа при таком же нагревании, т. е. на величину по-

рядка  $kT$ . Однако величина  $kT$  при всех температурах, при которых металл еще не плавится, во много раз меньше, чем фермиевская энергия \*). Говоря наглядно, электроны при нагревании выходят из сферы Ферми на расстояния во много раз меньшие, чем радиус сферы. Электроны, расположенные в глубине сферы Ферми, не могут выйти из нее, выходят только те, которые расположены в слое порядка  $kT$ . Следовательно, и увеличение энергии всей совокупности электронов при нагревании незначительно. Увеличивают энергию при нагревании не все электроны, заполняющие сферу Ферми, а только те, которые расположены в тонком поверхностном слое толщиной  $kT$ . Поэтому движение электронов при  $T \neq 0$ , вплоть до температуры плавления металла, по своей интенсивности мало отличается от их движения при  $T = 0$ . Однако, как мы увидим в § 66, выход электронов за пределы сферы Ферми при нагревании металла обуславливает ряд важных эффектов, например термоэлектронную эмиссию.

**Ослабление взаимодействия электронов из-за принципа Паули.** Принцип Паули, «железной рукой» управляя поведением электронов, приводит к значительному ослаблению их взаимодействия. Представим себе сначала, что  $T = 0$  и все электроны занимают свои места в сфере Ферми. Пусть в металле встречаются два электрона, имеющие импульсы  $p_1$  и  $p_2$ . Их взаимодействие («соударение») должно было бы изменить оба импульса (превратить их в  $p'_1$  и  $p'_2$ ). Но измениться импульсы не могут, так как изменение импульса означает переход в другую ячейку, а все ячейки заняты. Есть, правда, и свободные ячейки вне сферы Ферми, но, в силу закона сохранения энергии, если  $p_1$  станет больше  $p_F$  (по модулю), то  $|p_2|$  должен стать меньше  $|p_F|$ . Это невозможно из-за занятости всех мест в сфере Ферми (переход второго электрона в ячейку, которую занимал первый, в силу закона сохранения импульса  $p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2$  означает лишь обмен ячейками, несущественный из-за неразличимости электронов). Итак, электроны, встречаясь, должны «делать вид», что не замечают друг

---

\*) Фермиевская энергия велика по сравнению с  $kT$  для металлов с большой концентрацией электронов, но отнюдь не для бедных электронами плохих металлов.

друга, несмотря на кулоновское отталкивание, существующее между ними.

При  $T \neq 0$  взаимодействовать могут только электроны, находящиеся в слое размытости распределения Ферми (толщина этого слоя порядка  $kT$ ) — в том слое, в котором имеются дырки, см. рис. 151, б. При столкновениях таких электронов возможны изменения импульсов  $p_1$  и  $p_2$ , согласующиеся с законами сохранения энергии и импульса. Значит, такие электроны могут взаимодействовать, но их мало и встречи их будут относительно редкими. Следовательно, принцип Паули очень ограничивает возможность взаимодействия. Это обстоятельство, наряду с отмеченной выше экранировкой зарядов (стр. 196), приводит к тому, что модель свободных, не взаимодействующих электронов оказывается не столь плохой, как можно было бы думать.

## § 64. Функция распределения

Для характеристики тех изменений, которые происходят в электронном газе при нагревании, введем так называемую *функцию распределения* электронов по ячейкам  $n_E$ .

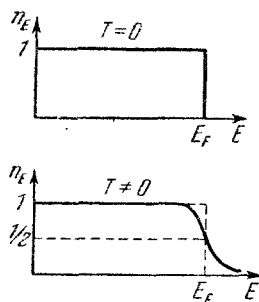


Рис. 152.

Функция распределения — это среднее число электронов (с данным направлением спина), приходящееся на одну ячейку. Эта величина различна на разных расстояниях от начала координат в импульсном пространстве, иначе говоря, она зависит от энергии электрона, поэтому мы и обозначаем ее  $n$  с индексом  $E$ . При абсолютном нуле фермиевская функция распределения  $n_E$  равна 1 при  $E < E_F$  и 0 при  $E > E_F$  (рис. 152, а), т. е. имеет вид ступеньки (фермиевская ступенька). Это значит, что полностью заполнены все ячейки с энергией, меньшей фермиевской  $E_F$ , и свободны все ячейки с большей, чем  $E_F$ , энергией.

Функция распределения при  $T \neq 0$  изображена на рис. 152, б. При  $T \neq 0$  фермиевская ступенька «размы-



вается». Область размытия составляет несколько  $kT$ . Некоторые ячейки внутри сферы Ферми освобождаются, поэтому  $n_E$  становится меньше 1. При  $E = E_F$  среднее число частиц, приходящихся на одну ячейку,  $n_E = 1/2$ . Появляются частицы вне сферы Ферми. Следовательно, при  $E > E_F$  функция распределения  $n_E$  уже не равна нулю, хотя и быстро уменьшается с увеличением энергии («хвост» ферми-распределения).

Если температура очень высока или мала фермиевская энергия (63.2), что означает малую концентрацию электронов, область размытия функции распределения  $kT$  может стать порядка или даже больше фермиевской энергии. Тогда график функции распределения приобретает такой вид, как показано на рис. 153. У настоящих металлов с большой фермиевской энергией такой вид функции распределения невозможен, однако у плохих металлов и полупроводников функция распределения может быть такой уже при комнатной и даже более низких температурах. Среднее число частиц в одной ячейке фазового пространства  $n_E$  при этом становится малым по сравнению с единицей. Это значит, что только небольшой процент ячеек содержит частицы, остальные пусты. Поскольку число частиц мало, принцип Паули, запрещающий более чем двум частицам находиться в одной ячейке, теряет свое значение (он запрещает то, чего и так нет). В этих условиях электронный газ начинает вести себя как обычный газ малой плотности. Такой обычный газ называется *невырожденным*, а распределение его частиц по энергиям называется *больцмановским*.

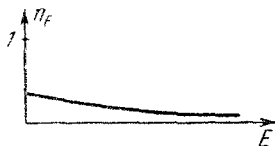


Рис. 153.

Приведем без вывода выражение для функции распределения Больцмана:

$$n_E = A e^{-\frac{E}{kT}}. \quad (64.1)$$

Здесь  $e$  — основание натуральных логарифмов,  $e = 2,718\dots$ ,  $A$  — константа, не зависящая от энергии  $E$  и слабо зависящая от температуры. С увеличением энергии функция распределения Больцмана монотонно убывает, как показано на рис. 153. Величина  $n_E$  при всех

энергиях во много раз меньше единицы (для этого константа  $A$  должна быть тоже значительно меньше единицы).

**Температура вырождения.** Переход от фермиевской функции распределения (рис. 152) к больцмановской (рис. 153) происходит при нагревании постепенно. Область размытия фермиевской функции при нагревании увеличивается. Когда эта область становится порядка фермиевской энергии при  $T=0$  (т. е. порядка длины прямоугольника на рис. 152), фермиевская функция становится похожей на больцмановскую. Температура, при которой это происходит, называется *температурой вырождения*  $T_{\text{выр}}$ .

При температуре, во много раз меньшей  $T_{\text{выр}}$ , электроны подчиняются статистике Ферми, а их поведение совсем не похоже на поведение атомов обычного газа. Говорят, что при таких низких температурах электроны представляют собой *вырожденный* газ. Напротив, при температуре, значительно превышающей температуру вырождения, электронный газ напоминает обычный, состоящий из атомов, подчиняется статистике Больцмана, а его функция распределения определяется формулой (64.1). Такой газ называется *невырожденным*.

Температуру вырождения мы найдем, считая, что область размытия  $kT$  порядка фермиевской энергии  $E_F$ . Итак,

$$kT_{\text{выр}} \sim E_F,$$

откуда с помощью выражения (63.2) для  $E_F$  получим

$$T_{\text{выр}} \sim \frac{h^2}{2mk} \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3}. \quad (64.2)$$

При  $E_F \approx 5 \text{ эв}$  температура вырождения  $T_{\text{выр}} \approx 60\,000^\circ$ . Это значит, что в металле с нормальной (т. е. не аномально малой) концентрацией электронов электронный газ сильно вырожден при всех температурах, вплоть до температуры плавления металла. В соответствии с этим электроны в металле нельзя считать обычным газом, они обладают совершенно другими свойствами.

В полупроводниках электроны проводимости находятся в так называемой зоне проводимости (§ 72). Электроны там есть лишь при температуре, не равной абсолют-

ному нулю, и концентрация их очень мала (она определяется формулой (72.2)). Из-за этого электроны в полупроводниках описываются статистикой Больцмана и могут рассматриваться как обычный газ, состоящий, правда, не из нейтральных, а из заряженных частиц.

### § 65. Закон дисперсии и ферми-поверхность

Кинетическая энергия свободного электрона равна

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \quad (65.1)$$

(здесь  $p = mv$  — импульс электрона). Зависимость энергии от импульса носит название *закона дисперсии*. Для свободной частицы имеет место *квадратичный закон дисперсии* (65.1). На первый взгляд кажется, что такая зависимость является единственно возможной, однако ниже мы увидим, что это совсем не так.

Закон дисперсии определяет динамику движения электронов проводимости и других квазичастиц в кристалле. Изучение закона дисперсии электронов является одной из важнейших задач современной электронной теории.

Обычная связь между скоростью и импульсом  $v = p/m$  не имеет универсального характера и относится, вообще говоря, только к свободным частицам. В отсутствие сил, действующих на частицу, ее импульс\*) остается постоянным. В этом заключается смысл первого закона Ньютона. Если же на частицу действуют силы, то ее импульс меняется в соответствии со вторым законом Ньютона:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = F. \quad (65.2)$$

Отсюда легко найти скорость частицы. Под действием силы энергия частицы  $E$  изменяется на величину работы, совершаемой этой силой:  $\Delta E = F \cdot \Delta s$ , где  $\Delta s$  — перемещение (мы рассматриваем, для простоты, случай, когда перемещение направлено по силе). Перемещение  $\Delta s$  равно  $v \Delta t$ , где  $v$  — скорость, так что  $\Delta E = Fv \Delta t$ . Используя (65.2), получим  $\Delta E = v \Delta p$ , и, следовательно,

$$v = \frac{\Delta E}{\Delta p} \quad (65.3)$$

\*) По отношению к инерциальным системам отсчета.

(точная формула  $\mathbf{v} = \frac{\partial E}{\partial \mathbf{p}}$ , т. е.  $v_x = \frac{\partial E}{\partial p_x}$ ,  $v_y = \frac{\partial E}{\partial p_y}$ ,  $v_z = \frac{\partial E}{\partial p_z}$ ).

Зная закон дисперсии, можно по формуле (65.3) найти скорость частицы (закон дисперсии надо продифференцировать по  $p$ ). Так, например, если  $E = \frac{p^2}{2m}$ , то  $\mathbf{v} = \frac{dE}{dp} = \frac{p}{m}$ .

Фотон и фонон имеют неквадратичный закон дисперсии. Импульс фотона связан с его длиной волны соотношением де-Бройля  $p = h/\lambda$ . Энергия фотона равна  $E = h\nu = h \frac{c}{\lambda}$ . Следовательно, для фотона

$$E = cp. \quad (65.4)$$

Если вас удивляло, что импульс и скорость могут не быть пропорциональными друг другу, то посмотрите, как обстоит дело у фотона (или фонона). Скорость фотона (скорость света) постоянна, а вовсе не пропорциональна его импульсу (который тем больше, чем больше частота фотона и, следовательно, его энергия). Аналогично для фонона (§ 52)

$$E = vp, \quad (65.5)$$

где  $v$  — скорость звука в кристалле. Если длина звуковой волны не очень мала (во много раз больше постоянной решетки), скорость звуковой волны тоже является константой. Нетрудно видеть, что формула (65.3) дает правильное значение скорости фотона и фонона.

**Квазиимпульс.** Все сказанное выше содержало одно неявное предположение, которое является отнюдь не очевидным. Мы предполагали, что частица (например электрон в кристалле) обладает определенными энергией и импульсом, т. е. что энергия и импульс сохраняются во время движения. При движении в любом потенциальном поле, в том числе в периодическом электрическом поле кристалла\*), энергия действительно сохраняется (§ 26). Что касается импульса, то он сохраняется (т. е. остается постоянным) только в случае, если ни-

\*) Кристалл состоит из одинаковых ячеек. Если мы перейдем из некоторой точки одной ячейки в соответствующую точку другой ячейки, то поле кристалла окажется таким же. Следовательно, оно периодически повторяется в пространстве.

какие силы на частицу не действуют. В кристалле это отнюдь не так, поэтому в кристалле, строго говоря, частицам нельзя приписать определенного импульса. Однако, из-за периодичности кристалла у электрона (и фона) сохраняется другая векторная величина, называемая *квазиимпульсом* («почти импульсом»). Главное отличие квазиимпульса от импульса заключается в том, что каждая его составляющая меняется не от  $-\infty$  до  $+\infty$ , а в ограниченных пределах, от  $-\frac{\hbar}{2a}$  до  $+\frac{\hbar}{2a}$ , где  $a$  — постоянная решетки. Значения квазиимпульса, выходящие за пределы этого интервала, физически эквивалентны значениям квазиимпульса внутри интервала, поэтому и целесообразно считать, что квазиимпульс меняется в указанных пределах.

Причину этого пояснить здесь трудно. Физически же существование сохраняющейся векторной величины, похожей на импульс, объясняется тем, что кристалл хотя и микропериодичен, но макроскопически однороден. С точки зрения классической физики, когда электрон движется по кристаллу, периодическое поле последнего то ускоряет, то замедляет его движение, а в среднем, на участке макроскопически малом, но содержащем большое число постоянных решетки, электрон движется почти так, как свободная частица с сохраняющимся импульсом.

*Ферми-поверхностью* называется поверхность в пространстве квазиимпульсов, на которой энергия электронов постоянна и равна фермиевской предельной энергии  $E_F$ .

Электроны, расположенные около ферми-поверхности, являются наиболее активной частью всего электронного коллектива (им легче всего изменить свое состояние под действием внешних полей или температуры). Поэтому свойства металла, обусловленные электронами, зависят от закона дисперсии и вытекающей из него формы ферми-поверхности. Сюда относятся электропроводность металла, теплопроводность, магнитные свойства и т. д.

Для обычного закона дисперсии (65.1) ферми-поверхностью является сфера, изображенная на рис. 151. Для других законов дисперсии ферми-поверхности могут иметь совершенно иную форму.

Закон дисперсии (65.5) не квадратичен, а линейен, но энергия, определяемая формулой (65.5), зависит только от модуля импульса. Бывают и более сложные законы дисперсии, при которых энергия зависит не только от абсолютной величины импульса  $p$ , а и от его направления в кристалле. В этих случаях поверхность постоянной энергии (ферми-поверхность есть частный случай поверхности постоянной энергии) может иметь форму, очень далекую от сферической, и в частности может

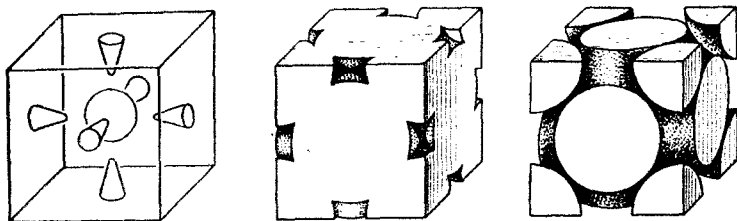


Рис. 154.

состоять из ряда отдельных замкнутых (закрытых) и незамкнутых (открытых) поверхностей. Примеры таких поверхностей изображены на рис. 154. Интервал изменения составляющих квазиимпульса равен  $h/a$  по всем осям, если решетка кубическая.

### § 66. Термоэлектронная и фотоэлектронная эмиссия из металла

Если металл нагреть до достаточно высокой температуры (практически по крайней мере до красного каления), из него начинают интенсивно «испаряться» электроны. Это явление называется *термоэлектронной эмиссией*. Добиться выхода электронов из металла можно и другими путями, например, освещая металл светом достаточно большой частоты (фотоэлектронная эмиссия) или помещая металл в очень сильное электрическое поле (автоэлектронная эмиссия).

При выходе электрона из металла меняется не только его кинетическая энергия, но и потенциальная. Поэтому необходимо выяснить прежде всего, какова потенциальная энергия электрона внутри и вне металла. Если

металл не заряжен, то на электрон, находящийся вне металла (на достаточно большом расстоянии от него), никакие силы не действуют. Следовательно, потенциальная энергия электрона \*) вне металла равна нулю. Внутри металла потенциальная энергия уже не может быть равна нулю, а должна быть отрицательной и достаточно большой по абсолютной величине. Иначе электроны, поскольку они имеют большую кинетическую энергию, свободно выходили бы из металла.

Отрицательная потенциальная энергия электрона в металле обусловлена притяжением электрона к положительным ионам решетки, точно так же, как в атоме, где электрон притягивается к ядру (§ 48). Другие электроны, отталкивающие данный, не могут изменить *знак* потенциальной энергии — каждый электрон старается держаться поближе к положительным ионам и подальше от других электронов.

**Потенциальная яма для электронов в металле.** Кристалл, в частности металл, имеет периодическую структуру, поскольку периодически расположены ионы. Поэтому и потенциальная энергия электронов в кристалле периодична \*\*).

В первой модели металла, модели Зоммерфельда (по отношению не в позднейших, более точных моделях, например зонной модели), вместо периодической потенциальной энергии берется ее среднее, постоянное всюду в кристалле, значение.

Итак, в рамках этой модели вне кристалла и внутри его потенциальная энергия постоянна (рис. 155), но эти постоянные значения отнюдь не совпадают. Вне кристалла потенциальная энергия  $U$  равна нулю, внутри она отрицательна; мы обозначим ее  $-U_0$ . Такой график называют *потенциальной ямой* (§ 28).

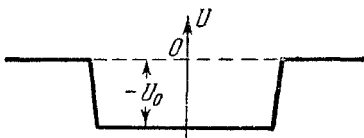


Рис. 155.

\*) То есть работа, которую нужно затратить, чтобы переместить электрон из бесконечности.

\*\*) Периодична в среднем, поскольку флуктуации (случайные колебания) плотности электронов и ионов, возникающие из-за хаотичности их движения, могут изменить в ту или другую сторону потенциал в данной ячейке кристаллической решетки.

На границе кристалла потенциальная энергия меняется от  $-U_0$  до 0. Это значит, что, выводя электрон за поверхность кристалла, мы должны выполнить работу, равную  $U_0$ .

Следовательно, на электрон у поверхности действуют силы, возвращающие его в кристалл. Происхождение этих сил можно усмотреть из рис. 156, на котором плоскость  $OO'$  означает поверхность кристалла (плоскость, заполненная положительными ионами). Огромное большинство электронов, имеющих кинетическую энергию, недостаточную для выхода из металла, двигаясь к поверхности, могут выйти за ее пределы лишь на незначительное расстояние. Затем силы притяжения со стороны положительных ионов заставляют их возвратиться обратно (траектория  $ABA'$ ). Вследствие этого в области  $OP$  всегда будет находиться некоторое число электронов, и, значит, область  $OP$  будет содержать отрицательный объемный заряд. Заполненная положительными ионами плоскость  $OO'$  и отрицательно заряженная область  $OP$  (расстояние  $OP$  — порядка постоянной решетки  $a$ ) составляют вместе двойной электрический слой, нечто вроде плоского конденсатора (см. § 28). На электрон, проходящий через двойной слой, действуют возвращающие в кристалл силы. Против этих сил необходимо выполнить работу, равную произведению заряда электрона на разность потенциалов двойного слоя.

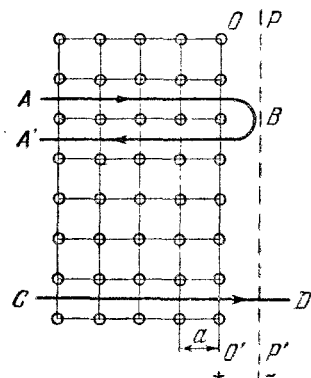


Рис. 156.

Вышедший за пределы двойного слоя электрон еще не избавлен, однако, от действия втягивающих сил. Дело в том, что вышедший электрон поляризует поверхность металла, вызывая на ней заряды противоположного знака\*). В § 31 мы уже рассмотрели «силы изображения»,

\*) В данном случае вышедший электрон несколько «отгоняет» другие электроны, и на поверхности появляется положительный заряд.



действующие на заряд вблизи проводящей поверхности. Чтобы удалиться от поверхности металла, электрон должен выполнить работу против силы изображения. Полная работа против сил в двойном слое и силы изображения равна глубине потенциальной ямы  $U_0$ .

**Работа выхода.** Приведенные выше соображения не означают, однако, что при нагревании металла электронам надо сообщить дополнительную энергию, равную  $U_0$ , для того чтобы они могли выйти из металла. Дело в том, что уже при абсолютном нуле температуры электроны обладают кинетическими энергиями от нуля до  $E_F$  (§ 63). Тем электронам, которые имеют кинетическую энергию  $E_F$ , надо сообщить для выхода лишь энергию  $U_0 - E_F$ . Эта величина называется *работой выхода*  $w$ :

$$w = U_0 - E_F. \quad (66.1)$$

Рис. 157 иллюстрирует это соотношение. На рисунке совмещены два графика — потенциальной ямы (рис. 155) и распределения электронов по кинетическим энергиям (рис. 152, б). При  $T = 0$  распределение имеет вид ступеньки (рис. 152, а).

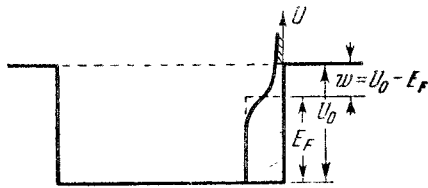


Рис. 157.

При нагревании появляется «хвост» фермиевского распределения. Выходят из металла те электроны, которые находятся в области «хвоста», показанной на рис. 157 штриховкой. Следует иметь в виду, что масштаб на этом рисунке не соблюден — при всех допустимых для твердого металла температурах (ниже точки плавления) заштрихованная часть, если ее изобразить с соблюдением масштаба, не была бы видна совсем.

Чем выше температура, тем больше хвост фермиевского распределения. Поэтому при повышении температуры увеличивается выход электронов из металла. В принципе электроны выходят из металла и при комнатной температуре, однако их число ничтожно мало. Значительная эмиссия наблюдается лишь из накаливаемого металла.

**Наблюдение термоэлектронной эмиссии.** Эмиссию можно экспериментально наблюдать с помощью двух-электродной электронной лампы (рис. 158). Катод  $K$

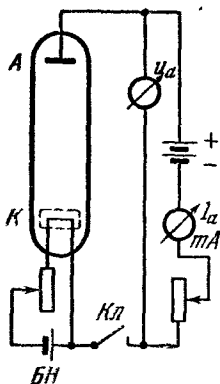


Рис. 158.

накаляется током батареи накала  $BH$ . В отсутствие напряжения между анодом  $A$  и катодом (разомкнутый ключ  $Kл$ ) вблизи катода образуется «электронное облако» — объемный заряд. Катод после выхода электронов заряжается положительно, процессы «испарения» и «конденсации» электронов происходят с одинаковой интенсивностью.

Если подать положительное напряжение  $u_a$  на анод, электроны начнут отсасываться с катода. При увеличении напряжения ток нарастает и при достаточно большом напряжении достигает максимального

значения (ток насыщения) — все эмиттируемые электроны при этом попадают на анод (рис. 159). Ток насыщения равен термоэлектронному току и при увеличении температуры катода (т. е. его накала) значительно возрастает (кривые на рис. 159). Небольшой ток при  $u_a = 0$  (по замкнутой цепи анод — катод, т. е. замкнутом ключе  $Kл$ ) объясняется существованием небольших начальных скоростей у вылетающих из катода электронов.

Различные металлы имеют различные работы выхода<sup>\*)</sup>: у цезия  $\omega = 1,8$  эв, у кальция 2,24 эв, у вольфрама 4,52 эв, у платины 6,27 эв.

При одной и той же температуре эмиссия будет интенсивнее, если катод будет иметь меньшую работу выхода, причем зависимость эмиссии от работы выхода очень сильна.

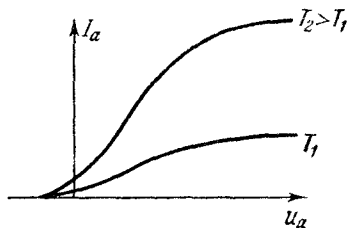


Рис. 159.

<sup>\*)</sup> Работа выхода несколько различна также для различных граней металлического кристалла. См. об этом § 68.

Поскольку, по технологическим причинам, нельзя изготовить катоды радиоламп или телевизионных трубок из цезия или других щелочных металлов, имеющих малую работу выхода, изготавливают катоды с покрытиями из цезия. Такой сложный катод имеет небольшую работу выхода, и его можно накалять не до таких высоких температур, как, например, вольфрамовый.

**Фотоэлектронная эмиссия.** Энергию, достаточную для выхода электронов, можно сообщить не только нагреванием, но и освещением (*фотоэффект*, или *фотоэлектронная эмиссия*). Свет распространяется по волновым законам, но излучается и поглощается в виде отдельных фотонов. Энергия фотона частоты  $\nu$  равна  $h\nu$ . Электрон металла может выйти наружу, только поглотив фотон с энергией большей, чем работа выхода. Следовательно, условием возможности фотоэффекта служит неравенство

$$h\nu \geq \omega. \quad (66.2)$$

Остаток энергии фотона  $h\nu - \omega$  превращается в кинетическую энергию вышедшего электрона или растрачивается при соударениях с другими электронами или решеткой (последнее означает испускание электроном фотонов).

Для выхода электрона, находящегося на ферми-границе, достаточно сообщить ему энергию  $h\nu_{\min} = \omega$  (рис. 157). Выше ферми-границы электронов у холодного металла ничтожно мало. Из более глубоких слоев — под ферми-поверхностью — вырывание электронов также возможно, если энергия фотона достаточно велика.

Минимальная частота света, при которой еще возможен фотоэффект, очевидно, равна

$$\nu_{\min} = \frac{\omega}{h}. \quad (66.3)$$

Эта частота носит название *красной* \*) *границы фотоэффекта*. Если работа выхода  $\omega = 2,5 \text{ эв}$ , то

$$\nu_{\min} = \frac{2,5 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}}{6,6 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}} = 0,6 \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{сек}}.$$

\*) Среди всех цветов, входящих в состав белого цвета, красный цвет имеет наименьшую частоту. Поэтому о минимально возможной частоте  $\nu_{\min}$  говорят как о «красной границе», хотя в действительности  $\nu_{\min}$  может соответствовать совсем не красному цвету.

Это частота, отвечающая видимому свету (зеленый цвет). При работе выхода  $5 \text{ эв}$  красная граница лежит в ультрафиолетовой области, т. е. минимальный квант, способный вызвать фотоэффект в этом случае, — это квант ультрафиолетового излучения. Соответственно этому катоды фотоэлементов, рассчитанных на различные интервалы шкалы электромагнитных волн, можно изготавливать из металлов с различной работой выхода. Катод с работой выхода  $5 \text{ эв}$  вообще никак не будет реагировать на видимый свет.

### § 67. Автоионизация и автоэлектронная эмиссия

Автоэлектронной эмиссией называется выход электронов из металла под действием очень сильного электрического поля. Вполне аналогично этому явлению явление автоионизации — ионизации атомов сильным полем. Начнем рассмотрение вопроса с автоионизации.

Потенциальная энергия электрона в атоме (в качестве примера возьмем атом водорода) равна

$$U_1 = -\frac{e^2}{r}$$

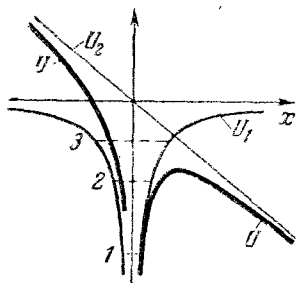


Рис. 160.

(§ 48). На рис. 120 приведен график этой функции. На графике отмечены первые уровни энергии электрона на разрешенных орбитах в атоме водорода. Если атом находится в сильном однородном электрическом поле, к потенциальной энергии электрона в поле ядра  $U_1$  добавляется потенциальная энергия его во внешнем поле  $U_2$ . В § 28 получено выражение для этой величины:

$$U_2 = -eEx.$$

Полная потенциальная энергия электрона  $U = U_1 + U_2$  показана на рис. 160. Там же приведены графики функций  $U_1$  и  $U_2$ .

Если ранее электрон на всех энергетических уровнях двигался в ограниченном пространстве — между стенками потенциальной ямы, то теперь некоторые из уровней

(на рис. 160, например, уровень 3) оказались «открытыми» справа. Электрон, находящийся на таком уровне, может свободно выйти из атома. Это означает, что он «вырван» из атома сильным внешним полем. В классической физике в этом заключалось бы все действие поля.

Если учесть, что поле ядра, действующее на электрон, очень велико (порядка  $10^9$  в/см) и гораздо больше любого внешнего поля, которое можно фактически создать ( $10^7$ — $10^8$  в/см), то автоионизация электрона, находящегося на низком энергетическом уровне, казалось бы, невозможна. В действительности же уже в полях порядка  $10^6$ — $10^7$  в/см возникает значительная ионизация с уровней, подобных уровню 2, лежащему несколько ниже потенциального барьера. Это замечательное явление обусловлено так называемым *туннельным эффектом* (прохождением электронов сквозь потенциальный барьер), возможность которого обнаружила квантовая механика.

**Туннельный эффект.** Рассмотрим прохождение частицы сквозь прямоугольный потенциальный барьер (рис. 161). Пусть слева направо, по направлению к барьеру, движется частица с энергией  $E$ . Левее и правее барьера (в областях  $A$  и  $C$ ) потенциальная энергия электрона равна нулю, в области барьера  $B$  она равна  $U_0$ .

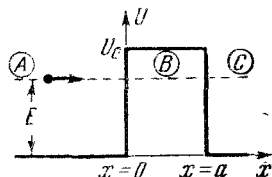


Рис. 161.

Как было показано в § 28, кинетическая энергия отсчитывается всюду от кривой  $U(x)$ . В областях  $A$  и  $C$  кинетическая энергия равна полной энергии. На границе барьера ( $x=0$ ) кинетическая энергия равна нулю, а в области внутри барьера она должна была бы стать отрицательной (потенциальная энергия там больше полной). Отрицательная кинетическая энергия — бессмыслица, так как она соответствует мнимой скорости; следовательно, частица не может проникнуть внутрь барьера. Эти соображения классической механики, однако, неверны в квантовой механике.

Дело в том, что в квантовой механике полная энергия не равна сумме кинетической и потенциальной (см. по

этому поводу также конец § 26). Кинетическая энергия  $E_{\text{кин}} = p^2/2m$ , т. е. зависит от импульса, а потенциальная энергия — от координат. Соотношение неопределенностей (§ 47) показывает, что координата и импульс не могут иметь одновременно точных значений, следовательно, не имеют одновременно точных значений потенциальная и кинетическая энергии. Если мы утверждаем, что частица находится в области барьера, то неопределенность  $\Delta x$  в ее координате равна ширине барьера  $a$  (рис. 161). Следовательно, появляется неопределенность в импульсе (тем бóльшая, чем меньше ширина барьера)  $\Delta p \sim \hbar/a$  и в кинетической энергии  $\frac{(\Delta p)^2}{2m} \sim \frac{\hbar^2}{2ma^2}$ . Если неопределенность в кинетической энергии  $\hbar^2/2ma^2$  порядка «нехватки энергии» электрона, т. е. порядка разности  $U_0 - E$ , то частица уже может пройти сквозь барьер. Перепишем условие  $\frac{\hbar^2}{2ma^2} \sim U_0 - E$  в виде

$$\frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} a \sim 1. \quad (67.1)$$

Это — условие проходимости барьера. Если стоящее слева выражение во много раз больше единицы — туннельный эффект отсутствует, если оно порядка или меньше единицы — барьер пропускаем.

Количественной характеристикой проходимости барьера служит так называемый коэффициент прозрачности  $D$ . Этот коэффициент представляет собой отношение числа прошедших через барьер частиц к числу падающих на него. В случае, если есть всего одна частица, движущаяся в потенциальной яме и многократно подходящая к барьеру (рис. 162), коэффициент прозрачности равен отношению числа удачно завершившихся попыток прохождения через барьер к общему числу попыток, т. е. к полному числу ударов о барьер. В квантовой механике доказывается, что

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)} a\right). \quad (67.2)$$

Здесь  $D_0$  — численный коэффициент, по порядку величины равный единице. Аналогичная формула имеет ме-

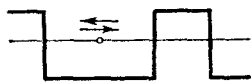


Рис. 162.

сто и в случае барьера прямоугольной формы. Из формулы (67.2) вытекает опять условие проницаемости (67.1), так как при большой величине показателя  $\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}a$  коэффициент прозрачности становится чрезвычайно малым. Если, например,  $U_0 - E = 1 \text{ эв}$  и ширина барьера  $a = 10^{-8} \text{ см}$ , то показатель (для электрона с массой  $m = 9 \cdot 10^{-28} \text{ г}$ ) равен 1,2. Коэффициент прозрачности при этом порядка единицы. Если же  $a = 10^{-7} \text{ см}$ , то показатель становится равным 12, а коэффициент прозрачности  $D \sim 10^{-5}$ . При  $a = 5 \cdot 10^{-7} \text{ см}$  коэффициент прозрачности  $D \sim 10^{-25}$ , т. е. практически равен нулю.

Вероятность выхода за секунду равна числу ударов о барьер за секунду, умноженному на  $D$ . Если ширина потенциальной ямы  $L \sim 10^{-8} \text{ см}$ , а скорость электрона в ней  $v \sim 10^8 \text{ см/сек}$ , то число ударов за секунду  $v/L \sim 10^{16}$ . Следовательно, при  $U_0 - E \sim 1 \text{ эв}$  и  $a \sim 10^{-8} \text{ см}$  среднее время, через которое электрон проходит сквозь барьер, так называемое «время ожидания выхода»  $\tau$ , составляет около  $10^{-16} \text{ сек}$ , при  $a \sim 10^{-7} \text{ см}$   $\tau \sim 10^{-11} \text{ сек}$ , а при  $a \sim 5 \cdot 10^{-7} \text{ см}$  время ожидания  $\tau \sim 10^9 \text{ сек}$ , или 30 лет.

Вернемся теперь к явлению автоионизации. Электрон на уровне 2 (рис. 160) может «просочиться» сквозь потенциальный барьер, если только этот барьер не очень широк. В отсутствие поля барьер бесконечно широк. Чем сильнее поле, тем больше наклон прямой на рис. 160 и тем уже барьер. Для электрона в основном состоянии (уровень 1) барьер шире и выше, чем для электронного уровня 2, соответственно коэффициент прозрачности гораздо меньше.

**Автоэлектронная эмиссия.** Автоэлектронная эмиссия аналогична автоионизации и представляет собой просачивание электронов металла сквозь потенциальный барьер, созданный у поверхности электрическим полем.

Рассмотрим, прежде всего, как меняется потенциальная яма, если металл не нейтрален, а обладает электрическим зарядом. Положительно заряженный металл представляет собой более глубокую потенциальную яму для электрона, чем нейтральный. Электрон, вышедший из положительно заряженного металла, будет продолжать притягиваться к нему. Для удаления электрона на

бесконечность дополнительно придется выполнить работу  $A = e(0 - \varphi) = -e\varphi$  ( $e < 0$ ,  $\varphi > 0$ ). Работа эта положительна, а это значит, что потенциальная энергия

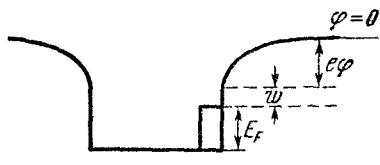


Рис. 163.

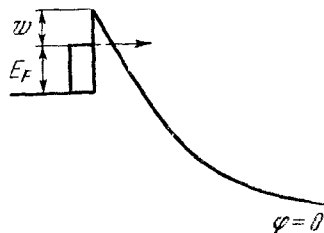


Рис. 164.

электрона у поверхности металла была меньше, чем на бесконечности, т. е. отрицательна. Следовательно, потенциальная яма положительно заряженного металла должна иметь вид рис. 163.

По сравнению с потенциальной ямой нейтрального металла она опускается.

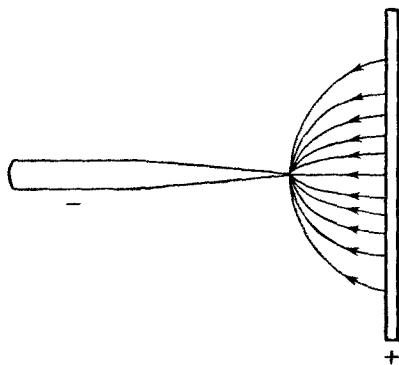


Рис. 165.

Если металл заряжен отрицательно, его потенциальная яма поднимается (рис. 164), и на краю ямы возникает потенциальный барьер, о котором шла речь выше. Если поле достаточно сильно, барьер оказывается проницаемым, и электроны, находящиеся вблизи границы Ферми, могут выйти наружу.

Для других электронов, расположенных ниже уровня Ферми, барьер шире и коэффициент прозрачности его меньше.

Для экспериментального осуществления автоэлектронной эмиссии нужна большая напряженность поля. Ее можно добиться, применяя эмиттер игольчатой формы (рис. 165).



## § 68. Контактная разность потенциалов

Уже очень давно было обнаружено, что при контакте двух различных металлов один из них заряжается положительно, другой — отрицательно, и между ними возникает разность потенциалов, называемая *контактной*. Она не очень мала — от десятых долей вольта до нескольких вольт. С помощью обычного электроскопа можно обнаружить эту контактную разность потенциалов, пользуясь следующим приемом (рис. 166). На стержень электроскопа навинчивается диск из металла *A*.

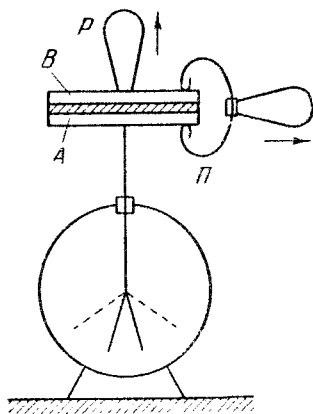


Рис. 166.

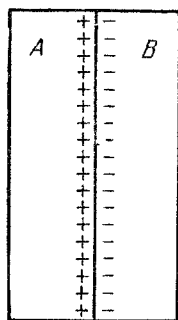


Рис. 167.

На него наносится тонкий слой диэлектрика (обычно жидкого или лака), а сверху кладется диск из металла *B*. С помощью проволоки *П* между дисками устанавливается контакт, после чего проволока убирается. Теперь диски заряжены и вместе со слоем диэлектрика составляют заряженный конденсатор. Разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  на нем невелика, но ее можно сделать гораздо больше, если, не меняя заряда конденсатора, уменьшить его емкость (напомним, что  $\varphi_1 - \varphi_2 = q/C$ ). Для этого надо, пользуясь изолирующей ручкой *P*, поднять диск *B*. Листочки электроскопа разойдутся, отмечая увеличение разности потенциалов. На другом языке это означает, что заряд диска *A*, первоначально связанный с зарядом диска *B*, теперь может распределиться по

всей поверхности диска, стержня и листочков электро-скопа. Отталкивание листочков вызовет их расхождение.

При контакте двух разнородных металлов некоторое (относительно небольшое) число электронов переходит из одного металла в другой (на рис. 167 из металла *A* в металл *B*). Образующиеся заряды, если металлы продолжают находиться в контакте, локализованы в очень тонких поверхностных слоях, порядка  $10^{-8}$ — $10^{-7}$  см. В металлах для создания фактически наблюдающейся разности потенциалов требуется лишь малая доля количества электронов, которое содержится в слое толщиной  $10^{-8}$ — $10^{-7}$  см. В полупроводниках концентрация свободных электронов гораздо меньше, поэтому там могут понадобиться электроны из гораздо более толстого слоя, порядка  $10^{-4}$ — $10^{-5}$  см.

**Образование контактной разности потенциалов.** Механизм образования контактной разности потенциалов следующий. Поскольку металлы различны, у них различной глубины потенциальные ямы и различные уровни Ферми.

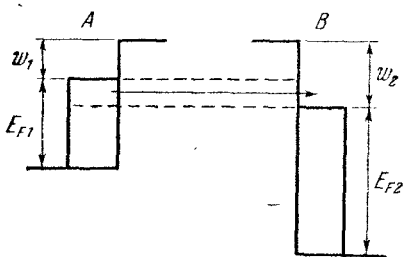


Рис. 168.

До контакта обе потенциальные ямы выглядят так, как показано на рис. 168 (температуру будем считать сначала равной абсолютному нулю). Внешние края потенциальных ям находятся на одинаковом (нулевом) уровне, так как оба металла не заряжены. Уровни Ферми обоих металлов отличаются, поскольку у них различные работы выхода (пусть  $\omega_1 < \omega_2$ ).

Электронам металла *A*, находящимся вблизи уровня Ферми  $E_{F1}$ , энергетически выгодно перейти на незанятые уровни\*), расположенные выше  $E_{F2}$ . При контакте такие переходы (показанные стрелкой) действительно осуществляются, некоторое число электронов из металла *A* (с меньшей работой выхода  $\omega_1$ ) переходит в металл *B* (с большей работой выхода  $\omega_2$ ). В результате металл *A*

\*) Энергетически выгодно потому, что при переходе электрона он уменьшает свою энергию.

заряжается положительно, его потенциальная яма опускается (см. предыдущий параграф), металл  $B$  заряжается отрицательно и его потенциальная яма поднимается. Между поверхностями обоих металлов появляется разность (скачок) потенциалов. Смещение идет до тех пор, пока не сравняются уровни Ферми (рис. 169).

Можно доказать, и для дальнейшего это будет важным, что равенство уровней Ферми всегда должно иметь место, если два тела находятся в состоянии термодинамического равновесия.

Равенство уровней Ферми (которые называются еще химическими потенциалами) означает, что число электронов, переходящих за секунду из металла  $A$  в металл  $B$ , равно числу электронов, переходящих за секунду в обратном направлении.

Между металлами устанавливается разность потенциалов, величина которой видна из рис. 169. Разность потенциальных энергий электрона у поверхностей металлов  $A$  и  $B$  равна разности работ выхода  $w_2 - w_1$ . Разность потенциалов получится отсюда делением на заряд электрона:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{w_2 - w_1}{e}. \quad (68.1)$$

Заряд электрона  $e$  отрицателен, поэтому потенциал  $\varphi_1$  (металла с меньшей работой выхода) выше потенциала  $\varphi_2$  (металла с большей работой выхода).

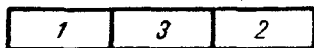


Рис. 170.

Разность потенциалов между двумя металлами  $1$  и  $2$  не изменится, если вместо непосредственного контакта соединить их проводником из третьего металла (рис. 170). На границе между  $1$  и  $3$  скачок потенциала будет равен  $(w_3 - w_1)/e$ , на границе между  $3$  и  $2$  он будет равен  $(w_2 - w_3)/e$ . Вдоль каждого проводника (если

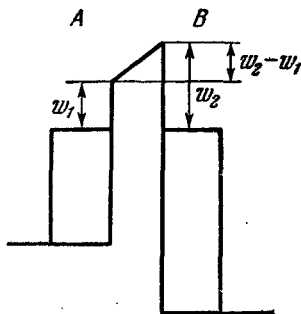


Рис. 169.

его температура во всех точках постоянна) потенциал постоянен, поэтому полная разность потенциалов между 1 и 2 равна

$$\frac{\omega_3 - \omega_1}{e} + \frac{\omega_2 - \omega_3}{e} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{e},$$

т. е. такая же, как при непосредственном контакте. То же получится при любом числе промежуточных проводников.

Если же проводники, приведенные предварительно в контакт, развести, разность потенциалов между ними изменится. Это имеет место, например, в опыте, описанном в начале этого параграфа.

**Поле между гранями кристалла.** Как мы уже упоминали в § 66, работа выхода из различных граней металлического монокристалла может быть несколько различной. Это происходит из-за того, что плотность ионов на различных кристаллографических плоскостях также различна (см. рис. 171), из-за чего, например, получается различным и двойной электрический слой на них.

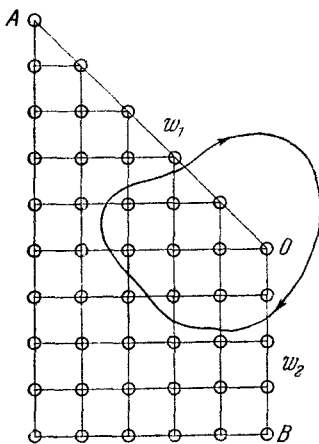


Рис. 171.

Может показаться, что неравенство работ выхода из различных граней позволяет создать вечный двигатель. Уровень Ферми всюду в металле постоянен. Поэтому, казалось бы, можно электрону, находящемуся на фермиевском уровне, сообщить энергию  $\omega_1$ , извлекая его из поверхности  $AO$  (рис. 171), а затем впустить

его обратно в металл через поверхность  $OB$ , где работа выхода  $\omega_2 > \omega_1$ . Попадая снова на фермиуровень, электрон будет отдавать металлу энергию  $\omega_2$ , большую, чем затраченная на его извлечение.

В действительности такой «вечный двигатель» не будет работать, как всякий другой. Причина этого заключается в том, что между гранями  $AO$  и  $OB$  будет существовать контактная разность потенциалов  $(\omega_1 - \omega_2)/e$ .

Так же как и два разных металла, две различные грани будут обладать поверхностными зарядами, и между ними будет существовать электрическое поле. Это поле будет препятствовать переносу электрона с  $AO$  на  $OB$ . Для переноса придется выполнять как раз работу  $\omega_2 - \omega_1$ , так что никакого выигрыша в энергии не получится.

Если на поверхность металла осаждаются положительные или отрицательные ионы газа, работа выхода меняется. В частности, осевшие ионы могут ликвидировать различие в работах выхода различных граней монокристалла.

**Где приходится встречаться с контактной разностью потенциалов.** Контактная разность потенциалов играет существенную роль в работе электронных приборов, например электронной лампы. Между анодом и катодом, изготовленными из различных металлов, существует разность потенциалов даже в отсутствие батареи. Вылетевшие из катода электроны ускоряются или задерживаются этой разностью потенциалов.

Контактная разность потенциалов возникает, конечно, не только между двумя металлами, но и между двумя полупроводниками, металлом и полупроводником, двумя диэлектриками и т. д., причем соприкасающиеся тела могут быть не только твердыми, но и жидкими. В частности, контактной является разность потенциалов между электродом гальванического элемента и электролитом.

**Зависимость контактной разности потенциалов от температуры.** Контактная разность потенциалов зависит от температуры. Хотя эта зависимость и очень слабая,

она имеет решающее значение для термоэлектрических явлений, рассматриваемых в следующем параграфе. Зависимость эта возникает из-за того, что сама фермиевская

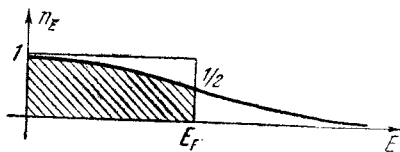


Рис. 172.

энергия  $E_F$  меняется с температурой. На рис. 172 изменение функции распределения Ферми с температурой для наглядности весьма преувеличено. Левая (относительно  $E_F$ ) и правая части кривой совершенно симметричны, но правая простирается до бесконечности. Общее

число электронов при повышении температуры остается, разумеется, постоянным. Это значит, что уменьшение числа электронов в области  $E < E_F$  (т. е. число дырок в этой области) должно равняться числу электронов, перешедших в область  $E > E_F$ .

Если  $E_F$  не сдвигается при повышении температуры, то такого равенства быть не может хотя бы потому, что заштрихованная площадь уменьшается не на такую величину, на которую увеличивается площадь справа от  $E_F$  (из-за бесконечности «хвоста» справа и конечности его слева \*)). Чтобы уменьшилась заштрихованная площадь, фермиевский уровень должен сдвинуться влево. Тогда уменьшение числа электронов слева от  $E_F$  произойдет не только из-за появления свободной площади сверху от заштрихованной области, но и из-за сдвига этой области влево, т. е. из-за уменьшения длины прямоугольника  $E_F$ . Иными словами, фермиевская энергия  $E_F$  должна уменьшаться с повышением температуры. Понятно также, что чем больше  $E_F$ , тем меньше отличаются «хвосты» для электронов и дырок, и поэтому тем меньше сдвиг  $E_F$ .

Вычисление (с учетом обстоятельства, отмеченного в сноске) показывает, что сдвиг  $E_F$  равен

$$\Delta E_F = -\frac{\pi^2}{12} \frac{(kT)^2}{E_{F0}}, \quad (68.2)$$

где  $E_{F0}$  — фермиевская энергия при  $T = 0$ . Этот сдвиг весьма мал. Если  $E_{F0} = 5$  эв, а температура комнатная ( $T = 300^\circ \text{K}$ ,  $kT \approx \frac{1}{40}$  эв), сдвиг  $\Delta E_F$  порядка  $10^{-4}$  эв. Эту величину, конечно, не надо учитывать при вычислении контактной разности потенциалов, поскольку работа выхода определяется со значительно меньшей точностью. Однако сдвиг оказывается весьма существенным для термоэлектрических явлений, так как он зависит от температуры.

Отметим, что хотя фермиевский уровень с повышением температуры понижается, средняя энергия электронов увеличивается, так как электроны переходят в со-

\*) В действительности область  $E > E_F$ , расположенная вне сферы Ферми, содержит больше ячеек на данный интервал энергии, т. е. имеется больше мест для электронов, чем в области  $E < E_F$ , поэтому этот эффект еще многократно усугубляется.

стояния с большей энергией. Добавка к средней энергии  $\bar{\epsilon}$  (по сравнению со средней энергией при  $T = 0$ ) равна

$$\Delta\bar{\epsilon} = \frac{\pi^2}{4} \frac{(kT)^2}{E_{F0}}. \quad (68.3)$$

## § 69. Термоэлектрические явления

Составим замкнутую цепь из двух (или большего числа) спаянных между собой разнородных проводников 1 и 2 (рис. 173), называемую *термопарой*. В каждом из спаев устанавливается контактная разность потенциалов. Если температура во всех точках цепи одинакова, контактные разности потенциалов будут также одинаковы и противоположны по знаку. Ток в цепи будет отсутствовать, вся система будет находиться в термодинамическом равновесии.

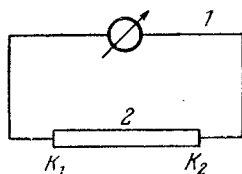


Рис. 173.

Это равновесие, однако, нарушится, если один из спаев термопары нагреть или охладить. Вследствие зависимости фермиевской энергии от температуры (формула (68.2)) от нее будет зависеть и контактная разность потенциалов. Контактные разности потенциалов спаев  $K_1$  и  $K_2$  окажутся различными и поэтому не будут компенсировать друг друга (ниже более подробно рассматривается, как возникает этот эффект).

Разность контактных разностей потенциалов представляет собой одну из двух составляющих *термоэлектрической эдс*. Вторая составляющая обусловлена градиентом температуры между спаями. В модели свободных электронов (и при условии, что длина свободного пробега электронов постоянна, т. е. не зависит от их скорости) обе составляющие равны по величине и по знаку; таким образом, первая составляющая просто удваивается. В реальных металлах и полупроводниках составляющие термоэдс различны по величине и даже по знаку.

**Эффект Зеебека.** Возникновение термоэлектрической эдс называется *явлением Зеебека*. Термоэдс  $\mathcal{E}$  (а вместе с ней и вызываемый ею электрический ток) обращается

в нуль вместе с разностью температур спаев:

$$\mathcal{E} = \alpha(T_1 - T_2). \quad (69.1)$$

Здесь  $\alpha$  — коэффициент, который тоже зависит, вообще говоря, от  $T_1$  и  $T_2$ , но не обращается в нуль\*) при  $T_1 = T_2$ . Для термопары сурьма — свинец  $\alpha = = 43 \cdot 10^{-6}$  вольт/градус (при  $T_1$  и  $T_2$ , близких к комнатной).

С помощью термопары можно измерить температуру спая (или, точнее, разность температур между двумя спаями). Включенный в цепь гальванометр измеряет силу тока  $I = \mathcal{E}/R$  (где  $R$  — полное сопротивление цепи), отсюда определяется  $\mathcal{E}$ , а по эдс — разность температур. Гальванометр можно, для данной термопары, проградуировать так, чтобы он показывал сразу разность температур. Поскольку точность электрических измерений вообще весьма велика, с такой же высокой точностью можно измерять температуру.

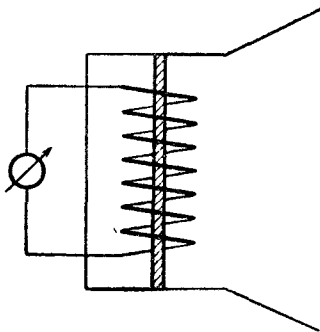


Рис. 174.

Если соединить несколько ( $N$ ) термопар последовательно в так называемый *термостолбик* (рис. 174) и нагревать спай, выведенные в одну сторону, точность измерений повышается в  $N$  раз. Термостолбиком, подключенным к точному гальванометру, можно обнаружить горящую свечу на расстоянии порядка километра или измерить интенсивность света звезды.

Термопара представляет собой прибор, непосредственно преобразующий тепловую энергию в электриче-

\*) Из формулы (68.2) легко понять, что термоэдс должна быть пропорциональна разности квадратов температур спаев  $T_1^2 - T_2^2$ . Тогда  $\alpha$  пропорциональна  $T_1 + T_2$ . Так и получается в модели Зоммерфельда. Однако в действительности электроны не свободны, а движутся в поле кристаллической решетки. Выражение для термоэдс в этом случае получается более сложным, но оно, конечно, обращается в нуль при  $T_1 = T_2$  и меняет знак при изменении знака  $T_1 - T_2$ . Поэтому термоэдс обязательно содержит множитель  $T_1 - T_2$ .



скую. Мощные металлические термопары с успехом заменили бы тепловые электростанции, если бы не низкий коэффициент полезного действия, который им присущ. Значительно бóльшим кпд обладают полупроводниковые термопары. У них гораздо больший коэффициент  $\alpha$  (см. формулу (69.1)) и меньше теплопроводность, что уменьшает тепловые потери — передачу тепла вдоль термопары от одного спая к другому, охлаждение нагреваемой части термопары внешней атмосферой. В Институте полупроводников Академии наук СССР построены полупроводниковые термоэлектрогенераторы, которые имеют кпд порядка 15%.

**Эффект Пельтье.** Существует эффект, обратный описанному выше эффекту Зеебека. Он называется *эффектом Пельтье*. Если через цепь, состоящую из нескольких проводников (рис. 173), пропустить ток, то, в дополнение к джоулевому теплу, в одном из спаев выделяется, а в другом поглощается некоторое количество тепла:

$$Q_{\text{П}} = \Pi It, \quad (69.2)$$

где  $I$  — сила тока,  $t$  — время его пропускания, а  $\Pi$  — коэффициент Пельтье, зависящий от природы контактирующих веществ и от температуры. При изменении направления тока меняется знак  $Q_{\text{П}}$ .

Эффект Пельтье может быть использован для построения холодильного устройства (рис. 175). Если выбрать такое направление тока, при котором спай  $A$  будет охлаждаться, а спай  $B$  — нагреваться, температура внутри холодильника будет понижаться, а пространство вне холодильника — нагреваться (что происходит при любой конструкции холодильника). Практически холодильник может быть построен лишь на полупроводниковых термоэлементах (термопарах), так как кпд металлических слишком мал.

**Эффект Томсона.** Наконец, третий термоэлектрический эффект (Томсона) заключается в том, что, если через проводник, разные точки которого имеют различную температуру, пропускать ток, то в проводнике выделяется или поглощается тепло. Знак тепла Томсона  $Q_{\text{T}}$

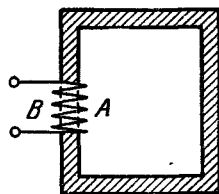


Рис. 175.

зависит от относительного направления тока и градиента температуры.

Заметим, что тепло Пельтье и тепло Томсона пропорциональны первой степени тока  $I$ , в то время как тепло Джоуля — квадрату тока. Это означает, что при перемене знака тока первые две величины также меняют знак, в то время как тепло Джоуля всегда положительно. При достаточно малой силе тока тепло Джоуля, квадратичное по току, становится меньше, чем линейные по току  $Q_P$  и  $Q_T$ .

**Механизм возникновения термоэлектрических явлений.** Явление Зеебека существенно связано с изменением уровня Ферми с температурой. Рассмотрим цепь

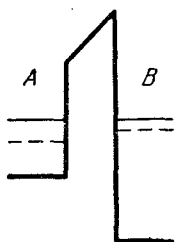


Рис. 176.

(рис. 173), в которой оба контакта  $K_1$  и  $K_2$  имеют  $T = 0$ . Тогда в каждом из спаев уровень Ферми в обоих металлах одинаков (рис. 176, сплошные линии). Нагреем теперь один из спаев. Тогда, как мы знаем (§ 68), уровни Ферми контактирующих металлов опустятся, причем больше в том металле, где энергия Ферми  $E_F$  меньше (на рисунке — слева). Уровни Ферми при  $T \neq 0$  отмечены пунктиром. Получившаяся разность уровней, хотя и весьма малая, вызовет перетекание электронов (справа налево). Если бы цепь была разомкнута, металл  $A$  получил бы дополнительный отрицательный заряд, металл  $B$  — положительный и перемещение потенциальных ям привело бы к уравниванию фермиевских уровней. В замкнутой цепи перешедшие в металл  $A$  электроны пойдут по цепи дальше. Неравенство уровней, а вместе с ним и ток сохранятся до тех пор, пока спаи будут подогреваться. Разумеется, нет необходимости в том, чтобы один из спаев поддерживался при  $T = 0$ . Нужно только, чтобы температура спаев была различна.

Другие два термоэлектрических явления, Томсона и Пельтье, связаны с прохождением через цепь тока, созданного внешним источником эдс. Если электроны движутся от горячего конца проводника к холодному (т. е. ток идет в обратном направлении), то они переносят с собой избыточную тепловую энергию, которая и выделяется в областях с более низкой температурой. При движении в обратном направлении электроны должны

«нагреться», это совершается за счет тепла решетки. Таково, в первом приближении, объяснение эффекта Томсона.

Эффект Пельтье (выделение или поглощение тепла на контакте при прохождении тока) вызывается тем, что электроны, переходя с более высокого фермиевского уровня на более низкий (на рис. 176 справа налево), отдают избыточную энергию решетке, нагревая ее. Переход в обратном направлении может происходить лишь за счет тепла решетки, т. е. сопровождается охлаждением контакта.

## § 70. Энергетический спектр

Понятие энергетического спектра является важнейшим понятием современной электронной теории. Под энергетическим спектром понимается совокупность разрешенных для электронов значений энергии. Аналогично можно ввести понятие энергетического спектра фононов и всех других частиц.

Если известен закон дисперсии (т. е. зависимость энергии от импульса, см. § 65), то из него вытекает и энергетический спектр. Так, например, для свободного электрона энергия равна  $E = p^2/2m$ . Она принимает все значения от нуля до бесконечности (квадрат импульса меняется от 0 до  $\infty$ ).

Удобно изображать энергетический спектр в тех же координатах, что и потенциальные диаграммы: на одной оси откладывается энергия, на другой — координата частицы. Если энергия сохраняется, как это имеет место при движении в потенциальном поле, то она не зависит от координат, и поэтому движению с данной энергией соответствует линия, параллельная оси  $Ox$ . Ее называют *уровнем энергии* (один из таких уровней отмечен пунктиром на рис. 177). Для свободной частицы разрешены все положительные значения энергии, т. е. все уровни, лежащие выше  $E = 0$ . Разрешенные уровни заполняют сплошь всю верхнюю полуплоскость. На рис. 177 эта

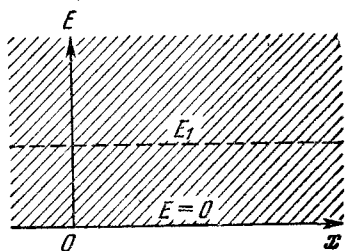


Рис. 177.

область заштрихована. Такой спектр называется *непрерывным*, или *сплошным*.

За каждым уровнем энергии электрона скрывается множество *разных состояний его движения*. Энергия свободного электрона равна  $p^2/2m$ , и поэтому все электроны, имеющие импульсы, разные по направлению, но равные по модулю, будут иметь одинаковую энергию, т. е. находиться на одном и том же уровне. Все импульсы, одинаковые по модулю, лежат в пространстве импульсов на сфере (рис. 178), и все они отвечают одному и тому же уровню энергии. Следовательно, количество разных состояний движения, отвечающих одному и тому же уровню энергии, равно числу ячеек в пространстве импульсов (§ 62), находящихся на поверхности сферы\*).

Энергия электрона в потенциальной яме (с «плоским дном») равна

$$E = \frac{p^2}{2m} + (-U_0).$$

В классической механике для такой частицы разрешены все уровни энергии от  $-U_0$  до  $+\infty$  (рис. 179). В квантовой механике энергетический спектр в этом случае отличается от сплошного спектра (рис. 179). В области  $-U_0 < E < 0$  спектр становится дискретным. Электрон в потенциальной яме ведет себя как волна, заключенная между стенками, от которых она отражается. Дело здесь обстоит так же, как с волной на струне, натянутой между двумя опорами. На струне могут существовать только такие

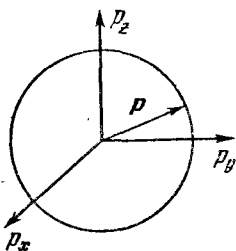


Рис. 178.

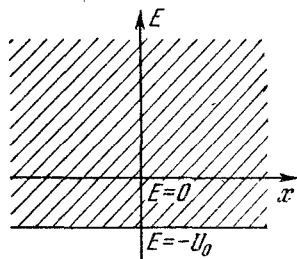


Рис. 179.

\* ) Это количество называется *степенью вырождения* данного уровня энергии. Точнее надо говорить не о числе ячеек, отвечающих данному уровню энергии  $E$ , а о числе ячеек, находящихся в тонком сферическом слое между  $E$  и  $E + \Delta E$ , т. е. о числе ячеек, отвечающих малому интервалу энергии  $\Delta E$ .

стоячие волны, которые имеют узлы\*) на зажимах. Длина волны, следовательно, должна быть такова, чтобы между зажимами укладывалось целое число полуволи (см. рис. 180). Если обозначить длину волны через  $\lambda$ , длину струны  $L$ , то должно выполняться условие

$$n \frac{\lambda}{2} = L, \quad (70.1)$$

где  $n$  — целое число (количество полуволи, укладываемых на струне). Отсюда находятся возможные длины волн:

$$\lambda = \frac{2L}{n}. \quad (70.2)$$

На рис. 180 показаны колебания, соответствующие значениям  $n = 1, 2, 3$ .

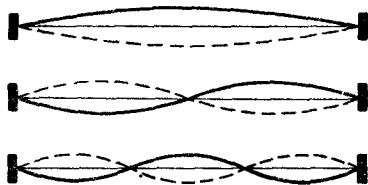


Рис. 180.

Аналогично этому, в достаточно глубокой потенциальной яме, на стенках которой электронная волна имеет узлы, должно укладываться целое число полуволи, т. е. выполняться соотношение (70.2). Длина волны электрона (§ 47) определяется формулой де-Бройля  $\lambda = h/p$ . Отсюда находятся допустимые значения импульса электрона:

$$p = \frac{h}{2L} n. \quad (70.3)$$

В трехмерной потенциальной яме такому соотношению удовлетворяет каждая из проекций импульса:

$$p_x = \frac{h}{2L} n_1, \quad p_y = \frac{h}{2L} n_2, \quad p_z = \frac{h}{2L} n_3. \quad (70.4)$$

Следовательно, электрон в потенциальной яме может иметь лишь определенные, дискретные значения импульса. Отсюда легко найти допустимые значения кинетической энергии  $E = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/2m$ :

$$E_{n_1, n_2, n_3}^{\text{кин}} = \frac{h^2}{8mL^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2). \quad (70.5)$$

\*) Узлом стоячей волны называется точка, в которой амплитуда колебаний равна нулю.

В частном случае одномерной потенциальной ямы

$$E_n^{\text{кин}} = \frac{\hbar^2}{8mL^2} n^2. \quad (70.6)$$

Таким образом, согласно квантовой механике электрон в потенциальной яме может иметь лишь дискретные значения энергии, т. е. может находиться только на дискретных уровнях. Уровни *полной* энергии имеют вид

$$E_n = -U_0 + \frac{\hbar^2}{8mL^2} n^2. \quad (70.7)$$

Вместо непрерывного спектра рис. 179 имеем спектр частично дискретный (при  $-U_0 < E < 0$ ), частично сплошной (при  $E > 0$ ) (рис. 181).

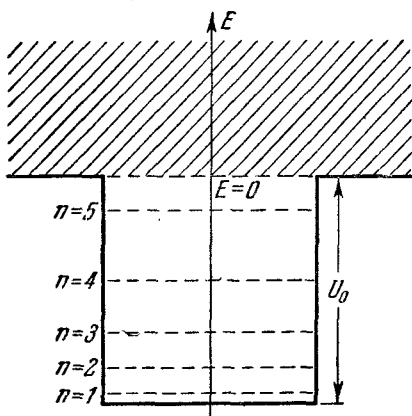


Рис. 181.

Чем шире яма, т. е. чем больше  $L$ , или чем больше масса частицы, тем меньше расстояние между уровнями и тем ближе дискретный спектр к сплошному спектру классической механики.

Энергетический спектр электрона в атоме имеет ту же структуру (рис. 120, стр. 156). Он состоит из дискретного (при  $E < 0$ ) и непрерывного (при  $E > 0$ ) участков, причем дискретный спектр сгущается при приближении  $E$  к нулю. Отличие дискретного спектра атома от спектра потенциальной ямы с плоским дном заключается лишь в расположении уровней.

## § 71. Зонный спектр электрона в кристалле

В кристалле электрон перебегает от одного атома к другому, проходя сквозь потенциальные барьеры, образовавшиеся при сложении потенциальных кривых соседних атомов (рис. 182). Для электронов, находящихся на низких энергетических уровнях (например уровень 1

на рис. 182), барьер широк и коэффициент прозрачности его весьма мал. Это значит, что почти все время электрон будет находиться в атоме, весьма редко переходя от одного атома к другому. Так, например, электрон первой (самой близкой к ядру) оболочки атома натрия переходит от одного атома к другому в среднем примерно один раз в пять дней. Однако для более высоких энергетических уровней барьер значительно уже (и ниже), и коэффициент прозрачности может мало отличаться от единицы. Электрон, «приписанный» к такому уровню, легко переходит от одного атома к другому.

Движению электрона через кристалл могут соответствовать различные импульсы  $p^*$ ) электрона. Его энергия будет зависеть от номера атомного состояния  $s$ , к которому он «приписан», и от импульса  $p$ .

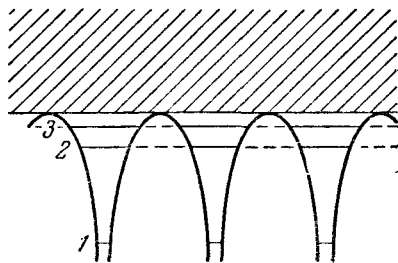


Рис. 182.

Обозначим через  $E_s$  энергию, соответствующую импульсу  $p$ , равному нулю. Остальная часть энергии зависит от импульса, и мы можем условно назвать ее кинетической энергией. Обозначим ее  $E_p^{**}$ ). Энергию  $E_s$  можно трактовать как потенциальную, поскольку она не зависит от импульса, а зависит лишь от положения уровня электрона в атоме. Полная энергия электрона равна

$$E = E_s + E_p.$$

Номер атомного состояния  $s$  и величина и направление импульса  $p$  полностью определяют состояние движения электрона в кристаллической решетке. Различные импульсы соответствуют различной энергии движения электрона через кристалл. Вместо одного  $s$ -го дискретного уровня электрона в атоме, в кристалле появляется целое множество уровней, соответствующих различным импульсам. Число этих состояний нетрудно подсчитать.

\*) Точнее говоря, под  $p$  надо понимать квазиимпульс, см. § 65.

\*\*\*) Вместо  $E_p$  следовало бы писать  $E_{ps}$ , так как зависимость  $E_p$  от импульса  $p$  различна для каждого из атомных состояний  $s$ .

Допустимые значения импульса электрона определяются формулой (70.4). Максимальные значения каждой из проекций квазиимпульса равны  $h/2a$  (§ 65). Следовательно, число возможных значений, которые принимает, например, проекция  $p_x$ , есть

$$\frac{h}{2a} : \frac{h}{2L} = \frac{L}{a}.$$

Полное число состояний, соответствующее всем возможным значениям квазиимпульса, будет равно  $(L/a)^3$ . Здесь  $L$  — линейный размер кристалла,  $a$  — постоянная решетки (расстояние между атомами). Поэтому

$$\left(\frac{L}{a}\right)^3 = \frac{V}{a^3} = N$$

(где  $V$  — объем кристалла) есть полное число атомов в кристалле. Таково же и количество возможных состояний движения электрона, «приписанного» к данному атомному состоянию.

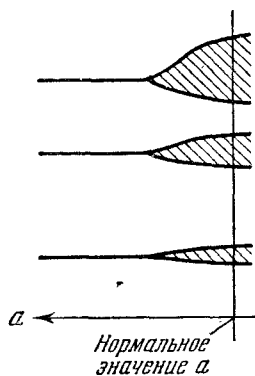


Рис. 183.

**Зона состояний и энергетическая зона.** Мы пришли к выводу, что в кристалле из каждого атомного состояния образуется  $N$  различных

состояний. Эти  $N$  состояний составляют так называемую *зону состояний*. В популярной физической литературе, например по полупроводникам, иногда пишут, что зона возникает из каждого атомного *уровня*. В действительности же, если данному уровню энергии в атоме соответствует несколько атомных *состояний* (т. е. несколько орбит, на которых электроны имеют одну и ту же энергию), то *из каждого состояния образуется своя зона*. Наложение этих «зон состояний» дает *энергетическую зону*. Энергетическая зона либо совпадает с «зоной состояний», либо представляет собой наложение нескольких «зон состояний». В дальнейшем мы будем говорить просто об энергетических зонах, независимо от того, входит ли в них одна зона состояний или несколько.

Нетрудно проследить переход от атомных уровней к энергетическим зонам (рис. 183). Если представить себе кристалл, у которого постоянная решетки  $a$  уве-



личена во много раз по сравнению с ее настоящей величиной, то коэффициент прозрачности потенциальных барьеров между атомами будет практически равен нулю. Электроны при этом не движутся по кристаллу и находятся в атомах на своих уровнях. По мере уменьшения постоянной решетки коэффициент прозрачности барьера увеличивается, электроны чаще переходят от атома к атому. Растет энергия этого движения (пропорционально коэффициенту прозрачности барьеров). Поэтому возрастает и ширина энергетических зон. Чем выше атомный уровень, тем уже барьер и больше его коэффициент прозрачности. Следовательно, тем легче осуществляется переход электрона от атома к атому и тем шире соответствующая зона.

Зонный спектр представляет собой как бы переходный случай между атомными дискретными уровнями и сплошным спектром свободного электрона.

В зоне имеется  $N$  состояний (столько, сколько атомов в кристалле). Следовательно, в ней может поместиться  $2N$  электронов (принцип Паули!). На каждом уровне (если ему соответствует одно квантовое состояние в атоме, т. е. только одна орбита) могут находиться два электрона. Следовательно, если в атоме на данном уровне имеется именно два электрона, то всего в кристалле таких электронов  $2N$ , и они полностью заполняют соответствующую уровню зону. Короче говоря, если какое-либо атомное состояние полностью заполнено, то будет заполнена и соответствующая ему энергетическая зона.

**Важнейшее свойство заполненной зоны.** Заполненная зона обладает важным свойством, определяющим, как мы увидим в § 72, отличие металла от полупроводника и диэлектрика. Каждому уровню энергии в энергетическом спектре соответствует (§ 70, стр. 230) множество состояний с различными по направлению импульсами. Если все эти состояния заполнены, то это значит, что в металле присутствуют электроны с определенной энергией, движущиеся во всех возможных направлениях \*).

---

\*) Для этого поверхность постоянной энергии не обязательно должна быть сферой, как на рис. 178. Поверхность эта всегда симметрична относительно начала координат, т. е. точки  $p = 0$  (см. рис. 154). Поэтому, если заполнено состояние с импульсом  $p$ , то заполнено и состояние с импульсом  $-p$ .

Общий ток всех этих электронов, а значит и *общий ток всех электронов, содержащихся в полностью заполненной зоне, равен нулю.*

Ток останется равным нулю и в присутствии электрического поля. Электрическое поле, чтобы создать электрический ток, должно изменить направление движения хотя бы некоторых электронов. Если все состояния заполнены, никакой электрон не может изменить своего состояния, так как это означало бы переход в заполненное состояние. Принцип Паули запрещает переход в то состояние, в котором уже есть два электрона. Таким образом, электроны заполненной зоны, даже при наличии электрического поля, не могут создать электрический ток.

## § 72. Полупроводники и диэлектрики

Из указанных свойств полностью заполненной зоны вытекает возможность существования двух типов кристаллических веществ, резко различающихся по своим свойствам.

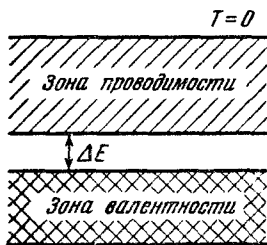


Рис. 184.

Рассмотрим кристалл, энергетический спектр которого имеет вид, изображенный на рис. 184. Все зоны, лежащие ниже зоны валентности, полностью заполнены и никакой роли в проводимости не играют\*). Зона валентности произошла из того

уровня атома, на котором находились валентные электроны — отсюда ее название. Следующий уровень в атоме был пустым, и из него получилась зона проводимости (смысл этого названия выяснится позже). При абсолютном нуле температуры зона валентности полностью заполнена, зона проводимости совершенно пуста. Если в кристалле создать электрическое поле, ни совершенно пустая, ни полностью заполненная зоны не могут дать вклада в ток, и кристалл будет изолятором, хотя он и содержит огромное количество

\*) Если освещать кристалл светом достаточно большой частоты, то эти зоны могут дать вклад в фотопроводимость (§ 75).

электронов, способных двигаться по всему его объему. Согласно вышесказанному это происходит оттого, что в заполненной зоне электроны не могут изменить своего движения даже в поле, а в пустой зоне электронов просто нет.

**Запрещенная зона.** Между заполненной и свободной зонами лежит *энергетическая щель*, или *запрещенная зона*  $\Delta E$ . Интервал энергии  $\Delta E$  запрещен для всех электронов, принадлежащих атомам кристалла. Ширина запрещенной зоны весьма различна у разных веществ. Вещества с малой шириной запрещенной зоны (порядка электронвольта или десятых его долей) являются полупроводниками, вещества с  $\Delta E$  порядка нескольких электронвольт — диэлектрики. Отсюда уже ясно, что между полупроводниками и диэлектриками нет принципиального различия, а есть различие лишь количественное. При  $T = 0$  те и другие имеют проводимость, равную нулю.

*Обращение проводимости в нуль при абсолютном нуле есть характерное свойство полупроводников и диэлектриков*, в то время как металл можно определить как вещество, проводимость которого при  $T = 0$  не обращается в нуль (обычно даже является максимальной). Таким образом, с физической точки зрения полупроводник отличается от металла не меньшей величиной проводимости при обычных температурах (иногда это бывает не так), а тем, что проводимость полупроводника при  $T = 0$  обращается в нуль.

**Переходы электронов через запрещенную зону.** При температуре, отличной от нуля, в кристалле появляются фононы, т. е. тепловые колебания. Поглотив фонон или несколько фононов одновременно, электрон заполненной (валентной) зоны может получить энергию, достаточную для перехода в зону проводимости. Как доказано в статистической физике, вероятность  $W$  получения такой энергии зависит от температуры по следующему закону:

$$W = Ae^{-\frac{\Delta E}{kT}}. \quad (72.1)$$

При  $T = 0$  эта вероятность равна нулю (получается  $e^{-\infty}$ ), при возрастании температуры она быстро растет. Электроны, перешедшие в зону проводимости, имеют в

своем распоряжении огромное количество свободных состояний. Электрическое поле может перевести их в такие состояния, которые соответствуют упорядоченному движению в направлении действия поля. Двигаясь через решетку под действием поля, электроны на протяжении длины свободного пробега увеличивают свою энергию.

На рис. 185 электроны движутся налево и вверх. В тех местах кристалла, где периодичность решетки нарушена из-за дефектов, примесей или значительных тепловых колебаний, электрон может рассеяться, т. е. потерять полученную в поле энергию. На зонной схеме (рис. 185) электроны опускаются снова вниз, к дну зоны проводимости.

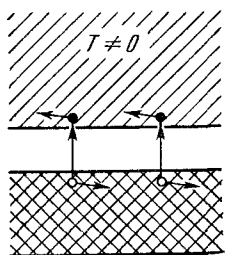


Рис. 185.

**Дырки.** В валентной зоне, в результате перехода электронов в зону проводимости, остаются свободные места (дырки). Пользуясь освободившимися местами, электроны этой зоны также могут принять участие в проводимости. Если какой-нибудь электрон валентности заполняет дырку, то дырка оказывается уже в его прежнем состоянии. Эта дырка снова может быть заполнена другим электроном, и т. д. Коллективное, «эстафетное» перемещение электронов удобно трактовать просто как движение дырки в направлении, обратном движению электрона (на рис. 185 — направо). Дырка, таким образом, движется как положительный заряд.

На языке классической физики, точнее — на «полуклассическом» языке, тоже можно описать свойства заполненной зоны, возникновение электронов и дырок. При  $T = 0$  все валентные электроны (остальные нас не интересуют) находятся на своих орбитах в атомах, что соответствует заполненной зоне валентности. Валентных электронов в атоме столько, что внешняя оболочка или внешний ее слой полностью заполнены. Свободных электронов в кристалле нет, т. е. зона проводимости пуста. Переход электрона с одного атома на другой возможен (в силу принципа Паули) лишь при условии одновременного встречного перехода другого электрона

(рис. 186). Такие встречные переходы, естественно, не могут создать никакого тока. В зонной схеме этому соответствует утверждение, что заполненная зона валентности не создает тока.

Сильные тепловые колебания одного из атомов могут привести к «стряхиванию» валентного электрона и к образованию электрона проводимости и дырки (рис. 187). Энергия, необходимая для отрыва электрона

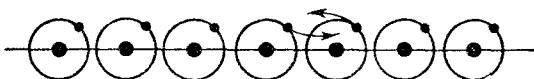


Рис. 186.

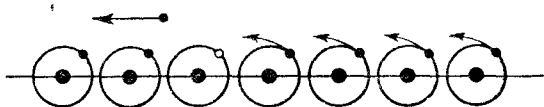


Рис. 187.

от атома, соответствует энергетической щели (запрещенной зоне)  $\Delta E$ . Электрон, находящийся в зоне проводимости, может свободно двигаться по кристаллу. Движение дырки есть просто сокращенное описание коллективного (эстафетного) перемещения электронов, показанного стрелочками на рис. 187.

Энергия дырки на зонной схеме (рис. 185) увеличивается в направлении, обратном направлению увеличения энергии электрона, т. е. вниз. Увеличение энергии дырки в поле, происходящее в течение ее времени свободного пробега, означает перемещение дырки по валентной зоне вниз.

Дырка, так же как и электрон проводимости, представляет собой ферми-квазичастицу.

**Зависимость проводимости полупроводника от температуры.** Проводимость полупроводника определяется, в основном, числом электронов проводимости и дырок, а не их временем свободного пробега (§ 55). Дело в том, что именно число свободных зарядов является «узким местом» полупроводника, и поэтому именно оно решающим образом сказывается на проводимости. Число

свободных носителей быстро растет с температурой. Сопротивление, следовательно, с ростом температуры падает, в противоположность тому, что имеет место в металлах.

Нетрудно определить зависимость проводимости беспримесного полупроводника \*) от температуры. Согласно формуле (55.5) электронная проводимость твердого тела равна

$$\sigma = \frac{e^2 n \tau}{2m},$$

где  $n$  — концентрация свободных электронов,  $\tau$  — время их свободного пробега,  $m$  — масса электрона. Совершенно аналогичная формула имеет место для дырочной проводимости. Хотя время свободного пробега  $\tau$  и зависит от температуры (убывая как  $1/T$  для металлов и как  $1/T^{3/2}$  для полупроводников), однако для полупроводников главную роль играет чрезвычайно сильная зависимость концентрации  $n$  от температуры.

Зависимость концентрации электронов и дырок от температуры можно найти из следующих простых соображений. В состоянии термодинамического равновесия число тепловых перебросов за одну секунду из зоны валентности в зону проводимости пропорционально вероятности переброса каждого электрона и поэтому может быть записано как  $Ve^{-\Delta E/hT}$  (см. (72.1)). Здесь  $V$  — некоторый неизвестный коэффициент пропорциональности. Обратный переход — из зоны проводимости в зону валентности — происходит при встрече электрона и дырки. Число таких встреч за секунду пропорционально концентрации электронов  $n$  и концентрации дырок (тоже  $n$ ), т. е. пропорционально  $n^2$ , и может быть записано как  $Cn^2$  ( $C$  — опять-таки неизвестный коэффициент пропорциональности).

В состоянии термодинамического равновесия числа прямых и обратных переходов должны быть равны, отсюда  $Cn^2 = Ve^{-\Delta E/hT}$ , или

$$n = n_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}, \quad (72.2)$$

где вместо  $\sqrt{V/C}$  введен коэффициент  $n_0$ .

\*) Такой полупроводник называется еще собственным.

Так зависит от температуры концентрация электронов проводимости (и дырок, так как их в беспримесном полупроводнике столько же, сколько электронов). Зависимость (72.2) — весьма сильная. При  $\Delta E = 0,72$  эв  $= 0,72 \cdot 1,6 \cdot 10^{-12}$  эрг  $= 1,15 \cdot 10^{-12}$  эрг и  $T = 100^\circ \text{K}$   $n \approx n_0 \cdot e^{-80} \approx n_0 \cdot 10^{-35}$ , а при  $T = 700^\circ \text{K}$   $n \approx n_0 \cdot 10^{-5}$ . Следовательно, концентрация свободных электронов при изменении температуры от  $100^\circ$  до  $700^\circ \text{K}$  возросла в нашем примере (пример относится к германию, одному из самых распространенных полупроводников) в  $10^{30}$  раз!

Зависимость от температуры экспоненциальной функции  $e^{-\Delta E/2kT}$  настолько сильна \*) (приведенный выше пример иллюстрирует это), что не имеет смысла учитывать зависимость от температуры других величин, входящих в формулу для проводимости.

Подставляя  $n$  в формулу  $\sigma = e^2 n \tau / 2m$ , получим

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}, \quad (72.3)$$

где  $\sigma_0 = e^2 n_{0T} / 2m$  (эта величина может считаться константой).

Если бы полупроводник выдерживал такую высокую температуру, при которой  $kT \sim \Delta E$ , то возрастание концентрации и проводимости с температурой прекратилось бы. Проводимость в таких условиях даже несколько бы уменьшалась из-за падения с температурой времени свободного пробега  $\tau$ .

Дырочная проводимость собственного полупроводника зависит от температуры так же, как электронная, поэтому ее можно считать включенной в формулу (72.3).

### § 73. Металлы

Другой тип энергетического спектра кристалла приведен на рис. 188. Таким спектром обладает ряд металлов. Двойной штриховкой обозначены заполненные уровни. При  $T = 0$  заполнена часть (например половина) зоны проводимости. В этом случае нижняя заполненная зона для проводимости уже несущественна, так

\*) При низких температурах, а при высоких температурах функция  $\exp\left(-\frac{\Delta E}{2kT}\right)$  меняется с температурой медленно.

как электроны верхней зоны имеют в своем распоряжении достаточное количество свободных состояний и могут переносить ток.

Число свободных носителей в металле очень велико и не зависит от температуры. При абсолютном нуле проводимость достигает максимального значения\*). С повышением температуры она уменьшается из-за рассеяния электронов на колебаниях кристаллической решетки (на фононах) — §§ 51, 52.

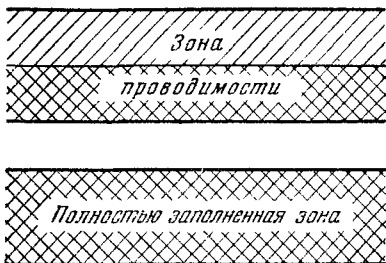


Рис. 188.

Можно представить себе и другой тип энергетического спектра, тоже принадлежащий металлам.

Если два уровня энергии в атоме близки между собой, то образующиеся из этих уровней зоны могут перекрыться. Если одна из зон заполнена, а другая пустая (что соответствует такому же заполнению атомных

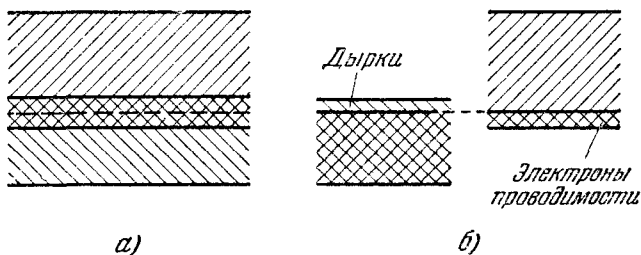


Рис. 189.

уровней), то в результате перекрытия часть электронов перейдет в пустую зону и станет электронами проводимости. Соответственно в нижней зоне появятся дырки (см. рис. 189, а; на рис. 189, б те же зоны смещены друг относительно друга, для того чтобы показать их заполнение).

\*) В некоторых случаях при  $T=0$  проводимость не максимальна, но близка к максимальной, а максимум достигается при температуре, близкой к абсолютному нулю.



Существование свободных носителей обеспечивает проводимость при любой температуре, в том числе и при  $T = 0$ , поэтому кристалл с рассмотренным спектром будет металлом. Проводимость такого металла обусловлена не только электронами, но и дырками, так что дырки бывают не только в полупроводниках, а и в металлах (в отличие от полупроводников они не исчезают при  $T = 0$ ).

Будет ли вещество полупроводником или металлом, зависит от электронной структуры атома данного вещества (от расположения энергетических уровней и характера электронных состояний, им соответствующих, т. е. от размера электронных орбит и т. д.).

## § 74. Примесные полупроводники

Среди элементов, заполняющих таблицу Менделеева, много металлов и несколько полупроводников. К последним относятся германий (Ge), ширина запрещенной зоны  $\Delta E = 0,72$  эв, кремний (Si), с  $\Delta E = 1,09$  эв, селен (Se) и некоторые другие. Кроме того, к полупроводникам относится целый ряд химических соединений: ZnS, CdS, PbS, PbSe, InSb и т. д. Последний из перечисленных (InSb) представляет собой соединение индия и сурьмы, которые являются металлами. Перестройка электронных оболочек (сурьма отдает индию свои валентные электроны) приводит к образованию полностью заполненной (при  $T = 0$ ) и пустой зоны, и вещество становится полупроводником.

В технике чаще всего, однако, используются не собственные, а примесные полупроводники. Свойства таких полупроводников можно регулировать, добавляя (при образовании кристаллов из расплавленного вещества) ту или иную примесь в желаемом количестве.

Рассмотрим влияние примесей на проводимость на примере германия. В таблице Менделеева германий стоит в третьей клетке четвертой колонки, поэтому он имеет во внешней электронной оболочке четыре электрона (из них два находятся в первом ее слое, а два — во втором). Эти четыре электрона осуществляют связь атома германия с четырьмя его соседями в кристаллической решетке. Каждый атом Ge находится в центре правильной треугольной пирамиды — тетраэдра, в вершинах

которого расположены четыре его соседа (такую же кристаллическую решетку имеют кремний и алмаз). На рис. 190, *а* эта решетка изображена на плоскости. Двойные линии означают связи, осуществляемые двумя электронами.

**Донорная примесь.** Если в одном из узлов решетки окажется атом, имеющий пять внешних электронов, например мышьяк (As), то один из его электронов окажется ненужным для связи с соседними атомами (рис. 190, *б*). «Лишний» электрон слабо связан с атомом

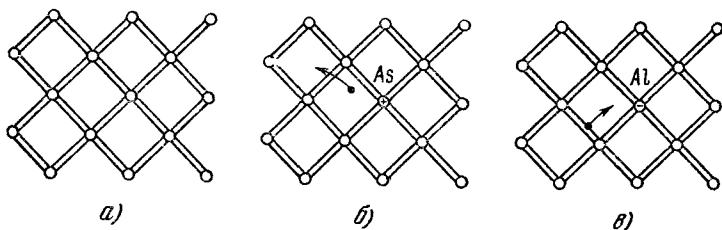


Рис. 190.

примеси. Получив относительно небольшую энергию от решетки (т. е. поглотив фонон), он может оторваться от примесного атома и стать электроном проводимости. Такая примесь, способная относительно легко отдавать свои электроны в зону проводимости, называется *донорной* примесью. Энергия связи электрона с донорным атомом обычно весьма мала (порядка сотых долей электронвольта), в то время как энергия, необходимая для отрыва электрона от атома основного вещества (т. е. ширина запрещенной зоны  $\Delta E$ ), гораздо больше — порядка электронвольта. Это и не удивительно — ведь электроны атомов основного вещества осуществляют связь с соседними атомами, а дополнительный электрон примеси для этой цели не нужен.

«Радиус его орбиты», т. е. среднее расстояние от атома примеси, в  $\epsilon$  раз больше размеров обычного атома ( $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость вещества; для германия  $\epsilon = 16$ ). Это ясно из следующих соображений. Энергия взаимодействия двух точечных зарядов (одного из электронов мышьяка и остальной части атома) в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  равна

$$U = -e^2/\epsilon r, \text{ что можно записать в виде } U = - \frac{(e/\sqrt{\epsilon})^2}{r}$$

Электрон и остальная, положительно заряженная, часть атома представляют собой нечто вроде атома водорода. Поэтому для оценки радиуса орбиты и энергии электрона можно использовать результаты, полученные для атома водорода (§ 48), подставив вместо заряда  $e$  заряд  $e/\sqrt{\epsilon}$ . Если сделать это, то получится орбита в  $\epsilon$  раз большего размера (для германия ее радиус при  $n = 1$  будет  $8 \cdot 10^{-8}$  см), включающая уже довольно большое число атомов полупроводника. Это и дает основание пользоваться формулой  $U = -e^2/\epsilon r$ , справедливой в сплошной среде (т. е. справедливой тогда, когда можно не учитывать атомного строения вещества, считая его «сплошным»).

«Энергия ионизации» такого атома в  $\epsilon^2$  раз меньше энергии ионизации атома водорода (формула (48.5)). Для германия она составляет, по порядку величины,  $13,59/16^2$ , т. е. несколько сотых электронвольта.

Остается выяснить, где (на зонной схеме, т. е. по шкале энергий) располагается энергетический уровень электрона, слабо связанного с атомом донорной примеси. Для этой цели представим себе сначала лишний электрон атома примеси уже свободным, находящимся в зоне проводимости идвигающимся по кристаллу. Мы уже отмечали (§ 65), что электрон в кристалле напоминает свободный электрон и отличается от последнего только законом дисперсии. Дно зоны проводимости играет при этом роль нижнего края сплошного энергетического спектра свободного электрона (§ 70). Электрон проводимости, попадая в кулоновское поле атома донорной примеси (лишенного одного электрона и поэтому заряженного положительно), захватывается им на один из дискретных уровней, аналогичных уровням электрона в атоме водорода. Выше было показано, что энергия электрона на таком уровне лежит на сотые доли электронвольта ниже нижнего края сплошного энергетического спектра, т. е. края зоны проводимости. Следовательно, уровень электрона в атоме донорной примеси лежит в запрещенной зоне, чуть ниже края зоны проводимости (рис. 191).

«Энергия ионизации» донорного атома  $\Delta E_1$  обычно во много раз меньше ширины запрещенной зоны  $\Delta E$ ,

поэтому вероятность получения электроном энергии, достаточной для перехода в зону проводимости,

$W_1 \sim e^{-\frac{\Delta E_1}{kT}}$ , велика уже при комнатной и даже более низких температурах. Если  $\Delta E_1 \sim 0,01$  эв, то  $\Delta E_1/kT \sim 1$  и  $W_1 \sim 1$  уже при температуре порядка  $100^\circ \text{K}$ , в то время как  $\Delta E/kT$  для германия при этой температуре равно 72 и вероятность перехода  $W \sim 10^{-36}$ , т. е. практически равна нулю. При комнатной температуре ( $T = 300^\circ \text{K}$ ) она равна  $W \sim 10^{-12}$ , т. е. тоже еще мала, поэтому электроны в зону проводимости поставляются донорными атомами. При высокой температуре начинаются переходы электронов из валентной зоны в зону проводимости, так что к примесной проводимости добавляется собственная.

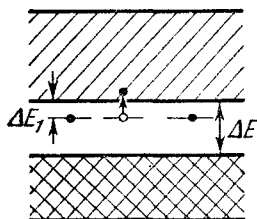


Рис. 191

Следовательно, при достаточно низкой температуре германий с донорной примесью обладает чисто электронной проводимостью. Такой примесный полупроводник называется *полупроводником n-типа* (буква *n* означает отрицательный, т. е. отрицательный заряд носителей). Число дырок в зоне валентности весьма мало, а дырки, образующиеся на атомах примеси после отрыва электронов, локализованы на атомах и не перемещаются по кристаллу. Правда, если атомов примеси много, появляется возможность движения этих дырок от атома к атому — тогда вместо дискретного уровня, на котором находятся дырки (рис. 191), появляется узкая «примесная зона» с соответствующей дырочной проводимостью.

**Акцепторная примесь.** Можно добавить к полупроводнику примесь другого рода, называемую *акцепторной*. Такая примесь при низкой температуре обуславливает чисто дырочную проводимость полупроводника. Чисто дырочный примесный полупроводник называется *полупроводником p-типа* (положительный знак носителей).

Акцепторной примесью к германию являются такие элементы, как бор или алюминий, у которых имеется три электрона на внешней оболочке (два в первом слое и один во втором).

Поскольку у каждого атома германия в решетке четыре электрона, связывающих его с соседями, следует считать, что на атоме акцепторной примеси имеется дырка. Дырка эта может несколько отходить от атома примеси (т. е. электроны германия — подходить к нему, рис. 190, в). В нормальном состоянии дырки, т. е. состоянии с наименьшей энергией, она движется вокруг атома акцепторной примеси в точности так же, как электрон вокруг донорного атома.

Увеличение энергии дырки и отрыв ее от атома означают переход на зонной схеме вниз (где энергия дырки больше) — в зону валентности. Отрыв дырки от атома и превращение ее в свободную частицу означает переход одного из электронов основного вещества (германия) к атому примеси. На это требуется небольшая энергия  $\Delta E_2$  (тоже порядка сотых долей электронвольта), которую электрон может получить от решетки, поглотив фонон.

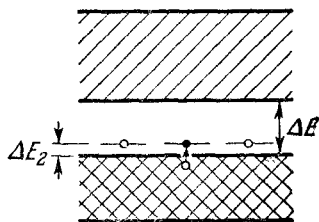


Рис. 192.

Энергия локализованной на атоме дырки (до отрыва) на  $\Delta E_2$  меньше, чем энергия после отрыва, когда дырка оказывается в зоне валентности. Следовательно, уровень энергии локализованной дырки должен лежать на зонной схеме на  $\Delta E_2$  выше края зоны валентности (еще раз напомним, что направление вверх на зонной схеме означает для дырки направление *уменьшения* энергии). Этот уровень, следовательно, попадает в запрещенную зону (рис. 192).

При достаточно низких температурах (для германия такой температурой является еще и комнатная), когда собственная проводимость, вызванная перебросом через запрещенную зону, еще очень мала, полупроводник с акцепторной примесью является чисто дырочным (*p*-полупроводник), так как носителями тока являются только дырки в зоне валентности. При высокой температуре проводимость донорного и акцепторного полупроводников будет смешанной, электронно-дырочной, так как к примесной проводимости добавляется собственная.

## § 75. Применение полупроводников

**Термисторы.** Значительная зависимость проводимости полупроводников от температуры может быть использована для создания так называемых *термисторов* — сопротивлений, сильно зависящих от температуры. Термисторы применяются для измерения температуры (по величине сопротивления), измерения мощности сантиметровых радиоволн (нагрев термистора, вызванный поглощением радиоволн, меняет его сопротивление), для сигнализации о повышении температуры, для компенсации увеличения сопротивления металлических проводников и т. д.

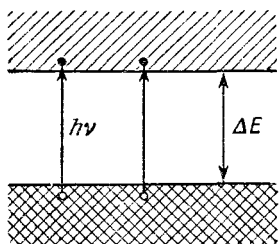


Рис. 193.

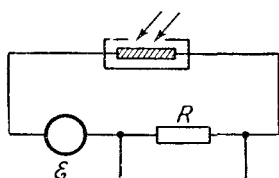


Рис. 194.

**Фотопроводимость.** Сопротивление собственного полупроводника можно менять не только изменением температуры, но и освещая его светом достаточно большой частоты

$$\nu \geq \Delta E/h$$

(см. рис. 193).

Если электрон валентной зоны поглотит квант, больший, чем ширина запрещенной зоны, он сможет перейти в зону проводимости. Таким образом, освещение увеличивает проводимость, добавляя к «темновой» проводимости дополнительную, называемую *фотопроводимостью*. Меняя интенсивность освещения, мы меняем сопротивление полупроводника, т. е. ток в его цепи (рис. 194) и, значит, падение напряжения на сопротивлении  $R$ , с которого это напряжение (растущее с увеличением интенсивности света) можно снимать. Тем самым мы получаем способ создавать изменения тока в цепи, синхронные и (при малой интенсивности света) пропорциональные изменению освещенности.

**$p$ — $n$ -переход и выпрямление тока на нем.** Широко известно применение полупроводниковых кристаллов в качестве выпрямителей и усилителей, заменяющих ра-

диолампы. Для этой цели применяются кристаллы, содержащие  $p-n$ -переходы, т. е. контакты  $p$ - и  $n$ -полупроводников.

$p-n$ -переход можно получить, например, выращивая из расплава кристалл германия  $p$ -типа (с акцепторной добавкой), а затем добавляя в расплав донорную примесь с тем, чтобы остальная часть кристалла была уже  $n$ -типа. Таким образом,  $p$ -германий и  $n$ -германий оказываются сросшимися. Место сращения и есть  $p-n$ -переход.

Рассмотрим работу выпрямителя, основанного на  $p-n$ -переходе. Нам удобно будет считать, что сначала

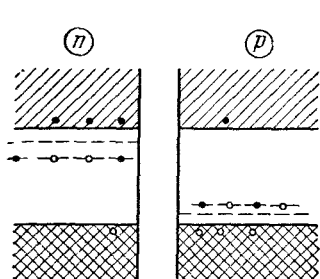


Рис. 195.

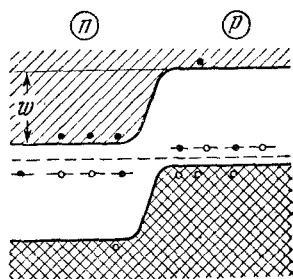


Рис. 196.

$p$ -германий и  $n$ -германий не контактируют (рис. 195), а потом мысленно привести их в контакт.  $n$ -кристалл в зоне проводимости содержит электроны, в основном поставляемые донорной примесью, и небольшое число электронов, перешедших из зоны валентности. Такое же небольшое число дырок будет в зоне валентности.

$p$ -кристалл имеет в зоне валентности дырки, образовавшиеся за счет перехода электронов этой зоны на атомы акцепторной примеси. Кроме того, он будет содержать небольшое число дырок, возникших после перехода такого же числа электронов в зону проводимости. Все это изображено на рис. 195 (рассмотрите его детально).

Если привести эти кристаллы в контакт, малое число электронов из зоны проводимости  $n$ -кристалла перейдет в  $p$ -кристалл, а малое число дырок из зоны валентности  $p$ -кристалла перейдет в  $n$ -кристалл. В результате  $n$ -кристалл зарядится положительно (его потенциальная яма

и зоны опустятся, см. § 67), а  $p$ -кристалл — отрицательно, его зоны поднимаются. Этот процесс будет происходить до тех пор, пока не станут одинаковыми уровни Ферми обоих кристаллов (см. § 68, стр. 221). Уровни Ферми \*) показаны на рис. 195 штриховыми линиями. В результате смещения зон получится картина, изображенная на рис. 196. Эта картина несколько упрощена. Дело в том, что после ухода электронов из приконтактной области  $n$ -кристалла в этой области образуется объемный положительный заряд. Соответственно, в приконтактной области  $p$ -кристалла образуется объемный отрицательный заряд. Существование этих зарядов приводит к искривлению энергетических зон вблизи контакта. Однако для наших качественных соображений учет этого искривления несуществен.

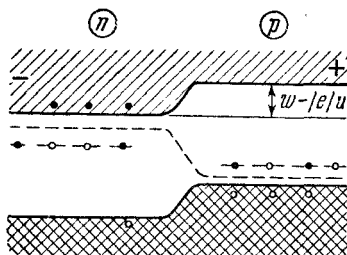


Рис. 197.

В состоянии равновесия на  $p$  —  $n$ -переходе (рис. 196) число переходов электронов слева направо должно равняться числу переходов справа налево. Слева электронов много, зато для перехода в  $p$ -область им надо взобраться на потенциальный барьер, т. е. надо получить энергию  $w$  (из тепловой энергии решетки), а вероятность получения такой энергии мала ( $e^{-w/kT}$ ). Справа электронов мало, зато они свободно спускаются с потенциального барьера. В результате электронные токи

\*) При низких температурах у собственного полупроводника уровень Ферми лежит посреди запрещенной зоны, т. е. на середине расстояния между областями электронов и дырок. Можно сказать, что таково же положение и уровня Ферми металла, ниже которого лежит область дырок, а выше — область электронов (рассмотрите с этой точки зрения рис. 152). Точно так же уровни Ферми  $n$ - и  $p$ -кристаллов лежат посредине между областями, содержащими электроны и дырки, т. е., например, для  $n$ -кристалла — посредине между уровнем донорной примеси и нижним краем зоны проводимости. Если нагревать кристалл, примесные уровни перестают играть роль из-за усиливающейся собственной проводимости, основное число электронов в зону проводимости поставляется уже зоной валентности, и уровень Ферми движется к середине запрещенной зоны, где он и должен быть у собственного полупроводника.



справа и слева равны. Это же можно сказать и о дырочных токах.

Приложим теперь к  $p-n$ -переходу внешнюю разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2 = u$  так, чтобы на  $n$ -стороне был минус, а на  $p$ -стороне плюс. Тогда зоны  $n$ -кристалла поднимутся, а зоны  $p$ -кристалла опустятся (рис. 197), и барьер  $w$  уменьшится на  $|e|u$  ( $|e|$  — абсолютная величина заряда электрона). Уменьшение потенциального барьера приведет к резкому увеличению электронного потока слева направо, в то время как поток справа налево не изменится. Теперь уже токи слева и справа не будут равны, через  $p-n$ -переход пойдет ток, тем более сильный, чем больше  $u$ . Раз есть ток, то нет термодинамического равновесия. Поэтому не удивительно, что уровни Ферми слева и справа не совпадают.

При обратной полярности (плюс на  $n$  и минус на  $p$ ) барьер возрастает и ток из  $n$  в  $p$  ослабевает. Ток из  $p$  в  $n$  остается таким же, каким он был в равновесии, т. е. очень слабым.

Следовательно,  $p-n$ -переход обладает односторонней проводимостью, т. е. является выпрямителем. Пропускное направление соответствует минусу на  $n$ -стороне

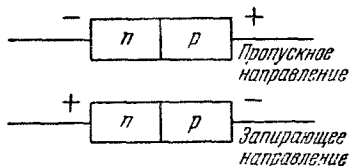


Рис. 198.

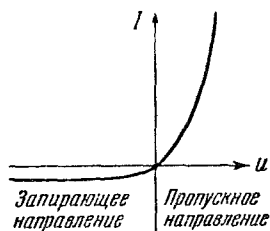


Рис. 199.

и плюсу на  $p$ , запирающее — обратной полярности (рис. 198).

На рис. 199 показана зависимость силы тока через  $p-n$ -переход от приложенного напряжения (вольтамперная характеристика  $p-n$ -перехода). В области малых напряжений  $u$  имеет место пропорциональность между  $I$  и  $u$ , т. е. закон Ома. При больших  $u$  закон Ома уже не выполняется.

Усилитель (транзистор) содержит два  $p-n$ -перехода ( $n-p-n$  или  $p-n-p$ ). О его работе можно прочитать, например, в книге Спроула «Современная физика» (Физматгиз, 1961).

**$p-n$ -переход как источник фотоэдс.**  $p-n$ -переход можно использовать как источник фотоэдс (фотоэлемент с запирающим слоем, или вентильный фотоэлемент). Схема его действия показана на рис. 200. Если освещать  $p-n$ -переход (для этого один из кристаллов  $p$  или  $n$  должен быть прозрачным, т. е. достаточно тонким) светом с частотой,

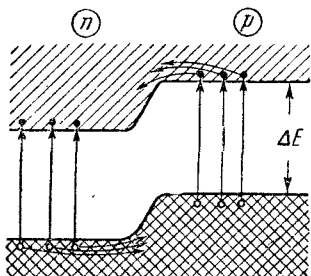


Рис. 200.

удовлетворяющей соотношению  $h\nu \geq \Delta E$ , то как в  $p$ -, так и в  $n$ -кристалле появятся (сверх имевшихся) электроны в зоне проводимости и дырки в зоне валентности (см. рис. 200). Электроны из зоны проводимости  $p$ -полупроводника и дырки из зоны валентности  $n$ -полупроводника смогут свободно переходить через  $p-n$ -переход, «сваливаясь» с потен-

циального барьера. Поэтому освещение вызовет ток в направлении  $n \rightarrow p$ .

Вентильный фотоэлемент непосредственно преобразует световую энергию в электрическую. Батареи из таких элементов («солнечные батареи») используются на искусственных спутниках и космических кораблях в качестве источников тока для питания бортовой аппаратуры. Коэффициент полезного действия в них достаточно высок (более 15%).

## § 76. Электрический ток через электролиты

Электролиты, в отличие от металлов и полупроводников, обладают ионной проводимостью. Молекула  $\text{NaCl}$  в воде распадается (диссоциирует) не на атомы  $\text{Na}$  и  $\text{Cl}$ , а на ионы  $\text{Na}^+$  и  $\text{Cl}^-$ . Диссоциация объясняется взаимодействием молекул растворенного вещества с молекулами растворителя. Молекула  $\text{NaCl}$  — полярная, т. е. состоит из ионов, причем поле вблизи каждого иона порядка  $10^8$  в/см. Это огромное поле ориентирует поляр-

ные молекулы воды, как показано на рис. 201. Возникают силы, которые во много раз ослабляют связь между ионами  $\text{Na}^+$  и  $\text{Cl}^-$ , из-за чего даже слабое тепловое движение их разрывает. Часть самих молекул растворителя также диссоциирует. Степень диссоциации возрастает с температурой.

### Закон Ома для электролитов.

Если приложить к электролиту электрическое поле, имеющиеся в нем свободные электрические заряды (ионы обоих знаков) будут создавать ток. Докажем, что электролиты подчиняются закону Ома  $j = \sigma E$ , т. е. что плотность тока у них пропорциональна напряженности поля (§ 55).

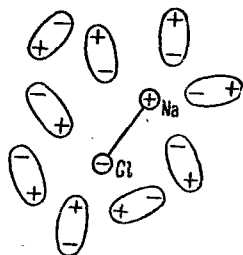


Рис. 201.

Ион, движущийся под действием поля среди молекул жидкости, непрерывно испытывает их тормозящее действие. Со своей стороны, ион, конечно, увеличивает хаотическое движение молекул, отдавая полученную в поле энергию, т. е. нагревая электролит. У иона нет «длины свободного пробега», среда действует на него практически в течение всего времени его движения. Поэтому подходящей моделью для такого иона будет шарик, медленно движущийся в вязкой жидкости. Действующая на него сила сопротивления



Рис. 202.

(сила вязкого трения) пропорциональна первой степени скорости упорядоченного движения:  $F = -ru$  (знак минус означает очевидный факт — сила трения направлена против скорости;  $r$  — коэффициент пропорциональности, который можно было бы назвать коэффициентом трения).

По движению действует электрическая сила  $F = eE$ , где  $e$  — заряд иона (рис. 202). Если в начале движения скорость иона мала, то сила  $eE$  увеличивает ее, возрастает и сила трения. Очень скоро они становятся равными, и так продолжается в течение всего движения. Следовательно, средняя скорость упорядоченного движения определяется из равенства  $eE = ru$ , откуда

$$u = \frac{eE}{r} = bE. \quad (76.1)$$

Здесь  $b \neq e/r$  называется подвижностью иона. Обычно при определении подвижности  $E$  выражают в вольтах на сантиметр, а скорость  $u$  — в сантиметрах в секунду. Тогда подвижность  $b$  будет иметь размерность  $см^2/в \cdot сек$ . В растворе HCl в воде подвижность иона водорода  $b = 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/в \cdot сек$ , а подвижность иона Cl в 5 раз меньше.

Из формул (55.1) и (76.1) легко найти плотность тока:

$$j = enu = enbE.$$

Складывая плотности токов положительных и отрицательных ионов, получим окончательно:

$$j = e(n^+b^+ + n^-b^-)E. \quad (76.2)$$

Поскольку плотность тока оказывается пропорциональной напряженности поля  $E$ , имеет место закон Ома. Проводимость

$$\sigma = e(n^+b^+ + n^-b^-)$$

растет с увеличением концентраций ионов и их подвижностей.

Закон Ома в электролитах тесно связан с пропорциональностью силы трения первой степени скорости движения. При больших напряженностях поля (порядка  $10^4 \text{ в/см}$  и выше) наблюдаются отступления от закона Ома, вызванные нарушением указанной пропорциональности.

С повышением температуры проводимость электролитов увеличивается из-за увеличения подвижности (т. е. уменьшения вязкости жидкости) и степени диссоциации, т. е. процента диссоциированных молекул.

**Число Фарадея.** В отличие от электронного тока, ионный ток всегда несет с собой вещество, выделяющееся на электродах.

Пусть валентность выделяющегося на электроде элемента  $n$ , тогда заряд каждого иона  $ne$  ( $e$  — элементарный заряд). Поэтому если на электроде выделилось  $N$  ионов, то общий прошедший заряд  $Q = neN$ , а общая масса выделившегося вещества  $M = mN$  (где  $m$  — масса иона, практически совпадающая с массой атома).

Если на электроде выделится один грамм-атом вещества (например 107,88 г серебра, 63,57 г меди, 16 г

кислорода, 1 г водорода и т. д.), то число выделившихся атомов будет равно числу Авогадро  $N_0$ . Следовательно, при этом на электрод поступит заряд  $It = Q = neN_0$ . Отсюда легко получить известные законы электролиза Фарадея (предлагаем сделать это читателям).

Величина

$$eN_0 = F$$

называется *числом Фарадея*. Это число легко измерить экспериментально. Действительно,

$$F = \frac{Q}{n} = \frac{It}{n},$$

где  $t$  — время, в течение которого на электроде отложился 1 г-атом,  $I$  — сила тока и  $n$  — валентность выделившегося элемента. Эксперименты дают значение  $F = 96\,491$  к/г-эков.

Поскольку число Авогадро  $N_0 = 6,025 \cdot 10^{23}$  1/моль, то легко найти величину элементарного заряда:

$$e = \frac{F}{N_0} = 4,803 \cdot 10^{-10} \text{ СГС}_q = 1,601 \cdot 10^{-19} \text{ к},$$

что полностью совпадает со значениями, полученными другими методами.

**Ионная проводимость твердых тел.** Ионная проводимость имеет место не только в электролитах, но и в ионных кристаллах и аморфных телах при высокой температуре. Если повышать температуру, колебания ионов усиливаются, и все большее их число получает возможность покинуть свои узлы. Вышедшие из узлов ионы под действием электрического поля создают электрический ток, так что ионный кристалл приобретает проводимость. В проводимость, помимо ионов, будут вносить вклад и оставшиеся после выхода ионов дырки (рис. 203). При этом дырка (вакансия) положительного иона будет перемещаться как отрицательный заряд. В кристалле NaCl значительная ионная проводимость

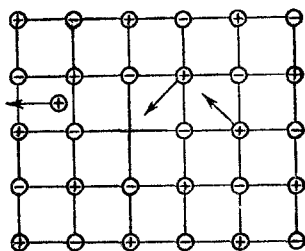


Рис. 203.

начинается при температуре примерно  $700^{\circ}\text{C}$ , причем осуществляется она главным образом ионами хлора, которые имеют меньшую энергию активации  $W$  (энергию, которую должен получить ион, чтобы перейти из узла в междоузлие). Вероятность получения энергии  $W$  пропорциональна  $e^{-W/kT}$ , т. е. растет с температурой экспоненциально, так что и проводимость ионного кристалла также будет расти с температурой экспоненциально.

Стекло содержит в своем составе много ионных соединений, поэтому оно тоже приобретает проводимость при высоких температурах. Раскаленная докрасна стеклянная палочка является неплохим проводником, хотя ее удельное сопротивление настолько велико, что выделяющегося при прохождении тока тепла хватает для поддержания палочки в раскаленном состоянии.

#### Одинаков ли ток через разные сечения электролита?

В заключение этого параграфа рассмотрим вопрос о величине тока через различные сечения электролита (рис. 204).

Через сечение 1 проходят только отрицательные ионы, через сечение 3 — только положительные, а через сечение 2 — и те, и другие. Создается впечатление, что ток через сечение 2 больше, чем через 1 или 3. Это, конечно, неверно, ток через любое сечение должен быть одним и тем же, иначе между сечениями будет накапливаться заряд. Решение вопроса в том, что скорость упорядоченного движения и концентрация ионов того и другого знака не постоянны вдоль оси  $Ox$ .

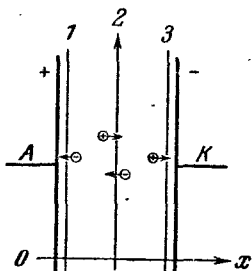


Рис. 204.

В центральной области концентрации положительных и отрицательных ионов примерно равны, значит, там объемная плотность заряда близка к нулю. У положительного электрода скапливаются отрицательные ионы — там плотность заряда отрицательна, у отрицательного электрода имеется положительный объемный заряд.

На рис. 205 показано изменение хода потенциала между электродами (при заданной разности потенциалов между ними), вызванное объемными зарядами (см.

§ 28). Сплошная линия — ход потенциала в пустоте, пунктирная — в электролите. На следующем рисунке (рис. 206) для сравнения показан ход потенциала в межэлектродном промежутке, куда введены две сетки; их потенциалы видны из графика. Левая сетка заряжена отрицательно по отношению к аноду и имитирует отрицательный объемный заряд, правая — положительный.

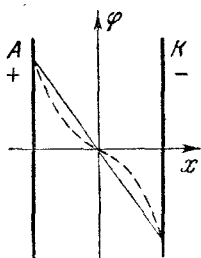


Рис. 205.

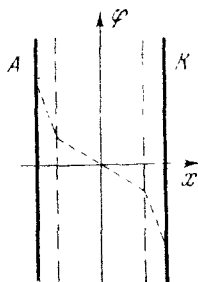


Рис. 206.

Ход потенциала получается почти таким же, как на рис. 205.

Напряженность поля  $E = -\frac{d\varphi}{dx}$ , т. е. равна тангенсу угла наклона кривой  $\varphi(x)$ . В центральной области напряженность меньше, чем у пластин. Поэтому в центральной области скорость ионов также меньше.

Значения напряженности поля в данной точке  $x$  и концентраций положительных и отрицательных ионов устанавливаются такими, чтобы плотность тока (76.2) всюду была постоянна.

## § 77. Ионизация, рекомбинация и возбуждение атомов газа

. В металлах и электролитах свободные электрические заряды возникают из-за взаимодействия атомов и молекул самих этих веществ, без воздействия каких-либо посторонних факторов. Взаимодействие между частицами в твердых и жидких телах очень значительно, так как частицы в них расположены почти вплотную.

В газах атомы (в многоатомных газах — молекулы) находятся в среднем на большом расстоянии, поэтому сильно взаимодействовать они могут только при столкновениях. Если газ разреженный, то столкновения редки. Тем более редки те столкновения, которые приводят к *ионизации*, т. е. к отрыву электрона от атома.

«Узким местом» проводимости газов является малое количество свободных зарядов — электронов и ионов. Поэтому характер проводимости газа (газового разряда) *в первую очередь* будет зависеть от того, каким способом создаются в нем свободные заряды.

**Способы ионизации атомов газа.** Рассмотрим основные процессы, которые приводят к ионизации атомов газа.

а) Одним из них является *ионизация высокой температурой*. Высокая температура означает большую среднюю кинетическую энергию атомов. Если кинетическая энергия сталкивающихся атомов больше энергии ионизации, то ионизация при столкновении возможна. Чем выше температура, тем больше имеется в газе быстрых атомов. Степень ионизации газа (т. е. отношение числа ионизированных атомов к общему числу атомов) растет с температурой экспоненциально, как  $e^{-W/2kT}$ , где  $W$  — энергия ионизации. Напомним, что энергия ионизации большинства атомов составляет несколько электронвольт (до 10—20 эв).

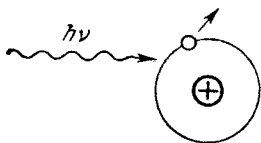


Рис. 207.

б) *Ионизация излучением* (рис. 207). Она возможна, если квант излучения больше энергии ионизации:

$$h\nu \geq W. \quad (77.1)$$

В § 66 мы уже выяснили, что при  $W = 2,5$  эв частота  $\nu$  отвечает середине спектра видимого света. Атомарные кислород и водород ( $W = 13,6$  эв), азот ( $W = 14,5$  эв), молекулярные водород ( $W = 15,4$  эв) и азот ( $W = 15,6$  эв) и др. ионизируются лучами из области ближнего ультрафиолета (длина волны  $10^{-5}$ — $10^{-6}$  см).

в) *Ионизация потоком быстрых частиц, приходящих извне*. Ионизация тяжелыми частицами (например ионами) может происходить (если масса быстрой частицы



порядка массы атома газа) только при энергии налетающих частиц более  $2W$ . Однако интенсивная ионизация быстрыми тяжелыми частицами имеет место лишь при энергиях порядка 100—1000 эв.

Ионизация газа электронами происходит гораздо эффективнее, чем ионизация тяжелыми частицами. Дело в том, что передача энергии от частицы к частице при ударе эффективнее всего происходит при равенстве или близости масс. Поэтому электрон при равной энергии с ионом является гораздо более эффективным ионизатором. Ион своим ударом скорее способен заставить атом быстро двигаться, чем ионизировать его.

г) *Ударная ионизация.* Так называется ионизация атомов ударом электронов (рис. 208) и ионов газа, разогнанных тем самым электрическим полем, которое вызывает ток через газ.

Ударную ионизацию производят в основном электроны, так как они нуждаются в меньшем поле, чем ионы: у них больше длина свободного пробега и это позволяет им приобретать большую энергию (см. также пункт (в)).

Обозначим путь, который проходит электрон от одного соударения до следующего, через  $x$ . Тогда, очевидно, работа силы поля  $F = eE$  на этом пути над электроном (если электрон движется вдоль поля) будет  $eEx$ . Для того чтобы электрон в конце пробега мог ионизировать атом, необходимо выполнение неравенства

$$eEx \geq W. \quad (77.2)$$

Свободный пробег  $x$  не может быть во много раз больше средней длины свободного пробега  $l$ . Поэтому напряженность поля, вызывающего ударную ионизацию, по порядку величины равна

$$E \sim \frac{W}{el}. \quad (77.3)$$

Чем больше давление газа, тем больше и напряженность поля, необходимая для ударной ионизации, так как длина свободного пробега (при постоянной температуре) обратно пропорциональна давлению.

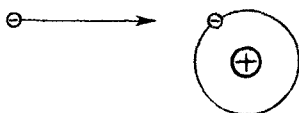


Рис. 208.

**Рекомбинация ионов газа.** Процесс, обратный ионизации (встреча положительного иона и электрона и образование нейтрального атома), называется *рекомбинацией*. Если ток через газ не идет и имеет место состояние термодинамического равновесия, то число ионизаций за секунду равно числу рекомбинаций. Ток уносит некоторое число электронов и ионов на электроды, поэтому в этом случае число рекомбинаций должно быть меньше числа ионизаций.

**Возбуждение атомов газа.** Возбуждение атома — это процесс переброса электрона из основного состояния в состояние с большей энергией (на более далекую от ядра орбиту). Энергия возбуждения меньше, чем энергия ионизации, и поэтому возбуждение может быть произведено менее энергичным электроном или квантом меньшей частоты. Переброшенный электрон через время порядка  $10^{-8}$  сек возвращается в основное состояние, излучая квант света (видимого, ультрафиолетового или инфракрасного, в зависимости от разности энергий на орбитах). Поэтому свечение той или иной области газоразрядной трубки при разряде в ней — признак того, что в этой области происходит возбуждение атомов.

## § 78. Газовый разряд

Под термином «газовый разряд» понимается огромное количество различных форм проводимости газа, начиная от разряда заряженного электроскопа и кончая электрической дугой и молнией.

Разряд, существующий лишь до тех пор, пока действуют посторонние ионизаторы (к таковым причисляются: высокая температура, ионизирующие излучения, потоки быстрых частиц, приходящие извне, и др.), называется *несамостоятельным*. Если же прекращение действия посторонних ионизаторов (необходимого для начала всякого разряда) не приводит к прекращению разряда, то разряд называется *самостоятельным*. Из перечисленных в предыдущем параграфе способов ионизации виды (а), (б), (в) типичны для самостоятельного разряда, а ионизация ударом электронов, разогнанных электрическим полем, — для самостоятельного разряда.

Существуют еще и переходные формы, которые трудно отнести к несамостоятельному или самостоятельному разряду именно потому, что для них существенны различные виды ионизации.

**Несамостоятельный разряд.** Наиболее простым видом несамостоятельного разряда является разряд заряженного электроскопа или другого заряженного тела при атмосферном давлении, происходящий без каких-либо световых или звуковых эффектов («тихий разряд»). Ионы и электроны, созданные в воздухе посторонними ионизирующими факторами (температурой, ультрафиолетовым излучением Солнца, слабым радиоактивным излучением Земли, космическими лучами и т. д.), постепенно разряжают заряженное тело.

Несамостоятельный разряд можно исследовать, подавая на освещаемый ультрафиолетовым светом межэлектродный промежуток АК (рис. 209) разность потенциалов  $u$  и измеряя проходящий через газ ток  $I$ .

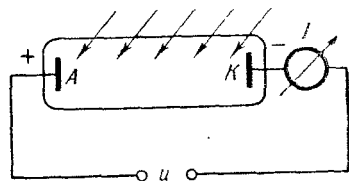


Рис. 209.

При  $u = 0$  все ионы, создаваемые посторонним ионизатором за секунду, очевидно, рекомбинируют, так как число ионов со временем не нарастает. Подавая напряжение, мы заставляем часть ионов поступать на электроды, при этом рекомбинируют только те, которые не успели попасть на электроды, поэтому с увеличением напряжения растет и ток. Вначале рост  $I$  оказывается линейным (рис. 210), в этой области напряжений, следовательно, имеет место закон Ома. При достаточно больших напряжениях ток перестает расти, наступает так называемое *насыщение*. Такая ситуация возникает, когда практически все ионы попадают на электроды, не успевая рекомбинировать. Если в  $1 \text{ см}^3$  за секунду ионизатор создает  $N$  пар ионов, то заряд, приходящий на электрод за секунду, т. е. ток насыщения, равен

$$I = eNSd, \quad (78.1)$$

где  $e$  — заряд иона,  $S$  — площадь сечения, а  $d$  — длина межэлектродного промежутка ( $NSd$  — общее число

ионов одного знака, создаваемых за секунду ионизатором во всем разрядном промежутке).

Подвижность ионов в газе гораздо больше, чем в электролите (в тысячи раз), и составляет несколько  $\text{см}^2/\text{в} \cdot \text{сек}$ . Например, подвижность иона водорода при нормальных условиях — около  $8 \text{ см}^2/\text{в} \cdot \text{сек}$ , а в электролите — порядка  $10^{-3} \text{ см}^2/\text{в} \cdot \text{сек}$ . Тем не менее качественно все приведенные в § 76 соображения о распределении скоростей ионов и их объемного заряда переносятся и на большинство видов газового разряда, в частности на рассматриваемый несамостоятельный разряд.

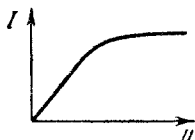


Рис. 210.

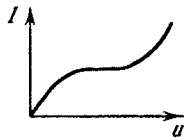


Рис. 211.

Если продолжать увеличивать напряжение на электродах, ток в конце концов тоже начнет расти (рис. 211). Рост тока означает увеличение числа ионов, создающихся в газе. Это происходит из-за появления ударной ионизации — разогнанные достаточно сильным полем электроны ионизируют атомы газа. Разряд в этом случае надо отнести уже не к чисто несамостоятельному, а к переходным формам. Чем ниже давление газа, тем при меньшей напряженности поля возникает ударная ионизация\*). Это видно из соотношения  $E \sim W/le$  (формула (77.3)), где  $l$  — длина свободного пробега электронов, обратно пропорциональная давлению газа. Поэтому переходные формы разряда удобнее всего наблюдать при пониженном давлении. Тогда не требуется большой напряженности поля.

**Тлеющий разряд.** Если создать в газоразрядной трубке давление порядка нескольких миллиметров или не-

\*) Однако чрезмерно понижать давление нельзя: при очень малом давлении электроны не встречают на своем пути атомов (длина свободного пробега больше размеров трубки), ионизация и возбуждение редки. Свечение газа в этом случае отсутствует, и светится лишь стекло трубки под ударами электронов.

скольких долей миллиметра ртутного столба, можно получить очень важный вид разряда — так называемый *тлеющий разряд*. Свечение в тлеющем разряде изображено вверху на рис. 212, внизу показано распределение потенциала и напряженности в разрядном промежутке.

Разрядный промежуток, как видно из рис. 212, состоит из нескольких чередующихся темных и светлых областей. К катоду примыкает почти вплотную тонкая светящаяся оболочка, затем следует первый темный промежуток, за ним светящийся слой, после которого наблюдается более значительное темное пространство  $F$ , называемое фарадеевым. От фарадеева темного пространства до анода располагается длинный светящийся столб, занимающий большую часть трубки.

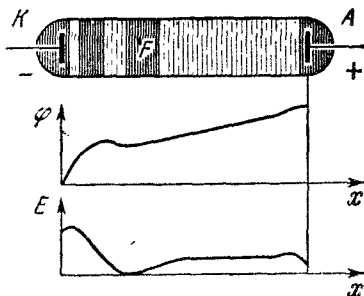


Рис. 212.

Во всех светящихся областях электроны ионизируют и возбуждают атомы газа. Распределение потенциала вдоль трубки (рис. 212), подобное рассмотренному в § 76, указывает на скопление положительных ионов вблизи катода и электронов вблизи анода. В положительном столбе ход потенциала линейен, напряженность поля там постоянна. Это значит, что объемного заряда там нет\*), что концентрации положительных и отрицательных зарядов одинаковы. Такое состояние вещества называется плазмой (см. § 79).

Электроны движутся от катода к аноду, разгоняясь под действием приложенного поля и ионизируя атомы газа. Положительные ионы движутся к катоду, однако поле в тлеющем разряде недостаточно велико, чтобы ионы могли быть эффективными ионизаторами (см. предыдущий параграф, стр. 259). Число заряженных частиц, создаваемых электронами, лавинообразно нарастает

\*) В области объемного заряда напряженность поля растет — см. рис. 60 (на этом графике изображен ход напряженности, а не потенциала!).

по направлению к аноду, но лавина эта *односторонняя*, так как ионы на протяжении почти всего пути к катоду не создают новых заряженных частиц. Если бы ионы *нигде* не создавали новых электронов, разряд прекратился бы после того, как последний электрон дошел до анода. Поэтому ясно, что ионы все-таки где-то в трубке создают электроны. Это действительно имеет место вблизи катода и на самом катоде. Вблизи катода потенциал быстро меняется (рис. 212), следовательно там велика напряженность поля. Ионы в этой области пространства ионизируют атомы газа толчком и, кроме того, попадая на анод, выбивают из него электроны. Последнее явление называется *вторичной электронной эмиссией* под ударами ионов\*) и играет существенную роль в тлеющем разряде.

Положительный столб тлеющего разряда дает основную часть света. Цвет разряда зависит от вида газа. Так, например, неон светится ярко-красным светом, аргон — синим и т. д. Атом каждого вещества при переходе из возбужденного состояния в основное испускает квант, величина которого равна разности энергий возбужденного и основного уровней валентного электрона. Уровни у атомов различных веществ различны, поэтому различны и испускаемые ими кванты, т. е. различен цвет свечения.

Свечение тлеющего разряда используется в лампах дневного света, для сигнализации на аэродромах (неоновые маяки), для реклам. Помимо этого, тлеющий разряд широко применяется в электровакуумной технике. Если, например, сделать анод и катод из металлов с резко различной работой выхода (или один из электродов сделать игольчатым, а другой плоским), то трубка может служить выпрямителем. Когда катодом является металл с малой работой выхода (или он обладает игольчатой формой), положительные ионы выбивают из него электроны, и разряд горит. При обратной полярности вторичной электронной эмиссии нет, и ток через трубку не идет. Такая трубка обладает односторонней проводимостью, т. е. является выпрямителем (в определенном

---

\*) Существует еще вторичная электронная эмиссия под ударами быстрых электронов, когда ударяющиеся о поверхность металла электроны выбивают из него вторичные электроны. Отсюда и название — вторичная эмиссия.

интервале напряжений, потому что большие напряжения вызовут вторичную эмиссию и из металла с большей работой выхода).

Тлеющий разряд применяется и для создания более сложных ионных приборов — тиратрона, стабилотрона и др.

**Самостоятельный газовый разряд.** Возвращаясь к рис. 211, рассмотрим процессы, возникающие при дальнейшем значительном увеличении напряжения между электродами. Если напряжение достигает такой величины, при которой не только электроны, но и ионы станут интенсивными ионизаторами, односторонняя лавина сменяется двухсторонней, и наступает пробой газа (чисто самостоятельный разряд).

При больших давлениях (например при атмосферном) и больших напряженностях поля развитие этого разряда происходит в узких каналах, форма которых обусловлена случайными скоплениями электронов и ионов. Разряд носит прерывистый (искровой) характер. Пробой воздуха при атмосферном давлении, нормальной влажности и нормальной степени ионизации воздуха, между шаровыми электродами радиусом порядка сантиметра происходит при напряженности поля  $E \approx \approx 30\,000$  в/см. С повышением давления  $p$  напряженность пробоя растет примерно пропорционально  $p$  (поскольку длины свободного пробега электронов и ионов обратно пропорциональны давлению).

Колоссальной интенсивности искровым разрядом является молния. Разность потенциалов между облаком и землей (или между двумя облаками) может достигать ста миллионов ( $10^8$ ) вольт при длине искры в несколько километров, ток может доходить до  $10^5$  а, диаметр канала — до 30—40 см, температура в нем — до десятков тысяч градусов. Нетрудно подсчитать, что, несмотря на огромные разности потенциалов, напряженность поля при этом не достигает 30 000 в/см. Во время грозы воздух влажен и сильно ионизирован, что снижает напряженность пробоя.

Прерывистый характер искры обусловлен тем, что искра, обладая малым сопротивлением, «закорачивает» электроды, и напряжение между ними падает. Падение напряжения прекращает разряд, после чего процесс повторяется.

Искровой разряд в жидких и твердых диэлектриках происходит при значительно больших напряженностях поля, чем в газах. В жидких диэлектриках напряженность пробоя (так называемая *диэлектрическая прочность*)  $E_{\text{проб}} \sim 10^5 - 10^6$  в/см, в твердых  $10^6 - 10^7$  в/см. Большая величина диэлектрической прочности твердых изоляторов может привести к тому, что разряд будет происходить по поверхности изолятора, всегда несколько влажной и загрязненной. Чтобы избежать пробоя по поверхности, поверхность искусственно удлинняют, например создавая ребра.

При пробое твердого или жидкого диэлектрика имеющиеся в нем в небольшом количестве электроны под действием сильного поля на длине свободного пробега  $l \sim 10^{-5}$  см приобретают энергию, достаточную для ионизации атомов вещества. Поток электронов ионизирует атомы и выбивает их из узлов. В канале искрового разряда движущиеся под действием поля электроны и ионы выделяют большую энергию, из-за чего температура в канале возрастает, диэлектрик плавится и испаряется. В твердом диэлектрике после прекращения разряда остается отверстие, так что диэлектрик «пробиивается» в прямом смысле слова.

**Дуговой разряд.** Весьма сложным видом разряда является дуговой разряд («вольтова дуга»), открытый Петровым в 1802 г. Этот разряд находит широкое применение в сварке, в ртутных выпрямителях, для освещения, в дуговых печах и т. д. Отличительной особенностью дуги является большая сила тока при малом напряжении.

Разряд начинается с соприкосновения угольных или металлических электродов. Вследствие большого сопротивления их контакта электроды раскаляются, и с катода начинается электронная эмиссия. Воздушный промежуток между электродами сильно ионизируется высокой температурой и приобретает малое сопротивление. Поэтому после разведения электродов даже при небольшой разности потенциалов возникает большой ток (десятки, сотни ампер и больше). Электроны, бомбардируя анод, выбивают в нем углубление (кратер). Температура кратера достигает  $4000^\circ$ , а в дуге под давлением — даже около  $6000^\circ$  (температура поверхности Солнца). Основная часть света дуги исходит именно из кратера анода.



## § 79. Плазма

Плазма представляет собой достаточно сильно ионизированный, но в целом нейтральный газ. Какая степень ионизации может считаться достаточно сильной — будет выяснено ниже. Практически степень ионизации (отношение концентрации заряженных частиц к полной концентрации всех частиц) может колебаться от долей процента до единицы (полностью ионизированная плазма).

Управляемая термоядерная реакция может быть осуществлена только при очень высоких температурах, при которых любое вещество будет находиться в плазменном состоянии. Этим, в частности, объясняется повышенный интерес к плазме, который проявляют физики в последнее десятилетие. Изучение плазмы представляет интерес и для физики твердого тела. Мы уже упоминали в § 62, что электроны в металле представляют собой плазму, причем исключительно большой плотности (концентрация электронов порядка  $10^{22}$ — $10^{23}$   $1/\text{см}^3$ ).

**Плазменные колебания.** Говоря, что плазма нейтральна, мы имеем в виду, что нейтральным является каждый физически бесконечно малый элемент объема (объем, малый макроскопически, но содержащий еще большое количество электронов и ионов). Однако достаточно сильное воздействие на плазму может привести к разделению зарядов в некоторой ее области. Такое воздействие может оказать, например, быстрая заряженная частица из числа электронов или ионов самой плазмы (при достаточно высокой температуре) или пришедшая извне:

Разделение положительных и отрицательных зарядов аналогично процессу поляризации диэлектрика. Однако в диэлектрическом кристалле частицы не могут передвигаться на расстояния большие, чем  $10^{-8}$  см, а в плазме возможны любые перемещения частиц.

Пусть плоский слой электронов, координата  $x$  которого первоначально совпадала с координатой такого же плоского слоя ионов, сдвигается на величину  $x$  (рис. 213). Такой сдвиг вполне аналогичен поляризации диэлектрика. Если плазма бесконечна и в ней отсутствуют свободные электрические заряды, являющиеся источниками вектора  $D$ , то  $D = E + 4\pi P = 0$ , т. е. напряженность

поля равна  $E = -4\pi P$ , где  $P$  — дипольный момент единицы объема (§ 37). Дипольный момент  $P$ , возникающий при сдвиге электронов относительно ионов, равен  $P = exn$  ( $e$  — заряд электрона,  $ex$  — дипольный момент, создаваемый одним электроном,  $n$  — число электронов в единице объема). Следовательно,  $E = -4\pi enx$ ; отсюда сила, действующая на каждый электрон, равна

$$F = eE = -4\pi e^2 nx. \quad (79.1)$$

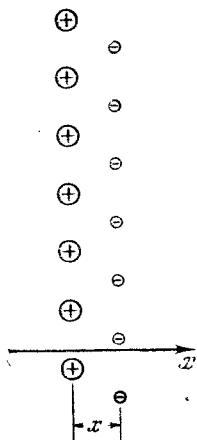


Рис. 213.

Сила, пропорциональная смещению ( $x$ ) и направленная в сторону, обратную ему, называется упругой. Такая сила  $F = -kx$  действует, например, на груз, прикрепленный к пружине ( $x$  — растяжение пружины,  $k$  — коэффициент ее жесткости). Эта сила вызывает гармонические колебания. Частота их  $\omega$  ( $\omega = 2\pi\nu$ ), как можно доказать, равна

$$\omega = \sqrt{k/m}, \quad (79.2)$$

где  $m$  — масса колеблющейся частицы. В нашем случае роль коэффициента жесткости  $k$  играет величина  $4\pi e^2 n$  (см. формулу (79.1)). Следовательно, электроны будут колебаться относительно ионов с частотой

$$\omega = \sqrt{4\pi e^2 n/m}, \quad (79.3)$$

называемой *плазменной частотой*. Если, например, концентрация электронов  $n = 10^{18} \text{ 1/см}^3$  ( $e = 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ СГС}$ ,  $m = 9 \cdot 10^{-28} \text{ г}$ ), то  $\omega = 5 \cdot 10^{13} \text{ сек}^{-1}$ . При  $n = 10^{23} \text{ 1/см}^3$   $\omega \sim 1,5 \cdot 10^{16} \text{ сек}^{-1}$ .

Колебания электронов, возникшие в определенном месте плазмы, создадут волну той же частоты, распространяющуюся через плазму. Об элементарных плазменных волнах (плазмонах) уже говорилось в § 62. Энергия плазмона  $\varepsilon = \hbar\omega$  при концентрации электронов  $10^{18} \text{ 1/см}^3$  составляет 0,03 эв, а при концентраций  $n = 10^{23} \text{ 1/см}^3$  — около 10 эв.

Плазмоны с энергией  $0,03 \text{ эв}$  легко возникают даже в холодной плазме, имеющей комнатную температуру, так как характерная энергия теплового движения частиц  $kT$  при комнатной температуре близка к  $0,03 \text{ эв}$  и, следовательно, есть много частиц, способных создать колебания плазмы.

Концентрация электронной плазмы металла очень велика (порядка  $10^{23} \text{ 1/см}^3$ ); ей, как мы видели, соответствуют энергии плазмонов порядка десятков электронвольт, поэтому обычно в металле плазмоны отсутствуют. Они могут быть созданы, например, проходящими сквозь металлическую пленку быстрыми электронами или электромагнитными волнами соответствующей частоты.

**Экранирование заряда плазмой.** Весьма характерным свойством плазмы является ее способность «экранировать» любой помещенный в плазму электрический заряд. Вероятность пребывания около него зарядов того же знака будет меньше, чем зарядов противоположного знака. Поэтому помещенный в плазму заряд будет окружен «атмосферой», имеющей в целом заряд противоположного знака.

Эти соображения относятся не только к посторонним зарядам, внесенным в плазму, но и к зарядам самой плазмы. Каждый положительный ион будет окружен атмосферой, содержащей электронов на единицу больше, чем положительных ионов. Можно доказать, что потенциал поля, создаваемого экранированным таким образом ионом, будет зависеть от расстояния  $r$  от иона по закону

$$\varphi = \frac{q}{r} e^{-r/r_0}. \quad (79.4)$$

Здесь  $q$  — заряд иона,  $r_0$  — так называемый *радиус экранирования* (или *дебаевский радиус*).

На расстоянии от иона, равном нескольким  $r_0$ , потенциал оказывается очень малым. Радиус экранирования для двухкомпонентной изотермической (об этом см. дальше) плазмы, содержащей однозарядные ионы и электроны, равен

$$r_0 = \sqrt{kT/8\pi e^2 n}, \quad (79.5)$$

где  $n$  — средняя по плазме концентрация электронов (и ионов). Так, например, для водородной плазмы при

$T = 10^5$  °К и концентрации  $n = 10^{16}$  1/см<sup>3</sup> радиус экранирования  $r_0 = 1,5 \cdot 10^{-5}$  см. В сфере такого радиуса находится около 30 частиц каждого знака.

Представление об окружающей ион «атмосфере» применимо лишь, если в дебаевской сфере имеется много частиц; в приведенном примере это так и есть.

**Изотермическая и неизотермическая плазма.** В плазме, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, температура ионов и электронов одинакова (т. е. одинаковы их средние кинетические энергии). Такая плазма называется изотермической. Если в плазме идет достаточно сильный электрический ток, то электроны, разгоняемые полем, могут иметь среднюю энергию значительно большую, чем ионы. Такая плазма называется неизотермической. Температура электронов; легко обменивающихся энергией между собой и слабо — с ионами (ввиду большой массы последних), может значительно превышать температуру ионов.

**«Пинч-эффект».** Сильный электрический ток в плазме приводит к самостягиванию ее (к так называемому «пинч-эффекту»). Известно, что параллельные электрические токи притягиваются благодаря своему магнитному взаимодействию (см. § 87). Самостягивание плазмы как раз и вызывается притяжением отдельных параллельных токов, на которые можно разбить всю плазму. Для того чтобы усилить стягивание плазмы в тонкий шнур с высокой температурой, применяют дополнительное внешнее магнитное поле. В этих условиях удается добиться температур порядка миллионов градусов.

Если бы удалось получить стабильную плазму с температурой более  $10^7$  градусов, то это обеспечило бы осуществление управляемой термоядерной реакции. До сих пор не удается достичь желаемых температур и высоких плотностей плазмы из-за исключительно разнообразных неустойчивостей, которыми обладает плазма. Борьба с этими неустойчивостями (изгибание шнура, появление перетяжек в нем, утечка частиц, нарушение термоизоляции и т. д.) составляет основную техническую трудность на пути создания плазмы с нужными свойствами.

## ГЛАВА VII МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

### § 80. Магнитное поле тока

Из таблицы источников и вихрей (гл. III, стр. 62) видно, что в *однородном магнетике* вектор напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  не имеет источников, а вихрями его, в отсутствие переменного электрического поля, являются только макротоки. Следовательно,  $\mathbf{H}$  в *этих*

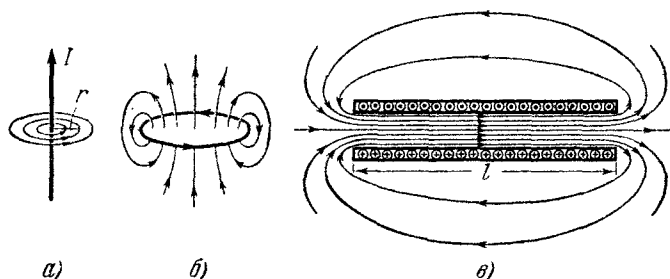


Рис. 214.

*условиях* не зависит от свойств среды. Поэтому в настоящей главе, посвященной изучению поля макротоков, естественно пользоваться именно вектором  $\mathbf{H}$ , а не  $\mathbf{B}$ . Напряженность магнитного поля, создаваемого макротоками в однородном магнетике, будет такой же, как в пустоте.

Линии вектора  $\mathbf{H}$  прямого тока, кругового тока и соленоида изображены на рис. 214. Эти линии замкнуты и окружают вихри, которыми, как мы знаем, являются электрические токи. Направление магнитного поля определяется известным «правилом буравчика».

**Циркуляция вектора  $H$ .** В 1820 г. Эрстед обнаружил, что электрический ток создает магнитное поле. Уже через 10—20 лет физики во всем мире поставили огромное количество опытов, в результате которых оказалось возможным определить напряженность магнитного поля, создаваемого произвольной системой электрических токов.

Для того чтобы сформулировать результат этих опытов, напомним понятие циркуляции вектора (§§ 7, 11). Циркуляцией вектора силы  $F$  по некоторому замкнутому контуру называется работа этой силы на контуре, т. е. сумма элементарных работ на элементарных участках контура  $\Delta l$ :

$$\sum F \Delta l \cos \alpha = \sum F \cdot \Delta l$$

( $F \cdot \Delta l$  — скалярное произведение векторов  $F$  и  $\Delta l$ , см. § 13). Если устремить длину каждого участка  $\Delta l$  к нулю, а следовательно, число их к бесконечности, то сумма превратится в интеграл по замкнутому контуру

$\oint F \cdot dl$ , который называется циркуляцией силы и имеет смысл полной работы на замкнутом пути.

Если вместо силы подставить в этот интеграл напряженность магнитного поля  $H$ , то полученный интеграл

$$\oint H \cdot dl$$

будет называться циркуляцией напряженности.

Упомянутые выше эксперименты по измерению напряженности магнитного поля тока показали, что циркуляция напряженности по контуру, окружающему любую систему токов, пропорциональна алгебраической сумме этих токов:

$$\oint H \cdot dl = k \sum I.$$

О токах, стоящих справа, говорят как о токах, пересекающих площадь контура. Положительными надо считать те из них, направление которых составляет с направлением обхода правый винт. Если на рис. 215 обходить контур против часовой стрелки, то токи  $I_1$  и  $I_3$

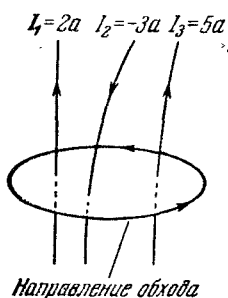


Рис. 215.

надо считать положительными, а ток  $I_2$  — отрицательным, так что алгебраическая сумма токов будет равна  $I_1 + I_3 - I_2 = 2 + 5 - 3 = 4a$ .

Коэффициент пропорциональности  $k$ , как всегда, зависит от выбора системы единиц. В системе СИ он полагается равным 1, в гауссовой системе — равным  $4\pi/c$  (где  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/сек — скорость света в вакууме):

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I \quad (\text{СИ}),$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \sum I \quad (\text{СГС}). \quad (80.1)$$

Формула (80.1) носит название *теоремы о циркуляции напряженности магнитного поля*, или *закона полного тока*. Последнее название объясняется тем, что справа стоит полный ток, охватываемый контуром. Если, кроме токов проводимости, есть еще ток смещения (переменное электрическое поле), то и его надо включить в сумму токов, стоящую справа, так как переменное электрическое поле создает магнитное поле на равных правах с током проводимости.

**Напряженность магнитного поля прямого тока.** Применим формулу (80.1) к вычислению напряженности магнитного поля прямого бесконечного тока (рис. 214, а). В качестве контура, по которому берется циркуляция, возьмем окружность некоторого произвольного радиуса  $r$ . Напряженность поля  $\mathbf{H}$  и элемент длины контура  $d\mathbf{l}$  имеют одно и то же направление (см. рис. 216, на котором ток считается направленным перпендикулярно

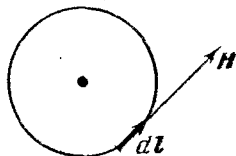


Рис. 216.

к рисунку к нам). Поэтому скалярное произведение  $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H \cdot dl \cdot \cos \alpha$  превращается в произведение модулей  $H \cdot dl$ . Поскольку очевидно, что напряженность  $\mathbf{H}$  на окружности постоянна, ее можно вынести за знак интеграла (напомним, что знак интеграла — это то же, что знак суммы). Если вынести  $H$ , то останется интеграл  $\oint dl$ , т. е. сумма всех элементов длины контура, равная  $2\pi r$ . Следовательно, из формулы (80.1) для

бесконечного прямого проводника с током получим

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (\text{СИ}),$$

$$H = \frac{2I}{cr} \quad (\text{СГС}).$$
(80.2)

Таким образом, напряженность магнитного поля бесконечно длинного прямого провода с током обратно пропорциональна расстоянию от него.

Разумеется, формулу (80.2) можно применить и к прямому проводу конечной длины  $l$ , если расстояние от точки наблюдения до провода во много раз меньше, чем расстояния от этой точки до обоих его концов.

**Единицы измерения  $H$ .** Из соотношения (80.2) легко установить единицы измерения напряженности магнитного поля  $H$  в системах СИ и гауссовой. В системе СИ напряженность  $H$  измеряется в амперах на метр ( $a/m$ ). В гауссовой системе ток измеряется в единицах заряда СГС<sub>q</sub> за секунду, расстояние — в сантиметрах. Получающаяся единица напряженности магнитного поля называется *эрстедом*. Напряженность в 1 э создает длинный провод, по которому течет ток  $I = 3 \cdot 10^{10}$  гауссовых единиц тока (т. е.  $10 a$ ), на расстоянии 2 см от провода. Подставляя  $I = 10 a$  и  $r = 2 \cdot 10^{-2} m$  в формулу системы СИ, получим

$$H = \frac{10}{2\pi \cdot 2 \cdot 10^{-2}} a/m = \frac{10^3}{4\pi} a/m = 1 \text{ э}.$$

Отсюда

$$1 a/m = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ э} \approx 0,0126 \text{ э}; \quad 1 \text{ э} = \frac{10^3}{4\pi} a/m \approx 79,6 a/m.$$

**Напряженность поля в длинном соленоиде.** С помощью теоремы о циркуляции  $H$  легко вычислить напряженность магнитного поля внутри длинного соленоида. Рассмотрим с этой целью на рис. 214, в замкнутый контур, проходящий внутри соленоида, например совпадающий с одной из линий  $H$ . Каждая линия обязательно проходит как внутри соленоида, так и вне его. Подавляющее число линий вне соленоида проходит на расстоянии от него порядка длины соленоида  $l$ , т. е. через перпендикулярную к соленоиду площадку порядка  $l^2$ . Внутри соленоида эти же линии проходят через



площадь  $\pi r^2$  ( $r$  — радиус соленоида). Напряженность равна числу линий, проходящих через единичную площадку, поэтому внутри соленоида напряженность больше, чем вне его, в  $l^2/r^2$  раз. Если длина соленоида во много раз больше его радиуса, то поле вне соленоида весьма мало по сравнению с полем внутри его. Тогда из контура, по которому берется циркуляция, можно оставить лишь ту часть, которая проходит внутри соленоида. Последняя же равна просто  $NI$ , поскольку  $H$  внутри соленоида почти постоянна. Из формулы (80.1) тогда следует  $NI = \frac{4\pi}{c} \sum I$ .

Сумма токов, пересекающих площадь контура, равна  $\sum I = NI$ , где  $N$  — число витков соленоида, поэтому

$$H = \frac{4\pi NI}{cl} \quad (\text{СГС}). \quad (80.3)$$

В системе СИ эта формула выглядит так:

$$H = \frac{NI}{l} \quad (\text{СИ}). \quad (80.4)$$

Таким образом, напряженность поля в длинном соленоиде равна числу ампер-витков, приходящихся на метр.

**Закон Био и Савара.** Теорему о циркуляции  $H$  удобно применять для определения напряженности поля только в том случае, если можно выбрать контур или часть контура, на которой  $H$  постоянна. Если нас интересует, например, поле кругового витка в центре круга, такой контур выбрать невозможно. В этом случае для нахождения напряженности нужно векторным образом сложить поля, создаваемые отдельными элементами тока. Эксперименты показывают, что поле, создаваемое элементом тока (т. е. малым отрезком проводника, по которому течет ток, см. рис. 217) в точке  $M$ , положение которой определяется радиусом-вектором  $r$ , равно

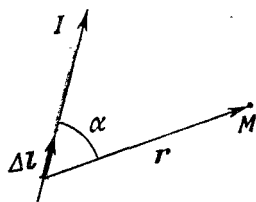


Рис. 217.

$$\Delta H = \frac{I}{c} \frac{\Delta l \times r}{r^3} \quad (\text{СГС}),$$

а по модулю

$$\Delta H = \frac{I}{c} \frac{\Delta l}{r^2} \sin \alpha \quad (\text{СГС}). \quad (80.5)$$

В системе СИ вместо множителя  $\frac{1}{c}$  будет  $\frac{1}{4\pi}$ , т. е.

$$\Delta H = \frac{I}{4\pi} \frac{\Delta l \times r}{r^3} \quad (\text{СИ}). \quad (80.5')$$

Согласно определению векторного произведения векторов (§ 13) поле  $\Delta H$  перпендикулярно к плоскости векторов  $\Delta l$  и  $r$ . На рис. 217 оно направлено от нас (в глубь рисунка). Как видно из формулы (80.5), поле убывает обратно пропорционально квадрату расстояния от элемента тока, подобно электрическому полю точечного заряда. Однако магнитное поле, создаваемое элементом тока, в отличие от электрического поля точечного заряда, зависит не только от расстояния, но и от угла  $\alpha$ , составляемого радиусом-вектором  $r$  с элементом  $\Delta l$ . Поле направлено не по радиусу-вектору, а перпендикулярно к нему.

Формула (80.5) называется *законом Био и Савара*. По сути, она эквивалентна теореме о циркуляции — одно соотношение можно вывести из другого. Это, однако, не означает, что их одинаково удобно применять во всех случаях. Например, формула (80.5) была бы весьма неудобна, если бы мы попробовали с ее помощью найти поле соленоида. Пришлось бы складывать (интегрировать) поля, создаваемые элементами витков соленоида. Наоборот, задача о поле в центре кругового витка весьма легко решается с помощью формулы (80.5).

**Поле в центре кругового витка.** Поле, создаваемое элементом  $\Delta l$  кругового витка в центре круга (рис. 218), направлено нормально к плоскости витка и по модулю равно

$$\Delta H = \frac{I}{c} \frac{\Delta l}{r^2} \quad (\text{СГС})$$

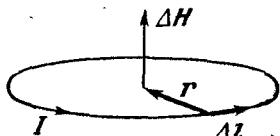


Рис. 218.

(угол между  $r$  и  $\Delta l$  равен  $\pi/2$ , и синус его равен единице). Так как радиус-вектор  $r$  (по модулю) для всех элементов один и тот же (он совпадает с радиусом круга), то полное поле  $H$  всех элементов получается суммированием всех  $\Delta l$ , что дает длину окружности  $2\pi r$ . Поэтому

$$\begin{aligned} H &= \frac{2\pi I}{cr} \quad (\text{СГС}), \\ H &= \frac{I}{2r} \quad (\text{СИ}). \end{aligned} \quad (80.6)$$

Можно доказать, что поле кругового витка, а также замкнутого тока другой формы, полностью совпадает с полем соответствующим образом намагниченного магнитного листка (магнитного диполя). Представим себе вырезанный из листового железа намагниченный кружок, равный по размерам витку с током; одна плоскость кружка является северным, а вторая — южным полюсом

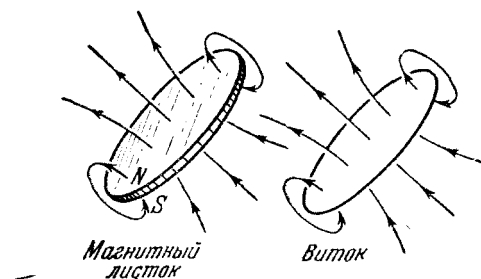


Рис. 219.

(рис. 219). При соответствующем подборе его намагниченности полностью совпадут поля витка и листка (разумеется, во внешней области — внутри материала магнитного листка поля  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{B}$  не совпадают и даже направлены в противоположные стороны; об этом см. § 16).

### § 81. Магнитное поле движущегося заряда

Из формулы закона Био и Савара можно непосредственно получить поле равномерно движущегося заряда. Очевидно, что произведение  $I\Delta l$ , стоящее в числителе формулы (80.5), можно записать как  $jS\Delta l$ , где  $j$  — плотность тока,  $S$  — площадь сечения проводника. Пользуясь тем, что  $j = env$  (§ 55), получим

$$I\Delta l = enS\Delta l v = eNv,$$

где  $N = nS\Delta l$  — полное число зарядов, движущихся на участке  $\Delta l$ . Если заряд всего один, т. е.  $N = 1$ , то  $I = ev$ , что и следует подставить в закон Био и Савара.

Итак, напряженность поля  $\mathbf{H}$  одного движущегося с постоянной скоростью  $\mathbf{v}$  заряда  $e$  равна

$$\mathbf{H} = \frac{e}{c} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (\text{СГС}). \quad (81.1)$$

Здесь  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из точки, где в данный момент находится движущийся заряд, в ту точку, где напряженность магнитного поля равна  $\mathbf{H}$ . Это поле передвигается вместе с зарядом, однако оно различно в различных системах отсчета. В частности, в системе отсчета, движущейся вместе с зарядом, магнитное поле равно нулю.

Расчет поля движущегося электрона на основании уравнений Максвелла показывает, что выражение (81.1) справедливо, если скорость заряда  $v$  мала по сравнению со скоростью света  $c$ .

Электрическое поле неподвижного заряда  $\mathbf{E}$  равно (формула (22.2))

$$\mathbf{E} = \frac{er}{r^3} \quad (\text{СГС}). \quad (81.2)$$

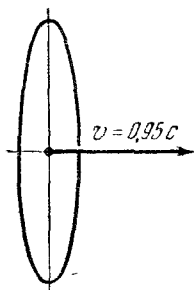


Рис. 220.

В тех системах отсчета, относительно которых заряд движется со скоростью  $v$ , электрическое поле тоже определяется формулой (81.2), зависит только от расстояния от заряда, т. е. сферически симметрично, передвигается вместе с зарядом и не зависит от его скорости. Однако при больших скоростях электрическое поле перестает быть сферически симметричным и концентрируется в плоскости, перпендикулярной к  $v$ . Если  $v^2/c^2 = 0,9$ , то поверхность, где величина напряженности постоянна, вместо сферы имеет вид, показанный на рис. 220. При этом напряженность направлена всюду по радиусу-вектору.

Из формул (81.1) и (81.2) очевидно, что между магнитным и электрическим полями движущегося заряда существует связь:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{E} \quad (\text{СГС}), \quad (81.3)$$

причем сама по себе эта связь справедлива при любых скоростях  $v$  (конечно, меньших скорости света, так как согласно теории относительности скорость любого тела в любой системе отсчета меньше скорости света).

Соотношение (81.3) остается справедливым для произвольной системы зарядов, движущихся с одинаковой и постоянной скоростью  $v$ . Чтобы доказать это, достаточно

написать формулу (81.3) для каждого заряда и сложить полученные выражения. Тогда слева получится полное поле  $\mathbf{H}$ , а справа — произведение скорости на полное поле  $\mathbf{E}$ .

### § 82. Действие магнитного поля на электрический заряд

На электрический заряд в магнитном поле, как нам известно из § 5 и § 13, действует сила Лоренца. В системе СИ коэффициент пропорциональности  $k$  полагается равным 1, в гауссовой системе он равен  $1/c$ , где  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/сек (скорость света в пустоте):

$$\mathbf{F} = \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (\text{СГС}), \quad (82.1)$$

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (\text{СИ}).$$

Напомним, что эта сила пропорциональна величине  $B$  (а не  $H$ ), поскольку на заряд, движущийся в материальной среде, действуют поля, создаваемые всеми существующими в этой среде токами. Магнитная индукция  $\mathbf{B}$  является усредненным полем, создаваемым как макро-, так и микротоками, и поэтому именно  $\mathbf{B}$  определяет силу, действующую на заряд.

**Единицы измерения  $B$ .** Из выражений (82.1) определяются единицы измерения  $B$  в обеих системах. В гауссовой системе сила измеряется в динах, заряд — в единицах СГС<sub>q</sub>. Размерность скорости  $v$  сокращается с размерностью скорости света  $c$ . Следовательно, размерность  $[B] = e^{1/2} \text{ см}^{-1/2} \text{ сек}^{-1}$  такова же, как размерность напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ , магнитного поля  $\mathbf{H}$  и электрической индукции  $\mathbf{D}$ . Единица  $B$  в гауссовой системе называется *гауссом*. Из (82.1) видно, что 1 гс — это магнитное поле, в котором на заряд 1 СГС<sub>q</sub>, движущийся со скоростью  $v = c$  перпендикулярно к полю, действует сила в одну дина (чтобы не было неприятного равенства  $v = c$ , можно взять заряд в  $N$  единиц СГС<sub>q</sub>, движущийся со скоростью  $\frac{c}{N}$ ,  $N > 1$ ).

Единица  $B$  в системе СИ называется *тесла*. Заряд в этой системе измеряется в кулонах, сила — в ньютонах. Если взять  $q = 1$  СГС<sub>q</sub>  $= \frac{1}{3 \cdot 10^9}$  к,  $F = 1$  дина  $= 10^{-5}$  н и  $v = c = 3 \cdot 10^8$  м/сек, то должно получиться поле снова в

1 гс. Подстановка этих значений в формулу (82.1) в системе СИ (при  $\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$ ) дает

$$10^{-5} = \frac{1}{3 \cdot 10^8} \cdot 3 \cdot 10^8 B \text{ (тесла)},$$

т. е.  $B = 10^{-4}$  тесла. Следовательно,

$$1 \text{ гс} = 10^{-4} \text{ тесла}, \text{ или } 1 \text{ тесла} = 10^4 \text{ гс}.$$

Размерность тесла  $\text{н} \cdot \text{сек}/\text{к} \cdot \text{м}$ . Стандартная запись ее следующая:

$$\frac{\text{н} \cdot \text{сек}}{\text{к} \cdot \text{м}} = \frac{\text{н} \cdot \text{м} \cdot \text{сек}}{\text{к} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{дж} \cdot \text{сек}}{\text{к} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{в} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2} = \frac{\text{вебер}}{\text{м}^2}$$

(1 вебер, по определению, это  $1 \text{ в} \cdot 1 \text{ сек}$ ).

Поле в один гаусс — это слабое магнитное поле, порядка магнитного поля Земли. Поле, равное 10—100 гс, создает вблизи полюса обычный постоянный магнит. Большой лабораторный электромагнит может создать поле 10—20 тысяч гс. Один из крупнейших наших физиков, П. Л. Капица, получил в 1929 г. поле в 300 000 гс. Наивысшие поля, получаемые сегодня в лабораториях (импульсным методом), — порядка  $10^6$ — $10^7$  гс.

**Движение заряда в однородном магнитном поле.** Рассмотрим движение заряда в однородном магнитном поле  $\mathbf{B}$  (рис. 221; направление движения на этом рисунке соответствует отрицательному заряду). Разложим скорость заряда  $\mathbf{v}$  на составляющую  $\mathbf{v}_{\parallel}$ , параллельную  $\mathbf{B}$ , и составляющую  $\mathbf{v}_{\perp}$ , перпендикулярную к этому вектору.

Ускорение вдоль оси  $Oz$  (вдоль  $\mathbf{B}$ ) отсутствует, так как сила Лоренца (82.1) перпендикулярна к полю. Следовательно, составляющая  $\mathbf{v}_{\parallel}$  будет оставаться постоянной — начальная скорость движения вдоль линий поля сохраняется. Вторая составляющая,  $\mathbf{v}_{\perp}$ , будет меняться лишь по направлению, так как сила Лоренца перпендикулярна к ней и не может изменить ее величину. Обе составляющие скорости не меняются по модулю,

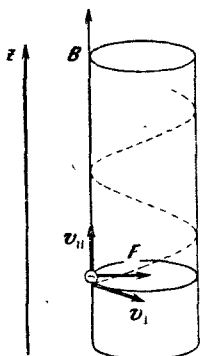


Рис. 221.

следовательно, и кинетическая энергия частицы будет оставаться постоянной. Это очевидно уже из того, что сила Лоренца, будучи перпендикулярной к скорости, не выполняет над зарядом работы.

При повороте перпендикулярной к  $\mathbf{B}$  составляющей  $v_{\perp}$  будет поворачиваться и сила  $\mathbf{F}$ , оставаясь все время нормальной к скорости. Такая сила создает нормальное ускорение  $v_{\perp}^2/R$ . Следовательно, согласно второму закону Ньютона,

$$\frac{mv_{\perp}^2}{R} = \frac{q}{c} v_{\perp} B.$$

Отсюда ясно, что радиус кривизны  $R$  будет оставаться постоянным, так как постоянны все остальные величины, входящие в эту формулу ( $v_{\perp}$ ,  $B$ ). Постоянный радиус кривизны имеет только окружность. Итак, движение заряда в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю, будет *движением по окружности*. Эту окружность часто называют *ларморовой орбитой*. Радиус ларморовой орбиты равен, как ясно из вышесказанного,

$$R = \frac{mv_{\perp} c}{qB} \quad (\text{СГС}),$$

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} \quad (\text{СИ}).$$
(82.2)

Естественно, что чем сильнее поле, тем меньше становится радиус вращения, чем больше скорость заряда, тем больше и радиус. Когда поле стремится к нулю, радиус стремится к бесконечности, т. е. заряд движется по прямой, как и должно быть.

Обращаясь по окружности в плоскости, перпендикулярной к магнитному полю, заряд вместе с тем будет двигаться равномерно вдоль линий поля, так что его траектория будет представлять собой винтовую линию.

Важным для приложений является следующее свойство движения заряда в однородном поле: период его обращения (время одного оборота) не зависит от скорости,

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi mc}{qB} \quad (\text{СГС}),$$

$$T = \frac{2\pi m}{qB} \quad (\text{СИ}).$$
(82.3)

## § 83. Циклотрон

Указанными свойствами движения заряда в магнитном поле можно воспользоваться для того, чтобы превратить траекторию ускоряемой частицы в спираль и уменьшить тем самым размеры ускорителя. Такой принцип был положен в основу циклотрона — родоначальника целого семейства ускорителей с магнитным полем: синхротрона, синхрофазотрона и др.

Ускорительная камера циклотрона представляет собой вакуумную цилиндрическую коробку  $K$  (рис. 222), помещенную между полюсами сильного электромагнита. Камера состоит из двух металлических

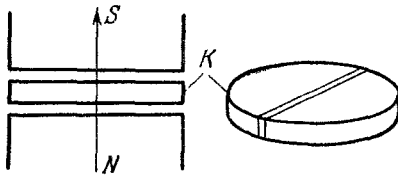


Рис. 222.

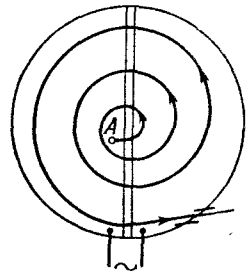


Рис. 223.

половинок — так называемых дуантов, между которыми создается с помощью генератора переменное электрическое напряжение с амплитудой порядка  $10^4$ — $10^5$  в (внутри каждого дуанта поле отсутствует — оно есть только в зазоре).

Протоны,  $\alpha$ -частицы (ядра атомов гелия) или другие заряженные частицы вводятся внутрь камеры с помощью специального впускного устройства (точка  $A$  на рис. 223). В тот момент, когда частица, двигающаяся в приложенном магнитном поле по окружности, доходит до разреза между дуантами, напряжение должно иметь такой знак, чтобы частица, проходя промежуток между дуантами, ускорилась. Вследствие увеличения скорости радиус траектории увеличится. Пройдя полуокружность, частица должна попасть в разрез как раз в тот момент, когда напряжение изменило знак. В результате частица, проходя разрез, снова ускорится, и т. д. Частота обращения в магнитном поле, как мы выяснили в предыдущем параграфе, не зависит от скорости частицы, поэтому



частота генератора может оставаться все время постоянной. Если при каждом пересечении зазора между дуантами частица приобретает энергию  $qu$  ( $u$  — напряжение между дуантами), то за  $N$  оборотов ее энергия возрастает на  $Nqu$ . Для синхронности между движением частицы и напряжением генератора необходимо, чтобы его частота была равна (см. (82.3))

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{qH}{2\pi mc} \quad (\text{СГС}),$$

$$\nu = \mu_0 \frac{qH}{2\pi m} \quad (\text{СИ})$$
(83.1)

(в пустоте в СИ  $B = \mu_0 H$ ).

У границы ускорительной камеры быстрые частицы выводятся наружу с помощью специального отклоняющего устройства и направляются в мишень, где они вступают во взаимодействие с атомными ядрами, разбивая их, или используются для других ядерных экспериментов.

Магнитное поле в циклотроне достигает десятков тысяч эрстед, радиус камеры — несколько метров, максимальная энергия частиц — до  $10^7$  эв. Эта энергия сравнительно невелика, хотя в первых экспериментах по расщеплению ядер считалась достаточной. Большая энергия на циклотроне не может быть достигнута: как следует из теории относительности, увеличивается со скоростью масса частиц, из-за чего во время движения уменьшается частота их обращения.

Ускорители типа циклотрона, у которых во время движения частиц медленно уменьшается частота подаваемого напряжения, называются синхроциклотронами, или фазотронами. В других ускорителях (синхротронах) меняется напряженность магнитного поля. Тем самым достигается непрерывное ускорение частиц, несмотря на увеличение их массы, и появляется возможность получать энергии порядка  $10^9$ — $10^{10}$  эв.

Все эти приборы представляют собой весьма сложные устройства, иногда громадного размера (увеличение радиуса орбиты уменьшает потери частиц на тормозное излучение, см. § 108). При их конструировании приходится преодолевать огромные технические трудности, связанные, в частности, с обеспечением стабильности движения частиц на орбитах.

## § 84. Эффект Холла

В исследовании свойств электронов в металлах и полупроводниках большую роль сыграл эффект Холла. Заключается этот эффект в следующем. Если поместить металлическую или полупроводниковую пластинку в магнитное поле, направление которого примем за ось  $Oz$

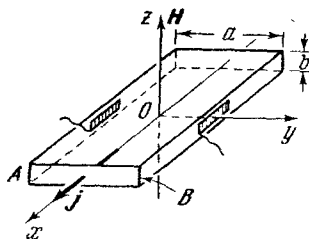


Рис. 224.

и пропустить в направлении  $Ox$  ток, то в направлении  $Oy$ , т. е. между гранями  $A$  и  $B$ , возникает разность потенциалов. Движущиеся заряды, создающие ток, отклоняются в магнитном поле благодаря действию на них силы Лоренца. Если проводимость

вещества электронная, то электроны будут двигаться против вектора плотности тока  $\mathbf{j}$  (рис. 225), и из формулы \*)  $\mathbf{F} = \frac{q}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{H}$  вытекает, что они будут отклоняться к грани  $A$ , создавая там отрицательный поверхностный заряд. Если проводимость дырочная, то дырки

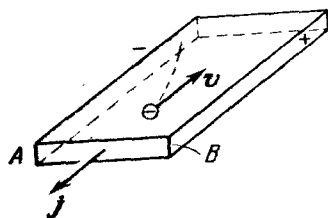


Рис. 225.

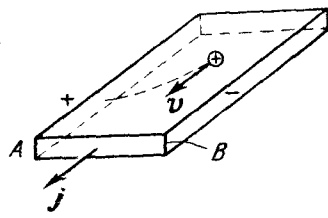


Рис. 226.

движутся по  $\mathbf{j}$ , т. е. направление скорости  $\mathbf{u}$  у них противоположное, но противоположен по знаку и заряд  $q$ , поэтому сила Лоренца будет отклонять их тоже к грани  $A$ , где образуется положительный поверхностный заряд (рис. 226). На грани  $B$  в случае электронной проводимости появится положительный заряд, в случае

\*) Считаем, что пластинка неферромагнитна, поэтому  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  практически совпадают (в СГС-системе).

дырочной — отрицательный. Электрическое поле  $E$  зарядов на гранях будет расти до тех пор, пока сила  $qE$  не уравновесит силу Лоренца. Тогда заряды перестанут отклоняться.

По знаку холловской разности потенциалов можно определить тип проводимости вещества. Измеряя величину разности потенциалов, можно, как мы сейчас покажем, найти концентрацию носителей тока. Это очень важно, потому что измерение проводимости вещества  $\sigma$  (§ 55) может дать лишь произведение концентрации  $n$  (числа частиц в единице объема) на отношение среднего времени свободного пробега  $\tau$  к эффективной массе, т. е. на  $\tau/m^*$ . Если из эффекта Холла мы найдем концентрацию, то из измерения проводимости сможем найти  $\tau/m^*$  для электронов и дырок (величина  $\tau/m^*$  пропорциональна подвижности).

Холловская разность потенциалов установится на таком уровне, когда сила электрического холловского поля будет равна силе Лоренца:

$$qE = \frac{q}{c} uH,$$

т. е. когда  $E = \frac{u}{c} H$ . Следовательно, разность потенциалов между гранями  $A$  и  $B$  равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ea = \frac{u}{c} Ha.$$

Скорость упорядоченного движения носителей  $u$  удобно выразить через плотность тока (формула (55.1))  $u = j/ne$ , где  $e$  — величина заряда носителя, а  $n$  — концентрация. Подставим  $u$  в формулу для разности потенциалов, умножим числитель и знаменатель на толщину пластинки  $b$  и воспользуемся тем, что полный ток через пластинку  $I = jab$ . Получим окончательно:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{HI}{b} \frac{1}{nec} \quad (\text{СГС}). \quad (84.1)$$

Величина

$$R = \frac{1}{nec} \quad (\text{СГС}) \quad (84.2)$$

называется *постоянной Холла*. Ее знак указывает на тип проводимости (отрицательный — на электронную, положительный — на дырочную). По величине постоянной Холла определяется концентрация носителей. Как видно из формулы (84.1), для определения постоянной Холла

$R$  надо измерить разность потенциалов (между электродами, припаянными к граням  $A$  и  $B$ ), силу тока  $I$ , напряженность магнитного поля  $H$  и толщину пластинки  $b$ .

В случае смешанной (электронно-дырочной) проводимости постоянная Холла имеет более сложный вид, чем (84.2).

### § 85. Электрический заряд в неоднородном магнитном поле

Сила Лоренца перпендикулярна к скорости заряда (независимо от того, однородно магнитное поле или нет) и не совершает работы. Следовательно, полная кинетическая энергия заряда в неоднородном поле остается постоянной. Полная кинетическая энергия состоит из

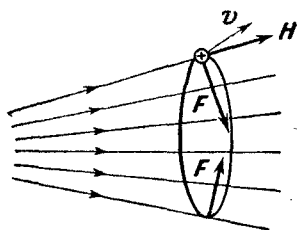


Рис. 227.

энергии движения по ларморовой орбите и энергии перемещения этой орбиты в пространстве. В однородном магнитном поле обе части полной энергии, каждая порознь, остаются постоянными. В неоднородном поле постоянной остается лишь их сумма. Из рис. 227 видно, что сила Лоренца в неоднородном поле не лежит в плоскости орбиты, а отклонена в сторону, где поле слабее. Поэтому если орбита в целом первоначально двигалась в сторону сгущения линий поля (на рис. 227 — влево), то это движение будет замедленным, в то время как кинетическая энергия вращения и его скорость будут возрастать. В какой-то точке движение орбиты налево прекратится, а так как сила Лоренца будет продолжать действовать в том же направлении, то начнется ускоренное движение вправо.

**Магнитные ловушки.** В поле, имеющем конфигурацию «магнитной ловушки» (рис. 228), заряд будет периодически циркулировать между местами сгущения линий  $H$  (так называемыми «магнитными пробками»  $A_1$  и  $A_2$ ). Поэтому поле такой конфигурации используется для удержания заряженных частиц в ограниченной области пространства, что весьма существенно для осуществления в плазме термоядерных реакций.

К сожалению, создание внешнего поля указанного типа еще не решает проблемы удержания плазмы, так как ток движущихся частиц создает свое собственное поле, искажающее внешнее, «выпучивающее» его. Столкновения между частицами также выводят их из области, где их желательнее удержать, наружу.

Многочисленные виды неустойчивости плазмы до сих пор мешают исследователям сконцентрировать большое

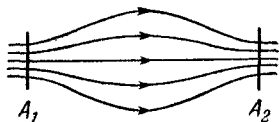


Рис. 228.

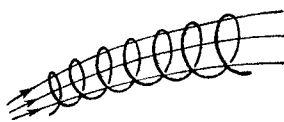


Рис. 229.

число энергичных частиц в малом объеме и поднять температуру и концентрацию до уровня, необходимого для осуществления термоядерных реакций.

Можно доказать, что если неоднородность поля не очень велика (т. е. линии  $H$  сгущаются медленно), орбита заряда будет смещаться так, чтобы магнитный поток через нее (т. е. число линий, проходящих через ее сечение) оставался постоянным. Иными словами, траектория заряда «навивается» на магнитные силовые линии (рис. 229), и число линий, заключенных внутри траектории, постоянно.

## § 86. Действие магнитного поля на электрический ток

Когда по проводнику идет электрический ток, электроны движутся относительно положительных ионов, составляющих кристаллическую решетку. Поэтому в системе отсчета, связанной с решеткой (т. е. в системе отсчета, в которой проводник неподвижен), сила Лоренца действует только на электроны\*). На каждый электрон внутри элемента проводника  $\Delta l$  (рис. 230) действует сила  $f = \frac{e}{c} \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ , а на все электроны этого элемента —

\*) Конечно, из-за теплового движения ионов на каждый из них тоже действует сила Лоренца, но ввиду хаотичности теплового движения сумма всех сил Лоренца, действующих на решетку, равна нулю. Действие сил Лоренца сводится лишь к небольшому изменению частоты колебаний ионов.

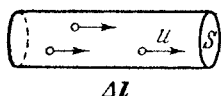
сила  $fnS \Delta l$  ( $n$  — концентрация электронов). Полная сила, действующая на участок  $\Delta l$ , равна, следовательно,

$$\Delta F = \frac{e}{c} nS \Delta l \mathbf{u} \times \mathbf{B}.$$

Вектор  $\mathbf{u} \cdot \Delta l$  равен вектору  $\mathbf{u} \cdot \Delta \mathbf{l}$ , так как направления  $\mathbf{u}$  и  $\Delta \mathbf{l}$  совпадают. Получаем:

$$\Delta F = \frac{e}{c} nS u \Delta \mathbf{l} \times \mathbf{B}.$$

Величина  $enuS = I$  — ток через проводник; таким образом, на участок проводника с током действует сила (называемая силой Ампера)



$$\Delta F = \frac{I}{c} \Delta \mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (\text{СГС}), \quad (86.1)$$

$$\Delta F = I \Delta \mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (\text{СИ}).$$

Рис. 230.

Направление силы Ампера определяется из выражения (86.1). Если ток и поле перпендикулярны друг к другу, можно использовать правило левой руки (поле перпендикулярно к ладони, направление пальцев — направление тока, направление большого пальца — направление силы).

Если проводник прямой и поле однородное, на все элементы будут действовать силы, направленные параллельно. Тогда формула, аналогичная (86.1), может быть записана для всего проводника:

$$\mathbf{F} = \frac{I}{c} \mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (\text{СГС}), \quad (86.2)$$

$$\mathbf{F} = I \mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (\text{СИ}).$$

**Вращающий момент, действующий на рамку с током.** На токи, направленные в противоположные стороны, будут действовать противоположно направленные силы. Силы, действующие на стороны рамки  $AD$  и  $BC$  в однородном магнитном поле (рис. 231), составляют пару, создающую вращающий момент. Вращающий момент поворачивает рамку так, чтобы ее плоскость стала перпендикулярной к полю. Силы, действующие на другие две стороны, в данном случае компенсируются

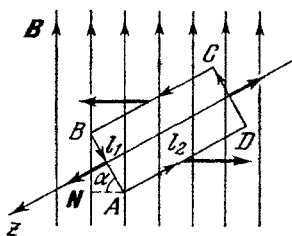


Рис. 231.

силами жесткости рамки. Вращающий момент будет направлен по оси  $Oz$  (см. § 13).

Нетрудно вычислить величину вращающего момента. Плечо силы равно  $\frac{1}{2}l_1 \sin \alpha$  (см. рис. 231), каждая из двух сил равна  $\frac{1}{c}Il_2B$ , следовательно, полный момент обенх сил пары

$$N = \frac{1}{c} ISB \sin \alpha,$$

где  $S = l_1 l_2$  — площадь рамки.

**Магнитный момент витка.** Введем весьма важное в теории электромагнетизма понятие магнитного момента  $\mathbf{m}$  витка (рамки). Определим его как вектор, направленный перпендикулярно к плоскости витка так, чтобы ток, наблюдаемый с конца вектора  $\mathbf{m}$ , обтекал рамку против часовой стрелки (рис. 232). По величине  $\mathbf{m}$  пусть равен произведению силы тока  $I$  на обтекаемую им площадь  $S$  (в гауссовой системе добавляется множитель  $1/c$ ).

Итак, *определение* магнитного момента витка следующее:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{c} ISn \quad (\text{СГС}),$$

$$\mathbf{m} = ISn \quad (\text{СИ}). \quad (86.3)$$

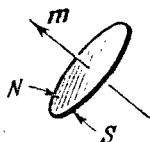


Рис. 232.

Здесь  $\mathbf{n}$  — единичный по модулю вектор нормали к плоскости витка, направленный так же, как  $\mathbf{m}$ .

Тогда вращающий момент  $\mathbf{N}$  будет равен векторному произведению магнитного момента  $\mathbf{m}$  на вектор  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (86.4)$$

Следовательно, действие однородного магнитного поля на рамку сводится к повороту  $\mathbf{m}$  в направлении, параллельном  $\mathbf{B}$ .

**Энергия витка.** Виток с током в магнитном поле, благодаря наличию у него магнитного момента, будет обладать в этом поле энергией, зависящей от ориентации  $\mathbf{m}$  относительно магнитного поля. Можно представлять себе вектор  $\mathbf{m}$  как стержневой магнетик (магнитный диполь), северный полюс которого совпадает с концом  $\mathbf{m}$ .

Найдем энергию витка для случая, когда он находится в пустоте, где  $\mathbf{B}=\mathbf{H}$ . Будем считать, что поле  $\mathbf{H}$  создается макроскопическими токами, текущими по проводам, так что в том месте, где находится виток, вихри вектора  $\mathbf{H}$  отсутствуют. Тогда поле  $\mathbf{H}$  в области витка можно считать потенциальным.

Энергия магнитного диполя в таком поле совершенно аналогична потенциальной энергии электрического диполя с моментом  $\mathbf{p}$  в электрическом поле  $\mathbf{E}$  (см. (42.3)) и равна

$$U = -m \cdot \mathbf{H}. \quad (86.5)$$

Собственное магнитное поле и поведение во внешнем поле витка и магнитного листка (§ 80) совпадают. Магнитный листок (магнитный диполь), как всякий магнит, будет поворачиваться в однородном поле, ориентируясь по полю. В неоднородном поле (где  $\mathbf{H}$  меняется от точки к точке) на полюсы магнитного диполя будут действовать различные силы, поэтому одновременно с ориентацией магнитный диполь будет двигаться, втягиваясь в область более сильного поля (большая из двух сил, действующих на полюсы, приложена со стороны более сильного поля). Виток в неоднородном магнитном поле будет вести себя аналогично (рис. 233; стрелкой показано направление движения витка).

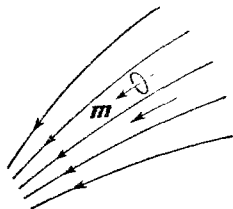


Рис. 233.

## § 87. Взаимодействие токов.

### Взаимодействие движущихся зарядов

Взаимодействие двух проводников, по которым текут электрические токи, осуществляется через магнитное поле. Каждый ток создает магнитное поле, которое действует на другой проводник. Таким образом, взаимодействуют отнюдь не поля между собой, а поле и ток.

Поля подчиняются принципу суперпозиции (§ 7), что означает лишь наложение их, а не взаимодействие. Взаимодействие полей, если бы оно имело место, изменяло бы складывающиеся поля, а принцип суперпозиции означает отсутствие такого изменения (см. § 7).



Не представляет труда найти силу взаимодействия двух длинных параллельных токов. Ток  $I_1$  (рис. 234) в месте нахождения тока  $I_2$  создает поле

$$H_1 = 2I_1/cr$$

(формула (80.2)). Магнитная индукция тока  $I_1$  равна

$$B_1 = \mu H_1 = \mu \frac{2I_1}{cr}.$$

Следовательно, сила, действующая со стороны тока  $I_1$  на отрезок  $l_2$  второго проводника, будет, в соответствии с (86.2), равна

$$F_{12} = \mu \frac{2I_1 I_2}{c^2 r} l_2 \quad (\text{СГС}). \quad (87.1)$$

В системе СИ  $B = \mu \mu_0 H$  (где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  гн/м, см. формулу (89.5)), поэтому из (80.2) и (86.2) вытекает

$$F_{12} = \mu \mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi r} l_2. \quad (\text{СИ}) \quad (87.1')$$

Направление силы, определяемое векторным произведением (86.2), показано на рисунке. Если один из токов меняет знак, меняется и направление силы. Таким образом, параллельные токи притягиваются, антипараллельные же отталкиваются.

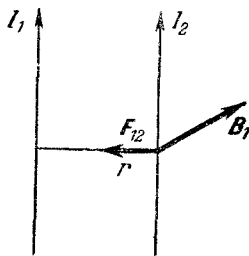
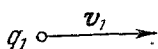


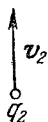
Рис. 234.

### Магнитное взаимодействие электрических зарядов.

Силу магнитного взаимодействия двух электрических зарядов можно найти аналогичным образом. Поле, создаваемое зарядом  $q_1$ , движущимся со скоростью  $v_1$  ( $v_1 \ll c$ ), в точке, где в данный момент находится заряд  $q_2$ , равно



$$H_1 = \frac{q_1}{c} \frac{v_1 \times r}{r^3} \quad (\text{СГС}). \quad (81.1)$$



Сила, действующая на второй заряд (в пустоте, где  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ ), определяется формулой

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_2}{c} \mathbf{v}_2 \times \mathbf{H}$$

Рис. 235.

( $v_2$  — скорость второго заряда, предполагаем скова,

что  $v_2 \ll c$ ). Если подставить сюда  $H_1$ , то можно найти и силу  $F_{12}$ . Аналогичным путем можно найти и силу  $F_{21}$ , действующую на первый заряд со стороны второго. Если это сделать, то выяснится, что силы эти не равны,  $F_{12} \neq F_{21}$ .

Рассмотрим простой пример, подтверждающий это заключение.

Пусть заряды движутся так, как показано на рис. 235. В этом случае первый заряд создает некоторое магнитное поле  $H_1$  в точке, где находится второй, а поле второго заряда  $H_2$  в точке нахождения первого

равно нулю, так как  $H_2 = \frac{q_2}{c} \frac{v_2 \times r}{r^3}$ , а скорость  $v_2$  параллельна радиусу-вектору  $r$ , соединяющему заряды. Следовательно, первый заряд действует на второй, но второй не действует на первый (помимо магнитного взаимодействия есть еще и электрическое, кулоновское, но мы сейчас говорим о магнитном). Очевидно, что третий закон Ньютона не выполняется.

Таким образом, этот закон в его обычной формулировке не имеет той общности, которая предполагается в механике.

Однако в механике с третьим законом часто связывают гораздо более общий закон природы — закон сохранения импульса системы материальных точек. Можно показать, что закон сохранения импульса основан на фундаментальном свойстве пространства — однородности. Однородность пространства означает равноправие всех его точек, поэтому закон сохранения импульса не связан с конкретным видом взаимодействия и имеет общий характер. Закон сохранения импульса в данном случае, конечно, выполняется так же, как и во всех других. Дело в том, что заряды  $q_1$  и  $q_2$  не составляют замкнутой системы. В этой системе есть и третий материальный объект — электромагнитное поле обоих зарядов. Общий импульс зарядов и поля остается постоянным, что же касается импульса одних только зарядов, то он не обязан сохраняться.

Аналогично обстоит дело со взаимодействием двух элементов тока  $\Delta I_1$  и  $\Delta I_2$ , но взаимодействие *замкнутых* контуров с постоянными токами подчиняется третьему закону Ньютона, а именно — витки действуют друг на друга с равными и противоположными по знаку силами и вращающими моментами.

## § 88. Магнитный поток

Магнитным потоком  $\Phi$  через данную поверхность называется число линий вектора  $\mathbf{B}$ , пересекающих эту поверхность. Если вектор  $\mathbf{B}$  всюду нормален к поверхности и имеет постоянное значение во всех ее точках, магнитный поток равен просто

$$\Phi = BS \quad (\text{СИ и СГС}) \quad (88.1)$$

( $S$  — площадь поверхности).

Единица измерения магнитного потока в гауссовой системе называется *максвеллом*;  $1 \text{ мкс} = 1 \text{ гс} \cdot 1 \text{ см}^2$ .

В системе СИ единица  $\Phi$  называется *вебером*;  $1 \text{ вб} = 1 \text{ в} \cdot \text{сек}$  (см. формулу (96.3)).

Поскольку  $1 \frac{\text{в} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2} = 1 \text{ тесла} = 10^4 \text{ гс}$ , соотношение между вебером и максвеллом следующее:

$$1 \text{ вб} = 1 \text{ тесла} \cdot 1 \text{ м}^2 = 10^4 \text{ гс} \cdot 10^4 \text{ см}^2 = 10^8 \text{ мкс}.$$

Если вектор  $\mathbf{B}$  составляет с нормалью к малой площадке  $\Delta S$  угол  $\alpha$  (рис. 236), то поток через эту площадку равен

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= B \Delta S' = \\ &= B \Delta S \cos \alpha = B_n \Delta S, \end{aligned} \quad (88.2)$$

а полный поток через любую поверхность  $S$

$$\Phi = \int_S B_n dS \quad (88.3)$$

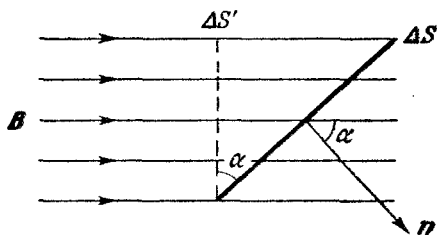


Рис. 236.

(см. § 12).

Поток вектора  $\mathbf{B}$  через любую *замкнутую* поверхность всегда равен нулю, поскольку каждая линия вектора  $\mathbf{B}$  сама замкнута и, следовательно, войдя в замкнутую поверхность, должна и выйти из нее. Итак, теорема Остроградского — Гаусса для вектора  $\mathbf{B}$  имеет вид

$$\oint B_n dS = 0. \quad (88.4)$$

Согласно § 12 это означает отсутствие источников вектора  $\mathbf{B}$  (магнитных зарядов).

## ГЛАВА VIII

### МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

#### § 89. Вектор намагниченности

Вихрями вектора напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  служат макротоки, а вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  — макротоки и усредненные по физически бесконечно малым объемам микротоки (по поводу этого усреднения см. § 39). Естественно ввести еще вектор, вихрями которого являются (усредненные) микротоки. Этот вектор обозначается (в гауссовой системе)  $4\pi\mathbf{M}$ , и следовательно

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}. \quad (89.1)$$

Это равенство является, фактически, определением вектора  $\mathbf{M}$ . Смысл его ясен: поле, создаваемое макротоками и микротоками, является векторной суммой полей, создаваемых в отдельности макротоками и микротоками. Такая связь между  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  является общей и справедлива в любой среде. Она аналогична соотношению между электрической индукцией и напряженностью  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$  (§ 37). Точнее говоря, формуле (89.1) аналогична следующая:  $\mathbf{E} = \mathbf{D} - 4\pi\mathbf{P}$ , поскольку  $\mathbf{B}$  аналогичен  $\mathbf{E}$ , а  $\mathbf{H}$  аналогичен  $\mathbf{D}$ .

Вектор поляризации  $\mathbf{P}$  имеет смысл *дипольного момента единицы объема* (иначе говоря, он равен векторной сумме дипольных моментов всех диполей, содержащихся в единице объема). Аналогично этому, вектор намагниченности  $\mathbf{M}$  (его можно было бы назвать вектором магнитной поляризации) равен *магнитному моменту единицы объема*.

Для доказательства рассмотрим цилиндрический образец, помещенный во внешнее магнитное поле  $\mathbf{H}$ , параллельное образующей цилиндра (рис. 237). Внешнее

поле ориентирует микротоки, располагая их магнитные моменты вдоль поля. Разобьем цилиндр на слои такой толщины, чтобы в каждом из них нашлось столько ориентированных элементарных (атомных) токов, сколько нужно, чтобы закрыть полностью все сечение образца, как показано на рисунке. Легко видеть из рисунка, что элементарные токи всюду внутри образца компенсируют друг друга\*), и остается только ток по поверхности, равный одному элементарному току. Каждый слой можно рассматривать как виток соленоида. Поле этого соленоида есть поле микротоков, которое выше мы обозначили  $4\pi M$ . Поле соленоида вычисляется по формуле (80.3):  $H_c = 4\pi NI/cl$ . Перепишем это выражение в виде

$$H_c = 4\pi \frac{IS}{c} \frac{N}{Sl}.$$

Здесь  $IS/c$  — магнитный момент одного слоя (§ 86),

$N$  — число слоев на длине образца  $l$ , так что  $\frac{IS}{c} N$  — полный магнитный момент всего образца. Произведение  $Sl = V$  — объем образца. Таким образом,

$$H_c = 4\pi M = 4\pi \frac{ISN}{c} \cdot \frac{1}{V},$$

следовательно,  $M$  есть действительно магнитный момент единицы объема, т. е. векторная сумма магнитных моментов всех микротоков, содержащихся в единице объема.

**Магнитная восприимчивость.** У большинства веществ вектор намагниченности  $M$  пропорционален внешнему полю\*\*)  $H$ :

$$M = \chi H. \quad (89.2)$$

Коэффициент пропорциональности  $\chi$  называется *магнитной восприимчивостью* вещества. Чем больше эта

\*) Для наглядности можно несколько деформировать токи так, чтобы они плотно прилегали друг к другу (не меняя их площади и, следовательно, магнитного момента).

\*\*) В изотропных веществах  $M$  направлен по  $H$ , что мы и будем в дальнейшем предполагать.

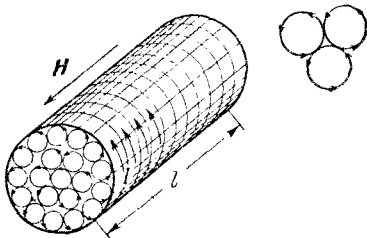


Рис. 237.

величина, тем, при заданном внешнем поле, более «намагниченным» оказывается вещество. Такая пропорциональность имеет место для диамагнетиков. Для парамагнетиков пропорциональность тоже имеет место, но в не слишком сильных полях  $H$  и при не очень низких температурах. У ферромагнетиков (например у железа) между  $M$  и  $H$  пропорциональности нет (§ 93).

Из соотношений (89.1) и (89.2) получим:

$$B = H + 4\pi M = H + 4\pi\chi H = (1 + 4\pi\chi) H.$$

Величина  $1 + 4\pi\chi$  обозначается одной буквой  $\mu$  и называется *магнитной проницаемостью*. Таким образом,

$$B = \mu H \quad (\text{СГС}). \quad (89.3)$$

Эта пропорциональность между  $B$  и  $H$ , так же как и пропорциональность между  $M$  и  $H$ , нарушается у ферромагнетиков. Поскольку  $\mu = 1 + 4\pi\chi$ , имеем

$$\chi = \frac{\mu - 1}{4\pi} \quad (\text{СГС}). \quad (89.4)$$

В вакууме и, приближенно, в воздухе  $\mu = 1$ , т. е.  $\chi = 0$ , так что там  $M = 0$ .

**Вихри и источники вектора  $M$ .** Соотношение  $M = \chi H$  полностью определяет вектор  $M$ , со всеми его источниками и вихрями. Первоначально мы задали  $M$  как вектор, вихрями которого являются микротоки. Теперь же, благодаря соотношению (89.2), мы можем установить и источники его.

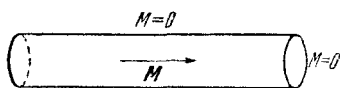


Рис. 238.

В однородно намагниченном образце  $M$  постоянен внутри и равен нулю вне образца. На боковой поверхности

имеются поверхностные вихри вектора  $M$ , так как там имеет разрыв тангенциальная его составляющая.

Эти вихри видны из рис. 237 — это микротоки, текущие по поверхности намагниченного цилиндра. На торцах цилиндра и на боковой поверхности вблизи торцов, где однородность намагничивания обычно нарушается, имеется разрыв нормальной составляющей  $M$ , следовательно, там имеются (поверхностные) источники  $M$ . Источники  $M$  сосредоточены в тех же местах, где источ-

ники  $\mathbf{H}$ ; это ясно из того, что  $\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M} = \mathbf{B}$  не имеет источников нигде.

Источники вектора намагниченности  $\mathbf{M}$  раньше называли «магнитными массами» (или магнитными «зарядами»).

**Единицы измерения  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{M}$ .** В гауссовой системе  $\mathbf{B}$  измеряется в гауссах,  $\mathbf{H}$  — в эрстедах. Обе единицы имеют одинаковую размерность и отличаются лишь по названию. Такое отличие целесообразно сохранить ввиду различия в физическом смысле величин  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ . Очевидно, что  $\mathbf{M}$  имеет ту же размерность, что  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ .

В системе СИ единицей измерения  $\mathbf{B}$  является 1 *тесла*  $= 1 \text{ в} \cdot \text{сек}/\text{м}^2 = 10^4 \text{ эс}$ , единицей  $\mathbf{H}$  служит 1 *а/м*  $= 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ э}$ . Следовательно, даже в пустоте, где физического различия между  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  нет, в системе СИ нельзя записать  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$  из-за различия единиц. Надо записать  $\mathbf{B} = k\mathbf{H}$ , где  $k$  — коэффициент пропорциональности, уравнивающий размерности обеих сторон. Он обозначается в системе СИ  $\mu_0$ , так что в пустоте в этой системе  $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$ . Размерность и численную величину  $\mu_0$  легко найти. Размерность ее

$$\frac{\text{в} \cdot \text{сек}}{\text{м}^2} : \frac{\text{а}}{\text{м}} = \frac{\text{в} \cdot \text{сек}}{\text{а} \cdot \text{м}} = \frac{\text{генри}}{\text{м}},$$

где 1 *генри*  $= 1 \text{ в} \cdot \text{сек}/\text{а}$  — единица индуктивности в системе СИ (см. § 101).

Величину  $\mu_0$  можно получить, пользуясь тем, что при  $B = 1 \text{ эс} = 10^{-4} \text{ тесла}$   $H = 1 \text{ э} = \frac{1}{4\pi} \cdot 10^3 \text{ а/м}$ . Следовательно,

$$\mu_0 = \frac{10^{-4}}{10^3} 4\pi \text{ эн/м} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ эн/м}. \quad (89.5)$$

Вектор намагниченности  $\mathbf{M}$  в системе СИ имеет размерность  $\mathbf{H}$ , поэтому вместо (89.1) в системе СИ имеем

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}). \quad (89.6)$$

Если вектор  $\mathbf{M}$  пропорционален  $\mathbf{H}$ , т. е. если  $\mathbf{M} = \chi_{\text{СИ}}\mathbf{H}$ , то из (89.5) получим

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_{\text{СИ}})\mathbf{H} = \mu_0\mu\mathbf{H}, \quad (89.7)$$

где под  $\mu$  понимается та же магнитная проницаемость, которую мы ввели в гауссовой системе (формула (89.3)).

Следовательно, в системе СИ магнитная восприимчивость определяется так:

$$\chi_{\text{СИ}} = \mu - 1, \quad (89.8)$$

т. е. в 4 $\pi$  раз больше, чем магнитная восприимчивость в гауссовой системе.

По своим магнитным свойствам все вещества делятся на парамагнетики, диамагнетики, ферромагнетики, антиферромагнетики и ферриты. Рассмотрим последовательно все эти классы веществ.

## § 90. Парамагнетики

Существует широкий класс веществ, называемых *парамагнетиками*, у которых магнитная проницаемость  $\mu$  не на много превышает единицу и, следовательно, магнитная восприимчивость  $\chi$  положительна и мала. К ним относятся многие элементы, например Na, K, Rb, Cs, Mg, Al, Mn, большая часть стекол, газообразный и жидкий кислород, растворы солей железа и др. У марганца  $\chi = 8 \cdot 10^{-5}$ , у жидкого кислорода  $2,8 \cdot 10^{-4}$ , у алюминия  $1,9 \cdot 10^{-6}$ . Таким образом, парамагнетики являются слабо магнитными веществами. Их намагниченность можно обнаружить только с помощью прибора; полюсы намагниченных парамагнитных образцов (например двух алюминиевых стерженьков в магнитном поле) взаимодействуют очень слабо, и руками эти силы ощутить нельзя. Кроме того, в отличие от ферромагнетиков, парамагнетики имеют не равный нулю магнитный момент  $M$  (т. е. намагничены) только во внешнем поле. С исчезновением поля исчезает и намагниченность парамагнетиков. Остаточного магнетизма у них нет.

**Природа парамагнетизма.** Природа парамагнетизма заключается в *ориентации* элементарных магнитных моментов внешним магнитным полем  $H$ . Ориентация орбитального электронного тока происходит, однако, не совсем так, как ориентация витка. Дело в том, что электрон, движущийся вокруг ядра, обладает моментом импульса  $L$ , подобно волчку. Волчок, на который действует сила тяжести (рис. 239), стремящаяся повернуть его ось вниз в плоскости чертежа, как известно, реагирует на это действие своеобразно. Ось его, вместо поворота вниз, движется в перпендикулярном направлении (к нам, если



волчок вращается против часовой стрелки). Это — так называемый гироскопический эффект. Вместе с волчком поворачивается и плоскость, в которой действует вращающая пара, так что ось его вращается (прецессирует) вокруг вертикального направления.

Аналогичным образом ведет себя и электрон на орбите. Вращающийся по окружности электрон обладает магнитным моментом  $m = IS/c$ , где  $S = \pi r^2$  — площадь орбиты. Ток равен заряду, проходящему через «сечение орбиты», рассматриваемой как кольцевой проводник, за единицу времени. Следовательно,  $I = \frac{e}{T} = \frac{e\omega}{2\pi}$  ( $T$  — период,  $\omega$  — угловая скорость электрона), откуда магнитный момент

$$m = \frac{e\omega}{2\pi c} \pi r^2 = \frac{evr}{2c}.$$

Момент импульса электрона (механический момент)  $L = m_0vr$ , поэтому между магнитным и механическим моментами электрона существует соотношение (векторы  $m$  и  $L$  коллинеарны)

$$m = \frac{e}{2m_0c} L \quad (\text{СГС}). \quad (90.1)$$

Величина  $\frac{e}{2m_0c}$  ( $m_0$  — масса электрона) носит название *гиромагнитного отношения*.

Аналогичное соотношение существует между спиновым магнитным и спиновым механическим моментами:

$$m_s = \frac{e}{m_0c} L_s \quad (\text{СГС}). \quad (90.2)$$

Различие лишь в том, что вместо  $\frac{e}{2m_0c}$  здесь фигурирует вдвое большее отношение  $\frac{e}{m_0c}$ .

Сила тяжести создает вращающий момент, действующий на волчок и заставляющий прецессировать его ось, по которой направлен момент импульса волчка  $L$ . Аналогично этому, магнитное поле  $H$  создает вращающий момент (формула (86.4))  $N = m \times H$ , действующий

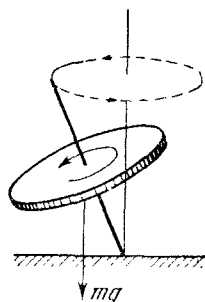


Рис. 239.

на магнитный момент электрона. Из-за этого  $m$  прецессирует вокруг направления  $H$ . Угол между  $m$  и  $H$  остается неизменным (рис. 240).

Прецессия совершается в направлении, показанном стрелкой. Это направление противоположно направлению вращения электрона по орбите, так что из-за прецессии электронный ток несколько ослабляется, а следовательно, уменьшается составляющая момента  $m$  вдоль поля. Если бы электрон вращался в обратном направлении, его момент был бы направлен против поля и, как можно убедиться, несколько возрос бы. Легко показать это и одновременно найти угловую скорость прецессии.

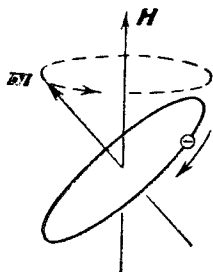


Рис. 240.

Пусть, для простоты, орбита будет перпендикулярна к полю, тогда прецессия будет заключаться в увеличении или уменьшении угловой скорости (рис. 241). Действующая на электрон центробежная сила складывается из силы притяжения электрона к ядру  $F$  и силы Лоренца  $F_L = \frac{e}{c} v \times H$ . Сила Лоренца будет направлена по радиусу; направление ее при движении электрона по часовой стрелке показано на рис. 241. Итак, можно записать, что

$$\frac{m_0 v^2}{r} = F - \frac{e}{c} v H.$$

Поделим обе стороны равенства на радиус орбиты \*)  $r$  и массу электрона  $m_0$  и запишем  $v/r = \omega$ . Тогда получим

$$\omega^2 = \frac{F}{m_0 r} - \frac{eH}{m_0 c} \omega.$$

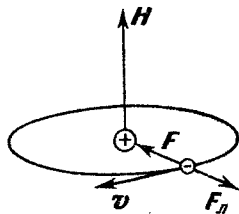


Рис. 241.

Отсюда видно, что при  $H = 0$  частота вращения электрона

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{F}{m_0 r}}.$$

\*) Можно доказать, что он почти не меняется при включении магнитного поля.

Введя это обозначение, получим

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \omega \frac{eH}{m_0c}.$$

Легко убедиться в том что  $eH/m_0c$  при всех достижимых магнитных полях меньше  $\omega_0$  по крайней мере в  $10^3$ — $10^4$  раз. Воспользуемся этим при решении квадратного уравнения для  $\omega$ :

$$\omega = \frac{eH}{2m_0c} \pm \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{eH}{2m_0c}\right)^2} \approx \pm \omega_0 + \frac{eH}{2m_0c}.$$

Имеем два решения, соответствующие вращению электрона в двух противоположных направлениях — против часовой стрелки и по часовой, соответственно:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \frac{eH}{2m_0c}, \\ \omega &= -\omega_0 + \frac{eH}{2m_0c}. \end{aligned} \tag{90.3}$$

Следовательно, частота обращения электрона, магнитный момент которого направлен по полю (электрон движется по часовой стрелке), уменьшается. У обратного движущегося электрона частота и магнитный момент увеличиваются.

Частота прецессии магнитного момента  $m$  вокруг  $H$

$$\omega_L = \frac{eH}{2m_0c} \tag{90.4}$$

носит название *ларморовой частоты*.

Из сказанного выше вытекает, что происходящее из-за прецессии небольшое изменение момента всегда направлено против поля. Это оказывается очень важным для другого класса веществ — диамагнетиков (§ 91), а для парамагнетиков представляет слабый эффект, малый по сравнению с увеличением составляющей  $m$  вдоль поля, вызванной ориентацией  $m$ .

**Как происходит ориентация?** Нам надо ответить еще на вопрос: как же происходит ориентация, если действие магнитного поля сводится лишь к прецессии магнитного момента вокруг  $H$ ? Оказывается, дело здесь во взаимодействии атомов между собой, например, в газах — в столкновениях атомов. Роль столкновений двойкая. Во-первых, они «освобождают» магнитный момент, позволяя ему ориентироваться под разными углами. При

этом преимущественными будут направления  $m$ , близкие к  $H$  (в этом и состоит ориентация по полю). Во-вторых, эти же столкновения не допускают слишком хорошей ориентации, беспорядочно разбрасывая ориентированные магнитные моменты. Чем выше температура, тем слабее получается ориентация и, следовательно, тем меньше вектор намагниченности  $M = \chi H$ . Магнитная восприимчивость  $\chi$  оказывается обратно пропорциональной температуре:

$$\chi = \frac{\text{const}}{T}. \quad (90.5)$$

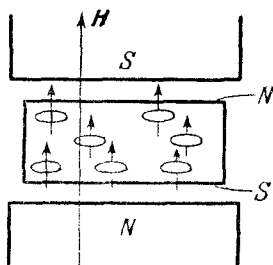


Рис. 242.

Эта формула, называемая *законом Кюри*, справедлива при не слишком низких температурах  $T$ .

#### Полярность парамагнетика.

Поскольку у парамагнетиков  $\chi > 0$ , намагниченность  $M = \chi H$  имеет то же направление, что внешнее поле  $H$ . Полное поле в веществе  $B = H + 4\pi M$  больше внешнего  $H$ . Полярность парамагнетика, помещенного между полюсами магнита (рис. 242), такая же, как полярность диэлектрика, помещенного между пластинами конденсатора. Полюс, из которого выходят линии  $B$ , называется северным полюсом; он будет находиться вблизи южного полюса магнита, создающего внешнее поле. Поэтому парамагнетик вытягивается в магнитное поле так же, как диэлектрик — в электрическое. Однако в диэлектрике электрическое поле  $E$  ослаблено связанными зарядами (на поверхностях), в то время как в парамагнетике магнитное поле  $B$  усиливается ориентированными микротоками (в объеме).



Рис. 243.

Втягивание парамагнетика в поле можно продемонстрировать, имея сильный магнит и жидкий кислород. Если лить жидкий кислород на полюсы, он будет образовывать «перемычку» (рис. 243). Палочка из парамагнитного вещества, подвешенная на ниточке между полюсами сильного магнита, будет устанавливаться по полю.

**Полная парамагнитная восприимчивость.** Внесем уточнение в описанный выше механизм парамагнетизма. В действительности магнитный момент  $m$  электрона создается не только его орбитальным движением, но и спиновым. Вокруг направления магнитного поля прецессирует *полный* магнитный момент, состоящий из орбитального и спинового.

В металлах, помимо атомных электронов, имеются еще и свободные электроны (электроны проводимости), обладающие спиновым моментом, способным также ориентироваться по полю. Эта ориентация затрудняется принципом Паули — в каждой ячейке фазового пространства (§ 63) могут поместиться лишь два электрона с противоположными направлениями спинов. Поэтому, если электрон желает изменить направление спина, он должен перейти за границу сферы Ферми, в свободные ячейки. Это могут практически сделать лишь те электроны, которые расположены вблизи ферми-поверхности. Ориентация их спинов по полю приводит к появлению у электронов проводимости общего магнитного момента, направленного по полю. Существование такого момента означает парамагнетизм, и этот парамагнетизм называется *парамагнетизмом Паули*. Как известно, распределение электронов по энергиям в металле почти не зависит от температуры. Поэтому почти не зависит от температуры и парамагнетизм Паули.

Полная парамагнитная восприимчивость любого вещества складывается из восприимчивости электронов проводимости (если они есть) и электронов, входящих в состав атомных оболочек. Кроме того, есть еще и восприимчивость, создаваемая спинами *ядер* атомов, но, ввиду большой массы ядер, их магнитные моменты в тысячи раз меньше электронных. Это видно из формулы (90.2), в которую вместо массы электрона  $m_0$  надо подставить массу ядра. Что касается механических моментов  $L$  ядра и электрона, то они по порядку величины одинаковы. Момент импульса электрона равен  $\hbar/2$  (§ 20); такой же момент у каждого из протонов и нейтронов, входящих в ядро. Момент всего ядра равен векторной сумме моментов отдельных протонов и нейтронов.

Может оказаться, что полный магнитный момент всех орбитальных электронов атома или иона равен нулю. Такая ситуация имеет место для любой полностью

заполненной оболочки. Заполненная оболочка всегда содержит электроны, имеющие одинаковые по модулю и противоположные по направлению моменты  $L$  (иными словами, вращающиеся с одинаковой угловой скоростью в противоположные стороны). Полный момент атома с заполненными оболочками (или даже с заполненными слоями этих оболочек) равен нулю. Такой атом (или ион) не обладает парамагнетизмом.

Это, однако, не означает, что он вообще не реагирует на магнитное поле и не создает никакого собственного магнитного момента. Вещества, состоящие из таких атомов, будут диамагнетиками.

### § 91. Диамагнетики

При включении внешнего магнитного поля  $H$  магнитные моменты всех электронов начинают прецессировать вокруг  $H$ . В предыдущем параграфе мы видели, что эта прецессия уменьшает угловую скорость того электрона, магнитный момент которого направлен по полю, и увеличивает угловую скорость электрона, магнитный момент которого направлен против поля. Следовательно, оба электрона получают добавочный момент, направленный против поля.

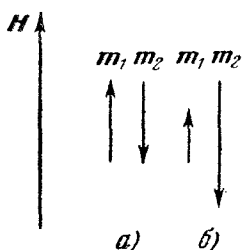


Рис. 244.

Если в отсутствие магнитного поля магнитные моменты взаимно компенсируют друг друга (рис. 244, а), то в присутствии его появляется результирующий магнитный момент, направленный против поля (рис. 244, б).

Диамагнетизм является общим свойством всех веществ, но у парамагнетиков он перекрывается более сильным эффектом ориентации. Атом с заполненными электронными оболочками обладает только диамагнетизмом. К числу таких атомов относятся, например, атомы гелия и всех других инертных газов, однократно ионизированные атомы Li, Na, Cu и других одновалентных металлов. К диамагнетикам относятся висмут, ртуть, вода, молекулярный водород, щелочно-галогенные кристаллы и многие другие вещества.

Вектор намагниченности диамагнетика  $M = \chi H$  направлен против  $H$ , т. е.  $\chi < 0$ , а  $\mu < 1$ . Следовательно, магнитная индукция  $B = H + 4\pi M$  меньше  $H$ . Ослабление поля в диамагнетике очень незначительно. Например, у одного из наиболее сильных диамагнетиков, висмута,  $\chi = -1,4 \times 10^{-6}$ , соответственно  $\mu = 1 + 4\pi\chi$  меньше единицы на несколько сотых тысячных.

**Полярность диамагнетика.** Помещенный в магнитное поле диамагнетик слабо выталкивается из него (рис. 245 иллюстрирует расположение полюсов диамагнетика; оно таково, что диамагнетик выталкивается из поля). Подвешенная между полюсами сильного электромагнита висмутовая палочка устанавливается перпендикулярно к полю (рис. 246).

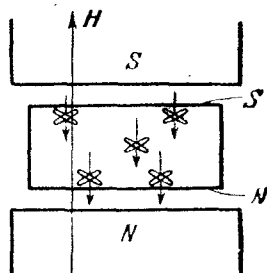


Рис. 245.

Как видно из рис. 245, «северный полюс» диамагнетика оказывается против северного полюса магнита, а южный — против южного. В этом смысле диамагнетик ведет себя противоположно диэлектрику. Однако в другом отношении диамагнетик подобен диэлектрику: собственное поле в нем направлено против внешнего.

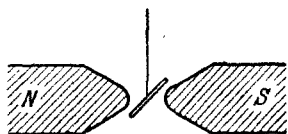


Рис. 246.

**Атомный диамагнетизм.** Экспериментальное определение диамагнитной восприимчивости дает интересные сведения о радиусах электронных орбит. Как мы видели (§ 90), магнитный момент вращающегося по орбите электрона  $m = e\omega r^2/2c$ . Изменение угловой скорости электрона в магнитном поле равно  $\Delta\omega = eH/2m_0c$  (частоте ларморовой прецессии). Следовательно, изменение момента одного электрона

$$\Delta m = \frac{e \chi \omega r^2}{2c} = \frac{e^2 r^2}{4m_0 c^2} H.$$

Магнитный момент единицы объема получается суммированием этой величины по всем электронам атома и

умножением на концентрацию (число атомов в единице объема):

$$M = - \frac{ne^2}{4m_0c^2} \sum r^2 \cdot H.$$

Отсюда магнитная восприимчивость равна

$$\chi = - \frac{ne^2}{4m_0c^2} \sum r^2.$$

Измерение этой величины может дать среднее значение квадрата радиуса электронных орбит (в основном в сумму вклад вносят внешние электроны с наибольшим радиусом орбит). Получаются правильные порядки величин ( $r \sim 10^{-8}$  см).

**Диамagnetизм Ландау.** Металлы, содержащие электроны проводимости, обладают диамagnetизмом, дополнительным к атомному. Этот диамagnetизм называется диамagnetизмом Ландау. Он связан с тем обстоятельством, что в магнитном поле свободные электроны движутся по замкнутым траекториям (в простейшем случае — по окружностям), напоминающим орбиты электронов в атомах. Величина диамagnetного момента, создаваемого свободными электронами (с эффективной массой, равной массе электрона в вакууме), составляет  $1/3$  парамагнитного момента Паули (таким образом, от последнего остается  $2/3$ ).

Детальное изучение пара- и диамagnetизма электронов проводимости приобрело в физике последних десятилетий важное значение, так как оно позволяет выяснить весьма тонкие детали энергетического спектра электронов проводимости различных металлов. Это показали исследования И. М. Лифшица с сотрудниками (отмеченные Ленинской премией за 1967 г.).

## § 92. Природа ферромагнетизма

Пара- и диамagnetики — это слабо магнитные вещества. В обиходе мы замечаем лишь сильный магнетизм ферромагнетиков (например железа или стали).

Парамагнетик мог бы быть сильно магнитным веществом, т. е. иметь намагниченность  $M$  порядка или даже больше напряженности внешнего поля  $H$ , если бы тепловое движение не разбрасывало с такой легкостью ориентирующиеся магнитные моменты отдельных атомов.



Легкость эта объясняется тем, что на элементарный магнитный момент со стороны даже сильного магнитного поля  $H \sim 10^4$  э действуют довольно малые силы. Величина магнитного момента электрона порядка

$$\frac{e}{2m_0c} L \approx \frac{e}{2m_0c} \hbar$$

(см. (90.1)). Здесь учтено, что механический момент электрона  $L$  на орбите порядка  $\hbar$ . Поэтому энергия его в поле  $H$  равна

$$mH \approx \frac{e\hbar}{2m_0c} H.$$

(формула (86.5)). При поле  $H = 10^4$  э эта величина — порядка  $10^{-16}$  эрг. Тепловая энергия  $kT$  даже при  $T = 10^\circ \text{К}$  примерно в 15 раз больше этой величины. Не удивительно, что тепловое движение так легко расправляется с ориентацией магнитных моментов. Именно поэтому магнитная восприимчивость парамагнетиков так мала.

Если бы по какой-либо причине магнитные моменты отдельных атомов были направлены в одну сторону и сопротивлялись бы дезориентирующему действию теплового движения, парамагнетик мог бы иметь намагниченность не меньшую, чем ферромагнетик.

В ферромагнетике такая причина существует, и магнитные моменты отдельных атомов во всем объеме образца или в достаточно больших его областях ориентированы в одном направлении. Речь идет не об орбитальных магнитных моментах (не имеющих отношения к ферромагнетизму), а о *спиновых*. Причина, ориентирующая спиновые магнитные моменты, — это взаимодействие соседних атомов кристаллической решетки.

В решетке атомы сильно взаимодействуют друг с другом. Это взаимодействие осуществляется в основном через электроны внешних оболочек. Оболочки соседних атомов перекрываются, и атомы (или ионы) могут обмениваться электронами.

Существенная часть энергии взаимодействия связана именно с этим эффектом обмена. У ферромагнетиков энергия взаимодействия соседних атомов, а следовательно и энергия всего кристалла, оказывается наименьшей

в том случае, когда спины электронов соседних атомов параллельны. *Состояние электронов* в атоме, а следовательно и энергия взаимодействия атомов со своими соседями, *зависит от направления спинов*. Ферромагнетиками являются те вещества, у которых энергия взаимодействия соседних атомов в решетке минимальна при параллельных спинах электронов. Существуют и такие вещества, у которых энергетически более выгодно антипараллельное расположение спинов соседних атомов. Такие вещества называются *антиферромагнетиками*.

При параллельном расположении спинов (ферромагнетик) их магнитные моменты складываются, в то время как антипараллельное расположение (антиферромагнетик) дает результирующий магнитный момент, равный нулю. Тем не менее оба класса веществ являются близкими родственниками — для тех и других характерно *упорядочение* спинов. Минимальная энергия взаимодействия атомов в решетках этих веществ достигается именно при упорядоченном, а не беспорядочном расположении спинов — параллельном или антипараллельном (соответственно для ферромагнетиков и антиферромагнетиков).

Главным представителем ферромагнетиков является железо. В атоме железа первые две электронные оболочки заполнены полностью (§ 48), в третьей оболочке полностью заполнены два слоя, а третий слой вместо десяти содержит лишь шесть электронов. Помимо этого, у атома железа есть еще два электрона в первом слое четвертой оболочки. Ферромагнетизм железа обусловлен именно электронами незаполненной третьей оболочки. Аналогичным строением обладают атомы других ферромагнетиков — кобальта, никеля и некоторых редкоземельных элементов.

**Домены.** Как уже говорилось, параллельное расположение электронных спинов соседних атомов соответствует минимуму энергии их электрического взаимодействия. Однако образование больших областей с одинаково направленными спинами невыгодно потому, что увеличивает магнитную энергию. Участки ферромагнетика, расположенные рядом и намагниченные в результате самопроизвольной ориентации спинов, действуют друг на друга, как магнитные стрелки, направленные в одну сторону одноименными полюсами. Энергия магнит-

ного взаимодействия будет иметь минимум, если стрелки будут образовывать замкнутые магнитные цепи. Одна из двух стрелок должна быть направлена противоположно другой, три стрелки должны образовывать треугольник (рис. 247) и т. д.

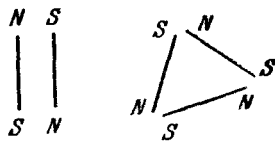


Рис. 247.

Минимум полной энергии ферромагнитного кристалла (состоящей при абсолютном нуле из электрической энергии взаимодействия атомов и магнитной энергии взаимодействия отдельных намагниченных участков) достигается тогда, когда кристалл разбивается на ряд областей (они называются *доменами*), в каждой из которых спины направлены в одну сторону. Сами же домены образуют замкнутые магнитные цепи. В таком кристалле, состоящем из доменов, энергия магнитного взаимодействия невелика. Одновременно на достаточно низком уровне находится и энергия электрического взаимодействия атомов, поскольку в каждом домене спины параллельны.

Размеры и форма доменов различны в монокристалле и поликристаллическом\*) теле. В монокристалле имеются направления легчайшего намагничивания и домены имеют правильную форму, такую, например, как показано на рис. 248, а.

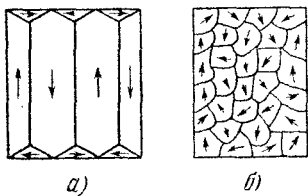


Рис. 248.

Форма доменов в поликристаллическом образце зависит от случайного расположения и формы отдельных монокристалликов (рис. 248, б). Размеры доменов в поликристалле зависят от размеров образца (при размерах порядка сантиметра домены будут иметь порядок сотых долей сантиметра).

Существование доменов можно обнаружить, нанося на полированную поверхность ферромагнетика коллоидальную суспензию из тонко размельченного ферромаг-

\*) Поликристаллический образец состоит из множества мелких монокристалликов. Все обычные металлические изделия выполнены из поликристаллического металла.

нитного материала. Наблюдения при помощи микроскопа показывают, что ферромагнитные частицы концентрируются вдоль границ между доменами, где существуют сильные магнитные поля (подобные полям у полюсов магнита).

Весьма малые частицы ферромагнетика могут иметь однодоменную структуру из-за малости энергии магнитного взаимодействия отдельных областей этих частиц.

**Процесс намагничивания ферромагнетиков.** Хотя каждый домен намагничен до насыщения, ненамагниченный образец в целом не обладает магнитным моментом, так как магнитные моменты доменов компенсируют друг друга.

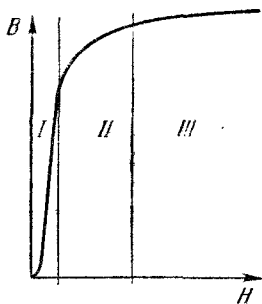


Рис. 249.

Чтобы намагнитить железный стержень, можно расположить его вдоль оси соленоида, подсоединенного к источнику постоянного тока. По мере увеличения силы тока будет расти  $H$ , из-за чего будет увеличиваться магнитный момент  $M$ , а вместе с ним и магнитная индукция  $B = H + 4\pi M$  (рис. 249).

Когда напряженность поля в соленоиде еще относительно невелика, намагничивание (т. е. увеличение  $M$ ) происходит за счет процесса «поедания» доменов, расположенных против поля, другими доменами с более выгодной ориентацией (область I на рис. 249). Границы доменов будут перемещаться так, что выгодно расположенные домены будут расти за счет остальных. При увеличении  $H$  кроме перемещения границ будет происходить непосредственный поворот вектора намагниченности невыгодно расположенных доменов по полю (область II).

В еще более сильных полях, после полной ориентации всех доменов (т. е. после так называемого технического насыщения), возможен *парапроцесс*, заключающийся в ориентации полем немногих спиновых магнитных моментов, дезориентированных тепловым движением (область III).

Перемещения границ и повороты сопровождаются изменением упругих напряжений решетки (перемещаются места, где напряжена решетка). При этом испускаются

фононы, т. е. происходит нагревание. Нагреванием сопровождается всякое перемагничивание ферромагнетика.

Выше отмечалось, что даже в поле  $10^4$  э температура  $10^\circ\text{K}$  достаточна для разупорядочения магнитных моментов атомов парамагнетика. Повышение температуры ферромагнетика также уменьшает его намагниченность, однако большинство ферромагнетиков (например, Fe, Co, Ni) гораздо устойчивее к нагреванию (см. ниже о точке Кюри).

**Спиновые волны.** Когда температура равна абсолютному нулю, спины соседних атомов параллельны друг другу (в пределах одного домена), как это изображено на рис. 250, а. При повышении температуры один или несколько спинов могут быть перевернуты (рис. 250, б). Перевернутый спин, подобно дырке в заполненной зоне, может перемещаться по решетке. Такое перемещение означает, конечно, коллективное движение, в котором принимают участие последовательно все атомы решетки. По кристаллу движется «спиновая волна», имеющая определенную энергию и импульс и представляющая собой элементарное возбуждение (квазичастицу) спиновой системы. Повышение температуры увеличивает число перевернутых спинов (т. е. число спиновых волн) и, следовательно, уменьшает намагниченность ферромагнетика.

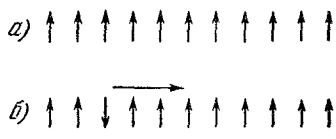


Рис. 250.

**Точка Кюри.** Существует температура, называемая точкой Кюри, при которой ферромагнитное упорядочение исчезает. Спины, даже в пределах одного домена, разупорядочиваются, и ферромагнитный образец становится парамагнитным. В этой точке с ферромагнетиком происходит фазовый переход 2-го рода (аналогичное явление происходит в сегнетоэлектрике, см. § 40).

У никеля точка Кюри  $\Theta = 631^\circ\text{K}$ , т. е.  $358^\circ\text{C}$ , у железа  $\Theta = 1043^\circ\text{K}$ , т. е.  $770^\circ\text{C}$ . Если раскалить обычный стальной магнит до такой температуры, полностью исчезает не только намагниченность, но и все ферромагнитные свойства, в частности, разделение на домены. Железо выше  $770^\circ\text{C}$  является парамагнетиком. Магнитная

восприимчивость такого «парамагнетика ферромагнитного происхождения» зависит от температуры по закону

$$\chi = \frac{\text{const}}{T - \Theta},$$

подобному формуле (90.5). Отличие от обычного парамагнетика в том, что «нулевой» температурой здесь является  $\Theta$ . Формула справедлива при температурах  $T$ , не слишком близких к  $\Theta$ .

Снижение температуры ниже точки Кюри возвращает ферромагнитные свойства — появляются намагниченные до насыщения домены, магнитные моменты которых образуют замкнутые цепи. Таким образом, отоженный магнит надо намагничивать заново.

При температуре, далекой от точки Кюри (например при комнатной температуре для железа), намагниченный ферромагнетик может весьма долго сохранять ориентацию подавляющего числа доменов. Дело в том, что рост числа доменов, ориентированных иначе, чем большинство, должен сопровождаться смещением границ. Это смещение затрудняется различного рода искажениями кристаллической решетки ферромагнетика (включения, неоднородные внутренние напряжения и др.). Поэтому магнит сам собой размагничивается весьма медленно (особенно если замкнуть его полюсы). Нагревание и удары по магниту облегчают процессы передвижения границ доменов и создания замкнутых магнитных цепей внутри образца, т. е. ведут к размагничиванию.

### § 93. $B$ и $H$ в ферромагнетике

В предыдущем параграфе мы рассмотрели так называемую первоначальную кривую намагничивания (рис. 249 и кривая  $a$  на рис. 251). Достаточно поля  $H$  в несколько десятков эрстед (для некоторых ферромагнетиков достаточно и нескольких эрстед), чтобы вектор  $M$  достиг насыщения ( $M_{\max}$ ). Для ряда материалов  $M_{\max}$  настолько велико, что в формуле  $B = H + 4\pi M$  практически можно отбросить  $H$  и записать  $B_{\max} \approx 4\pi M_{\max}$ . Максимальные значения  $B$  в железе — порядка 10 000 — 20 000 гс. Дальнейшее увеличение  $H$  оставляет  $M$  постоянным, и рост  $B$  после насыщения обусловлен уже только ростом  $H$ . Ясно, что при дальнейшем увеличении

$H$  до очень сильных полей порядка  $10^4$ — $10^5$  э роль членов  $H$  и  $4\pi M$  меняется, здесь уже можно отбросить  $4\pi M$ . Следовательно, в очень сильных полях даже в железе  $B \approx H$ , т. е.  $\mu$  близка к единице. Железо в таких полях ведет себя как слабомагнитное вещество.

**Гистерезисная петля.** Если после достижения насыщения начать уменьшать внешнее поле (т. е. уменьшать ток через катушку, в которую помещен образец), магнитная индукция не будет следовать прежней кривой. При уменьшении  $H$  до нуля остается магнитный момент  $M_r$  (остаточная намагниченность) — он создается доменами, не успевшими разориентироваться (см. конец предыдущего параграфа). Соответственно остается и магнитная индукция  $B_r = 4\pi M_r$  (кривая  $b$  рис. 251). Образец намагничен и представляет собой постоянный магнит. Ликвидировать его намагниченность можно, прилагая поле  $H$  обратного направления (т. е. меняя направление тока в катушке). При достаточно сильном обратном поле магнитный момент становится равным нулю, тогда  $B = H$  (пересечение кривой  $b$  с пунктирной прямой; заметим, что масштаб по оси  $B$  гораздо более мелкий, чем по оси  $H$ , поэтому прямая  $B = H$  не составляет угол  $45^\circ$  с осью  $H$ ). Практически точка пересечения совпадает с точкой пересечения кривой  $b$  с осью абсцисс. Абсцисса точки пересечения ( $H_c$ ) называется *коэрцитивной (задерживающей) силой* — чем больше эта величина, тем большее обратное поле требуется для размагничивания, т. е. тем труднее размагнитить магнит.

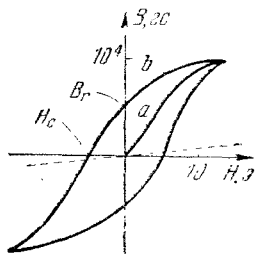


Рис. 251.

Дальнейшее увеличение  $H$  в обратном направлении ведет опять к насыщению. При последующем уменьшении поля и перемене знака  $H$  магнитная индукция следует по самой нижней кривой рис. 251. Полный цикл перемагничивания дает петлю, называемую *петлей гистерезиса*. Можно доказать, что площадь этой петли пропорциональна теплу, выделяющемуся в образце при совершении цикла перемагничивания.

У разных магнитных материалов петля имеет различный вид. Так называемый магнитно-мягкий материал,

применяемый в качестве сердечников в трансформаторах, электромагнитах и других приборах и машинах, характерен весьма узкой петлей гистерезиса (рис. 252).

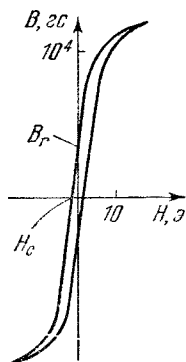


Рис. 252.

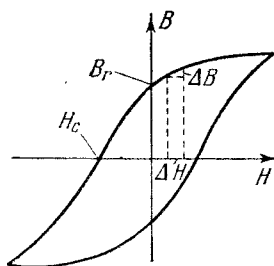


Рис. 253.

Узость петли (малая коэрцитивная сила) означает малые потери на перемагничивание. В области до насыщения петля близка к прямой линии, уравнение которой можно записать, как для неферромагнитных веществ, в виде  $B = \mu H$  (в системе СИ  $B = \mu_0 H$ ).

Постоянные магниты следует изготавливать из магнитно-жестких материалов, например из закаленной стали. Гистерезисная петля ее широка,  $H_c$  велико, что обеспечивает устойчивость намагничивания (рис. 253).

**Магнитная проницаемость ферромагнетика.** Магнитная проницаемость  $\mu$ , если ее определить как отношение  $B$  к  $H$ , в ферромагнетике принимает конечные значения только для кривой первоначального намагничивания (кривая  $a$  на рис. 251):

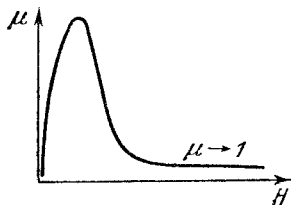


Рис. 254.

$$\mu = \frac{B}{H} = 1 + \frac{4\pi M}{H}. \quad (93.1)$$

При малых  $H$  (на кривой  $a$  рис. 251) намагниченность  $M$  растет гораздо быстрее  $H$ , поэтому  $\mu$  растет. При больших  $H$ , когда  $M$  достигает насыщения,  $\mu \rightarrow 1$ , что мы отмечали ранее. Ход кривой  $\mu(H)$ , показан на рис. 254.



Для петли гистерезиса определение (93.1) не имеет смысла, так как на оси ординат, где  $H=0$ , магнитная проницаемость  $\mu=B/H$  бесконечно велика, а в точках пересечения петли с осью  $H$  она равна нулю.

**Дифференциальная магнитная проницаемость.** В физике и электротехнике кроме магнитной проницаемости, определяемой формулой (93.1), вводится так называемая *дифференциальная магнитная проницаемость*:

$$\mu_D = \frac{\Delta B}{\Delta H}. \quad (93.2)$$

Геометрически она равна тангенсу угла наклона касательной к кривой  $B(H)$  к оси  $H$  (рис. 253). Этот тангенс тоже меняется во время перемагничивания, т. е. при движении по петле гистерезиса, но не столь значительно, как отношение  $B/H$ . В технических расчетах часто считают  $\mu_D$  почти постоянной (почти не зависящей от  $H$ ) и, значит, характеризующей данный материал.

**Расчет поля кольцевого электромагнита.** Есть и другие способы простого выражения  $B$  через  $H$ , пригодные для отдельных участков кривой гистерезиса. В качестве

примера применения одного из таких приближенных простых и эффективных

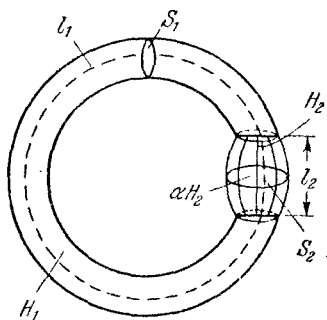


Рис. 255.

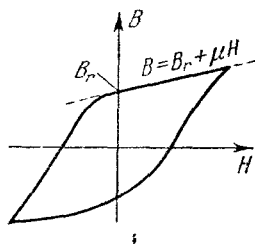


Рис. 256.

выражений рассмотрим расчет поля кольцевого электромагнита, в котором сердечник при работе не перемагничивается, т. е.  $B$  не меняет знака. Качественно картина полей  $H$  и  $B$  в этом случае уже рассматривалась в § 16.

Все величины, относящиеся к сердечнику, будем обозначать индексом 1, а к межполюсному пространству — индексом 2 (рис. 255). Сердечник работает на участке кривой гистерезиса, схематически изображенном на

рис. 256. Для этого участка можно записать (весь расчет ведем в системе СГС):

$$B_1 = B_r + \mu_1 H_1 = 4\pi M_r + \mu_1 H_1. \quad (93.3)$$

Величины  $M_r$  (остаточное намагничивание) и  $\mu_1$  (дифференциальная магнитная восприимчивость сердечника, т. е. тангенс угла наклона кривой гистерезиса) являются характеристиками данного сердечника и нам известны.

Если поле в зазоре вблизи полюса магнита равно  $H_2$ , то в центральной части зазора оно меньше из-за расширения магнитного потока до сечения  $S_2$ . Обозначим его  $\alpha H_2$ , где  $\alpha < 1$  (см. рис. 255). Из условия непрерывности магнитного потока получаем  $B_1 S_1 = B_2 S_2$  ( $B_2 = \mu_2 \alpha H_2$  — поле в сечении  $S_2$ ), откуда

$$(4\pi M_r + \mu_1 H_1) S_1 = \mu_2 \alpha H_2 S_2. \quad (93.4)$$

Здесь  $\mu_2$  — магнитная проницаемость вещества в зазоре. Для воздуха  $\mu_2 = 1$ .

Условие непрерывности линий  $\mathbf{B}$  на поверхности самого полюса, аналогичное формуле (93.4), дает

$$4\pi M_r + \mu_1 H_1 = \mu_2 H_2. \quad (93.5)$$

Из (93.4) и (93.5) вытекает, что

$$\alpha = \frac{S_1}{S_2}. \quad (93.6)$$

Запишем еще теорему о циркуляции (§ 80), применив ее к замкнутому контуру, проведенному на рис. 255 пунктиром. Считая, что поле в основной части зазора порядка  $\alpha H_2$ , получим

$$H_1 l_1 + \alpha H_2 l_2 = \frac{4\pi N I}{c}. \quad (93.7)$$

Из уравнений (93.5) — (93.7) легко найти напряженность поля в сердечнике:

$$H_1 = \frac{\mathcal{E}_m - 4\pi M_r S_1 R_2}{\mu_1 S_1 (R_1 + R_2)}. \quad (93.8)$$

Здесь введены обозначения:

$$\mathcal{E}_m = \frac{4\pi N I}{c}; \quad (93.9)$$

$$R_1 = \frac{l_1}{\mu_1 S_1}; \quad R_2 = \frac{l_2}{\mu_2 S_2}. \quad (93.10)$$

Эти выражения по причине, поясняемой ниже, носят названия *магнитодвижущей силы* (93.9) и *магнитных сопротивлений* (93.10).

Поле  $H_1$  в сердечнике может быть как положительным (т. е. параллельным  $B$ ), так и отрицательным. Если, например, ток в катушке отсутствует, то

$$H_1 = - \frac{4\pi M_r R_2}{\mu_1 (R_1 + R_2)}.$$

Поле  $H$  в этом случае не имеет вихрей, создается источниками на полюсах и направлено против  $B$  (его называют в электротехнике *размагничивающим полем*). Если зазор отсутствует,  $l_2=0$ ,  $R_2=0$  и  $H$  всюду равно нулю.

Смысл термина «размагничивающее поле» в том, что при  $H_1 < 0$  индукция может быть записана как  $B = 4\pi M_r - \mu_1 |H_1|$ . Следовательно, поле  $B$  в сердечнике с зазором меньше, чем в сплошном кольце, из-за существования обратного поля  $H_1$  (фактически просто из-за существования зазора, так как поле  $H_1$  не имеет прямого физического смысла и представляет собой вспомогательную величину, полезную вследствие того, что для  $H$  справедлива теорема о циркуляции).

Магнитная индукция в сердечнике (и в зазоре вблизи полюса) равна

$$B_1 = \frac{\xi_m + 4\pi M_r S_1 R_1}{S_1 (R_1 + R_2)}. \quad (93.11)$$

Запишем поток магнитной индукции  $\Phi = B_1 S_1$  для случая, когда отсутствует собственная намагниченность  $M_r$ :

$$\Phi = \frac{\xi_m}{R_1 + R_2}. \quad (93.12)$$

Это выражение для магнитного потока *по форме* напоминает закон Ома для электрического тока; отсюда и названия выражений (93.9) и (93.10).

**Магнитная экранировка.** Вне ферромагнетика  $H=B$ , а внутри его  $H$  по модулю гораздо меньше  $B$ . Несмотря на это, тангенциальные составляющие  $H$  внутри и вне ферромагнетика должны быть равны между собой (§ 18). Отсюда ясно, что вне ферромагнетика (рис. 257) линии  $H$  должны составлять с его поверхностью угол, почти равный  $90^\circ$ . Часто при расчетах электрических машин полагают этот угол равным  $90^\circ$ . Аналогично этому, в электростатике линии напряженности электрического поля составляют угол в  $90^\circ$  с поверхностью проводника.

Подобно тому, как проводящий кожух защищает помещенные внутрь него приборы от действия электростатического поля, ферромагнитный кожух с достаточно

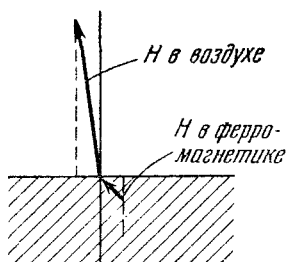


Рис. 257.

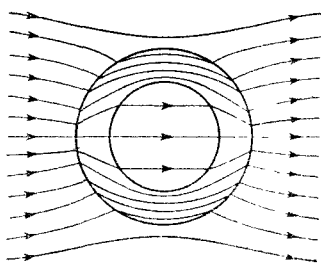


Рис. 258.

толстыми стенками защищает приборы от действия внешнего магнитного поля, значительно ослабляя его (рис. 258). Линии вектора  $B$  сгущаются в оболочке, слабо проникая во внутреннюю область. Например, если оболочка шарообразна и внутренний радиус равен половине внешнего, а магнитная проницаемость равна 1300, то поле  $B$  внутри полости составляет 0,001 от внешнего.

**Непосредственное измерение  $B$  и  $H$  в веществе.** Непосредственное измерение  $B$  и  $H$  в веществе может быть произведено вполне аналогично измерению  $E$  и  $D$  (§ 38).

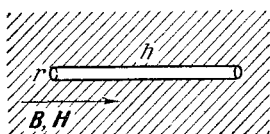


Рис. 259.

В длинной и узкой цилиндрической полости (рис. 259) напряженность магнитного поля будет той же, что и в веществе. Это легко показать. Действительно, вихри  $H$  (макротоки) не появятся, если вырезать полость,

а источники появятся лишь там, где поверхность раздела не параллельна  $H$ , т. е. на торцах. Если полость длинная и узкая, то поле источников в ее середине, пропорциональное  $r^2/h^2$ , будет стремиться к нулю вместе с отношением  $r/h$ .

Измерение  $B$ , напротив, может быть произведено в цилиндрической полости с малой высотой и большим радиусом, образующая которой по-прежнему параллельна полю (рис. 260). Вектор магнитной индукции не имеет источников, измениться он может только из-за

вновь появившихся вихрей. Таковые действительно появляются на боковой поверхности цилиндра (на основаниях ни  $B_n$ , ни  $B_r$  не терпят скачка). Микроток, текущий по боковой поверхности цилиндра, создает в центре его поле, пропорциональное самому току, т. е. высоте цилиндра  $h$ , и обратно пропорциональное радиусу  $r$  (см. о поле кругового тока в § 80). Следовательно, дополнительное поле, искажающее результаты измерения  $B$ , пропорционально  $h/r$  и стремится к нулю вместе с этой величиной.

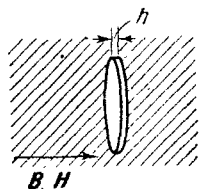


Рис. 260.

### § 94. Поле постоянного магнита

Поле, создаваемое постоянным магнитом (т. е. ферромагнитным телом, имеющим остаточную намагниченность  $B_r = 4\pi M_r$ ), зависит сложным образом от его формы и магнитных проницаемостей самого магнита ( $\mu_i$ ) и среды ( $\mu_e$ ). Если магнит имеет форму эллипсоида, задача об определении его поля вне и внутри магнита может быть решена точно. Дело в том, что внутри эллипсоида, обладающего постоянным во всех точках вектором намагниченности  $M_r$ , поля  $B$  и  $H$  будут однородны\*), что весьма облегчает решение задачи.

На рис. 261 показаны поля  $B$ ,  $H$  и  $M$  внутри магнита эллипсоидальной формы.

**Магнитное поле намагниченного диска и стержневого магнита.** Особенно интересны два предельных случая, которые мы и рассмотрим. Один из них — эллипсоид вращения (рис. 262), у которого полуось  $a$ , вдоль которой направлен вектор  $M$ , значительно меньше второй полуоси  $c$  (диск, утоншающий по мере удаления от центра). Второй — стержневой магнит, для которого  $a \gg c$  (рис. 263). Можно рассчитать поле в обоих случаях. Расчет аналогичен приведенному в § 93. Результаты его таковы.

\*) Аналогично будет обстоять дело в том случае, если эллипсоидальный магнетик внесен в однородное магнитное поле — внутри его поле будет однородным (внешнее поле останется приблизительно однородным, только если эллипсоид выродится в длинный узкий цилиндр или, напротив, в тонкую пластинку).

Оказывается, напряженность  $H$  поля, создаваемого намагниченным стержнем, обратно пропорциональна  $\mu$  среды, в то время как напряженность поля, создаваемого намагниченным диском, не зависит от  $\mu$  (напомним, что напряженность электрического поля заряженного тела *любой* формы обратно пропорциональна  $\epsilon$  среды).

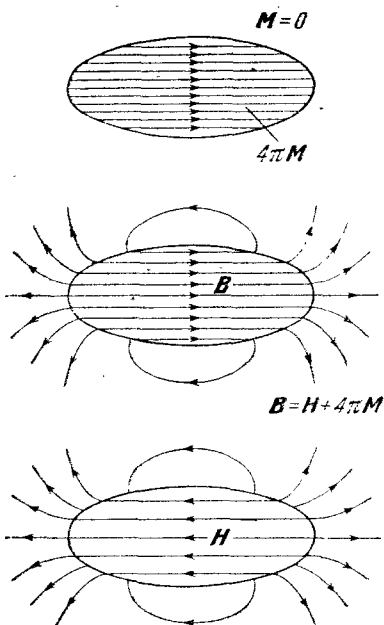


Рис. 261.

Напряженность поля стержневого магнита на расстоянии  $r$  от полюса выражается формулой

$$H = \frac{m}{\mu r^2} \quad (\text{СГС}), \quad (94.1)$$

где

$$m = M_r S. \quad (94.2)$$

Здесь  $M_r$  — намагниченность стержня, а  $S$  — площадь полюса.

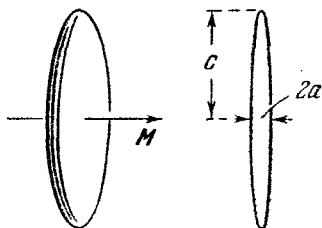


Рис. 262.

Величину (94.2) раньше в физике называли магнитной массой или магнитным зарядом полюса.

Выражение (94.1) совершенно аналогично формуле для напряженности электрического поля, создаваемого точечным зарядом в среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ :

$$E = \frac{q}{\epsilon r^2}.$$

Отсюда и возникло название для  $H$  — напряженность магнитного поля. Однако обратная пропорциональность  $H$  магнитной проницаемости среды имеет место, как мы видим, только для стержневых магнитов. Физическая аналогия существует, скорее, между  $B$  и  $E$ .

Формула (94.1) имеет место на расстояниях от магнита, больших по сравнению с диаметром полюса, но малых по сравнению с длиной магнита. На расстояниях, больших по сравнению с длиной магнита, поле магнита убывает как  $1/r^3$ , вполне аналогично полю диполя (§ 24), поскольку  $H$  при этом создается обоими полюсами совместно.

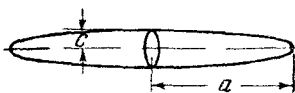


Рис. 263.

**Кольцевой магнит.** Наиболее сильное поле у полюсов при данной намагниченности  $M_r$  создает прямой магнит и кольцевой с малым зазором. Кольцевой магнит с большим зазором менее выгоден. Это можно доказать с помощью формулы (93.11). При  $\mathcal{E}_m = 0$  получаем

$$B = \frac{4\pi M_r}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{l_2 S_1}{l_1 S_2}}. \quad (94.3)$$

Сечение  $S_2$ , через которое проходит магнитный поток в воздухе, имеет порядок величины  $S_1 + l_2^2$  (при очень малом  $l_2$  оно равно  $S_1$ , при большом  $l_2$  — порядка  $l_2^2$ ). Минимум  $B$  соответствует максимуму отношения

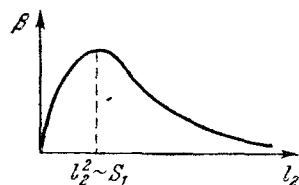


Рис. 264.

$$\beta = \frac{l_2}{S_2} = \frac{l_2}{l_2^2 + S_1}.$$

На рис. 264 показан ход функции  $\beta(l_2)$ . При очень малом зазоре  $l_2$  и при очень большом зазоре (прямой магнит)  $\beta$  очень мало и  $B$  принимает максимально возможное значение  $4\pi M_r$ . Наименее выгодным зазором оказывается зазор порядка радиуса стержня магнита ( $l_2^2 \sim S$ ).

## § 95. Антиферромагнетики и ферриты

Существует обширный класс веществ, называемых *антиферромагнетиками*. У этих веществ обменное взаимодействие атомов в решетке таково, что энергетически выгодным оказывается антипараллельное расположение спинов соседних атомов (см. § 92). К этим веществам относятся хром,  $\alpha$ -марганец,  $MnO$ ,  $NiO$ ,  $CuCl_2$ ,  $FeS$  и множество других соединений.

Кристаллическую решетку антиферромагнитного кристалла можно представить себе как две вложенные одна в другую тождественные решетки (подрешетки), каждая из которых содержит ионы с параллельно расположенными спинами. Спины обеих подрешеток направлены в противоположные стороны (рис. 265). Такое упорядоченное расположение спинов имеет место при температуре ниже так называемой антиферромагнитной точки Кюри.



Рис. 265.

Рис. 266.

Выше этой температуры упорядочение исчезает и кристалл становится парамагнитным (см. для сравнения § 92).

Общий магнитный момент антиферромагнетика в отсутствие внешнего поля равен нулю и растет с полем  $H$  пропорционально ему (из-за переориентировки части спинов). Магнитная восприимчивость чрезвычайно мала.

Есть, однако, вещества более сложной структуры (например  $MnO \cdot Fe_2O_3$ ) — особые антиферромагнетики, обладающие значительным собственным магнитным моментом, приближающимся к моменту ферромагнетиков. Собственный момент возникает, если спины подрешеток различны по величине (рис. 266). Такие вещества называются ферримагнетиками (ферритами) и находят широкое применение в электро- и радиотехнике. Во многих отношениях они удобнее ферромагнетиков. Ферромагнетики, как все металлы, хорошие проводники. Поэтому в высокочастотном магнитном поле в ферромагнитном сердечнике возникают большие токи Фуко (см. гл. IX), приводящие к значительным потерям энергии на нагревание. Ферриты являются полупроводниками, и токи в них несравненно меньше. Кроме того, ряд ферритов имеет весьма удобную для применений петлю гистерезиса, с большим значением остаточной намагниченности (до 96% максимальной) и малой коэрцитивной силой.



## ГЛАВА IX

### ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

#### § 96. Электрическое поле, создаваемое движущимся магнитным полем

На электрический заряд движущийся в поле неподвижного магнита (рис. 267), действует сила Лоренца, направленная так, как показано на рисунке. Если скорость заряда\*) обозначить  $v_1$ , то сила Лоренца будет равна  $F = \frac{q}{c} v_1 \times B$ .

Мы считали, что неподвижен магнит, а движется заряд. Однако все инерциальные системы отсчета равноправны, поэтому если перейти в систему, движущуюся вместе с зарядом, то и в этой системе на заряд должна действовать такая же сила  $F$ . Эта сила действует со стороны электрического поля, возникающего из-за движения магнита.

Напряженность электрического поля определяется из условия, что в новой системе сила должна иметь ту же величину, что и в старой:  $qE = \frac{q}{c} v_1 \times B$ . В этой формуле целесообразно перейти от скорости заряда к скорости магнита;

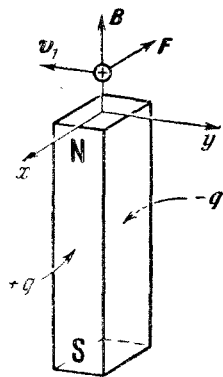


Рис. 267.

\*) Предполагаем, что заряд движется с постоянной скоростью, значительно меньшей, чем скорость света  $c$ .

последняя в системе, связанной с зарядом, равна  $\mathbf{v} = -\mathbf{v}_1$ , так что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} & (\text{СГС}), \\ \mathbf{E} &= -\mathbf{v} \times \mathbf{B} & (\text{СИ}), \end{aligned} \quad (96.1)$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость магнита. Поскольку картина поля  $\mathbf{B}$  известна, можно построить поле  $\mathbf{E}$ .

Несложно найти поле  $\mathbf{E}$ , создаваемое очень маленьким (по линейным размерам) магнитом — магнитным диполем. Пусть диполь ориентирован вдоль оси  $Oz$  и движется с постоянной скоростью  $\mathbf{v}$  вдоль оси  $y$  (рис. 268). Магнитное поле его полностью совпадает по конфигурации с полем электрического диполя (рис. 61). Из формулы (96.1) (см. § 13) следует, что

$$E_x = -\frac{v}{c} B_z; \quad E_y = 0; \quad E_z = \frac{v}{c} B_x. \quad (96.1')$$

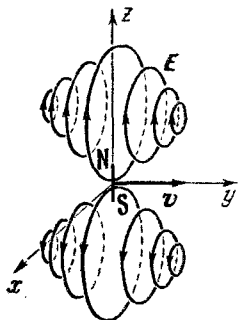


Рис. 268.

Поскольку  $E_y = 0$ , линии напряженности будут лежать в плоскостях, перпендикулярных к оси  $y$ . Картина линий напряженности показана на рис. 268. В плоскости  $xz$  лежат линии, начинающиеся и кончающиеся на поверхности магнита. Они вызываются источниками — электрическими зарядами. Заряды, как показывает теория относительности, действительно возникают при движении магнита на его поверхности. Если магнит однородно намагничен и имеет прямоугольное сечение, то заряды возникают на тех боковых гранях, которые параллельны скорости  $\mathbf{v}$  (на рис. 267 эти грани показаны стрелками). Однако, помимо источников, электрическое поле движущегося магнита имеет вихри — изменяющееся вследствие движения магнита магнитное поле. Вокруг вихрей замыкаются линии  $\mathbf{E}$ , лежащие в плоскостях, не совпадающих с плоскостью  $xz$ .

В силу принципа суперпозиции поле  $\mathbf{E}$  можно представить в виде векторной суммы потенциального и чисто вихревого полей. Однако в электродвижущую силу индукции, которая будет нас интересовать ниже, вклад

дает только вихревая часть, так как работа потенциального поля на любом замкнутом пути равна нулю.

Можно представить себе и такой случай, когда источники не существенны и поле движущегося магнита — чисто вихревое. Пусть размеры магнита таковы, что

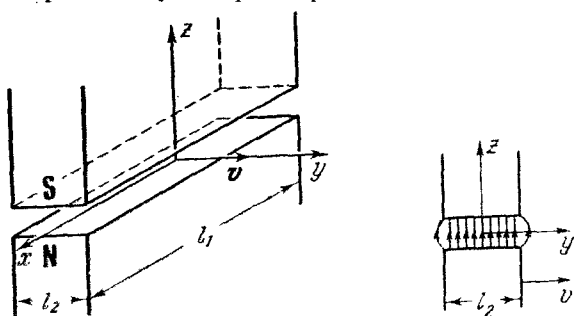


Рис. 269.

$l_1 \gg l_2$  (рис. 269). Будем считать, что  $l_1 \rightarrow \infty$ . Тогда полем зарядов, находящихся на боковых гранях, вдали от этих граней, т. е. в центральной части магнита, можно пренебречь (оно убывает обратно пропорционально

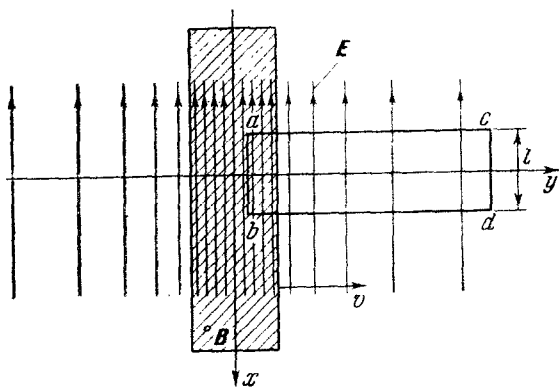


Рис. 270.

квадрату расстояния от грани). Поскольку в зазоре  $B = B_z = \text{const}$ , поле  $E$  там тоже однородно. Индукционное электрическое поле определяется формулой (96.1'), из которой следует, что  $E_x = -\frac{v}{c} B$ ,  $E_y = E_z = 0$ .

Это и значит, что электрическое поле в центральной части зазора однородно. У передней и задней грани магнита поле  $\mathbf{E}$  убывает, и в области вблизи краев магнита сосредоточены вихри  $\mathbf{E}$ , создающие поле в зазоре. Картина линий поля  $\mathbf{E}$  в плоскости  $z = 0$  изображена на рис. 270. Штриховкой показано сечение магнита. Напомним, что такая картина линий поля возникает в лабораторной системе отсчета, т. е. такой, относительно которой магнит движется. В системе, связанной с магнитом, никакого электрического поля нет!

**Эдс индукции в системе отсчета, связанной с контуром.** Нетрудно найти эдс, возникающую в контуре  $abcd$ , неподвижном в лабораторной системе отсчета (рис. 270). Пусть сторона  $cd$  контура находится в области, где поля уже практически нет. Работа индукционного электрического поля над  $+1$  зарядом на участке  $ab$  равна  $\mathcal{E} = E_{\chi} l = -\frac{v}{c} Bl$ . Это и есть эдс, т. е. работа на всем контуре, так как на других участках замкнутого контура  $abcd$  работа не совершается (на участках  $ac$  и  $bd$  поле перпендикулярно к перемещению, а на участке  $cd$  равно нулю).

Преобразуем полученное для эдс выражение. За время  $\Delta t$  магнитный поток через неподвижный контур  $abcd$  возрастает (так как магнит на него надвигается) на величину

$$\Delta\Phi = Bl \Delta y = Bl \frac{\Delta y}{\Delta t} \Delta t = Blv \Delta t.$$

Следовательно,  $Blv = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$  и эдс (в гауссовой системе единиц) равна

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad (\text{СГС}). \quad (96.2)$$

Знак минус указывает на то, что увеличение магнитного потока через контур  $\left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} > 0\right)$  вызывает эдс, направленную по часовой стрелке, если смотреть с конца вектора  $\mathbf{B}$ . Если бы контур  $abcd$  был проводящим, то ток, текущий по часовой стрелке, создал бы собственное магнитное поле, направленное от нас. Это поле препятствовало бы увеличению магнитного потока, возникающему из-за того, что магнит надвигается на контур.

Мы сталкиваемся здесь с *правилом Ленца*: направление индукционного тока таково, что его собственное поле препятствует изменению магнитного потока, вызывающего индукцию.

Правило Ленца имеет весьма принципиальный характер — оно обеспечивает выполнение закона сохранения энергии: внешние силы,двигающие магнит, встречают сопротивление со стороны проводящего контура. Собственное поле контура таково, что при приближении магнита (увеличении магнитного потока) северный полюс рамки обращен к северному полюсу магнита, т. е. рамка и магнит отталкиваются, а при удалении к северному полюсу магнита будет обращен южный полюс рамки и они будут притягиваться. Во всех случаях внешние силы должны будут выполнять работу, которая превращается, в конечном счете, в работу тока.

Формула (96.2) носит название *закона электромагнитной индукции* Фарадея. Мы вывели ее для случая, когда проводник движется в постоянном (во времени) магнитном поле. В действительности же эта формула справедлива всегда — в том числе и тогда, когда перемещения проводника не происходит, а магнитное поле меняется во времени.

Если контур проводящий, эдс (96.2) вызывает в нем индукционный ток; если не проводящий (например, условно проведенный в воздухе), то возникает лишь эдс. Последнее означает, что возникает поле  $\mathbf{E}$ , циркуляция которого по контуру отлична от нуля.

Формула (96.2) оказывается общей, справедливой для любой конфигурации магнитного поля и любого закона его изменения и для любого контура. Если кроме вихревой составляющей поля есть еще и потенциальная, формула (96.2) все равно остается справедливой — потенциальная часть поля не вносит никакого вклада в эдс.

В системе СИ сила Лоренца записывается (§ 82) без коэффициента  $1/c$ :  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ; соответственно этому эдс индукции в этой системе равна

$$\mathcal{E} = - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad (\text{СИ}). \quad (96.3)$$

Здесь  $\mathcal{E}$  измеряется в вольтах, а  $\Phi$  — в вольт-секундах, называемых еще веберами.

Эдс индукции в системе отсчета, связанной с магнитом. Выясним теперь, как истолковать возникновение индукционной эдс в системе отсчета, связанной с магнитом. Иначе говоря, вернемся к системе, рассмотренной в начале параграфа. В этой системе магнит покоится, а движется заряд (или проводящий контур  $abcd$ , см. рис. 270). Сила, действующая на заряд в этом случае, — это сила Лоренца. Она и заменяет электрическую силу  $qE$ .

Между этими двумя силами есть, однако, существенное различие. Сила Лоренца перпендикулярна к скорости движения заряда, и ее работа над зарядом всегда равна нулю (чего, конечно, нельзя сказать об электрической силе  $qE$ ).

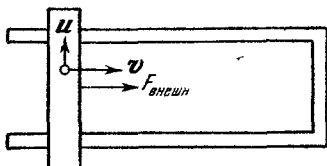


Рис. 271.

Вместе с тем, сила Лоренца вызывает индукционный ток, работа которого отлична от нуля. Этот кажущийся парадокс разрешается очень просто. Заряды в проводнике, который движется под

действием внешней силы  $F$  (см. рис. 271), имеют скорость, равную  $v + u$ , где  $v$  — скорость проводника, а  $u$  — скорость упорядоченного движения зарядов в проводнике. Соответственно, сила Лоренца состоит из двух взаимно перпендикулярных сил:  $F = F_1 + F_2$ , где

$$F_1 = \frac{q}{c} u \times B, \quad F_2 = \frac{q}{c} v \times B.$$

Можно непосредственно показать, что работы, выполняемые этими силами, равны и противоположны по знаку. Работа силы  $F_1$  (умноженной на число зарядов, содержащихся в проводнике) равна работе тока, а работа силы  $F_2$  равна по величине и противоположна по знаку работе внешней силы  $F_{\text{внешн}}$ . Таким образом, равенство нулю полной работы силы Лоренца означает лишь, что работу тока выполняют внешние силы.

Наконец, можно рассмотреть и общий случай, когда по отношению к лабораторной системе отсчета движутся и магнит, и контур (или заряд). На единичный

заряд тогда будет действовать сила

$$\frac{\mathbf{F}}{q} = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Эту величину можно назвать эффективной напряженностью электрического поля, создающего ток.

В различных системах отсчета относительная величина двух слагаемых эффективной напряженности различна. В системе, где заряд покоится, остается лишь  $\mathbf{E}$ ; в системе, где покоится магнит, — только  $\frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ .

Можно доказать, что циркуляция эффективной напряженности, т. е. эдс индукции, определяется всегда формулой (96.2), независимо от того, какова причина изменения потока  $\Phi$ .

### § 97. Электрическое поле, создаваемое переменным магнитным полем

Применим закон Фарадея  $\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$  для определения напряженности электрического поля, создаваемого переменным магнитным. Это легко сделать, если магнитное поле имеет круговую симметрию (рис. 272). Электромагнит  $AB$  питается переменным током и создает переменное магнитное поле (под переменным током мы понимаем здесь ток, меняющийся со временем любым образом, а отнюдь не обязательно по закону  $I = I_0 \sin \omega t$ ).

Рассмотрим контур  $C_1$ , представляющий собой окружность, центр которой находится на оси магнита. Напряженность во всех точках контура одинакова (в силу круговой симметрии) и направлена по касательной к окружности. Радиальной составляющей быть не может, так как иначе линии поля должны были бы начинаться (или заканчиваться) на оси — но там нет никаких источников. Поэтому циркуляция напряженности равна  $2\pi rE$ . Эта циркуляция и есть эдс индукции (см. определение

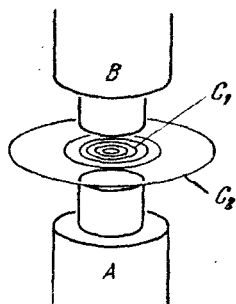


Рис. 272.

эдс, § 54). С другой стороны, эдс индукции равна, согласно (96.2),  $-\frac{1}{c} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ . Внутри зазора поток равен  $\Phi = B \cdot \pi r^2$ , поэтому

$$2\pi r E = -\frac{1}{c} \pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t},$$

т. е.

$$E = -\frac{r}{2c} \frac{\Delta B}{\Delta t} \quad (\text{СГС}). \quad (97.1)$$

Следовательно, электрическое поле в зазоре растет от центра к периферии пропорционально радиусу.

Для контура  $C_2$ , очевидно,

$$2\pi r E = -\frac{1}{c} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

где весь поток  $\Phi$  практически сосредоточен в области внутри зазора. Отсюда

$$E = -\frac{1}{2\pi cr} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad (\text{СГС}). \quad (97.2)$$

Из этой формулы вытекает, что отличное от нуля поле, хотя и убывающее с расстоянием  $r$ , будет и там, где магнитного поля уже нет! Наибольшего значения напряженность достигает вблизи края магнита. Картина линий напряженности будет такой, как на рис. 13.

**Закон Ома в случае непотенциального электрического поля.** Сечение электромагнита представляет собой область вихрей электрического поля. Вихревой характер индукционного поля означает, что работа перемещения заряда в таком поле зависит от формы пути. Понятие «разности потенциалов» между двумя точками проводника не имеет смысла, когда поле в проводнике вихревое, и должно быть заменено «работой поля над  $+1$  заряда». Закон Ома для любого участка цепи надо записать в виде

$$IR_{12} = \int_{1 \rightarrow 2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

(см. § 55). Стоящий справа линейный интеграл напряженности, имеющий смысл работы полного поля (т. е. потенциальной и непотенциальной его частей) над  $+1$  заряда на участке проводника между точками 1 и 2, зависит от формы пути, т. е. от формы и расположения этого участка.



В качестве примера, иллюстрирующего это, рассмотрим следующую задачу (рис. 273). Необходимо определить показание вольтметра  $V$ , подключенного к точкам 1 и 2 проволочного кольца  $C$ , в центре которого проходит железный сердечник, создающий переменное магнитное поле. Сопротивление части кольца между точками 1 и 2 справа равно  $R_1$ , слева  $R_2$ . В обоих случаях, изображенных на рисунке, провода

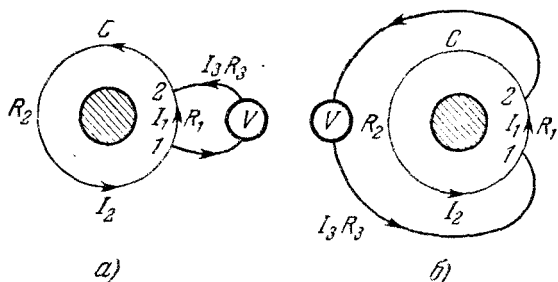


Рис. 273.

от вольтметра подключены к точкам 1 и 2, но расположение их различно. Сопротивление подводящих проводов и вольтметра равно  $R_3$ . Убедимся в том, что показания вольтметра будут различными в случаях  $a$  и  $b$ .

Рассмотрим сначала ситуацию рис. 273,  $a$ . Применим второй закон Кирхгофа (§ 59) к замкнутым контурам  $2C1V2$  и  $2C12$ . Оба они содержат один и тот же переменный магнитный поток  $\Phi$ , так что и эдс в этих контурах, согласно закону Фарадея, будет одной и той же, равной  $\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ . Для контура  $2C1V2$  (считаем, что при обходе сердечника против часовой стрелки эдс равна  $\mathcal{E}$ ) получим

$$I_2 R_2 + I_3 R_3 = \mathcal{E},$$

для контура  $2C12$

$$I_2 R_2 + I_1 R_1 = \mathcal{E}.$$

Первый закон Кирхгофа дает

$$I_2 = I_1 + I_3.$$

Из этих трех уравнений найдем показание вольтметра

$$V = I_3 R_3 = \frac{R_1 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \mathcal{E}.$$

Во втором случае (рис. 273, б) для контура 2C1V2 получаем

$$I_2 R_2 - I_3 R_3 = 0$$

(так как через этот контур магнитный поток не проходит), а для контура 2C12 такое же уравнение, как прежде:

$$I_2 R_2 + I_1 R_1 = \mathcal{E}.$$

Кроме того,

$$I_2 = I_1 - I_3.$$

Отсюда

$$V = \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \mathcal{E},$$

причем стрелка вольтметра отклоняется в противоположную сторону. Таким образом, вольтметр в этих случаях дает различные показания, хотя подсоединен к тем же точкам.

Отметим неявно сделанное предположение о том, что эдс индукции, а следовательно и ток, меняются достаточно медленно (квазистационарно, см. § 102). В противном случае закон Ома для участка проводника не может иметь места, так как сила тока через различные сечения проводника различна.

**Токи Фуко.** Если между полюсами электромагнита, перпендикулярно к ним, поместить круглую металлическую (неферромагнитную) пластинку, вихревое индукционное поле вызовет токи той же конфигурации. Плотность тока определяется напряженностью поля в данной точке проводника:  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  (закон Ома в дифференциальной форме, § 55). Поскольку линии  $\mathbf{E}$  представляют собой окружности, таковы же будут линии тока. Ток в пластинке может достигать больших величин даже при небольшой напряженности поля, так как сопротивление массивного проводника мало. Индукционные токи в массивных проводниках называют *токами Фуко*, или *вихревыми токами*.

Вихревые токи в пластинке создают собственное магнитное поле. Представим себе вместо пластинки металлическое кольцо (пластинку можно мысленно раз-

бить на такие кольца, причем токи, текущие в кольцах, не «перепутываются»). Переменная ЭДС вызывает в кольце переменный ток, а ток создает свое магнитное поле. В § 102, где рассматривается переменный ток, показано, что кольцо с очень малым сопротивлением (имеется в виду так называемое активное сопротивление, см. § 102) создает магнитное поле, направленное противоположно внешнему полю *B*. Это значит, что кольцо, а следовательно и пластинка будут выталкиваться из поля.

Выталкивание кольца демонстрируется на простой установке, изображенной на рис. 274. Катушка *A* с сердечником питается переменным током от сети. При включении тока надетое на сердечник кольцо соскакивает с сердечника или повисает на нем, если оно достаточно тяжелое. Эффект пропадает, если в кольце сделать разрез.

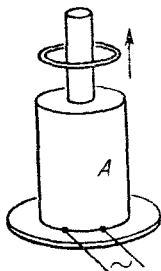


Рис. 274.

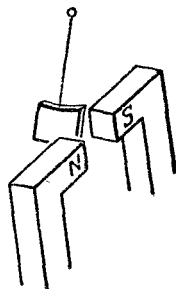


Рис. 275.

Колеблющаяся между полюсами электромагнита тяжелая металлическая пластинка (рис. 275) «увязает», если включить постоянный ток, питающий электромагнит, и останавливается. Вся ее энергия превращается в тепло, выделяемое токами Фуко. В неподвижной пластине токи, разумеется, отсутствуют.

Вихревые токи могут быть значительно ослаблены, если в пластинке сделать разрезы, увеличивающие ее сопротивление. В сплошных сердечниках трансформаторов, динамомашин, электромоторов, работающих на переменном токе, токи Фуко выделяли бы значительное количество тепла. Поэтому сердечники делают наборными, составляя их из тонких пластин, разделенных слоями диэлектрика. Есть и еще одна причина, по которой подобная конструкция сердечника целесообразна: это скин-эффект (который мы рассмотрим позднее, в § 107) — неглубокое проникновение быстро переменного магнитного (точнее — электромагнитного) поля в проводник, из-за чего фактически используемое сечение магнитных сердечников уменьшается. Пластинки должны

иметь такую толщину, чтобы магнитное поле полностью в них проникало.

Чем меньше сопротивление проводника, тем ярче проявляется эффект отталкивания. На этом основана красивая демонстрация отсутствия сопротивления у сверхпроводников: постоянный магнит неподвижно повисает над чашей из сверхпроводника (рис. 276). Любое перемещение магнита, например вниз, вызывает вихревые токи, поле которых отталкивает магнит.

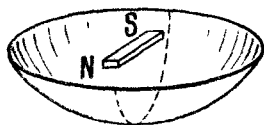


Рис. 276.

В сверхпроводнике эти токи будут существовать бесконечно долго; если же проводник не идеальный, а просто хороший, токи постепенно прекратятся и в конце концов магнит опустится на дно.

В конце концов магнит опустится на дно.

## § 98. Бетатрон

В § 83 мы видели, что циклотрон непригоден для ускорения электронов из-за релятивистских эффектов — возрастания массы электрона со скоростью, нарушающего условие постоянства частоты обращения.

Бетатрон — прибор, ускоряющий электроны до высоких энергий, — не требует постоянства частоты обращения электрона. Он основан на движении электронов в вихревом электрическом поле, созданном переменным магнитным. Если в пространство между полюсами электромагнита (рис. 272) поместить кольцеобразную вакуумную трубку, в которой находится термоэмиссионный излучатель электронов («электронная пушка»), то излученные электроны будут двигаться по силовым линиям поля, с каждым оборотом набирая скорость.

Наиболее существенным условием успешной работы бетатрона является стабильность электронной орбиты. Необходимо, чтобы орбита совпадала с одной из круговых силовых линий поля  $E$ . Для этой цели необходимо соблюдать определенный режим изменения магнитного поля во времени и в пространстве — полюсы должны иметь такую форму, чтобы магнитное поле убывало от центра к периферии по определенному закону.

Имеется предел энергий, достижимых с помощью бетатрона. Принципиальное затруднение, возникающее при

высоких энергиях, заключается в появлении сильного радиационного торможения — электрон, движущийся с ускорением, излучает электромагнитные волны (§ 108). Потеря энергии означает торможение электрона, уменьшающее радиус орбиты. Расчеты показывают, что радиационное торможение делает работу бетатрона практически невозможной при энергиях электронов более 500 Мэв. Большие энергии можно получить на синхротронах и линейных ускорителях.

## § 99. Индукционный генератор. Униполярная машина

**Индукционный генератор.** Вероятно, самым важным техническим применением электромагнитной индукции является индукционный генератор, произведший в свое время настоящий переворот в технике.

Магнитный поток через плоскость вращающейся рамки (рис. 277) меняется со временем, поэтому в рамке возникает переменная эдс. Если рамка вращается равномерно, то угол  $\alpha$ , который составляет нормаль к рамке с вектором  $\mathbf{B}$ , возрастает со временем линейно:  $\alpha = \omega t$  ( $\omega$  — угловая скорость вращения рамки). Магнитный поток через рамку равен (формула (88.2))

$$\Phi = BS \cos \omega t. \quad (99.1)$$

Эдс индукции можно найти по правилам дифференциального исчисления:

$$\mathcal{E} = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = BS \omega \sin \omega t \quad (\text{СИ}). \quad (99.2)$$

Ток через рамку определяется из закона Ома для всей цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{BS \omega}{R} \sin \omega t = I_0 \sin \omega t, \quad (99.3)$$

где  $R$  — полное сопротивление, т. е. сопротивление рамки и включенного в цепь потребителя электрической

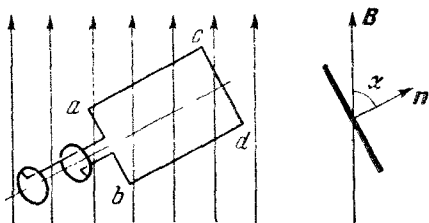


Рис. 277.

энергии. Таким образом, ток в рамке синусоидально зависит от времени. В технике под переменным током чаще всего понимают именно ток, меняющийся по синусоидальному закону\*). В физике же под *переменным* током понимают просто ток, меняющийся со временем по какому угодно закону, а не обязательно гармоническому.

Для увеличения эдс, очевидно, надо последовательно соединить ряд витков и надеть их на якорь — ферромагнитный сердечник (рис. 278) для увеличения магнитной индукции  $B$  (в  $\mu$  раз)\*\*).

Напряжение, снимаемое с помощью скользящих контактов (щетки) с двух колец, связанных со сторонами рамки  $ac$  и  $bd$  (рис. 277), будет переменным, так как ток в рамке меняет направление в момент, когда рамка параллельна линиям поля.

Другой способ коммутации — с помощью коллектора — позволяет получить постоянный (точнее — почти постоянный) ток, несмотря на то, что в каждой рамке ток переменный. Схема коллектора, рассчитанного на три



Рис. 278.

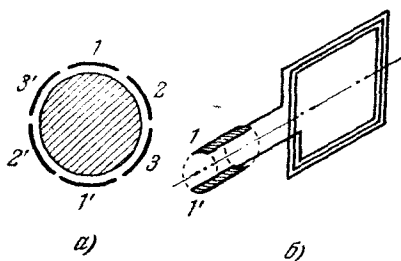


Рис. 279.

рамки, приведена на рис. 279, *а*. Коллектор представляет собой цилиндр из диэлектрика, на который наложены не контактирующие между собой металлические пластинки. Пара пластин  $1-1'$  соединена с одной рамкой, пара

\*) Изменения по синусоидальному и косинусоидальному законам отличаются лишь началом отсчета времени. Такой закон изменения называется еще *гармоническим*.

\*\*\*) Ферромагнитный сердечник меняет конфигурацию поля в зазоре. Поле перестает быть однородным, так что вычисление эдс несколько усложняется, но гармоническая зависимость от времени остается.

2—2' — с другой, и т. д. Щетки снимают напряжение с той рамки, которая расположена в данный момент вертикально (в ней будет индуцироваться наибольшая эдс). В результате напряжение на щетках остается почти постоянным (рис. 280).

Выше под рамкой можно, конечно, понимать несколько сложенных вместе и последовательно соединенных рамок (рис. 279, б).

В мощных генераторах часто применяется вращающееся магнитное поле; тогда обмотка, с которой снимается напряжение, неподвижна и коллектор не нужен.

Генераторы приводятся во вращение тепловыми двигателями (на тепловых электростанциях), водой (на гидроэлектростанциях). Мощности генераторов доходят до  $10^6$  киловатт. Наиболее мощные генераторы применяются на советских электростанциях.

**Униполярная машина.** Своеобразный случай электромагнитной индукции осуществляется в так называемой униполярной машине (рис. 281).

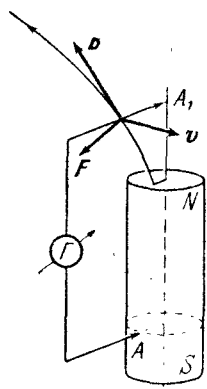


Рис. 281.

Цилиндрический постоянный магнит вращается вокруг своей оси. В цепи между скользящими контактами  $A$  и  $A_1$  возникает индукционный ток. Трудность применения обычного закона индукции  $\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$  заключается в невозможности выбрать контур, который оставался бы замкнутым в течение всего движения. Поэтому проще всего перейти в систему отсчета, связанную с магнитом, тогда провод  $AA_1$  будет вращаться вокруг магнита. При этом заряды, находящиеся в проводнике, будут двигаться вместе с проводником в магнитном поле со скоростью  $v$ , зависящей от расстояния до оси вращения. Сила Лоренца  $F$ , направление которой показано на рисунке, имеет составляющую вдоль проводника, и это приведет к возникновению индукционного

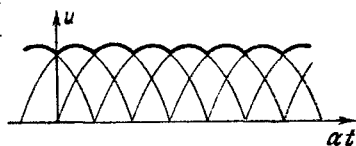


Рис. 280.

тока. Разумеется, работа тока равна не работе силы Лоренца (которая всегда равна нулю), а работе внешней силы, вращающей проводник (см. по этому поводу § 96).

### § 100. Магнитогидродинамический генератор

Обычно тепловая энергия сгорающего топлива превращается в электрическую сложным путем. Сначала топливо используется для приведения в действие тепловой машины (турбины, дизеля и т. д.). Тепловая машина вращает генератор, а последний уже превращает полученную механическую энергию в электрическую.

Коэффициент полезного действия любой тепловой машины ограничен сверху. Он всегда меньше теоретического кпд идеальной обратимой тепловой машины (так называемой машины Карно), который равен

$$\eta_{\text{к}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (100.1)$$

где  $T_1$  — температура нагревателя (например температура воспламеняющейся рабочей смеси в двигателе внутреннего сгорания), а  $T_2$  — температура так называемого холодильника (в нашем случае — температура отработанных газов на выхлопе).

Не может быть создано устройство, превращающее тепловую энергию в механическую или электрическую с коэффициентом полезного действия больше (100.1). Фактически кпд тепловой электростанции составляет что-нибудь около 0,5 или 0,6 от кпд машины Карно.

Из формулы (100.1) видно, что для повышения кпд выгодно поднимать температуру нагревателя. При максимальной температуре рабочего тела (например раскаленных газов)  $T_1 = 900^\circ\text{К}$  и температуре  $T_2 = 300^\circ\text{К}$   $\eta_{\text{к}} = 67\%$ , а при  $T_1 = 2500^\circ\text{К}$  и  $T_2 = 300^\circ\text{К}$  коэффициент полезного действия достигает уже 88%. Но высокие температуры нельзя использовать в таких машинах, в которых есть быстро вращающиеся части, испытывающие большие механические нагрузки. Необходимость преобразования тепловой энергии в механическую, в качестве промежуточной ступени, очень усложняет установку, удорожает ее и уменьшает коэффициент полезного действия.

Всех этих недостатков лишен метод прямого превращения тепловой энергии в электрическую, используемый



в магнитогидродинамических генераторах (МГДГ). В принципе здесь может быть достигнут кпд процентов на сорок больше, чем в обычных тепловых установках. Однако в настоящее время (1969 г.) промышленные МГДГ еще не созданы. На пути их создания возникло много технических трудностей. Одна из них состоит в том, что в МГДГ должна работать плазма с температурой  $T \approx 2800^\circ\text{K}$ . Хотя в МГДГ и нет вращающихся частей, но пока не найдены материалы, которые длительно выдерживали бы такую температуру, не окисляясь. Существует и много других технических трудностей. Предполагают, что в семидесятые годы можно будет приступить к созданию крупных энергетических установок.

Принцип действия МГДГ иллюстрируется на рис. 282, а. В камере сгорания создается высокая температура, при которой газ, представляющий собой продукты сгорания топлива, достаточно сильно ионизируется.

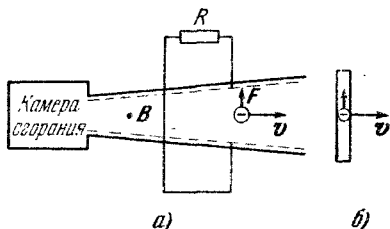


Рис. 282.

Для увеличения электропроводности добавляют к продуктам сгорания вещества с малой энергией ионизации, например цезий (энергия ионизации  $3,87 \text{ эВ}$ ) или другие щелочные или щелочноземельные металлы — кальций, натрий, калий. Полученная горячая плазма движется по постепенно расширяющемуся каналу длиной до 10 м. Канал находится в сильном магнитном поле (на рис. 282 поле направлено к нам). На электроны и ионы в потоке быстро движущейся по каналу плазмы действует сила Лоренца. Эта сила заворачивает заряженные частицы: электроны движутся к верхнему электроду, положительные ионы — к нижнему. Проходя через включенную в цепь нагрузку, электроны возвращаются к нижнему электроду. Кроме магнитного поля, на заряженные частицы в канале действует, конечно, и электрическое поле, созданное объемными зарядами и электродами.

Движение плазмы вдоль канала аналогично движению проводника якоря динамомашинны в магнитном поле (рис. 282, б). Сила Лоренца вызывает и в том и в другом случае движение электронов по проводнику, т. е.

является причиной возникновения эдс индукции. Физическое отличие заключается лишь в том, что в МГДГ нет движущихся проводов, их роль играет движущаяся вдоль канала плазма. На движущийся проводник с током в магнитном поле действует сила Ампера, тормозящая его движение. Поэтому должна существовать внешняя сила, вращающая якорь динамомашинны. Аналогично этому, на электроны в плазме действует сила Лоренца. Движение по каналу продолжается, несмотря на ее тормозящее действие\*), под напором расширяющегося раскаленного газа. В конечном счете и в том, и в другом случае движение вызывается выделяющейся при сгорании топлива тепловой энергией.

После выхода из канала газ еще достаточно нагрет (в канале он должен быть ионизированным), и его можно использовать для превращения воды в пар, поступающий затем в паровую турбину. Турбина вращает обычный электрический генератор — динамомашину.

Как показывают расчеты, МГДГ выгодно создавать на большие мощности — порядка сотен тысяч киловатт. При этом напряжение на генераторе будет порядка тысяч вольт.

### § 101. Взаимная индукция и самоиндукция

Переменный ток, протекающий в одном из контуров, например в контуре 1 (рис. 283), создает переменное магнитное поле, которое вызывает появление эдс индукции в проводящем контуре 2. Такое явление называется *взаимной индукцией*. Суть дела заключается в том, что эдс в контуре возникает при любом изменении магнитного потока через его площадь, независимо от причины этого изменения.

Переменный магнитный поток может вызываться переменным током самого контура. В этом случае в контуре также появляется эдс — она называется *электродвижущей силой самоиндукции*.

Электродвижущая сила взаимной и самоиндукции определяется тем же законом Фарадея  $\mathcal{E} = - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$  (СИ).

\*) «Тормозящее» не в смысле уменьшения величины скорости (сила Лоренца не может изменить величину скорости, так как работы над зарядом не выполняет), а в смысле изменения направления движения зарядов.

На практике приходится обычно иметь дело не с одним витком, а с замкнутым проводником более сложной конфигурации, например с катушкой индуктивности. Полный магнитный поток через все витки катушки называется *потокосцеплением*  $\Psi$ . Эдс, возникающая в катушке, равна

$$\mathcal{E} = - \frac{\Delta\Psi}{\Delta t} \quad (\text{СИ}). \quad (101.1)$$

В случае длинного соленоида магнитный поток  $\Phi$ , создаваемый током самого соленоида, через все витки один и тот же (за исключением небольшого числа витков на концах) и

$$\Psi = N\Phi. \quad (101.2)$$

В случае взаимной индукции Эдс  $\mathcal{E}_2$  в контуре 2 равна  $-\frac{\Delta\Psi_{12}}{\Delta t}$ , где  $\Psi_{12}$  — потокосцепление с контуром тока 2, создаваемое током  $I_1$ . В неферромагнитной среде  $\Psi_{12}$  пропорционально создающему его току  $I_1$ :

$$\Psi_{12} = L_{12}I_1 \quad (\text{СИ}). \quad (101.3)$$

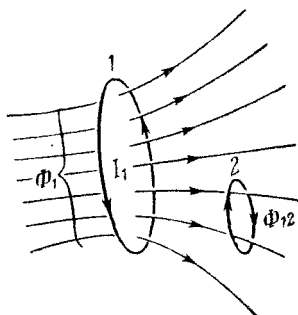


Рис. 283.

Пропорциональность следует из того, что поток пропорционален магнитной индукции  $B$ , магнитная индукция — напряженности, а напряженность — току.

Коэффициент  $L_{12}$  называется *коэффициентом взаимной индукции* \*). Единица измерения ее — генри (определение генри см. ниже). С помощью (101.3) запишем  $\Delta\Psi_{12} = L_{12}\Delta I_1$ , так что из (101.1) следует

$$\mathcal{E}_2 = -L_{12} \frac{\Delta I_1}{\Delta t} \quad (\text{СИ}). \quad (101.4)$$

Аналогично (101.3) поток через контур, создаваемый током этого же контура, пропорционален току, так что

$$\Psi = LI \quad (\text{СИ}). \quad (101.5)$$

В этой формуле  $L$  называется *коэффициентом самоиндукции* (*индуктивностью*). Индуктивность (в отсутствие

\*) Можно доказать, что  $L_{21} = L_{12}$ .

ферромагнитных сердечников) не зависит от тока и определяется характеристиками контура — формой, размерами, числом витков и средой, в которой он находится. Коэффициент взаимной индукции зависит вдобавок от взаимного расположения контуров.

Если  $L$  не зависит от тока и поэтому не меняется со временем, то  $\frac{\Delta\Psi}{\Delta I} = L \frac{\Delta I}{\Delta I}$  и эдс самоиндукции равна

$$\mathcal{E} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad (\text{СИ}). \quad (101.6)$$

Очевидно отсюда, что  $L=1$  гн, если  $\mathcal{E}=1$  в,  $\Delta I=1$  а,  $\Delta t=1$  сек,

$$1 \text{ гн} = 1 \frac{\text{в} \cdot \text{сек}}{\text{а}}.$$

Это значит, что один генри — это индуктивность такого контура, в котором при изменении тока на 1 а за 1 сек индуктируется эдс в 1 в. Один генри — это большая индуктивность, и получить ее нелегко: нужна катушка с большим числом витков и ферромагнитным сердечником.

**Статическая и динамическая индуктивность.** Осложнения, возникающие в присутствии ферромагнитного сердечника, заключаются в следующем. Потокосцепление  $\Psi$  для длинного соленоида равно  $\Psi = BSN$ . Поэтому введенный выше коэффициент самоиндукции в (101.5) (называемый *статическим* коэффициентом самоиндукции) равен

$$L = \frac{\Psi}{I} = NS \frac{B}{I}.$$

Напряженность магнитного поля  $H$  пропорциональна току, но магнитная индукция  $B$  в присутствии ферромагнитного сердечника, как видно из кривой гистерезиса, вовсе не пропорциональна  $H$  и, следовательно, не пропорциональна току. При  $H=0$  (т. е. при  $I=0$ ) магнитная индукция достигает значения  $B_r$  (остаточная намагниченность). Поэтому статический коэффициент самоиндукции соленоида с ферромагнитным сердечником при  $I=0$  обращается в бесконечность, т. е. теряет смысл.

Иначе ведет себя так называемый *динамический* коэффициент индуктивности, который определяется следующим образом:

$$L_D = \frac{\Delta\Psi}{\Delta I} \quad (\text{СИ}). \quad (101.7)$$

Для соленоида он равен  $NS \frac{\Delta B}{\Delta I}$ . Величина  $\frac{\Delta B}{\Delta I}$  пропорциональна  $\frac{\Delta B}{\Delta H}$ , т. е. тангенсу угла наклона касательной к кривой гистерезиса. Гистерезисные кривые часто имеют такую форму, когда  $\frac{\Delta B}{\Delta H}$  на довольно значительном участке мало меняется вдоль кривой и может приближенно считаться постоянной. Тогда и динамический коэффициент индуктивности почти не зависит от тока и характеризует свойства контура (катушки индуктивности).

С помощью  $L_D$  можно записать формулу для эдс самоиндукции (и взаимной индукции) в виде (101.6) в общем случае, т. е., в частности, в присутствии ферромагнитного сердечника. Действительно,

$$\mathcal{E} = - \frac{\Delta \Psi}{\Delta t} = - \frac{\Delta \Psi}{\Delta I} \frac{\Delta I}{\Delta t} = -L_D \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad (\text{СИ}). \quad (101.8)$$

Если ферромагнитного сердечника нет, динамический и статический коэффициенты совпадают, так как в этом случае потокосцепление  $\Psi$  пропорционально току  $I$ , и из (101.5) следует  $\Delta \Psi = L \Delta I$ , т. е.  $L = \frac{\Delta \Psi}{\Delta I} = \frac{\Psi}{I}$ .

Вычислим статический коэффициент самоиндукции длинного соленоида. Напряженность поля в соленоиде  $H = NI/l$  (§ 80), магнитный поток через один виток

$$\Phi = \mu_0 HS = \mu_0 S \frac{NI}{l},$$

а потокосцепление

$$\Psi = N\Phi = \mu_0 S \frac{N^2 I}{l}.$$

Следовательно, индуктивность соленоида  $L = \Psi/I$  равна

$$L = \mu_0 S \frac{N^2}{l} \quad (\text{СИ}). \quad (101.9)$$

Размерность  $\mu_0$  — генри на метр, так что  $L$  измеряется в генри. Отметим, что индуктивность соленоида пропорциональна квадрату числа витков.

Не сложнее вычислить коэффициент взаимной индукции двух катушек, насаженных на общий сердечник

(рис. 284) или намотанных одна на другую. Магнитный поток, создаваемый катушкой 1, равен

$$\Phi = \mu\mu_0 S \frac{N_1 I_1}{l}.$$

Потокоцепление с катушкой 2, имеющей  $N_2$  витков, равно

$$\Psi_{12} = \mu\mu_0 S \frac{N_1 N_2 I_1}{l},$$

следовательно, взаимная индуктивность  $L_{12} = \Psi_{12}/I_1$  равна

$$L_{12} = \mu\mu_0 S \frac{N_1 N_2}{l} \quad (\text{СИ}). \quad (101.10)$$

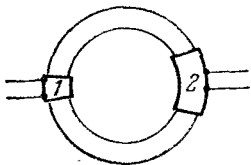


Рис. 284.

Интересно, что  $L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$ . Такая связь взаимной индуктивности с коэффициентами самондукции имеет место тогда, когда поток одной катушки полностью проходит через другую, в общем же случае можно доказать, что  $L_{12} \leq \sqrt{L_1 L_2}$ .

## § 102. Переменный ток в цепи с индуктивностью

Мы рассмотрим в этом параграфе переменный ток настолько малой частоты, чтобы его можно было считать *квазистационарным*. Ток называется *квазистационарным* в том случае, если его магнитное поле в каждый момент времени практически такое же, какое было бы у тока стационарного (постоянного), так же распределенного в пространстве и имеющего величину, совпадающую с мгновенной величиной переменного. Электрическое поле зарядов в квазистационарной цепи также совпадает со статическим полем распределения зарядов в данный момент.

Магнитное поле проводника с током создается всем проводником в целом, поэтому для квазистационарности необходимо, чтобы время распространения электромагнитного поля (электромагнитной волны) вдоль всей цепи было мало по сравнению с периодом переменного тока. Обозначив размеры цепи  $l$ , получим условие квазистационарности в виде

$$\frac{l}{c} \ll T. \quad (102.1)$$

Поскольку период  $T = \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda}{c}$ , условие (102.1) означает, что размеры цепи должны быть во много раз меньше длины волны, имеющей период, равный периоду тока:

$$l \ll \lambda. \quad (102.2)$$

Если размеры цепи  $l \sim 10$  м, то условию квазистационарности с запасом удовлетворяют токи с частотой порядка  $10^4$ — $10^5$  герц (колебаний в секунду). Однако в длинных линиях  $l$  может быть очень большим, условие квазистационарности может нарушаться, и это надо учитывать при расчете (см. § 113).

К квазистационарному переменному току применим закон Ома, однако это вовсе не означает, что в замкнутой цепи с внешней эдс  $\mathcal{E}$  (имеются в виду внешние источники без учета эдс самоиндукции) сила тока равна  $\mathcal{E}/R$ . Дело как раз в наличии эдс самоиндукции, величина которой не задана, а определяется быстротой изменения тока. Емкость, включенная в цепь, вносит дополнительные осложнения.

**Цепь с индуктивностью и переменной эдс.** Рассмотрим сначала цепь, содержащую индуктивность и источник переменной эдс  $\mathcal{E}$  (генератор переменного тока). Пусть индуктивность цепи будет  $L$ , а полное омическое сопротивление  $R$  (рис. 285). Внешняя эдс пусть меняется со временем по гармоническому закону  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ , где  $\omega$  — частота, а  $\mathcal{E}_0$  — амплитуда эдс. Аргумент косинуса (в данном случае  $\omega t$ ) называется *фазой*.

Закон Ома для всей цепи запишется в виде

$$IR = \mathcal{E}_0 \cos \omega t - L \frac{dI}{dt} \quad (\text{СИ}) \quad (102.3)$$

(произведение  $IR$  равно сумме всех эдс, содержащихся в цепи). При гармонически меняющейся эдс сила тока тоже будет меняться гармонически с той же частотой, но со сдвигом по фазе, который нам надлежит определить. Итак, допустим, что  $I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$ . Такая запись означает, что ток отстает от эдс на угол  $\varphi$  (сдвиг по фазе на угол  $\varphi$ ). Электродвижущую силу самоиндукции  $-L \frac{dI}{dt}$

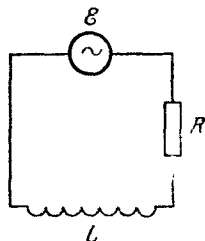


Рис. 285.

можно теперь вычислить по правилам дифференциального исчисления. Получается

$$-L \frac{dI}{dt} = L\omega I_0 \sin(\omega t - \varphi) = -L\omega I_0 \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно, уравнение (102.3) можно записать в виде

$$I_0 R \cos(\omega t - \varphi) + L\omega I_0 \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \quad (\text{СИ}). \quad (102.4)$$

Изобразим все три члена этого уравнения на так называемой векторной диаграмме. Каждая величина  $A$ , меняющаяся со временем по закону  $A = A_0 \cos(\omega t + \alpha)$ , изображается на диаграмме проекцией на ось  $x$  вектора, имеющего длину  $A_0$  и составляющего с этой осью угол

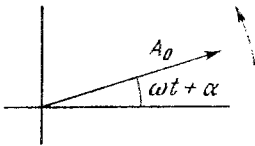


Рис. 286.

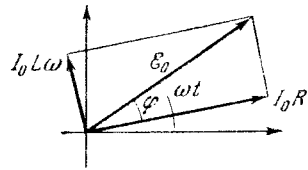


Рис. 287.

$\omega t + \alpha$  (рис. 286). Со временем угол  $\omega t + \alpha$  увеличивается и вектор вращается против часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$ , не меняя своей длины.

Вектор тока, проекция которого на ось  $x$  равна  $I_0 R \cos(\omega t - \varphi)$ , отстает по фазе от вектора эдс на угол  $\varphi$ . Отсюда — указанное на рис. 287 взаимное расположение векторов. Вектор с проекцией  $L\omega I_0 \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$  опережает вектор тока на  $\pi/2$ , как это видно из рисунка. Векторная сумма векторов, проекции которых стоят в левой части (102.4), должна давать эдс. Из диаграммы видно, что это означает\*), что  $I_0^2 R^2 + I_0^2 L^2 \omega^2 = \mathcal{E}_0^2$ , т. е.

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}. \quad (102.5)$$

\*) Соотношения (102.5) и (102.6) можно получить и непосредственно из (102.4), если приравнять коэффициенты при  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$  в обеих частях равенства.



Из этого же прямоугольного треугольника вытекает, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R}, \quad (102.6)$$

чем и определяется отставание тока от эдс.

Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \quad (\text{СИ}) \quad (102.7)$$

называется *полным сопротивлением*. Говорят, что оно «состоит» из активного  $R$  и индуктивного  $L\omega$  сопротивлений. Смысл названия «полное сопротивление» в том, что амплитуда тока  $I_0$  связана с амплитудой эдс  $\mathcal{E}_0$  соотношением, подобным закону Ома:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}. \quad (102.8)$$

Другого смысла термин «полное сопротивление» не имеет. В частности, выделяющееся в цепи тепло не равно  $I^2 Z$ . Тепло выделяется только на активном сопротивлении  $R$ , а не на индуктивном  $L\omega$ . Можно доказать, что тепло (в джоулях), выделяющееся за секунду (тепловая мощность), равно

$$Q = \frac{1}{2} I_0 \mathcal{E}_0 \cos \varphi = I_{\text{действ}} \cdot \mathcal{E}_{\text{действ}} \cdot \cos \varphi, \quad (102.9)$$

где

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}. \quad (102.10)$$

Под «действующими» значениями тока и эдс понимаются

$$I_{\text{действ}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}; \quad \mathcal{E}_{\text{действ}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}. \quad (102.11)$$

Именно эти действующие ток и напряжение измеряются обычными амперметром и вольтметром в цепи переменного тока.

Выражение для выделяющегося тепла легко преобразовать к виду

$$Q = I_{\text{действ}}^2 \cdot R. \quad (102.12)$$

Для этого надо найти  $\cos \varphi$  из (102.10) и воспользоваться формулами (102.8) и (102.11).

Теперь мы можем доказать утверждение § 97 по поводу опыта, изображенного на рис. 274. Если поле

магнита меняется по закону  $B = B_0 \cos \omega t$ , то эдс индукции равна

$$\mathcal{E} = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = - S \frac{\Delta B}{\Delta t} = S B_0 \omega \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right),$$

т. е. отстает от  $B$  на  $\pi/2$ . При очень малом сопротивлении кольца  $R \rightarrow 0$  отставание тока от эдс, согласно (102.10), будет тоже равно  $\varphi = \pi/2$ , значит, ток и его магнитное поле отстают от внешнего поля  $B$  на угол  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ .

Следовательно, поле кольца противоположно внешнему полю. Так будет только при очень малом сопротивлении кольца, в противном случае отставание будет меньше  $\pi$ .

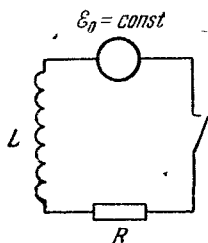


Рис. 288.

Индуктивность приводит к отставанию тока от эдс. Она является мерой инертности, т. е. играет роль, аналогичную роли массы в механике. В частности, при включении цепи на источник постоянной эдс ток установится не сразу, а с течением времени, тем большего, чем больше индуктивность.

**Установление тока в цепи при ее замыкании.** Задача об установлении тока при замыкании цепи с *постоянной*

эдс (рис. 288) полностью аналогична механической задаче о падении тела в вязкой среде под действием силы тяжести; например о падении шарика в вязкой жидкости. Согласно второму закону Ньютона произведение массы на ускорение  $\frac{\Delta v}{\Delta t}$  равно сумме силы тяжести  $F$  (в случае падения в жидкости — за вычетом архимедовой силы) и силы трения  $F_{\text{тр}} = -rv$ , пропорциональной скорости и направленной в сторону, ей противоположную:

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = F - rv. \quad (102.13)$$

Уравнение, определяющее установление тока при замыкании цепи (закон Ома),  $IR = \mathcal{E}_0 - L \frac{\Delta I}{\Delta t}$ , можно записать в виде, совершенно аналогичном формуле (102.13):

$$L \frac{\Delta I}{\Delta t} = \mathcal{E}_0 - RI. \quad (102.14)$$

Сила тока здесь аналогична скорости, эдс — силе, индуктивность — массе и сопротивление — коэффициенту  $r$  при скорости в выражении для силы трения.

Скорость падающего тела вначале растет, в результате чего растет сила трения, а ускорение уменьшается, пока не обратится в нуль. Тогда, как видно из (102.13), скорость достигает значения  $v_{\max} = F/r$ . Это и есть максимальное значение скорости. При дальнейшем падении скорость будет оставаться постоянной. Аналогично этому ток увеличивается, пока не достигнет значения  $I_{\max} = \mathcal{E}_0/R$ , нормального для постоянного тока. Скорость тела, строго говоря, устанавливается лишь через бесконечно большое время, аналогично ведет себя и ток.

Можно доказать, что время установления постоянной скорости — порядка нескольких  $m/r$ , а время установления тока — порядка нескольких  $\tau = L/R$ . (Легко убедиться, что величина  $L/R$  имеет размерность времени:

$\frac{\text{гн}}{\text{ом}} = \frac{v \cdot \text{сек}}{a \cdot \text{ом}} = \text{сек.}$ ) За время  $t$ , равное нескольким  $\tau$ , ток практически достигнет максимального значения. График нарастания тока со временем показан на рис. 289. При  $L = 1 \text{ гн}$  и  $R = 10 \text{ ом}$  время установления тока — порядка нескольких десятых долей секунды, что вполне заметно на глаз и может быть продемонстрировано на опыте: включенная в цепь с индуктивностью лампочка загорается не сразу после включения.

**Энергия магнитного поля.** Умножим уравнение (102.14) на  $I \Delta t$  и перепишем его в виде

$$\mathcal{E}_0 I \Delta t = I^2 R \Delta t + LI \Delta I \quad (\text{СИ}). \quad (102.15)$$

Физический смысл полученного уравнения ясен: член  $\mathcal{E}_0 I \Delta t$  есть работа постоянной эдс (рис. 288) за время  $\Delta t$ , член  $I^2 R \Delta t$  — выделенное за то же время тепло, последний член,  $LI \Delta I$ , есть работа эдс, затраченная на увеличение тока в катушке индуктивности. Эта последняя работа превращается в *энергию магнитного поля катушки*.

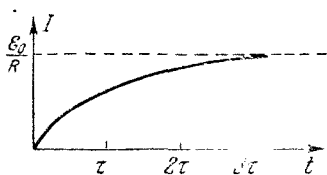


Рис. 289.

Следовательно, приращение магнитной энергии катушки равно  $dW_M = LI dl$ . Вся работа, затраченная внешней эдс, чтобы довести ток до максимального значения, т. е. на создание магнитного поля в катушке, равна

$$W_M = \int_0^I LI dl.$$

Итак,

$$W_M = \frac{LI^2}{2} \quad (\text{СИ}) \quad (102.16)$$

(здесь мы предположим, что в катушке отсутствует ферромагнитный сердечник, иначе  $L$  зависел бы от тока).

Аналогично этому, работа силы тяжести, действующей на падающее в жидкости тело, частично превращается в тепло, а частично идет на увеличение кинетической энергии. Формула  $E_{\text{кин}} = mv^2/2$  вполне аналогична (102.16), и снова мы отмечаем, что  $L$  аналогична массе, а скорость соответствует силе тока.

Если подставить в (102.16) коэффициент самоиндукции соленоида  $L = \mu_0 N^2 S/l$  и воспользоваться тем, что в соленоиде  $B = \mu_0 H = \mu_0 NI/l$ , то энергия магнитного поля в соленоиде выразится так:

$$W_M = \frac{BH}{2} V \quad (\text{СИ}), \quad (102.17)$$

где  $V$  — объем, занимаемый полем (объем соленоида).

Плотность магнитной энергии (т. е. энергия, приходящаяся на единицу объема) будет равна

$$w_M = \frac{BH}{2} \quad (\text{СИ}), \quad (102.18)$$

В гауссовой системе получается

$$w_M = \frac{BH}{8\pi} \quad (\text{СГС}). \quad (102.19)$$

Эта формула вполне аналогична формуле (41.6) для плотности электрической энергии и относится к любому (т. е. не обязательно однородному и постоянному во времени) магнитному полю.

### § 103. Пондеромоторные силы в магнитном поле

Пондеромоторными силами в магнитном поле называются силы, действующие в этом поле на контуры с током (катушки) или на намагниченные тела.

В качестве примера пондеромоторной силы вычислим подъемную силу электромагнита с сердечником из мягкого железа (рис. 290). Пусть зазор  $x$  между сердечником и якорем вследствие притяжения между ними меняется за время  $\Delta t$  на величину  $\Delta x$ . Работа перемещения якоря  $\Delta A = F \Delta x$  выполняется за счет питающей электромагнит эдс. При этом эдс выполняет еще работу, идущую на выделение джоулева тепла и на изменение магнитной энергии  $W_m$  электромагнита. Работа эдс за время  $\Delta t$  равна  $\mathcal{E} I \Delta t$ . Следовательно, можно записать

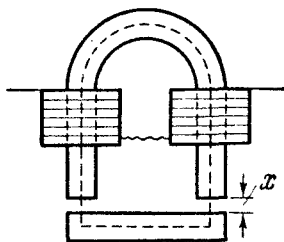


Рис. 290.

$$\mathcal{E} I \Delta t = \Delta A + I^2 R \Delta t + \Delta W_m. \quad (103.1)$$

Согласно закону Ома для цепи с внешней эдс  $\mathcal{E}$  и эдс самоиндукции  $-\frac{\Delta \Psi}{\Delta t}$  имеем  $\mathcal{E} - \frac{\Delta \Psi}{\Delta t} = IR$ , т. е.

$$\mathcal{E} = IR + \frac{\Delta \Psi}{\Delta t} \quad (\text{СИ}). \quad (103.2)$$

Умножим это уравнение на  $I \Delta t$ :

$$\mathcal{E} I \Delta t = I^2 R \Delta t + I \Delta \Psi \quad (\text{СИ}). \quad (103.3)$$

Сравнивая это выражение с (103.1), получим

$$\Delta A + \Delta W_m = I \Delta \Psi \quad (\text{СИ}). \quad (103.4)$$

Следовательно, если менять во время перемещения якоря ток таким образом, чтобы потокосцепление  $\Psi$  оставалось постоянным, то работа перемещения якоря будет равна

$$\Delta A = -(\Delta W_m)_\Psi. \quad (103.5)$$

Выражение  $(\Delta W_m)_\Psi$  означает изменение магнитной энергии электромагнита при условии, что потокосцепление

(полный магнитный поток через все витки) остается постоянным.

Формула (103.5) аналогична соответствующей формуле (43.1) для работы в электрическом поле и пригодна не только в случае электромагнита, а имеет общий характер.

Для вычисления работы  $\Delta A$ , а из нее и силы  $F$ , нет надобности, конечно, подбирать такой режим изменения тока, при котором магнитный поток оставался бы постоянным. Надо просто найти приращение  $\Delta W_M$  при условии, что  $\Psi$  постоянно, а это является чисто математической операцией.

Если сердечник электромагнита сделан из магнитно-мягкого материала (как это действительно и бывает) с очень узкой петлей гистерезиса, то мы не сделаем большой ошибки, считая, что магнитная индукция  $B$  линейно растет с напряженностью  $H$ , т. е. с увеличением тока (см. § 93). В этом случае магнитная энергия электромагнита определяется той же формулой, что и в отсутствие ферромагнитного сердечника,  $W_M = LI^2/2$ . Это выражение, пользуясь тем, что  $\Psi = LI$ , можно записать в виде

$$W_M = \frac{1}{2} \Psi I \quad (\text{СИ}). \quad (103.6)$$

Следовательно, согласно (103.5)

$$\Delta A = F \Delta x = -\frac{1}{2} \Psi (\Delta I)_{\Psi}$$

и сила  $F$  равна

$$F = -\frac{1}{2} \Psi \left( \frac{M}{\Delta x} \right)_{\Psi}. \quad (103.7)$$

Чтобы фактически вычислить силу  $F$ , надо рассчитать магнитную цепь электромагнита. Выберем замкнутый контур, проходящий через сердечник и якорь так, как показано на рис. 290, и применим к нему теорему о циркуляции напряженности магнитного поля (§ 80). Вычисление проведем в системе СИ. Получим:  $H_1 l_1 + H_2 \cdot 2x = NI$ . Здесь  $l_1$  — длина части контура, проходящей через железо,  $H_1$  — поле в железе, равное  $B/\mu\mu_0$  (считаем, что  $B$  в воздухе равна  $B$  в железе, что справедливо при малом зазоре  $x$ ),  $H_2 = B/\mu_0$  (поле в воздухе). Заменим  $B$  на  $\Psi/NS$  и подставим  $H_1$  и  $H_2$  в вышезаписанное уравне-

ние. Выразим  $I$  из этого уравнения и продифференцируем, согласно (103.7), по  $x$ , считая  $\Psi$  постоянным. Получим

$$F = -\frac{B^2}{2\mu_0} 2S \quad (\text{СИ}). \quad (103.8)$$

Знак минус означает притяжение. Сила притяжения  $f$ , приходящаяся на единицу площади (по абсолютной величине), равна

$$f = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (\text{СИ}). \quad (103.9)$$

Учитывая, что в воздухе  $B = \mu_0 H$ , мы можем записать эту формулу в виде  $f = BH/2$ , или

$$f = \omega_m. \quad (103.10)$$

Мы получили важное соотношение: поверхностная плотность силы (сила, приходящаяся на единицу площади) равна объемной плотности магнитной энергии. Аналогичное соотношение, как мы видели в § 43, имеет место и для плотности электрической пондеромоторной силы.

## § 104. Трансформатор

Трансформатор представляет собой две индуктивно связанные между собой цепи — две катушки, надетые на один ферромагнитный сердечник (рис. 291). Это весьма остроумное устройство позволяет трансформировать, т. е. менять в определенное число раз, силу тока и напряжение.

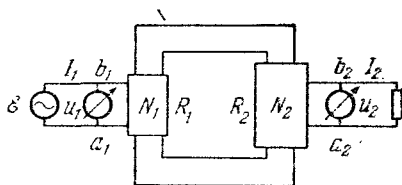


Рис. 291.

Мы рассмотрим так называемый *идеальный* трансформатор, у которого: 1) активные сопротивления  $R_1$  и  $R_2$  первичной и вторичной обмоток весьма малы, 2) магнитный поток через обе катушки одинаков (нет рассеяния магнитного потока) и 3) кривая гистерезиса настолько узка и крута, что к насыщению сердечника приводит уже весьма слабое поле  $H$ .

Применим закон Ома к участкам  $a_1N_1b_1$  и  $a_2N_2b_2$  первичной и вторичной цепей. Поскольку  $R_1 \approx 0$ ,  $R_2 \approx 0$ ; имеем

$$\begin{aligned} 0 &\approx I_1R_1 = u_1 - N_1 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \\ 0 &\approx I_2R_2 = u_2 - N_2 \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \end{aligned} \quad (\text{СИ}) \quad (104.1)$$

где  $u_1$  и  $u_2$  — напряжения на катушках (рис. 291),  $N_1$  и  $N_2$  — числа витков, а  $\Phi$  — магнитный поток через сердечник. Отсюда

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1}, \quad (104.2)$$

т. е. напряжения относятся как числа витков.

Отношение токов найдем, применяя теорему о циркуляции  $\mathbf{H}$  (§ 80):

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = N_1I_1 + N_2I_2 \approx 0, \quad \text{так как } H \approx 0.$$

Малость  $H$  означает, что токи обмоток  $I_1$  и  $I_2$  направлены в обратные стороны — создаваемые ими напряженности  $H_1$  и  $H_2$  противоположны по знаку и почти компенсируют друг друга. Остающейся малой напряженности  $H = H_1 - H_2$  тем не менее достаточно, чтобы сердечник трансформатора был намагничен до насыщения, т. е. чтобы магнитный поток  $\Phi$  в сердечнике был максимален.

Если  $H \approx 0$ , то  $N_1I_1 = -N_2I_2$ , т. е. абсолютные значения токов относятся обратно пропорционально числам витков:

$$\frac{I_1}{I_2} \approx \frac{N_2}{N_1}. \quad (104.3)$$

Таким образом, если число витков  $N_2$  вторичной обмотки больше, чем первичной  $N_1$ , трансформатор повышает напряжение в  $N_2/N_1$  раз и во столько же раз уменьшает силу тока.

Соотношение (104.2) справедливо и для трансформатора, сопротивлением обмоток которого нельзя пренебречь в случае холостого хода; т. е. при разомкнутой вторичной обмотке. Очевидно, при этом  $I_2 = 0$ , а ток  $I_1$  в первичной цепи тоже очень мал. Тогда из (104.1) снова получаем (104.2).



Повышающий напряжение трансформатор применяют, например, при передаче электрической энергии на далекие расстояния. На месте потребления напряжение снова понижают. Большое напряжение \*) при заданной мощности означает малую силу тока  $I$  в линиях передачи, а следовательно, малые потери  $I^2R$  (где  $R$  — сопротивление линии).

Заметим, что  $I^2R$  можно записать в виде  $U_{\text{л}}^2/R$ , где  $U_{\text{л}}$  — падение напряжения в проводах (но отнюдь не все напряжение на вторичной обмотке трансформатора).

### § 105. Переменный ток в цепи с индуктивностью и емкостью

Рассмотрим цепь переменного квазистационарного тока, которая содержит последовательно соединенные эдс, индуктивность и емкость (рис. 292).

На тех участках цепи, где нет ни внешней эдс, ни эдс самоиндукции, заряды движутся по проводнику под действием потенциального электрического поля. Величина  $IR$  представляет собой падение потенциала на сопротивлении цепи  $R$ . На конденсаторе тоже будет существовать падение потенциала, равное  $q/C$  ( $q$  — заряд конденсатора, а  $C$  — его емкость). Сумма падений потенциала равна сумме включенной в цепь внешней эдс  $\mathcal{E}$  и эдс самоиндукции  $-L \frac{\Delta I}{\Delta t}$ :

$$IR + \frac{q}{c} = \mathcal{E} - L \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad (\text{СИ}). \quad (105.1)$$

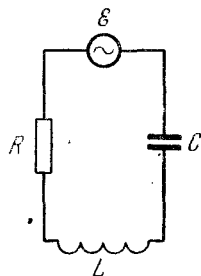


Рис. 292.

Эти качественные соображения, справедливые для квазистационарного тока, подтверждаются расчетом.

Предположим снова, как в § 102, что  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ , а сила тока  $I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$ . Мы уже упоминали там, что величина  $L \frac{\Delta I}{\Delta t} = L\omega I_0 \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ , т. е. опережает ток на  $\pi/2$ . Заряд конденсатора  $q$ , наоборот,

\*) Иногда — сотни тысяч вольт. При этом приходится применять специальные меры против «стекания зарядов» и других форм газового разряда с проводов.

отстает от тока на  $\pi/2$ . Можно доказать\*), что

$$q = \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t - \varphi) = \frac{I_0}{\omega} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

Итак, в присутствии  $R$ ,  $C$  и  $L$  должно выполняться равенство

$$I_0 R \cos(\omega t - \varphi) + \frac{I_0}{\omega C} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right) + I_0 L \omega \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t.$$

На рис. 293 это равенство изображено в виде векторной диаграммы. Три вектора в левой части равенства должны в сумме давать эдс. Из рис. 293 видно, что все рассуждения § 102 остаются в силе, надо только вместо  $I_0 L \omega$  взять величину  $I_0 \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)$ . Итак, получим

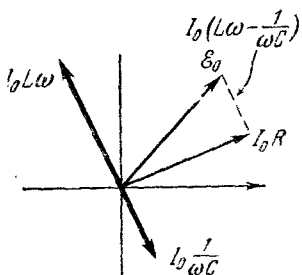


Рис. 293.

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}, \quad (105.2)$$

где полное сопротивление  $Z$  теперь уже равно

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (\text{СИ}). \quad (105.3)$$

Выражение  $\frac{1}{\omega C}$  называется *емкостным* сопротивлением, а вся скобка  $L\omega - \frac{1}{\omega C}$  — *реактивным*, в отличие от активного сопротивления  $R$ .

Сдвиг фаз  $\varphi$  между током и эдс, как видно из рис. 293, определяется выражением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (\text{СИ}). \quad (105.4)$$

Если в цепи отсутствует емкость, мы должны получить опять формулы (102.6) и (102.7). Переход к этому

\*) Ток, натекающий на пластину конденсатора, равен изменению заряда этой пластины за единицу времени:  $I = \Delta q / \Delta t$ . Те, кто знаком с дифференциальным исчислением, могут легко проверить выражение для  $q$ ; беря от него производную, получим ток.

случаю совершается, если положить  $C = \infty$ , а не  $C = 0$ . Отсутствие емкости означает, что пластины конденсатора сближены до соприкосновения (при этом  $C = \infty$ ), а не разведены на большое расстояние (при этом  $C$  было бы равно нулю).

Как видно из формулы (105.4), фаза тока может как отставать от фазы эдс (если  $L\omega > \frac{1}{\omega C}$ ), так и опережать ее (если  $L\omega < \frac{1}{\omega C}$ ).

Для мощности, выделяющейся в цепи, получаем то же выражение (102.9), но косинус сдвига фаз будет теперь уже равен

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \\ &= \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (\text{СИ}). \end{aligned} \quad (105.5)$$

Он может стать равным единице, если подобрать индуктивность и емкость цепи так, чтобы выражение в скобках обращалось в нуль. При этом амплитуда тока  $I_0 = \mathcal{E}_0/Z$  станет максимальной. Зависимость амплитуды от частоты источника эдс показана на рис. 294. При условии, что  $L\omega = \frac{1}{\omega C}$ , т. е. что частота равна

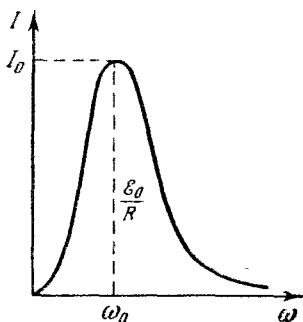


Рис. 294.

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (\text{СИ}), \quad (105.6)$$

амплитуда максимальна, и ее величина  $I_0 = \mathcal{E}_0/R$  определяется омическим сопротивлением.

В следующем параграфе мы покажем, что физическая причина резкого возрастания тока при приближении частоты источника  $\omega$  к  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  заключается в том, что контур с индуктивностью и емкостью способен к собственным электрическим колебаниям, т. е. колебаниям без источника внешней эдс. Максимум тока получается при совпадении частоты эдс  $\omega$  с частотой

собственных колебаний  $\omega_0$ . Такое совпадение называется *резонансом*.

При резонансе источник совершает наибольшую (а не наименьшую) работу. Это видно из (102.9). При резонансе достигают наибольшего значения сразу две величины в этой формуле:  $I_0$  и  $\cos \varphi$ . Последний при резонансе равен единице. Без вычислений ясно, что при резонансе ток максимален и меняется в фазе с эдс, поэтому выделяется наибольшее количество тепла.

### § 106. Колебательный контур

Если зарядить конденсатор и замкнуть его на катушку индуктивности, обладающую малым активным сопротивлением, в полученном контуре (рис. 295) появятся слабо затухающие колебания тока. При  $R = 0$  колебания будут незатухающими (если не учитывать

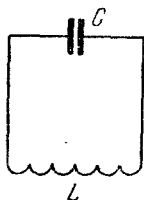


Рис. 295.

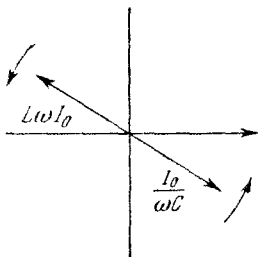


Рис. 296.

весьма слабыми потерями на излучение, см. § 111). Уравнение закона Ома для колебательного контура легко получить, полагая в уравнении (105.1)  $\mathcal{E} = 0$ ,  $R = 0$ :

$$\frac{q}{C} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad \text{или} \quad \frac{q}{C} + L \frac{\Delta I}{\Delta t} = 0.$$

Пусть сила тока меняется по закону  $I = I_0 \cos \omega t$  (угол  $\varphi$  мы можем положить равным нулю, так как никакой эдс, относительно которой существовал бы сдвиг фазы тока, в данном случае нет). Тогда, как мы упоминали в предыдущем параграфе,

$$L \frac{\Delta I}{\Delta t} = L \omega I_0 \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{и} \quad \frac{q}{C} = \frac{I_0}{C \omega} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right).$$

На векторной диаграмме получим два вектора, противоположно направленных и равных по величине (рис. 296).

Оба вектора вращаются против часовой стрелки. Их равенство означает, что  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ , т. е. что  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Такова частота собственных колебаний тока в контуре, содержащем только индуктивность и емкость. С такой же частотой колеблется и заряд конденсатора, отставая от силы тока на  $\pi/2$  (см. рис. 297 — когда ток достигает максимума, заряд еще равен нулю, т. е. отстает от тока).

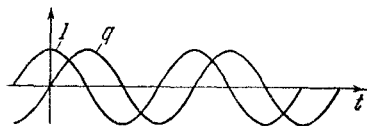


Рис. 297.

Колебания электрического тока в колебательном контуре полностью аналогичны колебаниям маятника или тела, на которое действует упругая сила. Заряженный конденсатор соответствует отведенному из положения равновесия маятнику. Потенциальная энергия маятника соответствует электрической энергии заряженного конденсатора. Последующее увеличение скорости и кинетической энергии маятника соответствует увеличению тока (равного нулю в начальный момент времени). При вертикальном мгновенном положении маятника потенциальная энергия его равна нулю — это соответствует отсутствию зарядов и поля в конденсаторе. Магнитная энергия тока в соленоиде соответствует кинетической

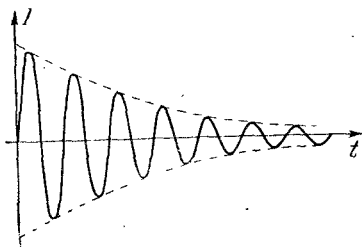


Рис. 298.

энергии маятника, за счет этой энергии ток продолжает идти в том же направлении и перезаряжает конденсатор, а маятник увеличивает потенциальную энергию, отклоняясь в обратную сторону.

В реальном колебательном контуре присутствует, разумеется, омическое сопротивление, из-за чего колебания тока в нем являются затухающими (амплитуда каждого следующего колебания меньше, чем предыдущего, см. рис. 298). Первоначально запасенная в конденсаторе энергия постепенно расходуется на выделение тепла. Время, за которое происходит

затухание, — порядка нескольких  $L/R$  (так же как в случае, рассмотренном в § 102).

Энергию, расходуемую на выделение тепла, можно восполнять, присоединив колебательный контур к какому-либо генератору. Если частота генератора совпадает с собственной частотой колебания тока в контуре, амплитуда колебаний будет максимальна. Одна из простейших конструкций генератора, «подстраивающегося» под собственную частоту контура, представлена на

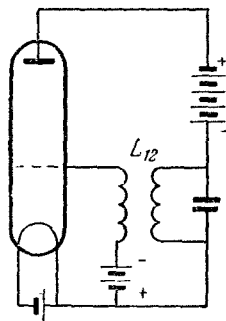


Рис. 299.

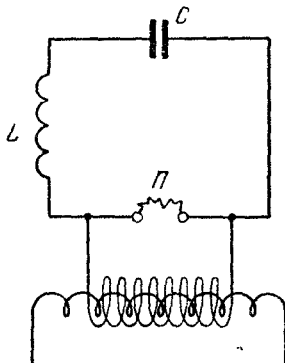


Рис. 300.

рис. 299. При соответствующем подборе взаимной индуктивности  $L_{12}$  и параметров контура анодный ток будет поддерживать колебания в контуре и они будут незатухающими.

Более примитивным и применяющимся сейчас только в лекционных демонстрациях является способ, состоящий в периодической подзарядке конденсатора с помощью индукционной катушки. Концы вторичной обмотки индукционной катушки подсоединены к разрядному промежутку  $\Pi$  (рис. 300). Конденсатор заряжается до тех пор, пока не наступит пробой воздушного промежутка. Искра закорачивает вторичную обмотку, и пока искра существует, в замкнутом ею колебательном контуре успевает совершиться много колебаний, в результате которых ток и напряжение уменьшаются, после чего искра гаснет и все начинается сначала. Такой способ подзарядки годится лишь, если частота собственных колебаний контура во много раз больше частоты тока в катушке, т. е. если  $L$  и  $C$  достаточно малы.

## § 107. Скин-эффект

Переменный ток достаточно большой частоты \*) распределен по сечению проводника неравномерно: у поверхности плотность тока  $j$  максимальна, а в глубь проводника  $j$  убывает и достигает наименьшего значения на его оси. Напряженность ведет себя так же, как ток, поскольку, в силу закона Ома, они пропорциональны друг другу:  $j = \sigma E$ . Чтобы доказать, что ток и поле убывают в глубь проводника, рассмотрим узкий контур в плоскости осевого сечения проводника (рис. 301, а).

Циркуляция напряженности электрического поля по этому контуру (т. е. эдс индукции Фарадея) отлична от нуля, так как через контур проходит переменный магнитный поток, создаваемый током, текущим по проводнику. Отсюда следует, что поле  $E_1$  не совпадает с полем  $E_2$  (иначе циркуляция равнялась бы нулю). При этом  $E_2$  могло бы быть как меньше, так и больше  $E_1$ , т. е. поле могло бы как убывать, так и возрастать в глубь проводника. Вторую возможность надо, однако, исключить, в противном случае, как можно доказать, поле на оси цилиндрического проводника было бы сколь угодно большим.

Глубину проникновения (т. е. расстояние, на котором плотность тока во много раз меньше, чем на поверхности) можно оценить следующим образом.

Рассмотрим два прямоугольных контура, плоскости которых нормальны друг к другу (рис. 301, б). Один из них,  $BCFG$ , лежит в осевом сечении, высота его  $h_1$ , а ширина равна глубине проникновения  $r_0$ . Циркуляция

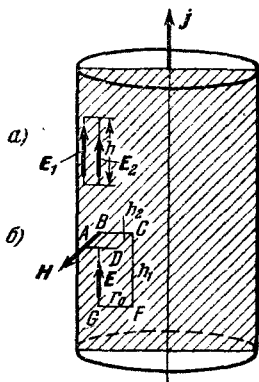


Рис. 301.

\*) Так же как в § 102, мы рассматриваем здесь квазистационарные токи, т. е. токи с частотой, значительно меньшей, чем  $c/l$ , где  $c$  — скорость электромагнитной волны, а  $l$  — размеры цепи (см. (102.1)). Если размеры цепи порядка метра, то  $c/l \sim 10^8$  гц. Частота тока порядка миллиона герц еще удовлетворяет с запасом условию квазистационарности для таких  $l$ .

напряженности  $E$  по этому контуру равна  $Eh_1$ , поскольку поле на стороне  $CF$  почти равно нулю (на двух других сторонах контура поле перпендикулярно к перемещению). По закону Фарадея эта циркуляция равна (знаки всюду опускаем, формулы пишем в более удобной здесь гауссовой системе)  $\frac{1}{c} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ . Магнитный поток через этот контур  $\Phi \sim \mu HS = \mu Hr_0 h_1$ . Если период тока равен  $T$ , то изменение потока за единицу времени ((т. е. производная по времени)  $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$  будет порядка

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \sim \frac{\Phi}{T} \sim \Phi\omega \sim \mu Hr_0 \omega h_1,$$

где  $\omega$  — частота изменения тока.

Итак, циркуляция напряженности электрического поля равна  $Eh_1 \approx \frac{1}{c} \mu Hr_0 \omega h_1$ . Сокращая на  $h_1$ , получим

$$E \approx \frac{\omega}{c} \mu r_0 H.$$

Теперь найдем циркуляцию напряженности магнитного поля  $H$  по контуру  $ABCD$ . Она равна  $H \cdot AB = H \cdot h_2$ , поскольку поле  $H$  почти равно нулю на внутренней стороне контура  $CD$ . Согласно закону полного тока (§ 80) циркуляция (в гауссовой системе) равна  $\frac{4\pi}{c} I$ , где  $I$  — полный ток, проходящий через контур, по которому берется циркуляция. В данном случае  $I \sim jh_2 r_0$  (под  $j$ ,  $I$  мы понимаем их значения у поверхности проводника). Следовательно,  $Hh_2 \sim \frac{4\pi}{c} \sigma E h_2 r_0$ , т. е.  $H \sim \frac{4\pi\sigma}{c} r_0 E$ , или  $E \sim \frac{c}{4\pi\sigma r_0} H$ . Оба соотношения между  $H$  и  $E$  должны, естественно, давать один и тот же результат, что возможно, если  $\frac{\omega}{c} \mu r_0 \sim \frac{c}{4\pi\sigma r_0}$ . Отсюда

$$r_0 \sim \frac{c}{\sqrt{4\pi\mu\sigma\omega}} \quad (\text{СГС}). \quad (107.1)$$

Проводимость хорошего металла (в гауссовой системе)  $\sigma \sim 10^{17} \text{ сек}^{-1}$ , для неферромагнитного металла  $\mu = 1$ . Поэтому при частоте  $\omega = 10^3 \text{ сек}^{-1}$  глубина проникновения  $r_0 \sim 1 \text{ см}$ ; при  $\omega = 10^7 \text{ сек}^{-1}$   $r_0 \sim 0,01 \text{ см}$ .



Это значит, что при частоте  $10^7$  гц ток течет только в тонком поверхностном слое толщиной порядка 0,01 см.

Название «скин-эффект» произошло от английского слова skin — кожа. Ток концентрируется в «кожице» проводника. Обычная формула для электрического сопротивления  $R = \rho \frac{l}{S}$  в этом случае, конечно, непригодна — это видно хотя бы из того, что в нее входит полное сечение проводника.

При больших частотах нет надобности в проводниках большого сечения: все равно ток будет идти лишь в поверхностном слое. Поверхностный слой будет при этом сильно разогреваться, в то время как остальная часть проводника (при кратковременном пропускании тока) остается холодной. На этом основан метод поверхностной закалки: раскаленную с поверхности стальную деталь, например зубчатое колесо, закаляют, погружая в масло. Внутренние области остаются незакаленными, т. е. вязкими, и вся деталь оказывается стойкой как по отношению к износу поверхности, так и по отношению к ударам.

Существование скин-эффекта означает, что электромагнитная волна, попадающая на поверхность проводника (металла, электролита или плазмы), быстро затухает в глубь проводника, проникая лишь на глубину (107.1), называемую толщиной скин-слоя.

## ГЛАВА X

### ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

#### § 108. Излучение движущегося заряда

Электрический заряд, движущийся в пустоте равномерно (относительно инерциальной системы отсчета), не излучает. Это очевидно из принципа относительности, заключающегося в том, что все инерциальные системы отсчета равноправны. В системе, движущейся вместе с зарядом, он неподвижен, а неподвижные заряды не излучают. Поле заряда (электростатическое в его собственной системе и электромагнитное во всех других) движется вместе с ним.

Иная картина возникает в том случае, когда заряд под действием внешних сил движется с ускорением. Поле, обладающее энергией, а значит массой и инертностью, образно говоря, отрывается от заряда и излучается в пространство со скоростью света. Излучение происходит до тех пор, пока на заряд действует внешняя сила, сообщающая ему ускорение.

В электродинамике доказывается, что энергия, излучаемая движущимся зарядом  $e$  за секунду (т. е. мощность излучения), равна

$$N = \frac{2e^2 a^2}{3c^3} \quad (\text{СГС}), \quad (108.1)$$

где  $a$  — ускорение заряда. Потеря энергии зарядом вследствие излучения означает, что на него со стороны испускаемых им электромагнитных волн действует тормозящая сила (сила радиационного торможения). Работа против этой силы идет целиком на излучение, следовательно, ее мощность определяется формулой (108.1).

Движение с ускорением является нестационарным (неустановившимся). Как мы уже отмечали в § 48, движение электрона в атоме на стационарных орбитах нельзя назвать ускоренным движением заряженной частицы. Согласно квантовомеханическим представлениям электрон в атоме не совершает классического ускоренного движения по замкнутой орбите\*), так что нет никакого противоречия между утверждением электродинамики об излучении ускоренно движущегося заряда и отсутствием излучения электрона на стационарной орбите в атоме. Переходы электрона с орбиты на орбиту, напротив, сопровождаются излучением.

Аналогично обстоит дело с электроном, движущимся по круговой орбите в магнитном поле. Он излучает, переходя с одной из множества дозволённых орбит на другую, имеющую меньший радиус. Соответственно уменьшается скорость и кинетическая энергия электрона. Излучение электрона в магнитном поле может быть получено из формулы (108.1), если в нее подставить  $a = v^2/r$ , где  $r = mv^2/eH$  (СГС) (см. § 82). Поскольку радиус орбиты макроскопически велик, дозволённых орбит так много, что движение с переходом с орбиты на орбиту можно рассматривать как классическое движение с непрерывным (весьма медленным) уменьшением радиуса.

Подставляя в (108.1) ускорение электрона на круговой магнитной орбите, получим

$$N = \frac{2e^4 H^2 v^2}{3m^2 c^5}.$$

Поделив  $N$  на кинетическую энергию электрона  $mv^2/2$  и умножая на период обращения электрона  $T = 2\pi mc/eH$  (§ 82), получим величину

$$\frac{8\pi}{3} \frac{e^3 H}{m^2 c^4},$$

представляющую собой относительное изменение кинетической энергии электрона за один оборот. При  $H = 10^3$  э она равна  $10^{-12}$ , так что уменьшение энергии происходит действительно очень медленно.

\*) Хотя такая терминология и является общепринятой. Под данной «орбитой» понимается в физике просто данное состояние из числа допустимых состояний электрона в атоме.

Другой пример представляет так называемое бета-тронное (или синхронное) излучение. В этих приборах заряженные частицы движутся по круговым орбитам. При энергиях порядка десятков *Мэв* ( $10^7$  эв) электроны излучают видимый свет, при еще больших энергиях (порядка  $10^9$  эв) — рентгеновские лучи. Однако при таких энергиях частицы движутся со скоростью, близкой к скорости света, поэтому нельзя вычислять частоту излучения просто как частоту вращения частицы. Для вычисления частоты излучения необходимо пользоваться формулами теории относительности (т. е. учитывать релятивистские эффекты).

Наиболее важным для приложений является излучение заряда, совершающего гармоническое колебательное движение, которое мы рассмотрим в § 110.

### § 109. Эффект Черенкова — Вавилова

В 1934 г. П. А. Черенков в лаборатории академика Вавилова заметил, что быстрые электроны, движущиеся через прозрачную жидкость, излучают слабый видимый (в опытах Черенкова — синий) свет. Исследование этого явления показало, что излучение не имеет ничего общего с тормозным. Оно возникает *лишь в случае, если скорость электрона  $v$  больше скорости света в данной среде*. Как известно, скорость света \*) в среде равна  $c/n$ , где  $n$  — показатель преломления. Если показатель преломления равен, например, 1,5, то фазовая скорость составляет не  $3 \cdot 10^5$ , а только  $2 \cdot 10^5$  км/сек. Быстрые электроны могут иметь большую скорость.

Итак, излучение возникает, если

$$v > \frac{c}{n}. \quad (109.1)$$

Характерной особенностью черенковского излучения является его направленность — свет излучается в направлении, образующем со скоростью электрона вполне определенный угол. Пусть электрон в точке  $A_1$  (рис. 302) испускает сферическую волну, которая достигает радиуса  $A_1C_1$  к тому моменту, когда электрон оказывается в точке  $A_2$ . Тогда, очевидно, волна, испущенная электро-

\*) Так называемая фазовая скорость.

ном из точки  $A_2$ , лежащей посередине между  $A_1$  и  $A_3$ , достигнет к тому же моменту (когда электрон окажется в  $A_3$ ) половинного радиуса  $A_2C_2$ . На плоскости все такие окружности будут иметь общими огибающими прямые  $C_1A_3$  и  $B_1A_3$ , в пространстве все сферические волны огибаются конусом, имеющим вершину в точке  $A_3$ . Этот конус представляет собой фронт излученной волны\*). Волна распространяется в направлении, перпендикулярном к фронту, т. е. в направлениях  $A_1C_1$ ,  $A_2C_2$  и т. д. Направление излучения составляет угол  $\theta$  со скоростью электрона. Из рисунка ясно,

что  $\cos \theta = \frac{A_1C_1}{A_1A_3}$ , но отрезки  $A_1C_1$  и  $A_1A_3$  относятся как скорость волны  $c/n$  к скорости электрона  $v$ . Следовательно, свет будет излучаться под углом  $\theta$  к направлению скорости, где  $\theta$  определяется соотношением

$$\cos \theta = \frac{c}{nv}. \quad (109.2)$$

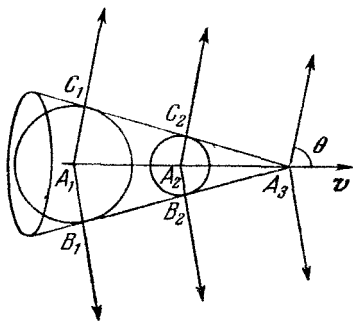


Рис. 302.

Интенсивность излучения зависит лишь от свойств среды, скорости и заряда частицы, но не зависит от ее массы, в отличие от тормозного излучения. Поэтому протон, имеющий такую же скорость, как электрон, будет излучать точно так же. Однако, ввиду большой массы протона, для этого потребуется сообщить ему энергию порядка 100 миллионов эв, в то время как электрону достаточно относительно небольшой энергии порядка сотен тысяч электроновольт.

Строго говоря, черенковское излучение является не излучением самого электрона, а излучением среды, возникающим под влиянием поля движущегося электрона.

Световая вспышка, вызываемая пролетом частицы, может быть усилена и зарегистрирована с помощью фотоумножителя. На этом основаны так называемые черенковские счетчики частиц, широко применяемые в

\*) По поводу понятия фронта волны см. сноску в § 112 (стр. 377).

ядерной физике. Эти счетчики позволяют определить не только число частиц, но и измерить ряд их параметров. Например, по углу излучения можно весьма точно определить скорость частицы.

### § 110. Излучение колеблющегося диполя

В излучающих радиотехнических устройствах, например антеннах, электроны колеблются относительно ионов вещества — металла, плазмы, электролита. Элементарным осциллятором (т. е. элементарной колебательной системой) является система, состоящая из электрона и равного ему по величине положительного заряда, который можно считать неподвижным. Излучение всей антенны складывается из излучений таких элементарных осцилляторов.

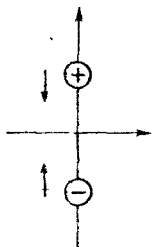


Рис. 303.

Рассмотрим излучение осциллятора (рис. 303), представляющего собой диполь, дипольный момент которого гармонически (т. е. синусоидально) меняется со временем. При этом безразлично, движется ли один только отрицательный заряд или колеблются оба так, что их центр тяжести остается на месте.

Если дипольный момент  $p$  меняется по гармоническому закону  $p = p_0 \sin \omega t$ , то и создаваемые им электрическое и магнитное поля будут меняться с той же частотой  $\omega$ . Гармонически колеблющийся диполь будет, следовательно, излучать монохроматическую волну, т. е. волну определенной частоты. Длина волны  $\lambda$  определяется через частоту колебаний диполя:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega}.$$

Пусть в момент  $t = 0$  колеблющиеся заряды (рис. 303) проходят через начало координат, т. е. совпадают. На рис. 304—308 показаны линии напряженности электрического поля, создаваемого колеблющимся диполем в различные моменты времени. Магнитное поле на этих рисунках не показано (за исключением одной силовой линии на рис. 308). Сам диполь очень мал и находится в центре пустого кружочка. Электрическое

и магнитное поля создаются: 1) зарядами диполя (поле  $E$ ) и током, вызванным их движением (поле  $H$ ); 2) путем взаимного индуктирования  $E$  и  $H$ . На расстояниях от диполя порядка длины волны  $\lambda$  (которые как

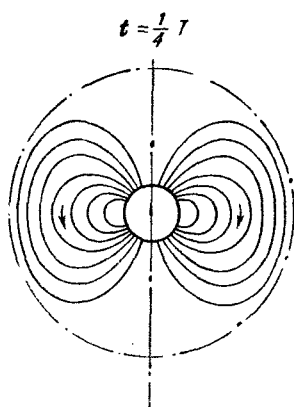


Рис. 304.

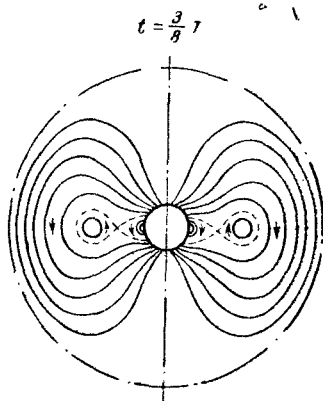


Рис. 305.

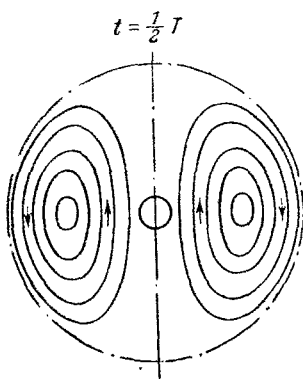


Рис. 306.

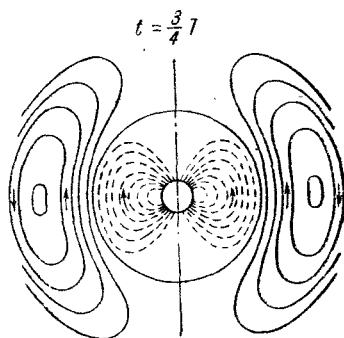


Рис. 307.

раз и изображены на рисунках) поля первого и второго типов — одного порядка величины. Поэтому нельзя считать, например, что на рис. 304 и 305 изображено статическое электрическое поле диполя. Это поле создано как зарядами, так и переменным магнитным полем.

К моменту  $t = \frac{1}{4} T$  ( $T$  — период колебаний) положительный заряд будет находиться в верхней, а отрицательный — в нижней крайней точке. Электрическое поле диполя в этот момент времени показано на рис. 304. Далее заряды начинают сближаться (рис. 305) и в момент  $t = \frac{1}{2} T$  опять совпадают (рис. 306). Линии электрического поля при этом замыкаются и «отшнуровываются» от диполя.

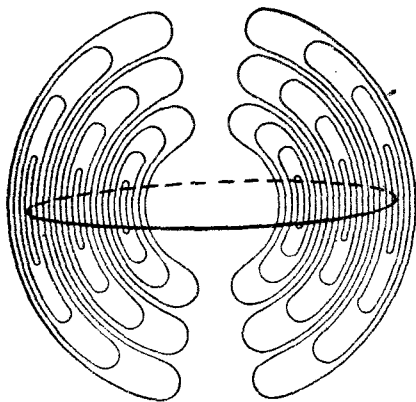


Рис. 308.

Следует обратить внимание на то, что статическое поле зарядов диполя при совпадении этих зарядов обратилось бы в нуль!

Отшнуровавшееся (электромагнитное, а не электрическое) поле распространяется со скоростью света. К моменту  $t = \frac{3}{4} T$  поле удаляется от диполя, а вблизи диполя создается новое поле, той же конфигурации, что в

момент  $t = \frac{1}{4} T$ , но обратного направления (рис. 307). В момент  $t = T$  и это поле отшнуровывается, и т. д. Через несколько периодов излученное поле имеет вид, изображенный на рис. 308. Магнитные силовые линии представляют собой окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к оси диполя. Одна из них показана на рис. 308.

Излучение диполя, как явствует из этой картины, сосредоточено в основном в плоскости, перпендикулярной к его оси. Распределение интенсивности\*) по углам (так называемая диаграмма направленности) показано на рис. 309. Закон распределения интенсивности очень

\*) Интенсивностью излучения называется количество энергии, проходящее за 1 сек через единичную площадку, перпендикулярную к направлению распространения.



прост:  $I = I_0 \sin^2 \theta$ , где  $\theta$  — угол между направлением, в котором мы ищем интенсивность излучения, и направлением ускорения зарядов, т. е. направлением диполя. Вдоль направления диполя излучения нет. Тот же закон распределения интенсивности относится и к одному ускоренно движущемуся заряду. В направлении своего ускорения заряд не излучает.

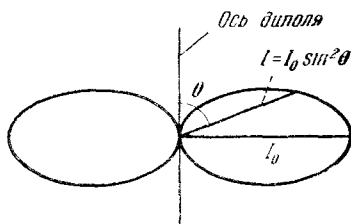


Рис. 309.

На рис. 304—308 изображено поле на расстояниях  $r$  от диполя порядка  $\lambda$ . На расстояниях  $r$ , малых по сравнению с  $\lambda$ , преобладают поля первого типа, т. е. статические: электрическое поле  $E$  почти совпадает со статическим полем диполя, имеющего дипольный момент  $p = ql$ , равный мгновенному значению колеблющегося момента. Это поле, как мы выяснили в § 24, убывает обратно пропорционально кубу расстояния  $r$  от диполя. Магнитное поле совпадает с полем элемента тока длины  $l$ , оно определяется законом Био и Савара (§ 80) и убывает как  $1/r^2$ .

На расстояниях  $r$ , во много раз превышающих длину волны  $\lambda$  (эта область расстояний называется волновой зоной), поля  $E$  и  $H$  ведут себя совершенно иначе. Источники  $E$  — заряды диполя — находятся далеко, и поэтому потенциальная часть поля  $E$ , создаваемая источниками, в волновой зоне очень мала. Поле здесь создается вихрями — переменным магнитным полем, а магнитное поле создается переменным электрическим. Имеет место

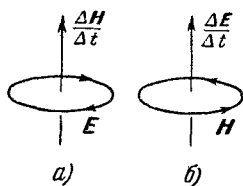


Рис. 310.

взаимное индуктирование электрического и магнитного полей; каждое из полей является вихрем другого (рис. 310). Оба поля убывают как  $1/r$  (см. § 112).

На рис. 310, а показано образование вихревого поля  $E$  переменным  $H$ , т. е. закон электромагнитной индукции Фарадея. На рис. 310, б — образование поля  $H$

переменным  $E$  (магнитное поле тока смещения, или закон магнитоэлектрической индукции Максвелла). Эти поля уже не связаны с создавшими их зарядами и токами и распространяются в пространстве со скоростью света  $c$ , перенося с собой энергию.

Мощность излучения, т. е. энергию, излучаемую диполем за секунду, легко получить из формулы (108.1). В нее надо подставить ускорение гармонического колебательного движения (напомним, что один из зарядов можно считать неподвижным). Дифференцируя уравнение гармонических колебаний  $x = l_0 \sin \omega t$  дважды, найдем ускорение  $a = -\omega^2 l_0 \sin \omega t$ . Его квадрат равен  $a^2 = \omega^4 l_0^2 \sin^2 \omega t$ . Как известно,  $\sin^2 \omega t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega t$ . Второй член,  $\cos 2\omega t$ , меняет знак каждые четверть периода и его среднее значение за период (обозначим среднее значение черточкой сверху) равно нулю, поэтому среднее значение  $\overline{\sin^2 \omega t} = \frac{1}{2}$ . Следовательно, среднее значение  $\overline{a^2}$  квадрата ускорения есть  $\overline{a^2} = \frac{1}{2} \omega^4 l_0^2$ . Из формулы (108.1) получим среднюю мощность излучения колеблющегося диполя:

$$\overline{N} = \frac{p_0^2 \omega^4}{3c^3}, \quad (110.1)$$

где  $p_0 = el_0$  — максимальный момент колеблющегося диполя ( $l_0$  — амплитуда колебаний). Заметим, что излучаемая мощность весьма быстро растет с частотой: увеличение частоты колебаний вдвое увеличивает мощность в 16 раз.

### § 111. Излучение вибратора и антенны

Любая цепь, в которой течет переменный ток, в том числе обычный колебательный контур, излучает электромагнитные волны. Переменный ток создает переменное магнитное поле, последнее создает переменное электрическое, и т. д. Однако, чтобы сделать излучение интенсивным, нужно создать специальный излучающий контур. Можно было бы думать, что он должен иметь сложную конструкцию, но в действительности он оказывается неожиданно простым.

Существуют две причины, по которым обычный колебательный контур (рис. 311, а) излучает крайне слабо. Первая из них — недостаточно высокая частота (интенсивность излучения пропорциональна четвертой степени частоты, см. (110.1)). Вторая заключается в том, что при относительно небольших частотах цепь тока квазистационарна, а это значит, что ток на участках  $BC$  и  $AD$  (или  $AB$  и  $CD$ ) течет в каждый данный момент в противоположных направлениях, отчего и излучаемые этими участками волны находятся в противофазе и гасят друг

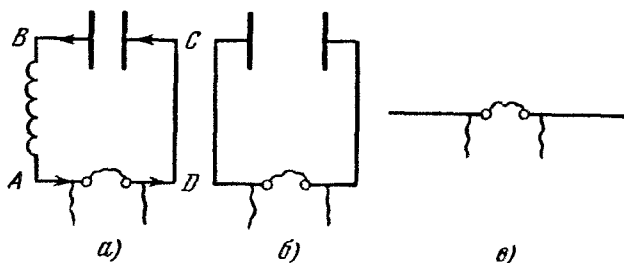


Рис. 311

друга (при малой частоте длина волны велика, поэтому излучаемые волны исходят как бы из одной точки, а фазы их противоположны). Эти соображения показывают, что пока цепь тока квазистационарна, излучения практически не будет.

Чтобы сделать цепь существенно неквазистационарной, надо повысить частоту. Если судить по формуле  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , то для этого надо уменьшать  $L$  и  $C$ . Хотя в действительности смысл величин  $L$  и  $C$  определен лишь для квазистационарных цепей\*), однако удаление катушки индуктивности (рис. 311, б) и пластин конденсатора (рис. 311, в) приводят к резкому увеличению частоты. Полученный излучатель, называемый *вибратором Герца*, представляет собой просто отрезок проводника

\*) Например, емкость равна отношению заряда к разности потенциалов, а понятие потенциала теряет смысл в вихревом электрическом поле и должно быть заменено понятием линейного интеграла от напряженности, причем последний будет зависеть от формы пути (§ 97).

(с разрядным промежутком, если его питать от индукционной катушки, см. § 104).

В таком своеобразном колебательном «контуре» ток уже не может быть во всех сечениях одинаковым — на концах проводника ток проводимости должен обращаться в нуль. Хотя бы поэтому ток в вибраторе Герца не может иметь квазистационарного характера. В обычном колебательном контуре ток тоже оканчивается на пластинах конденсатора, но во всем остальном проводнике постоянен во всех сечениях. Между пластинами конденсатора ток проводимости замыкается током смещения (§ 58). Ток в вибраторе тоже замыкается током смещения, только последний не локализован в каком-либо узком зазоре, а распределен в пространстве вокруг вибратора.

Элементарный осциллятор (диполь), рассмотренный в предыдущем параграфе, колебался с частотой, навязанной ему внешней вынуждающей силой. Иначе обстоит дело с вибратором. Электроны в проводе вибратора совершают колебания под действием сил электромагнитного поля, которое они сами же и вызывают. Такие колебания называются *собственными*.

Частота собственных колебаний обусловлена, выражаясь языком механики, инертностью и упругостью системы. Например, движение электронов по вибратору направо вызовет появление объемного заряда: слева — положительного, справа — отрицательного. Возникнут электрические силы, возвращающие электроны налево, подобные упругим силам в механике.

Рассмотрим с этой точки зрения простейший (но не единственно возможный) тип колебаний тока, представляющий собой стоячую волну, имеющую узлы на концах провода (т. е. в точках  $x = \pm l/2$ ):

$$I = I_0 \sin \omega t \cdot \cos \frac{\pi x}{l}. \quad (111.1)$$

На рис. 312 слева показано распределение тока в вибраторе в различные моменты времени, а справа — распределение в нем объемного заряда  $\rho$ . Ток  $I$ , направленный вправо, считается положительным и на графике откладывается вверх.

За начальный момент времени ( $t = 0$ ) принят момент, когда объемный заряд на концах вибратора и

энергия электрического поля максимальны, а ток и энергия его магнитного поля равны нулю. В следующий момент заряд рассасывается, начинает идти ток, растет магнитная и уменьшается электрическая энергия. По

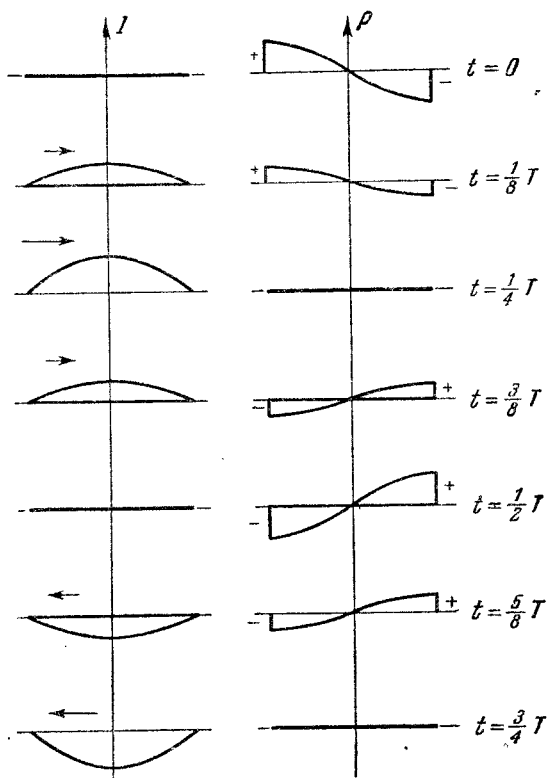


Рис. 312.

рисункам легко проследить, как происходит процесс колебаний. Попеременное сосредоточение в определенные моменты положительного и отрицательного заряда на концах вибратора делает вибратор очень похожим на колеблющийся диполь предыдущего параграфа. Иногда вибратор тоже называют поэтому диполем. Различие между ними в том, что у вибратора заряд распределен

непрерывно по его длине (хотя и не с одинаковой плотностью), а у диполя — в точках.

Помимо волны типа (111.1), в вибраторе будут существовать еще волны с длиной волны вдвое, втрое меньшей и т. д. (рис. 313). Обычно наибольшей интенсивностью, однако, обладает волна типа (111.1).

Распределению тока (111.1) соответствует такое же волнообразное распределение магнитного и электрического полей. В соответствии с этим вибратор будет излучать электромагнитные волны с длиной волны, равной

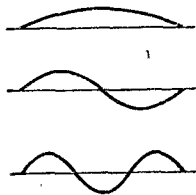


Рис. 313.

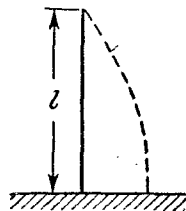


Рис. 314.

$2l$  (основной тон),  $l, \frac{2}{3}l, \dots$  (обертоны). Частота, соответствующая основному тону, легко находится из соотношения  $\omega = 2\pi c/\lambda$ . Поскольку  $\lambda = 2l$ , получаем

$$\omega = \frac{\pi c}{l}. \quad (111.2)$$

Таким образом, частота собственных колебаний вибратора определяется его длиной.

Диаграмма направленности вибратора такая же, как у элементарного диполя, рассмотренного в предыдущем параграфе.

Антенна, изобретенная А. С. Поповым, представляет собой заземленный вибратор. Распределение тока в ней показано на рис. 314. Следовательно, длина волны, на которую настроена такая антенна,  $\lambda = 4l$  (это — основной тон; помимо этого антенна излучает и воспринимает еще обертоны). Если антенну присоединить к генератору, в ней возникнут вынужденные колебания. Максимальное излучение достигается при настройке на частоту колебаний генератора. Для настройки к антенне можно подключать индуктивности и емкости.

## § 112. Электромагнитные волны в пустоте и в диэлектрике

На большом расстоянии от вибратора (или диполя) излученная им волна является сферической, т. е. ее фронтом \*) является сфера (рис. 315). Фаза колебаний векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  на всей поверхности одна и та же. Это, конечно, не означает, что одинакова и амплитуда. Амплитуды  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  пропорциональны  $\sin \theta$  (см. рис. 315), наибольшей величины они достигают в направлении, нормальном к вибратору.

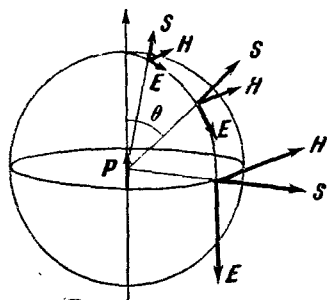


Рис. 315.

Векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  перпендикулярны друг к другу и к направлению распространения. Если зафиксировать точку на некотором расстоянии от диполя, то напряженности  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  в этой точке будут колебаться синхронно (т. е. в одной и той же фазе, с частотой, равной частоте колебаний диполя). Мимо данной точки как бы проходят две синусоиды (рис. 316).

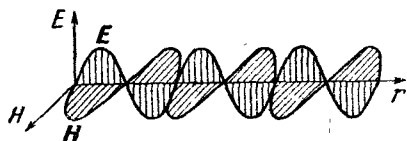


Рис. 316.

Поскольку  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  колеблются в направлении, перпендикулярном к направлению распространения, электромагнитная волна в пустоте (и диэлектрике) является поперечной волной. Если колебания вектора  $\mathbf{E}$  в данной точке происходят все время вдоль одной и той же линии, как это и имеет место в рассматриваемом случае, волна называется линейно (или плоско) поляризованной.

\*) Фронтом волны называется геометрическое место точек волны, находящихся в данный момент в одинаковой фазе колебательного движения. Камень, брошенный в воду, создает волны, фронт которых — окружность (круговой гребень является одним из фронтов). Заметим, что понятие фронта имеет смысл не всегда: при беспорядочном волнении на поверхности воды не имеет смысла говорить о фазе колебаний, а следовательно и о фронте.

В волновой зоне, т. е. далеко от вибратора,  $E$  и  $H$  убывают при удалении от излучателя обратно пропорционально первой степени расстояния. В § 61 уже упоминалось, что энергия, переносимая электромагнитной волной за 1 сек через единичную нормальную к направлению переноса площадку\*), определяется вектором Пойнтинга—Умова:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (\text{СГС}).$$

В волновой зоне напряженность  $E$  перпендикулярна к  $H$ , так что по модулю вектор Пойнтинга—Умова  $S$  равен

$$S = \frac{c}{4\pi} EH \quad (\text{СГС}). \quad (112.1)$$

Оба вектора,  $E$  и  $H$ , убывают как  $1/r$ , поэтому  $S$  убывает как  $1/r^2$ . Следовательно, полный поток энергии через поверхность сферы, окружающей излучатель, равный произведению  $4\pi r^2 S$ , не зависит от радиуса сферы. Так, разумеется, и должно быть: поток энергии через любую замкнутую поверхность, окружающую излучатель, должен быть одним и тем же.

В электромагнитной волне, распространяющейся в пустоте, как можно доказать,  $E = H$  (обе величины в системе СГС имеют одну и ту же размерность:  $g^{1/2} \text{см}^{-1/2} \text{сек}^{-1}$ ), а скорость волны не зависит от частоты и равна скорости света  $c$ . Электромагнитная волна в прозрачной диэлектрической среде отличается от волны в пустоте главным образом тем, что для нее выполняется более общее соотношение:

$$\sqrt{\epsilon} E = \sqrt{\mu} H \quad (\text{СГС}), \quad (112.2)$$

а скорость ее равна

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (112.3)$$

Показатель преломления света в веществе (имеется в виду прозрачная диэлектрическая среда) определяется как

$$n = \frac{c}{v}. \quad (112.4)$$

---

\*) То же, что интенсивность излучения, см. примечание к стр. 370.



Из (112.3) следует, что  $n$  выражается через диэлектрическую и магнитную проницаемость среды:

$$n = \sqrt{\epsilon \mu}. \quad (112.5)$$

Это весьма важный результат, полученный Максвеллом. У большинства диэлектриков  $\mu$  очень мало отличается от единицы, так что

$$n = \sqrt{\epsilon}. \quad (112.6)$$

**Дисперсия электромагнитных волн в прозрачной среде.** Как явствует из § 37, диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  связана с дипольным моментом единицы объема  $P$  следующим образом:

$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi P}{E} \quad (\text{СГС}). \quad (112.7)$$

В *переменном* (а не статическом!) электрическом поле дипольные моменты всех молекул среды (а значит и дипольный момент единицы объема  $P$ , равный произведению числа молекул в единице объема на средний дипольный момент одной молекулы) будут совершать вынужденные колебания. Амплитуда и фаза этих колебаний будут зависеть от частоты электромагнитной волны (главным образом от того, насколько отличается частота волн  $\omega$  от частоты собственных колебаний  $\omega_0$  элементарных диполей). Поэтому и диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  будет зависеть от частоты, и  $\epsilon$  при разных частотах может сильно отличаться от своего *статического* значения. Таким образом, неправильно было бы вычислять  $n$  по формуле (112.6), подставляя туда  $\epsilon$ , полученное для статического поля (т. е. то  $\epsilon$ , которое мы использовали в электростатике).

Соответственно этому, показатель преломления  $n = \sqrt{\epsilon}$  и скорость волны  $v = c/n$  также будут зависеть от частоты. Эта зависимость носит название *дисперсии*.

В пустоте, где  $\epsilon = 1$ , дисперсии нет, все электромагнитные волны имеют одинаковую скорость, равную  $c$ , независимо от их частоты. В стекле (и других прозрачных диэлектрических средах) каждой частоте будет соответствовать свой показатель преломления. Этим объясняется разложение света в спектр стеклянной призмой.

В непрозрачной среде волна не распространяется на сколько-нибудь значительные расстояния — она поглощается. Это происходит тогда, когда частота волны совпадает с собственной частотой колебаний элементарных осцилляторов (например молекул-диполей). Энергия волны при поглощении превращается в тепло. Среда может быть непрозрачной для одной частоты и прозрачной для другой — далекой от резонансной (т. е. от собственной частоты колебаний молекул вещества). Так, например, обычное стекло прозрачно для видимого света и непрозрачно для ультрафиолетовых лучей (для так называемого ближнего ультрафиолета, примыкающего к видимому свету), а также для инфракрасного света.

### § 113. Электромагнитные волны вдоль проводов и в волноводах

Проводящая среда, например металл, сильно поглощает электромагнитные волны. Особенно большую роль в этом поглощении играют электроны проводимости. Однако электромагнитные волны могут распространяться в пустоте или диэлектрической среде, окружающей металлические проводники, причем проводники будут играть роль направляющих.

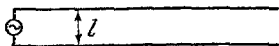


Рис. 317.

Рассмотрим длинную двухпроводную линию, питаемую от генератора переменного тока (рис. 317). Такая линия может быть предназначена для телеграфирования. Под длинной линией мы понимаем длину, длина которой велика по сравнению с длиной волны  $\lambda$ .

Генератор посылает вдоль линии порции электронов. Правда, при больших частотах, которые нас интересуют, электроны успевают лишь немного сдвинуться и затем возвращаются обратно. Тем не менее такое волнообразное движение заряда в проводнике создает волну тока, а вместе с ней волны напряженностей  $H$  и  $E$ .

Линия может и не быть замкнутой, и все равно по ней будет идти ток. Это не должно вызывать удивления — ведь быстро переменный ток может течь даже и в вибраторе (§ 111), который, если можно так выразиться, еще в меньшей степени замкнут, чем двухпроводная линия. Ток проводимости замыкается током сме-

щения, который существует всюду, где есть переменное электрическое поле, т. е. вдоль линии.

Наиболее прост случай, когда провода обладают очень малым омическим сопротивлением. Как отмечалось в § 61, при исчезающе малом сопротивлении вектор напряженности электрического поля  $E$  перпендикулярен к поверхности проводов, вектор Пойнтинга—Умова параллелен проводам, т. е. энергия распространяется вдоль линии. Внутри проводов поле отсутствует благодаря скин-эффекту (при бесконечно большой проводимости глубина проникновения равна нулю). Провода играют, таким образом, роль направляющих, волна же распространяется в диэлектрике или вакууме, окружающем провода. Скорость распространения волны равна скорости света в этом диэлектрике.

Мгновенная картина распределения электрического поля  $E$  между проводами, обладающими очень малым сопротивлением (когда составляющая напряженности вдоль проводов  $E$  практически равна нулю), показана на рис. 318. Длина волны (расстояние между соседними максимумами, в которых поле направлено одинаково, или вообще между любыми двумя точками, находящимися в одинаковой фазе) равна  $c/\nu$ , где  $\nu$  — частота генератора.

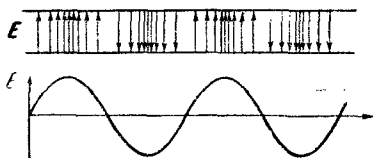


Рис. 318.

Магнитное поле  $H$  и электрический ток распределены вдоль провода так же, как  $E$ . В бегущей волне (в отличие от стоячей волны в вибраторе) максимумы и минимумы всех этих величин в каждый момент времени совпадают, т. е. все они колеблются в одной и той же фазе.

При малом сопротивлении проводов линия должна быть очень длинной для того, чтобы ток и поле успели затухнуть до ее конца. Если длина линии не столь велика, волна будет отражаться от ее конца и, следовательно, на линии образуется стоячая волна\*).

\*) Можно значительно уменьшить интенсивность отраженной волны, подбирая соответствующие параметры приемного устройства, включенного в конце линии.

Распределение поля между проводами в этом случае показано на рис. 319. Это распределение можно наглядно продемонстрировать, протягивая провода линии внутри длинной стеклянной трубки, заполненной неонам.

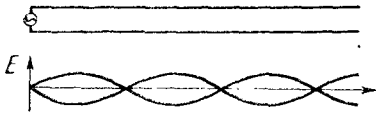


Рис. 319.



Рис. 320.

Максимумы и минимумы свечения газа будут соответствовать пучностям и узлам стоячей волны (рис. 320).

Двухпроводная линия передачи не должна сколько-нибудь сильно излучать в окружающее пространство. Для этого (см. § 111) расстояние между проводами должно

быть во много раз меньше длины волны. Следовательно, частота не должна быть слишком большой, в противном случае линия передачи будет действовать как антенна.

**Волноводы.** Для передачи электромагнитных волн высокой частоты, т. е. малой длины волны, применяются так называемые волноводы — полые металлические трубы с высокой проводимостью стенок. Как мы выясним ниже, в волноводе возможно распространение лишь коротких волн, с длиной волны порядка или меньше поперечных размеров полости трубы.

Если проводимость стенок очень высока, то, как мы видели в § 61, составляющая напряженности  $E_t$ , касательная к поверхности стенок, почти равна нулю. В этом случае вектор Пойнтинга—Умова направлен параллельно стенкам (составляющая  $S_z$ , см. § 61), и, значит, энергия переносится вдоль трубы и не поглощается стенками.

Разумеется, при распространении электромагнитной волны в полости волновода происходит непрерывное отражение волны от стенок — именно поэтому волна и движется вдоль трубы. Поэтому электромагнитная волна должна иметь своеобразный характер: в направлениях  $x$  и  $y$  она должна быть стоячей, а в направлении  $z$  — бегущей (рис. 321).

На вибраторе Герца, как мы видели в § 111, может существовать ряд стоячих волн — с длиной волны, рав-

ной удвоенной длине вибратора  $2l$ , равной  $l$ ,  $\frac{2}{3}l$  и т. д. Аналогично этому, в волноводе также возможно существование различных стоячих волн, как говорят — различных мод. Наибольшая возможная длина волны в волноводе с прямоугольным сечением (рис. 321)  $\lambda_{\max} = 2b$  (считаем, что  $b > a$ ). Большие длины волн, т. е. частоты меньше чем  $\nu_{\min} = c/2b$ , волновод не пропускает. Такие волны экспоненциально, т. е. по закону  $e^{-\nu z}$ , затухают в глубь волновода. Причина затухания в данном случае не в поглощении энергии. Заряды и токи вибратора, находящегося у входа в волновод, создают в его проводящих стенках наведенные заряды и токи, поля которых, по принципу суперпозиции, складываются с излученной волной. В случае, когда длина волны излучателя слишком велика, поля стенок волновода находятся в противофазе с полем входящей волны. Результирующее (суммарное) поле затухает на расстоянии порядка длины волны, и таким образом волна не проникает сколько-нибудь глубоко в волновод. Если же длина волны достаточно мала, фазы излученных стенками вторичных волн иные, именно, они таковы, что происходит не затухание, а распространение волны вдоль волновода.

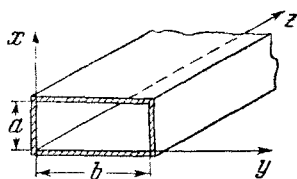


Рис. 321.

### § 114. Уравнения Максвелла

В этой книге мы постоянно пользовались уравнениями Максвелла — сначала эквивалентной этим уравнениям таблицей источников и вихрей (стр. 62), а затем и самими уравнениями. Выпишем их.

	В системе СГС	В системе СИ
I	$\oint D_n dS = 4\pi \sum q_{\text{своб}}$	$\oint D_n dS = \sum q_{\text{своб}}$
II	$\oint B_n dS = 0;$	$\oint B_n dS = 0;$
III	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt};$	$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt};$
IV	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \sum I + \frac{1}{c} \frac{dN}{dt};$	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum I + \frac{dN}{dt}.$

(114.1)

Уравнения I и II определяют потоки векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  через замкнутую поверхность (теорема Остроградского — Гаусса для векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$ ). Потоки выражаются через источники векторов, содержащиеся внутри замкнутых поверхностей. Уравнения III и IV определяют циркуляцию векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  ( $\Phi = \int B_n dS$ ;  $N = \int D_n dS$ ). Третье уравнение — закон электромагнитной индукции Фарадея. Последнее, четвертое уравнение означает, что вихрями вектора  $\mathbf{H}$  служат макроток и ток смещения (плотность его выражается формулой (58.1)).

Система (114.1) определяет источники векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{B}$  и вихри векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Чтобы определить источники и вихри всех четырех векторов, надо задать уравнения связи между ними, например в форме

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{СГС}). \quad (114.2)$$

Напомним, что оба уравнения справедливы в изотропных средах, а второе — в неферромагнитных (или в ферромагнетиках с очень узкой петлей гистерезиса).

Более общей, чем (114.2), связью является следующая:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P} \quad (\text{СГС}); & \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (\text{СИ}); \\ \mathbf{B} &= \mathbf{H} + 4\pi \mathbf{M} \quad (\text{СГС}); & \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (\text{СИ}). \end{aligned} \quad (114.3)$$

Однако здесь необходимо еще указать, как зависят векторы поляризации  $\mathbf{P}$  и намагниченности  $\mathbf{M}$  от внешних полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Если, в частности, они пропорциональны этим полям, получаются опять формулы (114.2).