

А. ЗОММЕРФЕЛЬД

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ  
ФИЗИКИ**

## С о д е р ж а н и е

Предисловие редактора перевода	5
Из предисловия к первому изданию	7
Предисловие ко второму изданию	9
Глава I. Ряды и интегралы Фурье	11
§ 1. Ряды Фурье	12
§ 2. Пример разрывной функции. Эффект Гиббса и неравномерная сходимость	19
§ 3. К вопросу о сходимости рядов Фурье	28
§ 4. Переход к интегралу Фурье	32
§ 5. Разложение по шаровым функциям	37
§ 6. Обобщения: осциллирующие и оскулирующие аппроксимации, ангармонический анализ Фурье. Пример неокончательного определения коэффициентов	43
Глава II. Общие сведения об уравнениях в частных производных	51
§ 7. Простейшие уравнения в частных производных	51
§ 8. Уравнения эллиптического, гиперболического и параболического типов. Теория характеристик	56
§ 9. Различие между дифференциальными уравнениями гиперболического, эллиптического и параболического типов	62
§ 10. Формула Грина и функция Грина для линейных дифференциальных уравнений и, в частности, для уравнений эллиптического типа	67
§ 11. Метод Римана интегрирования дифференциального уравнения гиперболического типа	78
§ 12. Формула Грина для уравнения теплопроводности. Главное решение уравнения теплопроводности	82
Глава III. Граничные задачи теплопроводности	92
§ 13. Полубесконечный линейный проводник тепла	92
§ 14. Задача о температуре земли	99
§ 15. Задача о кольце	103
§ 16. Ограниченный линейный проводник тепла	108
§ 17. Отражение в плоскости и в пространстве	114
§ 18. Единственность решения в случае проводника произвольной формы	119
Глава IV. Цилиндрические и сферические задачи	122
§ 19. Функции Бесселя и Ханкеля	122
§ 20. Выравнивание температуры в цилиндре	146
§ 21. Дальнейшие сведения о бесселевых функциях	154
§ 22. Шаровые функции и теория потенциала	175
§ 23. Функция Грина теории потенциала для шара. Шаровые и круговые задачи для других дифференциальных уравнений	190

§ 24. Дальнейшие сведения о шаровых функциях	201
Приложение I. Отражение от круглого цилиндрического или сферического зеркала	223
Приложение II. Дополнение к задаче Римана о звуковых волнах (§ 11)	230
Глава V. Собственные функции и собственные значения	233
§ 25. Собственные значения и собственные функции колеблющейся мембраны	233
§ 26. Общие сведения о граничных задачах акустики и теплопроводности	248
§ 27. Свободные и вынужденные колебания. Функция Грина уравнения колебаний	255
§ 28. Бесконечная область и непрерывный спектр собственных значений. Условие излучения	264
§ 29. Спектр собственных значений волнового уравнения. Бальмеровские термы	280
§ 30. Функция Грина. Задачи рассеяния в волновой механике. Формула Резерфорда в ядерной физике	288
Приложение I. Нормировка собственных функций для неограниченной области	293
Приложение II. Новый способ решения внешней краевой задачи волнового уравнения, рассмотренный на примере шара	298
Приложение III. Собственные функции волновой механики для задачи рассеяния в параболических координатах	312
Приложение IV. Плоские и сферические волны в неограниченном пространстве любого числа измерений	315
Глава VI. Проблемы беспроводной телеграфии	328
§ 31. Диполь Герца в однородной среде и над идеально проводящей землей	329
§ 32. Вертикальная антенна над землей с любыми электрическими постоянными	342
§ 33. Горизонтальная антенна над землей с любыми, электрическими постоянными	356
§ 34. Ошибки при пеленгации электрической горизонтальной антенны	366
§ 35. Магнитная или рамочная антенна	369
§ 36. Энергия излучения и поглощение в земле	373
Приложение. Беспроволочная телеграфия на шарообразной земле	385
Упражнения	401
К главе I	401
К главе II	402
К главе III	404
К главе IV	406
К главе V	408
К главе VI	408
Указания к решению задач	409

А. З О М М Е Р Ф Е Л Ъ

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ  
ФИЗИКИ**



**И\*Л**

*Издательство  
иностранной  
литературы*

✱

VORLESUNGEN  
ÜBER THEORETISCHE PHYSIK  
BAND VI

PARTIELLE  
DIFFERENTIALGLEICHUNGEN  
DER PHYSIK

*von*  
ARNOLD SOMMERFELD

Zweite Auflage

LEIPZIG 1948

А. ЗОММЕРФЕЛЬД

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ  
ФИЗИКИ

*Перевод с немецкого*

А. А. САМАРСКОГО и Н. Н. ЯНЕНКО

*Под редакцией*

А. Н. ТИХОНОВА

1950

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
*Москва*

## А Н Н О Т А Ц И Я

В книге А. Зоммерфельда «Дифференциальные уравнения в частных производных физики», являющейся шестым томом его лекций по теоретической физике, последовательно изложен круг вопросов, входящих обычно в курс методов математической физики (ряды Фурье, проблемы, связанные с рассмотрением уравнений в частных производных второго порядка, цилиндрические и шаровые функции, уравнения колебаний мембран и т. д.). В отличие от книг, имеющихся по этому разделу математики, в книге Зоммерфельда много внимания уделено физической стороне дела: рассмотрению физических проблем и конкретных задач. В конце книги в виде задач дан полезный дополнительный материал, непосредственно примыкающий к основному тексту.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, прежде всего физиков всех специальностей; ее с интересом прочтут также математики, занимающиеся вопросами теоретической физики.

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга Зоммерфельда посвящена математической физике, причем автор ограничивает свою задачу рассмотрением дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.

Существует значительное число книг, в которых излагаются эти разделы математики. Сюда относятся большие курсы анализа, как курсы Гурса, Смирнова, так и специальные книги Крылова, Вебстера и Сеге, Соболева, Петровского, Франка и Мизеса, Куранта и Гильберта.

В противоположность названным выше книгам, изложение Зоммерфельда не претендует на математическую строгость и ставит своей задачей, наряду с несколько упрощенным изложением основных математических фактов, дать их физические приложения и пояснить их значимость. В качестве примера, характеризующего математический стиль изложения, можно привести раздел, посвященный рядам Фурье. Автор не останавливается на доказательстве основной теоремы о сходимости ряда к разлагаемой функции и не дает себе труда сформулировать эту теорему в тех или иных предположениях. Небрежность в формулировках и доказательствах приводит автора иногда к неверным утверждениям (например, утверждение об аналитичности решения уравнения теплопроводности на стр. 91).

Однако книга Зоммерфельда является ценной как в отношении наглядности изложения, так и в отношении многочисленных физических приложений и сопоставлений, в ней приведенных. Она написана одним из крупнейших физиков-теоретиков, создателем ряда новых математических методов. Читателя, начинающего знакомиться с этими разделами математики, она скорее, чем какая-либо другая книга, введет в курс основных фактов и объяснит их значение. Для читателя, знакомого

с математической стороны дела, она представит интерес в отношении оригинальности изложения, а также приведенных в ней физических приложений и примеров.

Подобно большинству зарубежных авторов, Зоммерфельд недостаточно полно оценивает достижения науки нашей страны. Основную формулу преобразования объемных интегралов в поверхностные, содержащую выражение дивергенции, автор называет формулой Гаусса. Как известно, она была дана М. В. Остроградским в 1835 г.<sup>1)</sup> Аналогичная формула, несколько специализированная и не содержащая выражения для дивергенции, была дана Гауссом в 1841 г.

Одним из краеугольных камней математической физики является принцип разложимости функций в ряды по собственным функциям краевых задач. Основные общие результаты в этой области принадлежат В. А. Стеклову, впервые в 1896 г. доказавшему эту теорему для уравнений с переменными коэффициентами (в одномерном случае)<sup>2)</sup>. В оригинальном тексте принцип разложимости автор связывает с именами Ома—Релея, в силу того, что эти ученые пользовались без доказательства этим принципом, и нигде не упоминает имени В. А. Стеклова.

Далее, посвящая целую (шестую) главу теории распространения радиоволн, автор не упоминает имени В. А. Фока, весьма много сделавшего в этой области и, в частности, внесшего исправления в основную работу автора<sup>3)</sup>.

При редактировании перевода книги мы считали необходимым изменить терминологию автора как в приведенных выше случаях, так и в некоторых других, представляющих меньшее значение, в соответствии с терминологией, принятой в советской научной литературе, не делая при этом оговорок по ходу текста. Ряд конкретных замечаний сделано в виде примечаний.

Член-корреспондент АН СССР А. Н. Тихонов.

---

<sup>1)</sup> М. В. Остроградский, Мемуары Академии Наук, серия VI, т. III (1835).

<sup>2)</sup> В. А. Стеков, Сообщения Харьковского математического общества, вторая серия, т. 5, № 1 и 2 (1896).

<sup>3)</sup> А. Зоммерфельд, гл. XIX, в книге Франка и Мизеса, Дифференциальные уравнения математической физики.



## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Уравнения в частных производных математической физики составили естественное завершение прочитанного мною шестисеместрового цикла лекций. Собственно говоря, мы имеем здесь дело не с математической физикой, а, я сказал бы, с *физической математикой*, т. е. не с математической формулировкой физических фактов, а с физическим обоснованием математических методов. Во всем дальнейшем мы будем на каждом шагу убеждаться в том, что рассматриваемые здесь математически интересные вопросы являются в то же время и физически важными. Эта гармония между математически интересным и физически важным делает нашу тему, так сказать, эстетически привлекательной.

Рассматриваемый нами круг вопросов в большей своей части принадлежит классическому достоянию математической литературы, о чем свидетельствует связь этого круга идей с именами Лапласа, Фурье, Грина, Гаусса, Римана и Вильяма Томсона<sup>1)</sup>. Чтобы показать, что эти классические методы могут быть распространены и на актуальные проблемы, в гл. VI довольно подробно рассмотрено *распространение радиоволн*.

Гл. V посвящена общему методу *собственных функций*. Как известно, областью, в которой особенно блестяще проявил себя этот метод, является *волновая механика*, что показано нами на отдельных, особенно простых примерах. Мы должны были, естественно, отказаться от строгого математического доказательства существования и обоснования свойств собственных функций с помощью теории интегральных уравнений; только в отдельных случаях,

---

<sup>1)</sup> Автор не упоминает имен М. В. Остроградского, П. Л. Чебышева, А. М. Ляпунова, В. А. Стеклова, внесших фундаментальный вклад в развитие математической физики (см. предисловие редактора перевода). (*Прим. ред.*)

в связи с некоторыми теоремами теории дифференциальных уравнений, мы ссылаемся на соответствующие теоремы теории интегральных уравнений.

Гл. IV, посвященная *цилиндрическим и шаровым функциям*, несмотря на очень сжатое изложение, занимает непропорционально большое место; для краткости здесь, как и в других местах, некоторые доказательства перенесены в упражнения. Специальный параграф посвящен изящному *методу обратных радиусов*, а также доказательству неприменимости этого метода к другим проблемам, кроме теории потенциала.

Гл. III посвящена почти целиком классическим проблемам теплопроводности. Наряду с методом Фурье здесь подробно развит для случая областей, ограниченных плоскостями, более наглядный *метод зеркальных отражений*. Гл. II рассматривает различные типы дифференциальных уравнений и граничных задач; формула Грина и функция Грина даются достаточно общим образом.

Гл. I о рядах и интеграле Фурье основана всецело на *методе наименьших квадратов*. Если этот метод дополнить требованием, называемым нами «аксиомой окончательной определенности», то он может заменить формальные вычисления старых способов изложения, являясь более полным и допуская дальнейшее обобщение не только в тригонометрическом случае, но и для шаровых функций и собственных функций общего вида.

Как вытекает из этого обзора, расположение материала не является систематическим, а определяется дидактическими требованиями. Гл. I должна ввести читателя в методику разложений Фурье и ему подобных разложений. Гл. II дает необходимые для физика-математика важнейшие понятия из теории дифференциальных уравнений в частных производных. Гл. III следовало бы, с точки зрения систематического изложения материала, подчинить общим методам гл. V, однако из исторических и дидактических соображений она поставлена впереди. Большой объем гл. IV мог бы быть оправдан тем, что здесь содержится значительная часть материала, излагаемого в учебниках по бесселевым и шаровым функциям, причем в удобном для применения виде. Из дидактических соображений для обоих классов функций в формально-мате-

математическую часть вставлены в двух специальных параграфах типичные примеры их приложений.

Ясно, что очерченный нами объем не мог целиком уместиться в рамки короткого летнего семестра. Действительно, многие, особенно математически более трудные отделы появились впервые только в печатном виде, частично в виде приложений. Следует уже здесь особо отметить приложение II к гл. V, которое было добавлено только по окончании остальной части рукописи и которое освещает весь круг вопросов, относящихся к области, промежуточной между короткими и длинными волнами, т. е. переходу от геометрической к волновой оптике.

Март 1947.

*А. Зоммерфельд.*

#### ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Это второе издание представляет собой почти полную перепечатку первого. Существенные изменения произведены были только на стр. 158 и 354.

Мюнхен, май 1948.

*А. Зоммерфельд.*



## Г л а в а I

### РЯДЫ И ИНТЕГРАЛЫ ФУРЬЕ

Для специалиста по математической физике «Аналитическая теория теплоты» Фурье<sup>1)</sup> является в некотором смысле настольной книгой. В ней не только дана теория тригонометрических рядов и интегралов, названных по имени их создателя, но и образцово проведено решение общей граничной задачи на примере уравнения теплопроводности.

В математических лекциях по рядам Фурье обычно делают ударение на понятие произвольной функции, на ее свойства непрерывности и ее особенности и допускают, например, наличие точек сгущения бесконечно многих максимумов и минимумов. Эта точка зрения отпадает в физических приложениях, так как встречающиеся здесь начальные или граничные значения рассматриваются всегда—хотя бы уже вследствие атомистической структуры материи и энергии—как средние значения. Точно так же и уравнения в частных производных, в которые они входят, получаются путем статистического усреднения гораздо более сложных элементарных законов. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением сравнительно простых идеализированных функций и их аппроксимаций с «наименьшей ошибкой» в смысле, определенном Гауссом в его «Методе наименьших квадратов». Этот метод открывает простой и научно строгий подход не только к теории рядов Фурье, но и к теории разложения в ряды по шаровым, цилиндрическим и вообще по собственным функциям, встречающимся в математической физике.

---

<sup>1)</sup> Книга Фурье по теории теплопроводности появилась в 1822 г. в Париже. Фурье известен также как алгебраист, инженер и историк египетского похода Наполеона, в котором он принимал участие.

## § 1. РЯДЫ ФУРЬЕ

Пусть на сегменте  $-\pi \leq x \leq +\pi$  задана некоторая произвольная функция  $f(x)$ , которая, например, может быть определена с помощью достаточно большого числа точных измерений, как кривая наблюдений. Будем ее аппроксимировать с помощью суммы из  $2n+1$  тригонометрических членов

$$S_n(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots + A_n \cos nx + \\ + B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \dots + B_n \sin nx. \quad (1.1)$$

Как следует выбирать коэффициенты  $A_k, B_k$ ? Возникающую ошибку  $f(x) - S_n(x)$  обозначим через  $\varepsilon_n(x)$ , т. е. положим

$$f(x) = S_n(x) + \varepsilon_n(x). \quad (1.2)$$

Следуя Гауссу, рассмотрим среднюю квадратичную ошибку

$$M = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varepsilon_n^2 dx \quad (1.3)$$

и подберем  $A_k, B_k$  так, чтобы она достигала минимума.

При этом следует заметить: аналогичная оценка ошибки, полученная с помощью первой степени  $\varepsilon_n$ , была бы нецелесообразна, так как при этом как угодно большие ошибки разного знака могли бы взаимно уничтожаться и не вошли бы в суммарную ошибку. С другой стороны, использование под знаком интеграла абсолютной величины  $|\varepsilon_n|$  вместо  $\varepsilon_n^2$  было бы неудобно вследствие ее неаналитического характера<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Совершенно другой путь выбирает великий русский математик Чебышев: в аппроксимации, названной по его имени, он берет не среднюю ошибку, а максимальную величину  $|\varepsilon_n|$  на рассматриваемом сегменте и соответствующим выбором коэффициентов добивается ее минимального значения.



Требование, выраженное формулой (1.3), приводит к уравнениям

$$-\frac{\partial M}{\partial A_k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x) - S_n(x)] \cos kx dx = 0, \\ k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (1.4)$$

$$-\frac{\partial M}{\partial B_k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} [f(x) - S_n(x)] \sin kx dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, имеется  $2n + 1$  уравнений для определения  $2n + 1$  неизвестных  $A, B$ . Существенно при этом то, что каждый отдельный коэффициент  $A$  или  $B$  может быть непосредственно определен, без помощи каких-либо рекуррентных соотношений. Этот факт является следствием *условий ортогональности*<sup>1)</sup>, которым удовлетворяют *тригонометрические функции*

$$\int \cos kx \sin lx dx = 0, \quad (1.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \int \cos kx \cos lx dx \\ \int \sin kx \sin lx dx \end{aligned} \right\} = 0, \quad k \neq l. \quad (1.5a)$$

$$(1.5b)$$

Для простоты доказательства воспользуемся не формулами сложения тригонометрических функций, которые являются слишком громоздкими, а экспоненциальным представлением этих функций через  $e^{\pm i kx}$ ,  $e^{\pm i lx}$ . Подинтег-

<sup>1)</sup> Здесь, как и в дальнейшем, все интегралы берутся от  $-\pi$  до  $+\pi$ . Для обоснования термина «ортогональность» напомним, что два вектора  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  в трех- или  $N$ -мерном евклидовом пространстве ортогональны друг другу, если их скалярное произведение обращается в нуль

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \sum_1^N u_i v_i = 0.$$

Встречающиеся в уравнениях (1.5) интегралы могут рассматриваться как суммы бесконечно многих членов аналогичного строения. См. также замечание в § 26 по поводу так называемого гильбертова пространства.

ральные выражения (1.5а) и (1.5б) будут состоять тогда из четырех членов вида  $\exp[\pm i(k+l)x]$  или  $\exp[\pm i(k-l)x]$ , которые при интегрировании пропадают, исключая случай  $l=k$ . Таким образом, равенства (1.5а) и (1.5б) доказаны. Справедливость равенства (1.5) для любых  $l, k$  следует из того факта, что при  $l=k$

$$\frac{1}{4i} \int (e^{2ikx} - e^{-2ikx}) dx = 0.$$

Подобным путем получается значение выражений (1.5а) и (1.5б) при  $l=k>0$ ; благодаря наличию под знаком интеграла удвоенного произведения  $\exp(ikx)$  и  $\exp(-ikx)$ , оно равняется  $\pi$ , в то время как при  $l=k=0$  для (1.5а) получаем значение  $2\pi$ . Уравнения (1.5а) и (1.5б) можно теперь заменить уравнением, справедливым также для  $l=k>0$ ,

$$\frac{1}{\pi} \int \cos kx \cos lx dx = \frac{1}{\pi} \int \sin kx \sin lx dx = \delta_{kl}, \quad (1.6)$$

где обозначено, как обычно,

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 0 \dots l \neq k, \\ 1 \dots l = k > 0. \end{cases}$$

Уравнение (1.6) при  $k=l$  называется *условием нормировки*. Для исключительного случая  $l=k=0$  оно переходит в тривиальное соотношение

$$\frac{1}{2\pi} \int dx = 1. \quad (1.6a)$$

Если подставить выражения (1.5), (1.6) и (1.6а) в уравнение (1.4), то в интегралах, содержащих  $S_n$ , выпадут все члены, кроме  $k$ -го, и для коэффициентов Фурье получатся следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \frac{1}{\pi} \int f(x) \cos kx dx \\ B_k &= \frac{1}{\pi} \int f(x) \sin kx dx \end{aligned} \right\} k > 0.$$

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int f(x) dx. \quad (1.7)$$

Следовательно, аппроксимация  $S_n$  полностью определена. При эмпирическом задании функции  $f(x)$  интегри-

рование по формулам (1.7) можно провести численно или при помощи интегрирующего устройства<sup>1)</sup>.

Из формул (1.7) непосредственно следует, что для четных функций, т. е. когда  $f(-x) = f(x)$ , все коэффициенты  $B_k$  равны нулю, а для нечетных функций, когда  $f(-x) = -f(x)$ , обращаются в нуль все коэффициенты  $A_k$ , включая и  $A_0$ . Таким образом, четные функции аппроксимируются с помощью рядов по косинусам, а нечетные — с помощью рядов по синусам.

Точность аппроксимации возрастает, конечно, с возрастанием числа постоянных  $A$ ,  $B$ , т. е. с ростом числа  $n$ . При этом нужно отметить следующее благоприятное обстоятельство: так как  $A_k$  и  $B_k$  при  $k < n$  не зависят от  $n$ , то при переходе от  $n$  к  $n+1$  вычисленные уже коэффициенты  $A_k$  и  $B_k$  остаются неизменными и оказываются окончательно определенными; нового подсчета требуют только коэффициенты  $A_{n+1}$  и  $B_{n+1}$ .

Осуществим предельный переход, заставляя  $n$  неограниченно возрастать. Рассмотренный ранее конечный ряд переходит при  $n \rightarrow \infty$  в *бесконечный ряд Фурье*. О сходимости последнего будет идти речь в следующих двух параграфах.

Вопрос о полноте системы функций, положенный в основу, является более трудным, чем вопрос о сходимости. Ясно, что если бы в ряде Фурье был опущен один из членов, например член, содержащий  $\cos kx$ , то функция  $f(x)$  не могла бы быть представлена оставшимися членами с любой степенью точности; более того, и в пределе при  $n \rightarrow \infty$  сохранялась бы конечная ошибка  $A_k \cos kx$ . Если бы мы захотели, например, представить  $\cos nx$  через неполный ряд, состоящий из всех  $\cos kx$  с  $k < n$  и  $k > n$ , то оказалось бы, что все  $A_k$  обращаются в нуль вследствие ортогональности, и ошибка равняется как раз  $\cos nx$ . Правда, для такой закономерно построенной системы, как система тригонометрических функций, никому не пришла

---

<sup>1)</sup> Интегрирующие устройства, применяющиеся в анализе Фурье, называются гармоническими анализаторами. Самой совершенной является машина Буша и Колдуэлла; она может быть использована также для интегрирования любых систем дифференциальных уравнений. [См., например, книгу Виллера «Математические инструменты», М., 1949. (Прим. ред.).]

бы в голову мысль нарушить ее естественную закономерность. Однако в более общих случаях подобная точка зрения математической эстетики не является обязательной.

Математическое понятие *полноты* содержится уже в методе наименьших квадратов. При этом говорят, что система функций  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots$  может быть полной только тогда, когда для *каждой* непрерывной функции  $f(x)$  средняя ошибка, определяемая формулой (1.3) в пределе при  $n \rightarrow \infty$ , обращается в нуль. При этом предполагается, что система функций  $\varphi$  ортогональная и нормированная, т. е. выполняются соотношения

$$\int \varphi_k \varphi_l dx = 0, \quad \int \varphi_n^2 dx = 1. \quad (1.8)$$

Отсюда, как следствие, вытекает, что коэффициенты разложения  $A_k$  определяются с помощью формулы

$$A_k = \int f(x) \varphi_k(x) dx. \quad (1.9)$$

Пределами интегрирования в этом и предыдущем интегралах могут быть  $a$  и  $b$ , так что длина интервала разложения равна  $b - a$ . Применяя формулу (1.3), можно написать

$$\begin{aligned} (b-a)M &= \int \left( f - \sum_{k=0}^n A_k \varphi_k \right)^2 dx = \\ &= \int f^2 dx - 2 \sum_{k=0}^n A_k \int f \varphi_k dx + \sum_{k=0}^n A_k^2. \end{aligned}$$

Последний член получен уже с учетом соотношений (1.8). Предпоследний член в силу формулы (1.9) равен удвоенному последнему члену с обратным знаком. Таким образом, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b-a)M = \int f^2 dx - \sum_{k=0}^{\infty} A_k^2.$$

Если потребовать полноты в указанном выше смысле, то должно выполняться соотношение

$$\sum A_k^2 = \int f^2 dx. \quad (1.10)$$

Это равенство представляет собой математическую формулировку условия полноты, употребляющуюся часто в литературе. Ясно, что оно не может быть использовано как практический критерий. Кроме того, так как это соотношение связано только со средней ошибкой, оно не позволяет судить о том, действительно ли функция  $f$  выражается в каждой точке рядом Фурье (см. § 3).

В этом вводном параграфе мы, следуя историческому развитию, вывели *окончательную определенность коэффициентов Фурье из ортогональности тригонометрических функций*. В § 4 на примере шаровых функций будет показано, что, и обратно, ортогональность может быть получена совершенно общим образом из требования *окончательной определенности*, что с точки зрения аппроксимации даже более естественно. Во всяком случае уже здесь можно подчеркнуть, что оба свойства: *ортогональность и окончательная определенность* взаимно обусловлены и эквивалентны друг другу.

Теперь придадим полученным результатам более совершенную математическую форму, которая оказывается полезной для различных приложений в физике. Проведем это для бесконечных рядов Фурье; однако заметим, что последующее будет справедливо также и для конечных сумм. Последовательно преобразуя и обозначая всюду переменную интегрирования через  $\xi$ , получаем

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int f(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int f(\xi) \cos k\xi d\xi \cdot \cos kx + \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int f(\xi) \sin k\xi d\xi \cdot \sin kx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int f(\xi) d\xi + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int f(\xi) \cos k(x - \xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int f(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \int f(\xi) e^{ik(x-\xi)} d\xi + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int f(\xi) e^{-ik(x-\xi)} d\xi \right] \right\}. \end{aligned}$$

В последнем члене можно заменить суммирование по положительным  $k$  в выражении  $\exp[-ik(x-\xi)]$  суммированием по соответствующим отрицательным  $k$  в выражении  $\exp[+ik(x-\xi)]$ . Вместо этого члена, следовательно, можно писать

$$\sum_{k=-1}^{-\infty} \int f(\xi) e^{ik(x-\xi)} d\xi = \sum_{k=-\infty}^{-1} \int f(\xi) e^{ik(x-\xi)} d\xi.$$

Таким образом, исключительное положение члена  $k=0$  устраняется; он входит в общую сумму между положительными и отрицательными значениями индекса  $k$ ; и в результате получаем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int f(\xi) e^{ik(x-\xi)} d\xi. \quad (1.11)$$

Наконец, вводя комплексные коэффициенты Фурье  $C_k$ , можно написать

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{ikx}, \quad C_k = \frac{1}{2\pi} \int f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi. \quad (1.12)$$

Связь коэффициента  $C$  с коэффициентами  $A$ ,  $B$  в силу определения последних в (1.7) очевидна:

$$C_k = \begin{cases} \frac{1}{2} (A_k - iB_k), & k > 0, \\ \frac{1}{2} (A_{-k} + iB_{-k}), & k < 0, \end{cases} \quad (1.13)$$

$$C_0 = A_0.$$

Комплексное представление (1.12) значительно проще, чем обычное вещественное представление; особенно полезным оно окажется в теории интегралов Фурье.

Если мы распространим наше представление, определенное первоначально в интервале  $-\pi < x < +\pi$ , на области  $x > +\pi$  и  $x < -\pi$ , то получим, очевидно, последовательные периодические повторения ветви, расположенной между  $-\pi$  и  $+\pi$ , т. е. в общем случае неаналитическое продолжение первоначальной функции  $f(x)$ . В частности, полученная таким образом периодическая функция



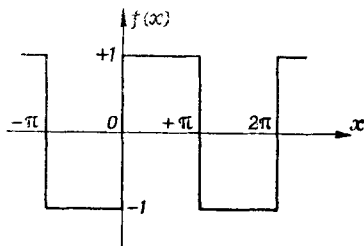
будет иметь разрыв для нечетных кратных аргумента  $\pm\pi$ , если только не имеет места равенство  $f(-\pi) = f(+\pi)$ . В § 2 исследуется как раз такая разрывная функция.

## § 2. Пример разрывной функции. Эффект Гиббса и неравномерная сходимость

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \text{для } 0 < x < +\pi, \\ -1 & \text{для } -\pi < x < 0. \end{cases} \quad (1.14)$$

Эта функция представлена на фиг. 1 вместе с ее периодическими повторениями и дополнена вертикальными соединительными отрезками от  $-1$  до  $+1$  в точках разрыва  $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$  (она имеет форму ступенчатой линии). Наша функция  $f$  нечетна; следовательно, ее ряд Фурье, как это отмечено в формулах (1.7), содержит только синусы. Для вычисления коэффициентов лучше всего использовать равенство (1.12), которое дает



Фиг. 1. График функции  $y = f(x)$  ( $y = +1$ , если  $0 < x < \pi$ ,  $y = -1$ , если  $-\pi < x < 0$ ) и ее периодического продолжения, представленного рядом Фурье (линия  $S_\infty$ ).

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{+\pi} e^{-ik\xi} d\xi - \int_{-\pi}^0 e^{-ik\xi} d\xi \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^{-ik\pi} - 1}{-ik} - \frac{1 - e^{+ik\pi}}{-ik} \right) = \frac{(-1)^k - 1}{-i\pi k} = \\ &= \begin{cases} -\frac{2i}{\pi k} \dots & \text{при нечетном } k, \\ 0 \dots & \text{при четном } k. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.14a)$$

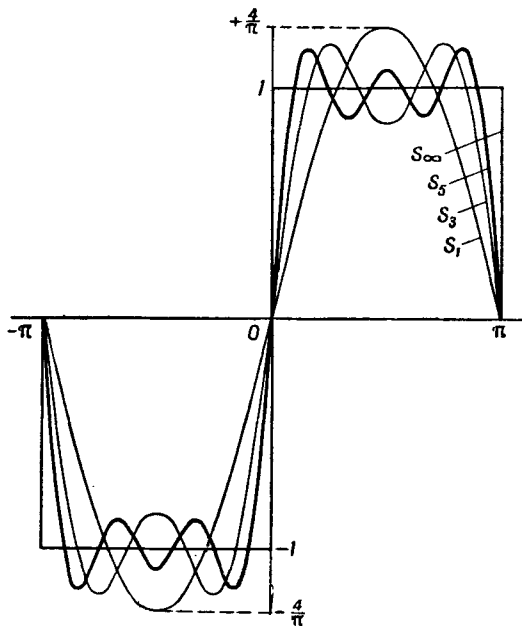
Отсюда в силу формул (1.13) следует

$$B_k = \frac{4}{\pi k}, \quad k = 1, 3, 5, \dots$$

Таким образом, получаем ряд по синусам с нечетным  $k$ :

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right). \quad (1.15)$$

Можно себе представить, какое впечатление произвел этот пример, приведенный впервые Фурье и показывающий,



Ф и г. 2. Приближения  $S_1$ ,  $S_3$ ,  $S_5$  линии  $S_\infty$ ; максимумы и минимумы каждого приближения расположены в равноудаленных точках оси  $x$ , между максимумами и минимумами предшествующего приближения.

что путем суперпозиции бесконечной последовательности простейших непрерывных функций можно получить разрывную кусочно-постоянную функцию. Без преувеличения можно сказать, что этот ряд сильно способствовал расширению общего понятия вещественной функции. Впоследствии увидим, что он дает возможность значительно углубить понятие сходимости ряда.

Для того чтобы наглядно показать, что этот ряд действительно аппроксимирует разрывную ступенчатую функцию, изобразим определенные формулой (1.1) функции  $S_1$ ,  $S_3$ ,  $S_5$  вместе с  $S_\infty = f(x)$  на фиг. 2:

$$S_1 = \frac{4}{\pi} \sin x, \quad S_3 = \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x \right),$$

$$S_5 = \frac{4}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x \right).$$

$S_1$  имеет максимум при  $x = \pi/2$  на высоте  $y = 4/\pi = 1,27$ , т. е. превышает уровень аппроксимируемой горизонтальной прямой  $y = 1$  на 27%. Функция  $S_3$  имеет в той же точке минимум, равный по величине

$$y = \frac{4}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = 0,85,$$

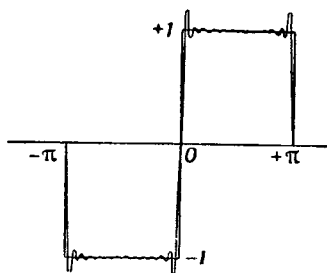
т. е. не доходит на 15% до аппроксимируемой прямой. Кроме того,  $S_3$  имеет еще два максимума в точках  $\pi/4$  и  $3\pi/4$ , которые возвышаются на 20% над этой же прямой.  $S_5(x)$  имеет вновь максимум в точке  $x = \pi/2$  и

$$y = \frac{4}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) = 1,10,$$

т. е. лежит на 10% выше прямой  $y = 1$ .

Два пологих минимума находятся между двумя более крутыми максимумами, которые лежат уже близко к  $x = 0$  и  $x = \pi$ . Вообще максимумы и минимумы  $S_{2n+1}$  располагаются между максимумами и минимумами  $S_{2n-1}$

(см. задачу I. 1). Все, что было сказано о последовательных приближениях прямой  $y = +1$ , остается справедливым и для прямой  $y = -1$ . Она также аппроксимируется колебательным образом, т. е. аппроксимирующая кривая  $S_n$  колеблется вокруг аппроксимируемого отрезка линии, имея  $n$  возвышений и  $n + 1$  впадин. При этом в средней части



Фиг. 3. Приближение линии  $S_\infty$  очень высокого порядка, наглядно изображающее эффект Гиббса.

линии с увеличением  $n$  колебания уменьшаются, в *точках* же *разрыва*  $x=0, \pm \pi, \pm 2\pi, \dots$ , где уменьшение максимумов с возрастанием  $n$  не имеет места, аппроксимирующие кривые приближаются все более и более к вертикальным соединительным отрезкам. Картина аппроксимирующей кривой с очень большим  $n$  схематически представлена на фиг. 3.

Теперь рассмотрим более подробно поведение  $S_{2n+1}(x)$  при большом  $n$  в одной из точек разрыва, например в точке  $x=0$ . Для этой цели записываем первоначальную формулу для  $S_{2n+1}$  в интегральной форме (вообще интеграл исследуется легче, чем сумма очень большого числа членов). Это получается с помощью следующих преобразований:

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \int_0^x \cos(2k+1)\xi \, d\xi = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^x \left[ \sum_{k=0}^n e^{(2k+1)i\xi} + \sum_{k=0}^n e^{-(2k+1)i\xi} \right] d\xi. \end{aligned}$$

Обе суммы последней строки являются, после вынесения множителя  $\exp(\pm i\xi)$ , геометрическими прогрессиями, которые расположены по возрастающим степеням множителя  $\exp(\pm 2i\xi)$  и суммируются обычным способом. Таким образом, имеем

$$S_{2n+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^x \left[ e^{i\xi} \frac{1 - e^{2i(n+1)\xi}}{1 - e^{2i\xi}} + e^{-i\xi} \frac{1 - e^{-2i(n+1)\xi}}{1 - e^{-2i\xi}} \right] d\xi. \quad (1.16)$$

Обе дроби в подинтегральном выражении после вторичного вынесения соответствующих множителей приводятся (с точностью до знака перед  $i$ ) к одному и тому же виду

$$e^{\pm in\xi} \frac{\sin(n+1)\xi}{\sin \xi}.$$

Поэтому формула (1.16) переходит в формулу

$$S_{2n+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{2 \cos(n+1)\xi \sin(n+1)\xi}{\sin \xi} d\xi. \quad (1.16a)$$

Наконец, при достаточно малом  $x$  можно заменить в знаменателе  $\sin \xi$  через  $\xi$ ; в числителе соответствующее упрощение было бы недопустимым, так как  $\xi$  входило бы там

с большим множителем  $n + 1$ . Если, кроме того, ввести новую переменную интегрирования  $u$  и новый аргумент  $v$ , то вместо (1.16а) получим

$$S_{2n+1} = \frac{2}{\pi} \int_0^v \frac{\sin u}{u} dv \dots \begin{cases} u = 2(n+1)\xi, \\ v = 2(n+1)x. \end{cases} \quad (1.17)$$

Отсюда следует, что если при конечном  $n$  положить сначала  $x=0$ , то будем иметь  $v=0$  и, следовательно,  $S_{2n+1}=0$ . Если затем заставить расти  $n$ , то при  $n \rightarrow \infty$  значение  $S_{2n+1}$  останется равным нулю. Таким образом, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 0} S_{2n+1} = 0. \quad (1.17a)$$

Однако если при положительном, отличном от нуля  $x$  сначала заставить  $n$  неограниченно расти, то  $v$  также неограниченно растет, и согласно основной формуле задачи 1.5  $S_{2n+1}=1$ ; если после этого заставить  $x$  стремиться к нулю, то значение  $S_{2n+1}=1$  сохраняется и для  $x=0$ . Таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = 1. \quad (1.17б)$$

Следовательно, предельные переходы не перестановочны. Если бы аппроксимируемая функция  $f(x)$  была непрерывной в точке  $x=0$ , то порядок предельных переходов был бы безразличен, и в отличие от соотношений (1.17а) и (1.17б) мы имели бы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 0} S_{2n+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = f(v). \quad (1.17в)$$

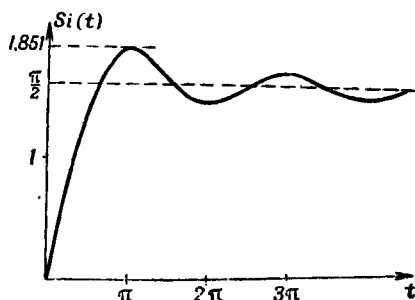
Этим, однако, не исчерпываются все замечательные особенности равенства (1.17); чтобы получить дальнейшие следствия, введем хорошо табулированный<sup>1)</sup> «интегральный синус»

$$Si(v) = \int_0^v \frac{\sin u}{u} du, \quad (1.18)$$

общий ход которого представлен на фиг. 4 и может быть описан следующим образом.

<sup>1)</sup> См., например, Янке и Эмде, Таблицы функций, М. — Л., 1949.

Для малых значений  $v$ , когда можно положить  $\sin u = u$ , интегральный синус пропорционален  $v$ , для больших значений  $v$  он асимптотически приближается к  $\pi/2$ , для средних значений  $v$  интегральный синус совершает последовательно уменьшающиеся колебания, максимумы и минимумы которых расположены, как следует из формулы (1.18),



Ф и г. 4. График интегрального синуса.

в точках  $v = \pi, 2\pi, 3\pi \dots$ . Ордината первого и наибольшего максимума составляет, по данным цитированной таблицы, 1,851. Абсциссе этого максимума соответствует при переходе к прежнему переменному  $x$  в силу того, что  $v = 2(n+1)x$ , бесконечная счетная последовательность точек

$$\dots, x_n = \frac{\pi}{2(n+1)}, \quad x_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+2)}, \quad \dots, \quad (1.19)$$

на которой согласно формуле (1.17) последовательность приближений  $S_{2n+1}, S_{2n+3}, \dots$  имеет одинаковое значение

$$S = \frac{2}{\pi} 1,851 = 1,18. \quad (1.20)$$

Эта величина превышает аппроксимируемую кривую  $y = 1$  на 18% и является одновременно *верхней границей* множества всех значений функций аппроксимирующей последовательности. Нижняя граница  $S = -1,18$  достигается для бесконечной последовательности значений  $x = -x_n$ ,



—  $x_{n+1}, \dots$ , неограниченно приближающихся к нулю слева. Любое значение  $S$ , заключенное между  $-1,18$  и  $+1,18$ , может быть достигнуто выбором соответствующего способа предельного перехода; например, значения  $S=0$  и  $S=1$  достигаются при предельных переходах по формулам (1.17а) и (1.17б). Такое поведение аппроксимирующих функций, в частности выход за пределы интервала разрыва  $\pm 1$ , называется *эффектом Гиббса*. Вообще, эффект Гиббса обнаруживается всегда там, где мы имеем дело с аппроксимацией разрывных функций в их точках разрыва. При этом говорят о *неравномерности сходимости в процессе аппроксимации*.

Докажем теперь более строго, что действительно можно достичь любое значение между  $S = +1,18$  и  $S = -1,18$ , если согласовывать соответствующим образом предельные переходы. Согласование по формуле (1.19) состояло в том, что значение  $x(n+1)$ , или, что то же,  $xn$ , полагалось равным фиксированной величине  $\pi/2$ . Возьмем теперь вместо  $\pi/2$  произвольную величину  $q$ , тогда в силу формулы (1.17) имеем  $v = 2q$  и получим

$$S_{2n+1} = \frac{2}{\pi} Si(2q),$$

где  $Si(2q)$ , в зависимости от выбора  $q$ , может принимать при положительном  $q$  все значения от 0 до  $+1,851$ , что непосредственно следует из фиг. 4; при отрицательном  $q$  получаем соответственно все значения от 0 до  $-1,851$ . Согласованные таким образом предельные переходы обеспечивают нам примыкание аппроксимирующих функций не только к интервалу скачка от  $-1$  до  $+1$ , но и к большому интервалу, т. е. дают нам эффект Гиббса.

После того как установлены основные факты, можно извлечь еще некоторые формально математические следствия из разложения Фурье (1.15). Полагая в формуле (1.15)  $x = \pi/2$ , получаем *ряд Лейбница*:

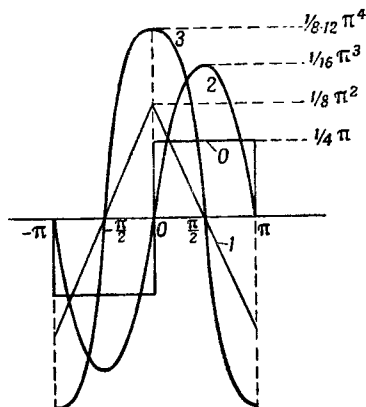
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (1.21)$$

Этот ряд сходится медленно; быстрее сходящиеся ряды для степеней  $\pi$  получатся, если проинтегрировать соотно-

шение (1.15) один или несколько раз. Последующие выкладки полезно сравнить с фиг. 5.

Ограничиваясь интервалом  $0 < x < \pi$ , запишем формулу (1.15) в следующем виде:

$$\frac{\pi}{4} = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \quad (1.22)$$



Ф и г. 5. Графики 0, 1, 2, 3 четырех функций, последовательно получаемых одна из другой с помощью интегрирования.

В точке  $x=0$  наблюдается последовательное увеличение непрерывности: кривая 0 имеет разрыв в ординате, 1 — в касательной, 2 — в кривизне, 3 — только в третьей производной.

Интегрирование от 0 до  $x$  дает

$$\frac{\pi}{4} x = 1 - \cos x + \frac{1}{3^2} (1 - \cos 3x) + \frac{1}{5^2} (1 - \cos 5x) + \dots \quad (1.23)$$

Отсюда, полагая  $x = \pi/2$ , получаем

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \quad (1.24)$$

Вычитая уравнение (1.23) из уравнения (1.24), находим далее

$$\frac{\pi}{4} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots \quad (1.25)$$

После вторичного интегрирования от 0 до  $x$  получаем

$$\frac{\pi}{8} (\pi x - x^2) = \sin x + \frac{1}{3^3} \sin 3x + \frac{1}{5^3} \sin 5x + \dots \quad (1.26)$$

Отсюда при  $x = \pi/2$  приходим к аналогу ряда Лейбница

$$\frac{\pi^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \dots \quad (1.27)$$

Проинтегрируем уравнение (1.26) еще раз по  $x$  и положим  $x = \pi/2$ ; тогда

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{8} \left( \pi \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) = \\ & = 1 - \cos x + \frac{1}{3^4} (1 - \cos 3x) + \frac{1}{5^4} (1 - \cos 5x) + \dots \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\frac{\pi^4}{3 \cdot 32} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots \quad (1.29)$$

Наконец, вычитая уравнение (1.28) из уравнения (1.29), будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{8} \left( \frac{\pi^3}{12} - \frac{\pi x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) = \\ & = \cos x + \frac{1}{3^4} \cos 3x + \frac{1}{5^4} \cos 5x + \dots \end{aligned} \quad (1.30)$$

Ряды (1.24) и (1.29) распространяются на нечетные числа. Суммы, распространенные на четные числа, равны, очевидно,  $1/4$ , соответственно  $1/16$  сумм, распространенных на все целые числа. Если обозначим последние суммы через  $\sum_2$  и соответственно  $\sum_4$ , то получим

$$\frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_2 = \sum_2, \text{ соответственно } \frac{\pi^4}{3 \cdot 32} + \frac{1}{16} \sum_4 = \sum_4,$$

следовательно,

$$\sum_2 = \frac{\pi^2}{6}, \text{ соответственно } \sum_4 = \frac{\pi^4}{90}. \quad (1.31)$$

---

<sup>1)</sup> Это значение было использовано во втором томе наших лекций при выводе закона излучения Стефана или закона Дебая о количестве энергии твердого тела [§ 44, формула (30.а)]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \int_0^{\infty} z^3 e^{-nz} dz = 3! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = 3! \frac{\pi^4}{90}.$$

Тригонометрические ряды (1.25), (1.26), (1.30) используются в качестве примеров в последующих параграфах. Высшие аналоги рядов Лейбница (1.21) и (1.27), равно как и аналоги  $\sum_2$  и  $\sum_4$ , приводятся в задаче 1.2.

### § 3. К ВОПРОСУ О СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ

Докажем теорему: если функция  $f(x)$  вместе со своими  $n-1$  производными непрерывна и дифференцируема на отрезке от  $-\pi$  до  $+\pi$ , включая концы, а  $n$ -я производная, вообще говоря, дифференцируема, но может иметь в конечном числе точек  $x = x_l$  конечные разрывы, то коэффициенты  $A_k, B_k$  ряда Фурье функции  $f(x)$  при  $k \rightarrow \infty$  стремятся к нулю по меньшей мере так же, как  $k^{-n-1}$ .

Дополнительное требование непрерывности функции  $f$  и ее первых  $n-1$  производных, включая концы отрезка от  $-\pi$  до  $+\pi$ , т. е. при  $x = \pm \pi$ , означает следующее: всякая представляемая рядом Фурье функция является по своей природе периодической. Собственно, можно было бы считать, что аргумент пробегает не отрезок между  $-\pi$  и  $+\pi$ , а окружность, замыкающуюся в точке  $x = \pm \pi$ . Эта точка не должна отличаться от внутренних точек интервала разложения  $-\pi, +\pi$ , так что для нас безразлично, обозначаем ли мы границы интервала через  $-\pi, +\pi$  или через  $\pi/4, 9\pi/4$ .

Для доказательства теоремы целесообразно использовать комплексную форму записи (1.12)

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k e^{ikx}, \quad (1.32)$$

$$2\pi C_k = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi. \quad (1.32a)$$

Производя интегрирование по частям в формуле (1.32a), получаем

$$2\pi C_k = \frac{1}{-ik} f(\xi) e^{-ik\xi} \Big|_{-\pi}^{+\pi} + \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{+\pi} f'(\xi) e^{-ik\xi} d\xi. \quad (1.33)$$

Здесь первый член правой части обращается в нуль вследствие предполагаемой непрерывности  $f$ ; второй член можно

еще раз преобразовать с помощью интегрирования по частям. После  $n$ -кратного повторения интегрирования по частям получаем

$$2\pi (ik)^n C_k = \int_{-\pi}^{+\pi} f^{(n)}(\xi) e^{-ik\xi} d\xi. \quad (1.34)$$

Этот интеграл в силу наличия разрывов функции  $f^{(n)}(x)$  в точках  $x = x_l$  следует разбить на частичные интегралы с промежутками интегрирования  $x_l, x_{l+1}$ ; тогда уравнение (1.34) принимает вид

$$2\pi (ik)^n C_k = \sum_l \int_{x_l}^{x_{l+1}} f^{(n)}(\xi) e^{-ik\xi} d\xi, \quad (1.34a)$$

причем среди точек разрыва  $x = x_l$  может также находиться точка  $x = \pm \pi$ . Обозначим скачки  $f^{(n)}$  в точках разрыва через  $\Delta_l^n$ . Интегрируя по частям в последний раз, получаем из формулы (1.34a)

$$\begin{aligned} 2\pi (ik)^n C_k = \\ = -\frac{1}{ik} \sum_l \Delta_l^n e^{-ikx_l} + \frac{1}{ik} \sum_l \int_{x_l}^{x_{l+1}} f^{(n+1)}(\xi) e^{-ik\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (1.35)$$

В силу ограниченности скачков  $\Delta_l^n$  и дифференцируемости  $f^{(n)}$  в интервалах между точками разрыва, из формулы (1.35) следует, что  $C_k$  стремится к нулю по меньшей мере с такой же скоростью, как  $k^{-n-1}$ , если  $k \rightarrow \infty$ . При некоторых частных соотношениях между  $\Delta_l^n$  или при соответствующем поведении  $f^{(n+1)}(\xi)$  порядок обращения в нуль может быть еще выше.

Наша теорема справедлива как для положительных, так и для отрицательных  $k$ . Отсюда следует справедливость ее также для вещественных коэффициентов Фурье  $A_k, B_k (k > 0)$ , так как последние получаются в силу формул (1.13) из  $C_k$  с положительными и отрицательными индексами.

Из этой теоремы вытекает, что аналитическая функция периода  $2\pi$ , являющаяся непрерывной и дифференцируемой вместе со всеми своими производными  $f^{(n)}$ , имеет ряд Фурье,

коэффициенты которого с возрастанием  $k$  стремятся к нулю быстрее, чем любая степень  $1/k$ . Примером такой функции является любой *полином*, составленный из  $\sin x$  и  $\cos x$ . Он разлагается в *конечный* ряд Фурье, имеющий столько членов, какова степень полинома, так что все коэффициенты Фурье с большим индексом равны в точности нулю. Другим примером может служить ряд  $\vartheta$  функции, с которым придется встретиться при решении задачи теплопроводности в § 15; его коэффициенты Фурье  $C_k$  убывают как  $e^{-\alpha k^2}$ .

Далее, из доказательства теоремы следует, что встречающаяся в условии полноты сумма  $\sum A_k^2$  сходится для каждой дифференцируемой функции  $f(x)$ , допускающей конечное число скачков. Примером такой функции является функция (1.14), у которой  $\sum A_k$  расходится, но  $\sum A_k^2$  уже сходится. Это показывает, что условие полноты, как это уже было отмечено на стр. 17, не гарантирует совпадения значения функции  $f$  со значением суммы ряда Фурье в любой точке. Если, например, уточнить определение (1.14), требуя, чтобы  $f=1$  для  $x \geq 0$  и  $f=-1$  для  $x < 0$ , то  $f$  в точке  $x=0$  не представляется рядом Фурье (1.15), так как последний дает значение 0 при  $x=0$ , в то время как  $f(0)=1$ .

Прекрасную иллюстрацию к нашей теореме представляют полученные в конце предыдущего параграфа ряды по косинусам и синусам. Дополним выражения представляемых ими функций, данные там только для интервала  $0 < x < \pi$ , выражениями их в интервале  $-\pi < x < 0$ . Последние получаются просто, если заметить, что ряды по косинусам являются четными, а ряды по синусам — нечетными функциями  $x$ . В последнем случае для отрицательного интервала нужно изменить, кроме знака  $x$ , также знак всего выражения, а в первом случае только знак  $x$ . Полученные таким путем выражения в приводимых ниже примерах стоят в квадратных скобках после точки с запятой. Таким образом, равенства (1.22), (1.25), (1.28), (1.30) должны быть дополнены следующим образом:

$$\left[ \frac{\pi}{4} ; -\frac{\pi}{4} \right] = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \quad (1.36)$$

$$\left[ \frac{\pi}{4} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) ; \frac{\pi}{4} \left( \frac{\pi}{4} + x \right) \right] =$$

$$= \cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots \quad (1.37)$$

$$\left[ \frac{\pi}{8} (\pi x - x^2); \frac{\pi}{8} (\pi x + x^2) \right] = \\ = \sin x + \frac{1}{3^3} \sin 3x + \frac{1}{5^3} \sin 5x + \dots \quad (1.38)$$

$$\left[ \frac{\pi}{8} \left( \frac{\pi^3}{12} - \frac{\pi x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right); \frac{\pi}{8} \left( \frac{\pi^3}{12} - \frac{\pi x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \right] = \\ = \cos x + \frac{1}{3^4} \cos 3x + \dots \quad (1.39)$$

Из этих четырех функций каждая последующая является более гладкой, чем предыдущая: функция (1.36) имеет точки разрыва при  $x=0$  и  $x=\pm\pi$ ; функция (1.37) уже непрерывна и разрывна только ее производная; функция (1.38) непрерывна уже вместе со своей первой производной, вторая же производная разрывна; функция (1.39) становится разрывной только в своей третьей производной. Встречающиеся при этом разрывы носят такой же характер, как и разрывы функции (1.36), и расположены в тех же самых точках  $x=0$  и  $x=\pm\pi$  в соответствии с тем обстоятельством, что каждая следующая функция получается из предыдущей интегрированием.

Фиг. 5 поясняет это графически. Изображенные на ней кривые 0, 1, 2, 3 представляют левые части равенств (1.36), (1.37), (1.38), (1.39). Отсутствие непрерывности касательной к ломаной линии 1 при  $x=0$  ясно видно из фигуры; разрывность кривизны линии 2 при  $x=0$  следует из характера смыкания двух зеркально симметричных относительно друг друга парабол второго порядка. Кривая 3 состоит из двух парабол третьего порядка, которые при  $x=0$  примыкают друг к другу с сохранением непрерывности кривизны. Масштаб ординат для большей отчетливости был выбран различно для каждой кривой и легко определяется с помощью указанных справа максимальных ординат.

Все увеличивающейся степени гладкости кривых 0—3 соответствует улучшение сходимости рядов Фурье в правых частях равенств (1.36)—(1.39); в формуле (1.36) коэффициенты убывают, как  $1/k$ , в остальных формулах, согласно нашей теореме коэффициенты убывают, как  $k^{-n-1}$ ,

где  $n$  — порядок первой разрывной производной представляемой функции.

Сходимость рядов Фурье резко отличается от сходимости рядов Тэйлора. Сходимость рядов Фурье зависит только от непрерывности разлагаемой функции и ее производных на вещественной оси, сходимость рядов Тэйлора — от положения особых точек в комплексной плоскости. Радиус сходимости ряда Тэйлора определяется особой точкой комплексной плоскости, ближайшей к начальной точке ряда. Этому соответствуют существенно различные принципы обоих разложений. На этом мы остановимся подробнее в § 6; у рядов Фурье имеет место *осциллирующее приближение* на всем протяжении интервала разложения, у рядов Тэйлора — *оскулирующее* <sup>1)</sup> *приближение* в его нулевой точке.

#### § 4. ПЕРЕХОД К ИНТЕГРАЛУ ФУРЬЕ

Граница интервала разложения  $-\pi < x < +\pi$  может быть изменена различным образом. Интервал можно не только сместить, как это отмечено уже на стр. 28, но и растянуть или сжать, переводя, например, исходный интервал  $-\pi < x < +\pi$  в  $-a < z < +a$  при любом  $a$ . Этого можно добиться с помощью подстановки

$$x = \frac{\pi z}{a}, \quad (1.40)$$

которая переводит формулы (1.7) в следующие:

$$\left. \begin{aligned} A_k \\ B_k \end{aligned} \right\} = \frac{1}{a} \int_{-a}^{+a} f(z) \frac{\cos \frac{\pi k z}{a}}{\sin \frac{\pi k z}{a}} dz, \quad A_0 = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} f(z) dz. \quad (1.41)$$

Более удобная комплексная форма (1.12) ряда Фурье принимает теперь следующий вид:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_k e^{i \frac{\pi}{a} k z}, \quad C_k = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} f(\zeta) e^{-i \frac{\pi}{a} k \zeta} d\zeta. \quad (1.42)$$

<sup>1)</sup> Оскулирующий — касающийся, соприкасающийся.



Можно рассматривать интервал еще более общего вида:  $b < z < c$ , который получается с помощью подстановки

$$x = \alpha z + \beta, \quad z = \frac{2\pi}{c-b}, \quad \beta = -\pi \frac{c+b}{c-b}. \quad (1.43)$$

В этом случае будем иметь

$$\left. \begin{aligned} A_k \\ B_k \end{aligned} \right\} = \frac{2}{c-b} \int_b^c f(z) \cos k(\alpha z + \beta) dz, \\ A_0 = \frac{1}{c-b} \int_b^c f(z) dz. \quad (1.44)$$

Напомним еще раз о рядах по косинусам и синусам, которые встречаются уже у Фурье. Для этих рядов нужно считать заданную в интервале  $0 < x < \pi$  функцию  $f(x)$  продолженной в отрицательную сторону нечетным или соответственно четным образом. Тогда при нечетном, например, продолжении получаем

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin kx, \quad B_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

(см. задачу 1.3).

Рассмотрим теперь равенство (1.42), считая в нем  $a$  большим числом. Дискретная последовательность величин

$$\omega_k = \frac{\pi}{a} k$$

становится при этом «почти» непрерывной последовательностью, следовательно, вместо  $\omega_k$  можно писать  $\omega$ , а вместо разности двух последующих величин  $\omega_k$  можно писать

$$d\omega = \frac{\pi}{a}, \quad \frac{1}{a} = \frac{d\omega}{\pi}.$$

Переходя в равенстве (1.42) от переменных  $z, \zeta$  к прежним обозначениям  $x, \xi$ , получим следующее выражение для  $C_k$ :

$$C_k = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-a}^{+a} f(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi. \quad (1.45)$$

Подставляя выражение (1.45) в бесконечный, «почти» непрерывный ряд (1.42) для функции  $f(x)$  и обозначая сначала верхнюю и нижнюю границы этого ряда через  $\pm \Omega$  вместо  $\pm \infty$ , получим

$$f(x) = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{+\Omega} e^{i\omega x} d\omega \int_{-a}^{+a} f(\xi) e^{-i\omega \xi} d\xi. \quad (1.46)$$

Указанный здесь порядок предельных переходов, очевидно, обязателен, так как если произвести сначала второй предельный переход  $\Omega \rightarrow \infty$ , то получится интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(x-\xi)} d\omega,$$

не имеющий смысла. С другой стороны, для того чтобы первый предельный переход  $a \rightarrow \infty$  имел смысл и, следовательно, можно было бы совершить второй предельный переход, нужно потребовать, по крайней мере, чтобы  $f(\xi) \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow \pm \infty$ . Но будем проводить исследования порядка малости  $f(\xi)$  при  $\xi \rightarrow \infty$ , так как во всех разумно поставленных физических задачах рассматриваются функции, достаточно благополучные в этом отношении.

После этих предварительных пояснений равенство (1.46) можно записать в сокращенном виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\omega(x-\xi)} d\xi. \quad (1.47)$$

Отсюда перейдем к более распространенной в литературе вещественной форме записи интеграла Фурье, полагая

$$e^{i\omega(x-\xi)} = \cos \omega(x-\xi) + i \sin \omega(x-\xi).$$

Синус в подинтегральном выражении (1.47), являясь нечетной функцией  $\omega$ , дает нуль при интегрировании по  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ ; косинус, как четная функция  $\omega$ , дает при этом удвоенную величину интеграла, взятого от 0 до  $\infty$ . Таким образом, приходим к вещественной форме

интеграла Фурье

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \omega(x - \xi) d\xi. \quad (1.48)$$

Вместо выражения (1.48) можно записать также

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega x d\omega + \int_0^{\infty} b(\omega) \sin \omega x d\omega, \quad (1.49)$$

где

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \omega \xi d\xi, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \omega \xi d\xi. \quad (1.49a)$$

Если, в частности,  $f(x)$  есть четная функция  $x$ , то обращается в нуль  $b(\omega)$ , если  $f(x)$  — нечетная функция, то обращается в нуль  $a(\omega)$ . В этих случаях будем иметь интегралы, содержащие только косинусы или синусы, аналогично рядам, содержащим только косинусы или синусы (интегралы по косинусам или синусам). Продолжая  $f(x)$  четным или нечетным образом на отрицательную половину вещественной оси, можно получить либо тот, либо другой интеграл, если бы даже функция  $f(x)$  была задана только для  $x > 0$ . Такой прием особенно полезен при решении некоторых задач теплопроводности. Запишем это математически: *при четном продолжении*

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega x d\omega, \quad a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \omega \xi d\xi; \quad (1.50)$$

*при нечетном продолжении*

$$f(x) = \int_0^{\infty} b(\omega) \sin \omega x d\omega, \quad b(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\xi) \sin \omega \xi d\xi. \quad (1.50a)$$

Обозначение  $\omega$  для одного из наших переменных интегрирования выбрано не случайно. В физических задачах  $\omega$  обычно означает *круговую частоту* колебательных процессов. Если принять  $x$  за *координату времени*, то равенство (1.40) можно рассматривать как *разложение любого*

временного процесса  $f(x)$  на его гармонические компоненты. В случае интеграла Фурье рассматривается непрерывный спектр, который распространяется на все частоты: от  $\omega=0$  до  $\omega=\infty$ ; в случае ряда Фурье рассматривается *дискретный спектр* (основной тон плюс обертоны). При этом необходимо обратить внимание на следующее обстоятельство: если физик исследует спектр какого-либо процесса при помощи соответствующего спектрального аппарата, то он воспринимает только *амплитуду*, соответствующую частоте  $\omega$ , в то время как *фаза* каждого элементарного колебания остается ему неизвестной. При принятом обозначении амплитуде соответствует величина

$$c(\omega) = \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)},$$

фаза же  $\gamma(\omega)$  задается отношением  $b/a$ , исходя из формулы

$$c(\omega) e^{i\gamma(\omega)} = a(\omega) + ib(\omega). \quad (1.51)$$

Интеграл Фурье изображает процесс полностью и требует знания обеих величин  $a$  и  $b$ , т. е. амплитуды и фазы. Наблюдаемый же спектр дает сведения лишь об одной из этих величин, а именно об амплитуде.

Это обстоятельство проявляется очень заметно при исследовании кристаллов методом гармонического анализа, успешно развивающимся в настоящее время. При этом анализе наблюдаются только *интенсивности* отражений в кристаллах, т. е. квадраты *амплитуд*. Для полного же знания структуры кристалла необходимо определить, кроме того, и фазы. Недостаток метода может быть частично устранен при помощи некоторых геометрических соображений, основанных на свойствах симметрии кристаллов. Примеры спектров различных колебательных процессов, рассмотренные в задаче 1.4, прекрасно иллюстрируют теорию интегралов Фурье и одновременно являются дополнением к положениям спектральной теории из т. IV наших лекций.

Перейдем еще раз к комплексной форме интеграла Фурье. Разобьем его на два соотношения, эквивалентные

в совокупности равенству (1.47)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega) e^{i\omega x} d\omega,$$

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx. \quad (1.52)$$

Функция  $\varphi(\omega)$  совпадает с определенной посредством формулы (1.49а) величиной  $a(\omega) - ib(\omega)$ , не считая разложения множителя  $2\pi$  в произведение  $\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{2\pi}$ , произведенное в целях симметрии, и нового обозначения переменной интегрирования во втором из написанных уравнений. Она задает одновременно амплитуду и фазу колебательного процесса  $f(x)$ .

Кроме того, равенства (1.49) показывают, что обе функции  $f$  и  $\varphi$  взаимно определяют друг друга, т. е. безразлично, считать ли  $f$  известной, а  $\varphi$  искомой, или наоборот. Одну из этих функций называют трансформантой Фурье другой функции. Уравнения (1.52) представляют собой весьма изящную формулировку интегральной теоремы Фурье.

Хотя до сих пор шла речь только о функциях одного переменного  $f(x)$ , однако ясно, что функции многих переменных также можно разложить в ряд Фурье или представить интегралом Фурье по каждому из аргументов.

В пространстве  $x, y, z$  получается таким путем трехкратный ряд Фурье или шестикратный интеграл Фурье. Здесь не имеет смысла выписывать соответствующие громоздкие общие формулы, перегруженные индексами. В дальнейшем мы будем часто встречаться с этими формулами в различных приложениях, и смысл этих формул мы сможем лучше всего разъяснить на отдельных конкретных примерах.

## § 5. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ШАРОВЫМ ФУНКЦИЯМ

Мы не утверждаем, что выбранный нами путь является наиболее удобным подходом к теории шаровых функций, однако он непосредственно вытекает из § 1 и не

требует никакой подготовки по теории дифференциальных уравнений, давая в то же время перспективу на далеко идущие обобщения.

Поставим задачу аппроксимировать заданную функцию  $f(x)$  в интервале  $-1 < x < +1$  последовательностью полиномов  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_k, \dots, P_n$  степеней  $0, 1, 2, \dots, k, \dots, n$  наилучшим образом в смысле метода наименьших квадратов. С этой целью образуем  $n$ -е приближение вида

$$S_n = \sum_{k=0}^n A_k P_k \quad (1.53)$$

и соответствующим выбором коэффициентов  $A_k$  сделаем минимальной среднюю квадратичную ошибку

$$M = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} [f(x) - S_n]^2 dx, \quad (1.54)$$

подобно тому как это делалось в формуле (1.3). При этом получается, так же как и в формулах (1.4),  $n+1$  уравнение

$$\int_{-1}^{+1} [f(x) - S_n] P_k dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (1.55)$$

Это требование дополним требованием, облегчающим подсчет коэффициентов, а именно: коэффициенты  $A_k$ , вычисленные с помощью уравнений (1.55) в  $n$ -м приближении, должны сохраняться также в  $(n+1)$ -ом и при всех последующих приближениях; для всех  $k \leq n$  они должны представлять уже окончательные значения  $A_k$ , которые в дальнейшем, при более точной аппроксимации, должны быть только дополнены коэффициентами  $A_k$  для  $k > n$ . В § 1 эта окончательная определенность  $A_k$  явилась следствием заданной ортогональности тригонометрических функций. Здесь же, наоборот, из требований окончательной определенности с необходимостью вытекает ортогональность функций  $P_k$ .

Доказательство очень просто. Уравнение (1.55) имеет вид (в дальнейшем мы опускаем пределы интегрирования)

$$\begin{aligned} A_0 \int P_0 P_k dx + A_1 \int P_1 P_k dx + \dots \\ \dots + A_n \int P_n P_k dx = \int f(x) P_k dx. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Это уравнение должно сохраниться и для  $(n+1)$ -го приближения  $S_{n+1}$  в силу нашего предположения окончательной определенности  $A_i$  и в силу независимости правой части от  $n$ . При этом в левой части появляется член

$$A_{n+1} \int P_{n+1} P_k dx,$$

который должен быть равен нулю, так как в противном случае получилось бы противоречие с равенством (1.56). Так как  $A_{n+1}$  [исключая случай особого выбора  $f(x)$ ] не равен нулю, то должен обращаться в нуль интеграл, при том для всех значений  $k$ , для которых было справедливо уравнение (1.56), т. е. для всех  $k \leq n$ . Но это и означает, что  $P_{n+1}$  ортогонально ко всем  $P_0, P_1, \dots, P_n$ . Таким образом, если выбрать в качестве  $P_0$  и  $P_1$  ортогональные полиномы, то из нашего требования окончательной определенности следует общее *условие ортогональности*:

$$\int P_n P_m dx = 0, \quad m \neq n. \quad (1.57)$$

С помощью уравнений (1.57) получаем из условия (1.56)

$$A_k \int P_k^2 dx = \int f(x) P_k(x) dx. \quad (1.58)$$

Итак, каждый из коэффициентов  $A_k$  определяется в отдельности (а не с помощью рекуррентных соотношений), если только еще дополнительно определить *нормирующий интеграл* в левой части формулы (1.58). Удобнее всего было бы положить его равным 1, как мы и будем поступать в дальнейшем, в общей теории собственных функций. Однако, следуя традиции, мы вводим здесь вместо этого условие

$$P_n(1) = 1. \quad (1.59)$$

Нормирующее условие (1.59) имеет то преимущество, что в силу него все встречающиеся в  $P_k$  коэффициенты становятся рациональными числами.

Перейдем к последовательному определению полиномов  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$  с помощью условий (1.57) и (1.59). Полином  $P_0$  согласно условию (1.59) равен постоянной, а именно 1. Для линейной функции  $P_1 = ax + b$ , согласно уравнению (1.57), при  $m=1, n=0$ , получаем  $b=0$ , а согласно (1.59),  $a=1$ . Полагая  $P_2 = ax^2 + bx + c$ , имеем

$$\int P_2 P_0 dx = \frac{2}{3}a + 2c = 0, \text{ следовательно, } c = -\frac{a}{3};$$

$$\int P_2 P_1 dx = \frac{2}{3}b = 0, \quad \text{следовательно, } b = 0;$$

отсюда

$$P_2 = a \left( x^2 - \frac{1}{3} \right)$$

и в силу условия (1.59)

$$a = \frac{3}{2}, \quad P_2 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}.$$

Аналогично находим

$$P_3 = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \quad P_4 = \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8} \text{ и т. д.}$$

Таким образом, полиномы  $P_n$  действительно полностью определяются нашими обоими требованиями,  $P_{2n}$  — как четные,  $P_{2n+1}$  — как нечетные полиномы с рациональными коэффициентами.

Более наглядным, чем этот рекуррентный способ задания, является следующее явное выражение полиномов  $P_n$ :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (1.60)$$

Оно удовлетворяет условию (1.59), в чем легко убедиться, произведя  $n$ -кратное дифференцирование множителя  $(x-1)^n$  и полагая  $x=1$  во втором множителе  $(x+1)^n$ . Так как

$$\frac{d^n}{dx^n} (x-1)^n = n!,$$



то из формулы (1.60) следует, что

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n n!} n! (1+1)^n = 1.$$

Теперь нужно доказать, что выражение (1.60) удовлетворяет также условию ортогональности (1.57), равносильному требованию окончательной определенности. С этой целью введем сокращенное обозначение

$$D_{k,l} = \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^l \quad (1.61)$$

и запишем левую часть уравнения (1.57) в виде

$$\int_{-1}^{+1} D_{n,n} D_{m,m} dx,$$

отбрасывая не интересующие нас постоянные множители.

При этом можно считать, например, что  $m > n$ .

Интегрируя по частям, понизим порядок дифференцирования во втором множителе  $D_{m,m}$  и вместе с тем повысим порядок дифференцирования первого множителя  $D_{n,n}$ . Члены, получающиеся подстановкой пределов  $x = \pm 1$ , обращаются в нуль, так как согласно формуле (1.61) выражение  $D_{m-1,m}$  содержит, по крайней мере, по одному множителю  $x-1$  и  $x+1$ . Продолжая этот процесс, получаем

$$\begin{aligned} \int D_{n,n} D_{m,m} dx &= - \int D_{n+1,n} D_{m-1,m} dx = \\ &= \int D_{n+2,n} D_{m-2,m} dx = \dots = (-1)^n \int D_{2n,n} D_{m-n,m} dx. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Согласно формуле (1.61) множитель  $D_{2n,n}$  равняется постоянной, а именно  $(2n)!$ .

Таким образом, если  $m \geq n+1$ , то имеем

$$\begin{aligned} \int D_{n,n} D_{m,m} dx &= (-1)^n (2n)! \int D_{m-n,m} dx = \\ &= (-1)^n (2n)! D_{m-n-1,m} \Big|_{-1}^{+1}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Последнее выражение равно нулю, так как порядок дифференцирования  $m - n - 1$  меньше степени  $m$ , в которой встречаются множители  $x - 1$  и  $x + 1$ .

Таким образом, ортогональность доказана для  $m \neq n$  и одновременно показан путь к вычислению нормирующего интеграла

$$\int P_k^2 dx = \left( \frac{1}{2^k k!} \right)^2 \int D_{k,k} D_{k,k} dx.$$

Если воспользоваться первым из равенства (4.63), положив  $m = n = k$ , то получим

$$\begin{aligned} \int P_k^2 dx &= \frac{(-1)^k (2k)!}{(2^k k!)^2} \int D_{0,k} dx = \\ &= \frac{(2k)!}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2k)^2} \int (1 - x^2)^k dx. \end{aligned}$$

Числовой множитель перед последним интегралом равен

$$z = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2k}.$$

Сам интеграл с помощью подстановки  $x = \cos \vartheta$  принимает форму известного интеграла:

$$\int_0^\pi \sin^{2k+1} \vartheta d\vartheta = 2 \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2k}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2k+1)} = \frac{2}{2k+1} \frac{1}{z}.$$

Следовательно,

$$\int P_k^2 dx = \frac{2}{2k+1} = \frac{1}{k + \frac{1}{2}}. \quad (4.64)$$

Подставляя найденное значение нормирующего интеграла в формулу (4.58), получим

$$A_k = \left( k + \frac{1}{2} \right) \int f(x) P_k(x) dx. \quad (4.65)$$

Эти выражения для коэффициентов  $A_k$  подставим теперь в равенство (4.53) для  $n$ -го приближения  $S_n$  и перейдем к пределу при  $n \rightarrow \infty$ . В предположении сходимости

ряда и полноты системы функций  $P$  получаем для заданной функции  $f(x)$  разложение в ряд следующего вида:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(k + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{+1} f(\xi) P_k(\xi) d\xi P_k(x). \quad (1.66)$$

Сходимость и полнота обосновываются, как и в случае ряда Фурье, с помощью предельного значения средней квадратичной ошибки. При этом, как и раньше,  $k$ -я функция нашей последовательности имеет  $k$  нулей в интервале разложения, с той лишь разницей, что в данном случае они не располагаются на равных расстояниях. Приближение к заданной функции  $f$  происходит так же, как и прежде, со все более частыми колебаниями, уменьшающимися по амплитуде. В точках разрыва в этом случае также имеет место эффект Гиббса.

## § 6. ОБОБЩЕНИЯ: ОСЦИЛЛИРУЮЩИЕ И ОСКУЛИРУЮЩИЕ АПРОКСИМАЦИИ, АНГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУРЬЕ. ПРИМЕР НЕОКОНЧАТЕЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФИЦИЕНТОВ

Теперь, естественно, возникает вопрос, имеется ли существенное различие между рядом по шаровым функциям и рядом Фурье, несмотря на совпадение способов аппроксимирования. Так как мы показали, что вид  $P_n(x)$  вполне определяется нашими аппроксимативными требованиями, то можно было бы предположить, что, например, ряд по косинусам (разложение четной функции) переходит в ряд по шаровым функциям, если в нем положить  $\cos \varphi = x$ . Тогда  $\cos k\varphi$  [аналогично  $P_k(x)$ ] становится полиномом  $k$ -й степени от  $x$ , а интервал разложения  $0 < \varphi < \pi$  переходит в интервал  $+1 > x > -1$ . Однако линейный элемент этого интервала получает в обоих случаях различный вес  $g$ , так как

$$d\varphi = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

В то время как в случае аппроксимации Фурье всем элементам  $d\varphi$  придавался один и тот же вес, при переходе

к переменному  $x$  концы  $x = \pm 1$  интервала оказываются в исключительном положении, поскольку  $g(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ ; здесь аппроксимация точнее, чем в средней части интервала. Обратное, очевидно, имеет место при аппроксимации с помощью шаровых функций, когда при переходе к шкале  $\varphi$  концы интервала оказываются, наоборот, в худшем положении, так как  $g(\varphi) = \sin \varphi$ . Образно выражаясь, в случае ряда Фурье мы имеем дело с единичным полукругом от  $\varphi = 0$  до  $\varphi = \pi$  с равномерно распределенной плотностью; при ортогональном проектировании этого полукруга на его диаметр между  $x = -1$  и  $x = +1$  получаем неравномерно распределенную плотность; в противоположность этому, в случае ряда по шаровым функциям имеем диаметр с равномерно распределенной плотностью, который соответствует единичному кругу с неравномерно распределенной плотностью.

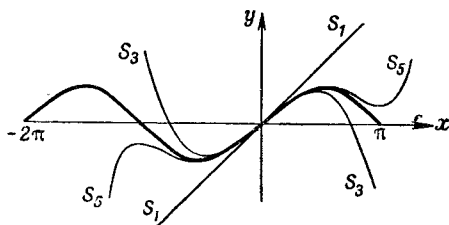
### 1. Осциллирующая и оскулирующая аппроксимации.

Эти различные *распределения веса*  $g$  (плотности нагрузки), наряду с характером границы интервала разложения, и отличают друг от друга разнообразные разложения в ряды, применяющиеся в математической физике. Упомянем здесь, вследствие их значения для волновой механики, только разложения по полиномам Эрмита и Лагерра. Не будем здесь останавливаться на их формальном выражении — оно может быть получено, аналогично случаю шаровых функций, из требования наилучшего и окончательного подсчета коэффициентов (см. задачу I.6, где даны также соответствующие нормировки); ортогональность

Тип полиномов	Интервал	Вес $g(x)$	Условия ортогональности для $m \neq n$
Эрмита	$-\infty < x < +\infty$	$e^{-x^2}$	$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n H_m e^{-x^2} dx = 0$
Лагерра	$0 < x < \infty$	$e^{-x}$	$\int_0^{\infty} L_n L_m e^{-x} dx = 0$

этих систем с необходимостью следовала бы тогда из требования окончательной определенности коэффициентов. Ограничимся табличным представлением важнейших признаков этих полиномиальных рядов.

У этих рядов, аналогично случаю рядов Фурье и шаровых функций, приближение к заданной функции  $f$  также достигается с помощью уменьшающихся по амплитуде



Фиг. 6. Разложение функции  $y = \sin x$  в ряд Тейлора и ее приближения:

$$S_1 = x, \quad S_3 = x - \frac{x^3}{3!}; \quad S_5 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

колебаний последовательных аппроксимаций; однако еще из основ анализа известен ряд, который имеет не *осциллирующий*, а *оскулирующий* характер. Мы имеем в виду ряд Тейлора. В случае этого ряда последовательные приближения  $S_n$  в некоторой выделенной точке, изображаемой кривой  $f$ , все лучше и лучше соприкасаются с ней, так что в этой точке функции  $S_n$  и  $f$  имеют одинаковые производные до  $n$ -го порядка включительно.

Графическое изображение степенного ряда для функции  $\sin x$  (фиг. 6) особенно наглядно иллюстрирует это обстоятельство.

Чтобы определить вес  $g(x)$ , характеризующий аппроксимацию с помощью степенного ряда, удобно применить понятие  $\delta$ -функции, являющейся функциональным аналогом введенного выше в формуле (1.6) алгебраического символа  $\delta_{kl}$  и обозначаемой через  $\delta(x|x_0)$ . Функция  $\delta(x|x_0)$  имеет бесконечный разрыв при  $x = x_0$  и опреде-

ляется следующими условиями:

$$\delta(x|x_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq x_0, \\ \infty & \text{при } x = x_0, \end{cases}$$

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \delta(x|x_0) dx = 1 \quad \text{при любом } \varepsilon < 0. \quad (1.67)$$

Очевидно, что для ряда Тэйлора, изображенного на фиг. 6, вес выражается формулой

$$g(x) = \delta(x|0). \quad (1.67a)$$

**2. Анггармонический анализ Фурье.** До сих пор рассматривались ряды Фурье по гармоническим (целочисленным) обертонам основного тона. Теперь, имея в виду проблему теплопроводности (см. § 16), рассмотрим задачу о разложении в интервале  $0 < x < \pi$  произвольной функции  $f(x)$  в ряд вида

$$f(x) = B_1 \sin \lambda_1 x + B_2 \sin \lambda_2 x + B_3 \sin \lambda_3 x + \dots, \quad (1.68)$$

где  $\lambda_k$  являются корнями некоторого трансцендентного уравнения, например

$$\operatorname{tg} \lambda \pi = \alpha \lambda, \quad (1.68a)$$

причем  $\alpha$  — произвольное число. Это уравнение имеет бесконечно много корней  $\lambda_k$ , что видно сразу же из фиг. 7, на которой  $\lambda$  нанесены по оси абсцисс,  $\operatorname{tg} \lambda \pi$

Фиг. 7. Графическое решение трансцендентного уравнения  $\operatorname{tg} \lambda \pi = \alpha \lambda$ .

На фигуре построены графики функций  $y = \operatorname{tg} \lambda \pi$  и  $y = \alpha \lambda$  ( $\alpha < 0$ ). Точки пересечения обоих графиков дают  $\lambda_k$ -корни уравнения. Корень  $\lambda_0 = 0$  не рассматривается; при  $\lambda \rightarrow \infty$  имеем

$$\lambda_n = n - \frac{1}{2}.$$

и  $\alpha \lambda$  — по оси ординат. Другое уравнение типа (1.68a) с бесконечным числом корней встретится нам в задаче II. 1.

Докажем сначала, что функции  $\sin \lambda_k x$  образуют ортогональную систему с весом  $g(x) = 1$ , так что имеем

$$\int_0^\pi \sin \lambda_k x \sin \lambda_l x dx = 0, \quad k \neq l. \quad (1.69)$$

Действительно, переходя от произведения синусов к косинусам суммы и разности, легко получаем для левой части уравнения (1.69)

$$\frac{\lambda_l \lambda_l}{\lambda_k^2 - \lambda_l^2} \cos \lambda_k \pi \cos \lambda_l \pi \left( \frac{\operatorname{tg} \lambda_k \pi}{\lambda_k} - \frac{\operatorname{tg} \lambda_l \pi}{\lambda_l} \right),$$

где скобка вследствие уравнения (1.68) обращается в нуль. Для  $k=l$  находим таким же образом

$$\int_0^\pi \sin^2 \lambda_k x dx = \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{1}{\lambda_k \pi} \sin \lambda_k \pi \cos \lambda_k \pi \right). \quad (1.69a)$$

Это вычисление, основанное на специальных тригонометрических формулах, мы сведем в § 16 к менее формальному вычислению, применив формулу Грина.

Из соотношений (1.69) и (1.69a) получается следующее значение для коэффициентов разложения  $B_k$  в уравнении (1.68):

$$B_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x) \sin \lambda_k x}{1 - \frac{\sin 2\lambda_k \pi}{2\lambda_k \pi}} dx. \quad (1.69б)$$

Это значение  $B_k$  в смысле, указанном на стр. 38, является окончательным, так как не зависит от  $n$ , причем средняя квадратичная ошибка приближения

$$S_n = \sum_{k=1}^n B_k \sin \lambda_k x$$

будет минимальной. Тем самым решается одновременно вопрос о сходимости и полноте, поскольку при  $n \rightarrow \infty$  средняя квадратичная ошибка стремится к нулю.

**3. Пример неокончательного определения коэффициентов.** Рассмотрим теперь гораздо более трудный случай, при котором не выполняется требование окончательной определенности. Это подготовит нас к некоторым оптическим (или лучше сказать «квазиоптическим») приложе-

ниям. На фиг. 8 изображено металлическое зеркало, имеющее форму кругового цилиндра.

Электрический вектор результирующего суммарного колебания, который можно считать направленным перпендикулярно к плоскости рисунка, составляется из падающей волны  $w$ , заданной на поверхности зеркала с помощью равенства

$$w = -f(\varphi), \quad -\alpha < \varphi < +\alpha, \quad r = a, \quad (1.70)$$

и из отраженной (диффрагированной, рассеянной) волны. Последнюю представим следующим образом:

$$u = u(r, \varphi), \quad -\pi < \varphi < +\pi,$$

$$r < a \quad (\text{внутреннее поле});$$

$$v = v(r, \varphi), \quad -\pi < \varphi < +\pi,$$

$$r > a \quad (\text{внешнее поле}).$$

Фиг. 8. Отражение падающей «квазиоптической» волны от круглого цилиндрического зеркала с апертурой  $\varphi = \alpha$  и радиусом  $r = a$ .

Нам нужно тогда потребовать

$$u + w = v + w = 0 \quad \text{для} \quad r = a \quad \text{и} \quad |\varphi| < \alpha, \quad (1.71)$$

$$u = v, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial r} \quad \text{для} \quad r = a \quad \text{и} \quad |\varphi| > \alpha. \quad (1.72)$$

Первое требование соответствует предполагаемой идеальной проводимости металлического зеркала, второе — требованию непрерывного смыкания внутреннего и внешнего полей.

Считая функцию  $w$  симметричной относительно центральной оси зеркала (например, плоская волна, идущая в этом направлении), можем положить <sup>1)</sup>

$$u = \sum_n C_n g_n(r) \cos n\varphi,$$

$$v = \sum_n D_n h_n(r) \cos n\varphi, \quad (1.73)$$

<sup>1)</sup> Мы считаем более целесообразным, принимая во внимание обозначение гл. IV, заменить применявшийся до сих пор значок суммирования  $k$  на  $n$ . Вместо  $n$  будем писать теперь  $N$  и вместо прежнего  $l$  будем применять индекс  $m$ .



где  $g_n$  и  $h_n$ , как впоследствии выяснится (см. § 19), окажутся функциями Бесселя и соответственно Ханкеля. Они могут быть выбраны таким образом, что

$$g_n(a) = h_n(a) = 1.$$

Условие (1.71) и первое из условий (1.72) принимают тогда вид

$$\sum_n C_n \cos n\varphi = \sum_n D_n \cos n\varphi = f(\varphi) \quad \text{для } |\varphi| < \alpha \quad (1.74)$$

и соответственно

$$\sum_n C_n \cos n\varphi = \sum_n D_n \cos n\varphi \quad \text{для } |\varphi| > \alpha. \quad (1.75)$$

Принимая во внимание оба уравнения, заключаем

$$\sum_n (C_n - D_n) \cos n\varphi = 0$$

для всех  $\varphi$ , так что, независимо от того, распространяется ли предыдущее суммирование на всевозможные целые  $n$  или же (что является более общей точкой зрения) только на конечное число их, получаем

$$D_n = C_n.$$

Условие (1.75) тем самым удовлетворяется, равенство (1.74) требует еще выполнения условия

$$\sum_n C_n \cos n\varphi = f(\varphi) \quad \text{для } |\varphi| < \alpha. \quad (1.76)$$

Кроме того, нужно удовлетворить второму из условий (1.72). Согласно формулам (1.73), оно принимает вид

$$\sum_n C_n \gamma_n \cos n\varphi = 0 \quad \text{для } |\varphi| > \alpha, \quad (1.77)$$

где

$$\gamma_n = a \left[ \frac{dz_n(r)}{dr} - \frac{dh_n(r)}{dr} \right]_{r=a} \quad (1.77a)$$

Множитель  $a$  введен для того, чтобы сделать  $\gamma_n$  безразмерным числом, что допустимо согласно уравнению (1.77). Из уравнений (1.76) и (1.77) требуется определить  $C_n$ .

Для этого вновь воспользуемся методом наименьших квадратов. Требуя вдоль шкалы  $\varphi$  всюду одинаковой точности, рассмотрим квадратичные ошибки, соответствующие равенствам (1.76) и (1.77):

$$\int_0^{\alpha} \left[ f(\varphi) - \sum_{n=0}^N C_n \cos n\varphi \right]^2 d\varphi \quad \text{и} \quad \int_{\alpha}^{\pi} \left( \sum_{n=0}^N C_n \gamma_n \cos n\varphi \right)^2 d\varphi.$$

Сумма обеих ошибок должна достигать минимума при соответствующем выборе  $C_n$ . Дифференцируя по  $C_n$ , получаем систему  $N+1$  линейных уравнений относительно  $C_0, \dots, C_n, \dots, C_N$ ,  $(m+1)$ -е уравнение которой имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N C_n \left[ \int_0^{\alpha} \cos n\varphi \cos m\varphi d\varphi + \gamma_n \gamma_m \int_{\alpha}^{\pi} \cos n\varphi \cos m\varphi d\varphi \right] = \\ = \int_0^{\alpha} f(\varphi) \cos m\varphi d\varphi. \end{aligned} \quad (1.78)$$

При предельном переходе  $N \rightarrow \infty$  мы получили бы *бесконечную систему линейных уравнений для бесконечно многих переменных*  $C_n$ , составление которой для нас, вообще говоря, не имеет смысла. Дальнейшему рассмотрению этой задачи, при которой этот предельный переход не используется, посвящено приложение I к гл. IV; для этой цели потребуются числовые значения входящих в предыдущие формулы параметров  $\gamma_n$ , которые мы сможем определить только позднее. Соответствующая пространственная задача (шаровой сегмент вместо сегмента кругового цилиндра) также приводила бы в пределе при  $N \rightarrow \infty$  к бесконечной системе линейных уравнений, причем тогда вместо  $\cos n\varphi$  входили бы  $P_n(\cos \vartheta)$ , где под  $\vartheta$  понимается угол, отсчитываемый от оси симметрии сферического зеркала. Эта задача также будет рассмотрена в приложении I к гл. IV. Теперь же мы хотим только подчеркнуть методическую разницу между задачами, для которых метод наименьших квадратов ведет к окончательному определению *каждого отдельного коэффициента*  $C$ , и задачами, для которых наше требование «окончательной определенности» не выполняется, и поэтому *совокупность*  $C_n$  *должна быть определена из всей совокупности минимизирующих условий*.

## Г л а в а II

### ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ УРАВНЕНИЯХ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

#### § 7. ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Как известно, потенциал  $u$  поля тяготения удовлетворяет уравнению

$$\Delta u = 0 \quad (2.1)$$

или же

$$\Delta u = -(4\pi)\rho. \quad (2.1a)$$

Знак  $\Delta$  обозначает оператор Лапласа, т. е.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \operatorname{div} \operatorname{grad}. \quad (2.2)$$

Те же уравнения (2.1) и (2.1a) лежат в основе теории статических электрических и магнитных полей: уравнение  $\Delta u = 0$  — в пустом пространстве, а уравнение  $\Delta u = -(4\pi)\rho$  — при наличии источников плотности  $\rho$ ; множитель  $4\pi$  взят в скобки, так как его можно устранить соответствующим выбором единиц.

Уравнение (2.1) встречается также в гидродинамике безвихревого потока несжимаемой жидкости;  $u$  выражает при этом потенциал скоростей.

Двухмерное уравнение потенциала

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.3)$$

является основой римановской теории функций, которую можно коротко охарактеризовать как «теорию поля» аналитических функций  $f(x + iy)$ .

Уравнение колебаний имеет вид

$$\Delta u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) является основным дифференциальным уравнением акустики ( $c$  — скорость звука), оптики ( $c$  — скорость света) и электродинамики переменных полей.

Следуя специальной теории относительности, можно присоединить к пространственным координатам  $x_1, x_2, x_3$  в качестве четвертой координаты  $x_4$  (или  $x_0$ )  $= ict$ ; тогда уравнение (2.4) можно записать как четырехмерное уравнение потенциала

$$\square u = 0, \text{ где } \square = \sum_{k=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}. \quad (2.5)$$

Для случая двух измерений уравнение (2.4) встречается при изучении колеблющихся мембран, для случая одного измерения — при изучении колеблющихся струн.

В последнем случае можно написать

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.6)$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (2.6a)$$

Уравнение (2.6a) получается из уравнения (2.6), если положить  $y = ct$  (а не  $y = ict$ ).

Как мембрана, так и струна не имеют собственной упругости; их способность сопротивления изменениям формы зависит от внешнего натяжения и линейной или поверхностной плотности.

Как частный случай общего уравнения теории упругости, получаем дифференциальное уравнение поперечных колебаний тонкой пластинки

$$\Delta \Delta u = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \Delta \Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \quad (2.7)$$

Из соображений размерности следует, что  $c$  здесь не означает скорость звука в упругом материале, как это принято в акустике, а представляет собой постоянную, зависящую от упругости, плотности и толщины пластинки. В качестве дифференциального уравнения колебаний упругого стержня получаем

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.8)$$

Это уравнение выводится в задаче II. 1, причем получающиеся из него собственные колебания можно сравнивать с акустическими колебаниями открытой и закрытой трубы.

Наряду с уравнениями равновесных состояний [уравнения (2.1) — (2.3)] и уравнениями колебательных процессов [уравнения (2.4) — (2.8)] рассмотрим в качестве третьего типа дифференциальные уравнения *процессов выравнивания*. Наиболее важным представителем последних является *теплопроводность* (выравнивание энергии). Заметим при этом, что *диффузия* (выравнивание плотности вещества), внутреннее трение (выравнивание импульсов), а также чистая электропроводность (выравнивание потенциалов) подчиняются той же схеме.

Пусть  $\mathbf{G}$  — вектор, указывающий величину и направление потока теплоты. Заклучим рассматриваемую точку  $P$  в бесконечно малый элемент объема  $d\tau$ . Тогда  $\operatorname{div} \mathbf{G} d\tau$  означает количество тепла, вытекающего за единицу времени из объема  $d\tau$ . Ему соответствует уменьшение количества тепла, содержащегося в объеме  $d\tau$ , которое мы также относим к единице времени и обозначаем через  $-\frac{\partial Q}{\partial t}$ . Таким образом, будем иметь

$$\operatorname{div} \mathbf{G} d\tau = -\frac{\partial Q}{\partial t}. \quad (2.9)$$

Проводник тепла рассматривается при этом как жесткое тело, так что можно пренебречь растяжением и затратой энергии на совершение внешней работы; тогда количество тепла, находящееся в объеме, равно внутренней энергии. Приток тепла  $dQ$  вызывает повышение температуры  $d\tau$ ; отдача тепла  $-dQ$  вызывает понижение температуры. Если обозначить температуру через  $u$ , то

$$dQ = c dm du, \quad dm = \rho d\tau; \quad (2.10)$$

здесь  $c$  — удельная теплоемкость (в случае жесткого тела нет необходимости делать различие между  $c_v$  и  $c_p$ ). Множитель  $dm$  при  $c$  появляется в силу того, что  $c$  рассчитано на единицу массы.

Из уравнений (2.9) и (2.10) получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{G} = -c \rho \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (2.11)$$

Далее, напишем закон Фурье, устанавливающий связь между  $\mathbf{G}$  и  $u$ ; для изотропной среды закон Фурье имеет следующий вид:

$$\mathbf{G} = -\kappa \operatorname{grad} u. \quad (2.12)$$

*Поток тепла распространяется в направлении падения температуры и пропорционален величине этого падения. Множитель пропорциональности  $\kappa$  называется коэффициентом теплопроводности.*

Подставляя выражение (2.12) в уравнение (2.11), получаем дифференциальное уравнение теплопроводности

$$\Delta u = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t}; \quad k = \frac{\kappa}{c\rho} \quad (2.13)$$

( $k$  называется коэффициентом *температуропроводности*).

Закон Фурье распространяется также на явления диффузии. В этом случае  $u$  означает концентрацию распространенного вещества в растворителе,  $\mathbf{G}$  — поток растворенного вещества,  $k$  — коэффициент диффузии. Для несжимаемой жидкости, обладающей внутренним трением,  $k$  — кинематическая вязкость, а уравнение (2.13) есть уравнение Навье-Стокса для ламинарного (т. е. идущего в одном направлении) потока жидкости. Вследствие тензорного характера этого процесса, закон (2.12) не имеет здесь всеобщего значения. В случае электричества закону Фурье соответствует закон Ома;  $u$  при этом обозначает напряжение,  $\mathbf{G}$  — плотность тока (сила тока, отнесенная к единице площади сечения проводника),  $k$  — удельное сопротивление проводника. В случае чисто омического сопротивления уравнение (2.13) характеризует тип уравнений Максвелла.

Формально в эту схему может быть включено и основное уравнение волновой механики, которое, в случае отсутствия внешних сил, имеет вид

$$\Delta u = \frac{2m}{i\hbar} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (2.14)$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка, поделенная на  $2\pi$ ;  $m$  — масса частицы.

Вследствие того, что входящая в уравнение (2.14) постоянная  $i\hbar/2m$  — мнимая, в отличие от уравнения (2.13),

в котором постоянная  $k$  действительная, уравнение (2.14) описывает не процесс выравнивания, а колебательный процесс. Это становится очевидным, если перейти к периодической во времени зависимости, положив

$$u = \psi e^{-i\omega t}, \quad \omega = \frac{W}{\hbar}, \quad (2.14a)$$

где  $W$  — энергия состояния.

Из уравнения (2.14) получаем

$$\Delta\psi + C\psi = 0, \quad C = \frac{2m}{\hbar^2} W. \quad (2.15)$$

К такому же виду приводится уравнение колебаний (2.4), если в нем положить  $u = \psi \exp(-i\omega t)$ , причем в этом случае  $C = \omega^2/c^2$ .

В следующей главе будет рассмотрено более подробно так называемое линейное уравнение теплопроводности для теплового состояния, зависящего только от одной пространственной координаты  $x$ . Для лучшего сравнения с уравнениями (2.3) и (2.6a) запишем это дифференциальное уравнение в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad y = kt. \quad (2.16)$$

Уже при беглом обзоре этого краткого перечня бросается в глаза родственность дифференциальных уравнений физики. Она обусловлена требованием *инвариантности* уравнений относительно поворота и переноса координатных систем в случае изотропной и однородной среды; этому требованию инвариантности отвечает дифференциальный оператор Лапласа  $\Delta$ ; пространственно-временной инвариантности уравнений теории относительности соответствует четырехмерный оператор  $\square$  уравнения (2.5). В случае анизотропной среды оператор  $\Delta$  должен быть заменен суммой всех вторых производных с множителями, определяемыми постоянными кристалла. Эти множители в случае неоднородной среды должны быть, кроме того, функциями точки. Дифференциальные выражения такого рода рассматриваются в начале следующего параграфа. Причина того, что мы имеем дело

только с уравнениями в частных производных, заключается в том, что выше мы пользовались представлениями о близкодействии. В силу этих представлений только смежные элементы пространства могут оказывать влияние друг на друга.

## § 8. УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО, ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО И ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ. ТЕОРИЯ ХАРАКТЕРИСТИК

Ограничимся случаем двух независимых переменных  $x, y$ . Дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, линейное и однородное относительно зависимой переменной и ее производных, может быть записано в следующей наиболее общей форме:

$$L(u) \equiv A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0, \quad (2.17)$$

где  $A, B, \dots, F$  — заданные функции от  $x, y$ , имеющие производные достаточно высокого порядка. Сначала рассмотрим уравнение более общего вида

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Phi \left( u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y \right), \quad (2.18)$$

причем функция  $\Phi$  не обязательно должна быть линейной относительно  $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ .

Исследуем теперь условия разрешимости одной задачи, играющей в математической теории уравнений с частными производными основную роль, хотя в физических приложениях она отступает на второй план по сравнению с так называемыми краевыми задачами, которые будут рассмотрены нами в дальнейшем.

Задача эта следующая.

В плоскости  $x, y$  вдоль данной кривой  $\Gamma$  заданы значения функции  $u$  и ее производной по нормали к кривой  $\frac{\partial u}{\partial n}$ . Имеет ли уравнение (2.18) решение, удовлетворяющее этим начальным условиям?

Сделаем предварительно следующее замечание: одновременно с функцией  $u$  вдоль кривой известно также



и  $\frac{\partial u}{\partial s}$ ; зная  $\frac{\partial u}{\partial s}$  и  $\frac{\partial u}{\partial n}$ , можно определить производные  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u}{\partial y}$ . Поэтому на кривой  $\Gamma$  известна функция  $u$  вместе со своими первыми производными.

Введем сокращенные обозначения, обычно употребляющиеся в теории поверхностей:

$$p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Записанное в этих обозначениях уравнение (2.18) имеет вид

$$Ar + 2Bs + Ct = \Phi. \quad (2.19)$$

Кроме того, на всей плоскости и, в частности, на кривой  $\Gamma$  имеют место соотношения

$$dp = r dx + s dy, \quad (2.19a)$$

$$dq = s dx + t dy. \quad (2.19б)$$

Так как  $p$  и  $q$  известны вдоль  $\Gamma$ , то уравнение (2.19) и соотношения (2.19a) и (2.19б) дают три уравнения для определения  $r, s, t$  на кривой. Детерминант этой системы уравнений выражается так:

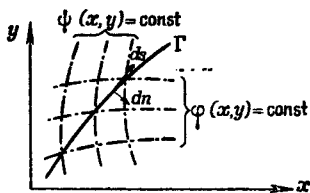
$$\Delta = \begin{vmatrix} A & 2B & C \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} = A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2.$$

Только в том случае, когда  $\Delta \neq 0$ , величины  $r, s, t$  однозначно определяются уравнением (2.19) и соотношениями (2.19a) и (2.19б).

Однако, вообще говоря, в каждой точке  $x, y$  существуют два направления  $\frac{dy}{dx}$ , для которых этот определитель обращается в нуль. Отсюда следует существование двух вещественных или комплексно сопряженных семейств кривых, вдоль которых  $\Delta = 0$  и которые по Монжу называются *характеристиками*. Они обозначены пунктиром на фиг. 9.

Вдоль каждой характеристики вторые производные  $r, s, t$ , вообще говоря, не определяются через  $u, p, q$  или же определяются неоднозначно. Поэтому потребуем в качестве необходимого условия разрешимости поставленной задачи, чтобы никакой элемент дуги  $\Gamma$  не был направлен по характеристикам.

В § 9, п. 1, на примере решения Даламбера будет рассмотрен противоположный случай, когда дуга  $\Gamma$  целиком совпадает с какой-либо характеристикой, и будет выяснено, как должна быть изменена постановка задачи в этом случае.



Фиг. 9. Кривая  $\Gamma$ , вдоль которой заданы значения  $u$  и  $\frac{\partial u}{\partial n}$ , и оба семейства характеристик  $\xi = \varphi(x, y) = \text{const}$ ,  $\eta = \psi(x, y) = \text{const}$ .

Если условие  $\Delta \neq 0$  выполнено, то должно, действительно, существовать решение дифференциального уравнения в окрестности дуги  $\Gamma$ , так как высшие производные вычисляются аналогично производным второго порядка.

Рассмотрим, например, третьи производные:

$$r_x = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad s_x = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = r_y, \quad t_x = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = s_y, \quad t_y = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}.$$

После дифференцирования уравнения (2.19) и соотношений (2.19а) и (2.19б) по  $x$  получаем

$$Ar_x + 2Bs_x + Ct_x = \Phi_x + \dots$$

$$r_x dx + s_x dy = dr,$$

$$s_x dx + t_x dy = ds.$$

Многоточие в правой части первого уравнения обозначает сумму всех получающихся при дифференцировании членов, которые не содержат третьих производных, т. е. образованы из найденных уже величин. Определитель этой системы попрежнему равен  $\Delta$ . То же самое имеет место и для уравнений, получающихся дифференцированием по  $y$ .

Условие  $\Delta \neq 0$  является, таким образом, достаточным для возможности подсчета третьих производных и, вообще,

производных любого порядка. Поэтому в каждой точке кривой  $\Gamma$  функция  $u$  может быть разложена в ряд Тейлора, все коэффициенты которого однозначно определяются из начальных данных вдоль кривой  $\Gamma$ .

Возвратимся к рассмотрению характеристического уравнения

$$A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 = 0, \quad (2.20)$$

причем ограничимся окрестностью произвольно выбранной точки на плоскости  $xy^1$ ) и будем различать следующие случаи:

1)  $AC - B^2 > 0$  — *эллиптический тип*. Характеристики комплексно сопряженные.

2)  $AC - B^2 < 0$  — *гиперболический тип*. Характеристики образуют два различных вещественных семейства.

3)  $AC - B^2 = 0$  — *параболический тип*. Имеется только одно вещественное семейство характеристик.

Каждый из трех типов приводится к своему нормальному виду, если в соответствии с уравнениями характеристик ввести новые координаты. Пусть уравнения двух семейств характеристик имеют следующий вид:

$$\varphi(x, y) = \text{const}, \quad \text{соответственно} \quad \psi(x, y) = \text{const}. \quad (2.20a)$$

Тогда с помощью преобразования

$$\xi + i\eta = \varphi(x, y), \quad \xi - i\eta = \psi(x, y) \quad (2.21)$$

получаем нормальную форму *эллиптического типа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = X\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \xi, \eta\right), \quad (2.21a)$$

с помощью преобразования

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y) \quad (2.22)$$

— нормальную форму *гиперболического типа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = X\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \xi, \eta\right), \quad (2.22a)$$

---

<sup>1)</sup> Само собой разумеется, что если  $A, B, C$  зависят от  $x, y$ , то для одного и того же уравнения различные точки плоскости могут представлять различные случаи: 1, 2 или 3.

и с помощью преобразования

$$\xi = \varphi(x, y) = \psi(x, y), \quad \eta = x \quad (2.23)$$

— нормальную форму *параболического типа*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = X\left(u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \xi, \eta\right). \quad (2.23a)$$

Прежде чем приступить к доказательству, сравним уравнения (2.21a), (2.22a), (2.23a) соответственно с уравнениями (2.3), (2.6a) и (2.16), т. е. с двухмерным уравнением потенциала, уравнением колеблющейся струны и линейным уравнением теплопроводности. Как видно, левые части (2.21a) и (2.3) совпадают по форме и лишь отличаются обозначением независимых переменных. Такое же соответствие имеется между уравнениями (2.23a) и (2.16). Для (2.22a) достаточно применить простое преобразование

$$\xi = \frac{1}{2}(\xi' + \eta'), \quad \eta = \frac{1}{2}(\xi' - \eta'), \quad (2.24)$$

обращением которого является преобразование

$$\xi' = \xi + \eta, \quad \eta' = \xi - \eta. \quad (2.24a)$$

В результате получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi'^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta'^2},$$

т. е. и в этом случае имеем существенное сходство левых частей (2.22a) и (2.6a). Таким образом, *двухмерное уравнение потенциала, уравнение колеблющейся струны и линейное уравнение теплопроводности являются простейшими примерами уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов.*

Рассмотрим в первую очередь *гиперболический* случай и покажем, что уравнение (2.22a) получается из исходного уравнения (2.18) с помощью преобразования (2.22). Если использовать индексные обозначения производных, примененные уже для  $r, s, t$ , то согласно уравнениям (2.22) получим для первых производных соотношения:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \varphi_x + \frac{\partial u}{\partial \eta} \psi_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \varphi_y + \frac{\partial u}{\partial \eta} \psi_y.$$

Соответственно этому вторые производные преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \varphi_x^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \varphi_x \psi_x + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \psi_x^2 + \dots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \varphi_x \varphi_y + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} (\varphi_x \psi_y + \varphi_y \psi_x) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \psi_x \psi_y + \dots \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \varphi_y^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \varphi_y \psi_y + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \psi_y^2 + \dots\end{aligned}$$

(точки означают члены с первыми производными). Умножая последние три уравнения соответственно на  $A$ ,  $2B$ ,  $C$  и складывая, получаем для левой части уравнения (2.18) следующее выражение:

$$\begin{aligned}& \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} (A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x \varphi_y + C\varphi_y^2) + \\ & + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} [A\varphi_x \psi_x + B(\varphi_x \psi_y + \varphi_y \psi_x) + C\varphi_y \psi_y] + \\ & + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} (A\psi_x^2 + 2B\psi_x \psi_y + C\psi_y^2) + \dots\end{aligned} \quad (2.25)$$

Коэффициенты при  $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$  в равенстве (2.25) равны нулю. Действительно, для семейства характеристик  $\varphi = \text{const}$  имеем

$$\varphi_x dx + \varphi_y dy = 0.$$

Найдя отсюда отношение  $\frac{dx}{dy}$  и подставив его в характеристическое уравнение (2.20), получим

$$A\varphi_x^2 + 2B\varphi_x \varphi_y + C\varphi_y^2 = 0. \quad (2.26)$$

Такому же уравнению удовлетворяют производные функции  $\psi$ . Таким образом, уравнение (2.25) действительно приводится к гиперболической нормальной форме (2.22а) после сокращения на множитель перед  $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$  в уравнении (2.25а).

Так как в параболическом случае  $\eta = x$ , то в уравнение (2.25) следует подставить

$$\psi(x, y) = x, \quad \text{следовательно,} \quad \psi_x = 1, \quad \psi_y = 0, \quad (2.27)$$

в то время как для  $\varphi_x, \varphi_y$  уравнение (2.26) сохраняет силу. Вследствие этого в уравнении (2.25) обращается в нуль первый член. Множитель при втором члене сводится, согласно уравнению (2.27), к  $A\varphi_x + B\varphi_y$  и также равен нулю, так как в силу того, что  $AC - B^2 = 0$ , левая часть уравнения (2.26) является полным квадратом и поэтому может быть записана в виде  $(A\varphi_x + B\varphi_y)^2/A = 0$ . Наконец, третий член выражения (2.25), на основании уравнения (2.27), принимает вид

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

т. е. получается параболическая нормальная форма (2.23а).

*Эллиптический случай* не нуждается в специальном рассмотрении, так как формально сводится к гиперболическому с помощью преобразования, аналогичного преобразованию (2.24а),

$$\xi' = \xi + i\eta, \quad \eta' = \xi - i\eta.$$

Таким образом, левая, а следовательно, и правая части уравнения становятся вещественными.

## § 9. РАЗЛИЧИЕ МЕЖДУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО, ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО И ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ

Задача, представленная на фиг. 9, ставится только для дифференциальных уравнений гиперболического типа; в случае дифференциальных уравнений эллиптического типа рассматривается так называемая краевая задача. Пока поясним это различие только в общих чертах, имея в виду дать более строгое обоснование в последующих параграфах.

**1. Дифференциальные уравнения гиперболического типа.** Простейшим примером уравнений этого типа является уравнение колеблющейся струны, которое после приведения к нормальной форме записывается следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \quad \xi = x + y, \quad \eta = x - y, \quad y = ct. \quad (2.28)$$

Характеристиками являются здесь прямые  $\xi = \text{const}$ ,  $\eta = \text{const}$ , которые на фиг. 10 проходят под углом  $45^\circ$  к осям  $x, y$ . Общее решение уравнения (2.28) представляется в виде суммы функции от аргумента  $\xi$  и функции от аргумента  $\eta$

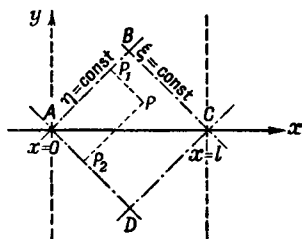
$$u = F_1(\xi) + F_2(\eta). \quad (2.29)$$

Это выражение представляет собой так называемое решение Даламбера. Проще всего было бы задать  $u$  вдоль отрезков характеристик  $AB$  и  $AD$ . При этом  $u$  определялось бы во всем прямоугольнике  $ABCD$ . Действительно, обозначим через  $P_1$  и  $P_2$  проекции точки  $P$  на характеристики  $AB$  и  $AD$ . Значение  $u$  в точке  $P$  можно вычислить, перенося в нее вдоль характеристик  $P_1P$  и  $P_2P$ , заданные в точках  $P_1$  и  $P_2$  значения  $F_1(\xi)$  и  $F_2(\eta)$ . Отсюда следует, что заданные значения распространяются вдоль характеристик. Если заданные значения имеют разрывы, то разрывы распространяются внутрь прямоугольника  $ABCD$ . Поэтому решение может и не быть аналитической функцией  $x$  и  $y$ <sup>1)</sup> в области его определения.

Однако в физических применениях задают значения  $u$  и  $\frac{\partial u}{\partial y}$  вдоль отрезка длины  $l$  оси  $x$  ( $l$  — длина струны), а именно

$$u = u(x, 0) \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t} = v(x, 0).$$

Этот отрезок соответствует кривой  $\Gamma$  на фиг. 9, на которой были заданы значения  $u$  и  $\frac{\partial u}{\partial n}$ , и удовлетворяет поставленным там условиям, т. е. не касается никакой характеристики. Чтобы иметь возможность применить



Фиг. 10. Колеблущаяся струна длины  $l$  и построенный на ней квадрат, образуемый характеристиками.

<sup>1)</sup> Функция двух вещественных переменных  $x, y$  называется аналитической в некоторой области, если она может быть представлена в окрестности каждой точки  $x_0, y_0$  данной области рядом по степеням  $x - x_0, y - y_0$  или эквивалентными формулами.

выводы, сделанные выше из формулы (2.29) к решению задачи в ее новой постановке, нужно подсчитать функции  $F_1$ ,  $F_2$ , исходя из заданных значений  $u(x, 0)$ ,  $v(x, 0)$ . Согласно формуле (2.29),  $F_1$  и  $F_2$  определяются с помощью следующих очевидных формул:

$$u(x, 0) = F_1(x) + F_2(x), \quad v(x, 0) = F_1'(x) - F_2'(x);$$

$$F_1(x) = \frac{1}{2} \left[ u(x, 0) + \int v(x, 0) dx \right],$$

$$F_2(x) = \frac{1}{2} \left[ u(x, 0) - \int v(x, 0) dx \right].$$

Следовательно, и теперь можно сделать вывод: заданные начальные значения вместе с возможными разрывами распространяются вдоль характеристик. Решение  $u(x, y)$  не является, вообще говоря, аналитической функцией  $x$  и  $y$ . Оно может быть определено только внутри прямоугольника, изображенного на фиг. 10, диагональю которого является отрезок, равный длине струны  $l$ .

Однако из физических соображений следует, что решение должно быть определено для всех последующих моментов времени, т. е. для всех значений  $y > 0$ . Это означает, что, кроме начальных значений, должны быть еще заданы некоторые граничные условия на концах струны, например условия закрепления:  $u = 0$  при  $x = 0$ , и  $x = l$ . Таким образом, получается полоса, ограниченная прямыми  $x = 0$  (ось  $y$ ) и  $x = l$ , вдоль которых заданы значения функции  $u$ , в то время как вдоль оси  $x$  в каждой точке отрезка  $0 \leq x \leq l$  задаются два значения: значение функции  $u$  и значение ее производной  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

Это связано с тем, что рассматриваемое дифференциальное уравнение является уравнением второго порядка. При этом следует отметить, что задаваемые два значения вдоль оси  $x$  относятся к одной и той же точке  $(x, 0)$ , в то время как для  $y > 0$  они относятся к двум различным точкам  $(0, y)$  и  $(l, y)$ .

Исключением из этого правила являются только сами характеристики, на которых достаточно задать только одно значение функции ( $F_1$  или  $F_2$ ).



В § 11 будет показано, что результаты, полученные на примере уравнения струны, переносятся на все уравнения гиперболического типа.

**2. Дифференциальные уравнения эллиптического типа.** В этом случае характеристики — мнимые и не имеют поэтому непосредственного значения для решения таких задач. Эти задачи связаны уже не с дугой линии  $\Gamma$ , как на фиг. 9, а с некоторой замкнутой областью  $S$  плоскости  $x, y$ . На границе этой области задаются не  $u$  и  $\frac{\partial u}{\partial n}$ , а только  $u$  или только  $\frac{\partial u}{\partial n}$  (или же их линейная комбинация).

Возможные разрывы граничных значений распространяются не внутрь области, а в область комплексных значений  $x$  и  $y$  — функция  $u$  ведет себя аналитически внутри заданной области.

Эти результаты известны из теории гармонических функций (двухмерная теория потенциала). Они справедливы для любого линейного дифференциального уравнения эллиптического типа; доказательство содержится в следующем параграфе.

Аналогом решения Даламбера (2.29) в теории потенциала является выражение

$$u = f_1(x + iy) + f_2(x - iy),$$

причем  $u$  будет вещественной функцией от  $x$  и  $y$  только тогда, когда функция  $f_2$  является комплексно сопряженной с функцией  $f_1$ , т. е. при выполнении условия

$$f_2 = f_1^*.$$

Отсюда следует возможность также и такой записи:

$$u = \operatorname{Re} [f(z)], \quad (2.30)$$

---

<sup>1)</sup> Обозначение  $f^*$  всюду употребляется вместо принятого в математике обозначения  $\bar{f}$ , так как черта над функцией применяется для обозначения средних (по времени) значений различных физических величин.  $\operatorname{Re}$  и  $\operatorname{Im}$  обозначают, как общепринято, вещественную и мнимую части.

где  $f$  — произвольная аналитическая функция комплексного переменного  $z = x + iy$ . Однако этот вид общего интеграла уравнения  $\Delta u = 0$  не может быть непосредственно использован для решения рассматриваемой граничной задачи.

**3. Дифференциальные уравнения параболического типа.** В этом случае два семейства характеристик вырождаются в одно. Для уравнения в нормальной форме и, в частности, для линейного уравнения теплопроводности характеристиками служат прямые, параллельные оси  $x$ . Поэтому на оси  $x$  следует задавать только одно граничное значение, аналогично случаю характеристик дифференциальных уравнений гиперболического типа (см. стр. 64). Это непосредственно вытекает из уравнения теплопроводности, представленного в виде (2.16); в самом деле, если величина  $u$  известна как функция  $x$ , то  $\frac{\partial u}{\partial y}$  однозначно определяется с помощью дифференциального уравнения. К тому же результату приходим и из физических соображений: термическое состояние стержня длины  $l$  может быть определено для любого момента времени, если только задана его начальная температура, а также соответствующие условия на концах стержня (если тепло должно распространяться только в направлении оси  $x$ , то боковую поверхность стержня следует считать адиабатически изолированной).

Как будет показано в § 12, температура стержня при  $y > 0$  всегда является аналитической функцией  $x$  и  $y$ , даже в том случае, когда начальная температура при  $y = 0$  задана как произвольная, возможно даже разрывная функция  $x$ . В этом отношении граничная задача параболического типа примыкает к задаче эллиптического типа.

С другой стороны, задача параболического типа относится не к области, ограниченной замкнутой кривой, а, как и в случае задачи гиперболического типа, к области, открытой с одной стороны, а именно к полосе, открытой сверху.

Таким образом, задачи параболического типа занимают промежуточное положение между задачами эллиптического и задачами гиперболического типов.

### § 10. ФОРМУЛА ГРИНА И ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И, В ЧАСТНОСТИ, ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Уравнение (2.17) представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка самого общего вида. Чтобы объединить все три типа этого уравнения, не будем пока приводить его к нормальной форме.

**1. Определение сопряженного дифференциального выражения.** Сначала введем понятие дифференциальной формы  $M(v)$ , сопряженной с формой  $L(u)$ , с помощью следующего, формального на первый взгляд, определения: выражение  $vL(u) - uM(v)$  должно быть вполне интегрируемым или, как можно сказать, выражением типа дивергенции, т. е. должно быть представимым в следующем виде:

$$vL(u) - uM(v) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \quad (2.31)$$

Задача заключается в том, чтобы выразить  $M$  через  $v$ , а  $X$  и  $Y$  — через  $u$ ,  $v$ . С этой целью используем следующие тождества:

$$vA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial^2 Av}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( Av \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial Av}{\partial x} \right), \dots \quad (2.32)$$

$$vB \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - u \frac{\partial^2 Bv}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( vB \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial Bv}{\partial x} \right) = \dots \quad (2.32a)$$

$$Dv \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial}{\partial x} (-Dv) = \frac{\partial}{\partial x} (Duv), \dots \quad (2.33)$$

Здесь точки означают соответствующие равенства, получаемые из равенств (2.32) и (2.33) заменой  $x$  на  $y$  и  $A, D$

---

<sup>1)</sup> Оператор дивергенции в собственном смысле определен только для векторных величин. Поскольку  $X$  и  $Y$ , как это видно из формул (2.35), не являются компонентами вектора, в тексте употребляется термин «выражение типа дивергенции». Очевидно,  $X, Y$  определены с точностью до слагаемых  $X_0, Y_0$ , для которых  $\frac{\partial X_0}{\partial x} + \frac{\partial Y_0}{\partial y} = 0$ . Поэтому выражения  $X$  и  $Y$ , определяемые формулами (2.35), могут быть заменены соответственно выражениями  $X_1 = X - \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ ,  $Y_1 = Y + \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ , где  $\Phi$  — произвольная функция от  $x, y$ , а также от  $u, v$ .

на  $C$ ,  $E$ , а также выражение, получаемое из правой части равенства (2.32а) перестановкой  $x$  и  $y$ . После простого подсчета находим

$$M(v) = \frac{\partial^2 A v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 B v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 C v}{\partial y^2} - \frac{\partial D v}{\partial x} - \frac{\partial E v}{\partial y} + F v, \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} X &= A \left( v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B \left( v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\ &\quad + \left( D - \frac{\partial A}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} \right) uv, \\ Y &= B \left( v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + C \left( v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\ &\quad + \left( E - \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial C}{\partial y} \right) uv. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Как легко видеть, соотношение между  $L$  и  $M$  взаимное:  $L(v)$  также является дифференциальным выражением, сопряженным с  $M(u)$ .

Особенно важную роль в математической физике играют те дифференциальные выражения, для которых  $L(u) = M(u)$ . Такие выражения называются *самосопряженными*. Сравнивая формулы (2.34) и (2.17), получаем следующее *условие самосопряженности*:

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = D, \quad \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} = E. \quad (2.36)$$

**2. Общая формула Грина и ее частный случай для дифференциальных уравнений эллиптического типа, приведенных к нормальной форме.** Рассмотрим в плоскости  $xu$  область  $S$ , ограниченную кривой  $C$ , и проинтегрируем выражение (2.31) по области  $S$ . Обозначим элемент площади  $S$  через  $d\tau$ , элемент дуги  $C$  — через  $ds$ , а направление обхода  $C$  пусть совпадает с направлением поворота, переводящего положительную полуось  $x$  в положительную полуось  $y$  (см. фиг. 11).

Применяя теорему Остроградского, получаем<sup>1)</sup>

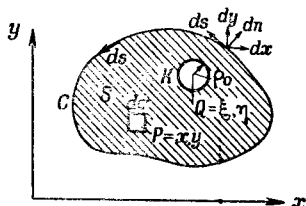
<sup>1)</sup> В частном случае, для вектора  $A$  в двухмерном пространстве с компонентами  $X, Y$ , эта теорема выражается в векторном виде формулой

$$\int \operatorname{div} A \, d\tau = \int A_n \, ds,$$

$$\begin{aligned} \int_S [vL(u) - uM(v)] d\sigma &= \int_S \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) d\sigma = \\ &= \int_C [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y)] ds. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Это равенство является наиболее общей формулировкой теоремы Грина, справедливой для всех трех типов. Если положить  $A=C=1$ ,  $B=0$ , то получим частный случай формулы Грина для эллиптического уравнения, приведенного к нормальному виду:

$$\begin{aligned} \int_S [vL(u) - uM(v)] d\sigma &= \\ &= \int_C \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds + \\ &+ \int_C [D \cos(n, x) + \\ &+ E \cos(n, y)] uv ds. \end{aligned} \quad (2.37a)$$



Фиг. 11. К теореме Грина для дифференциального уравнения эллиптического типа.

Интегрирование распространяется на область  $S$ , заключенную между внешней граничной кривой  $C$  и окружностью  $K$  радиуса  $\rho_0$  с центром в единичном источнике  $Q$ .

Формула (2.37a) является обобщением формулы Грина, известной из теории потенциала

$$\int (v \Delta u - u \Delta v) d\sigma = \int \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds,$$

а в координатном виде формулой

$$\int \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) d\sigma = \int [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y)] ds,$$

причем  $X=X(x, y)$ ,  $Y=Y(x, y)$  — компоненты вектора  $A(x, y)$ , являющегося функцией точки приложения вектора.

В тексте же  $X$  и  $Y$  обозначают дифференциальные выражения (2.35), зависящие не только от  $x, y$ , но и от вида функций  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ . При заданных функциях  $u$  и  $v$  выражения  $X$  и  $Y$  становятся определенными функциями  $x$  и  $y$ , а «выражение типа дивергенции»  $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}$  становится дивергенцией вектора  $A$  в обычном смысле векторного анализа. (Прим. ред.)

в которую формула (2.37а) переходит при  $D = E = 0$  (тот факт, что в теории потенциала также и  $F = 0$ , не играет здесь роли).

Если, в частности, функции  $u$  и  $v$  внутри области  $S$  удовлетворяют уравнениям

$$L(u) = 0, \quad M(v) = 0,$$

то левые части равенств (2.37), (2.37а) обращаются в нуль, так что, смотря по тому, исходим ли мы из формул (2.37) или (2.37а), получаем соответственно следующие соотношения:

$$0 = \int_C [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y)] ds, \quad (2.37б)$$

$$\begin{aligned} 0 = & \int_C \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds + \\ & + \int_C [D \cos(n, x) + E \cos(n, y) u v] ds. \end{aligned} \quad (2.37в)$$

Однако эти соотношения являются верными только тогда, когда  $u$  и  $v$ , вместе с их первыми и вторыми производными, непрерывны всюду в области  $S$ . Если, напротив,  $v$  имеет разрыв в точке  $Q$  с координатами  $x = \xi$ ,  $y = \eta$ , то нужно исключить эту точку из области интегрирования, как это обычно и делается при использовании формулы Грина. Следовательно, нужно окружить точку  $Q$  кривой  $K$ , в качестве которой лучше всего выбрать окружность сколь угодно малого радиуса  $\rho_0$ . Интегрирование в выражениях (2.37б) и (2.37в) следует тогда распространить на оба контура  $K$  и  $C$

$$\int_K \dots ds + \int_C \dots ds = 0,$$

причем обход по контурам  $K$  и  $C$  совершается в противоположных направлениях, а  $n$  в обоих случаях означает внешнюю нормаль.

Если использовать в интеграле по контуру  $K$  формулу (2.37в), а в интеграле по контуру  $C$  — формулу (2.37б),

то получим

$$\int_K \left( v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds + \int_K uv [D \cos(n, x) + E \cos(n, y)] ds = \\ = - \int_C [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y)] ds. \quad (2.38)$$

**3. Определение единичного источника и главного решения.** Будем предполагать, что разрыв функции  $v$  в точке  $Q$  имеет характер «единичного источника». Под этим подразумевается следующее.

Мощностью  $q$  произвольного источника  $Q$  назовем средний градиент его поля  $v$ . Обозначая через  $\rho$  расстояние от  $Q$ , положим

$$q = \int_K \frac{\partial v}{\partial \rho} ds, \quad (2.39)$$

где  $K$  имеет прежнее значение. Предполагая, что  $v$  в непосредственной близости от источника зависит главным образом от  $\rho$ , имеем

$$q = \int_{\varphi=-\pi}^{\varphi=+\pi} \frac{dv}{d\rho} \rho d\varphi = 2\pi \rho \frac{dv}{d\rho}. \quad (2.39a)$$

Единичный источник определяется, следовательно, равенствами

$$\frac{dv}{d\rho} = \frac{1}{2\pi\rho}, \quad v = \frac{1}{2\pi} \ln \rho + \text{const} \quad \text{для } \rho \rightarrow 0. \quad (2.39b)$$

Для случая произвольного  $\rho$  можно поэтому записать

$$v = U \ln \rho + V, \quad \rho = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad (2.40)$$

где  $U$  и  $V$  — аналитические функции  $x, y$  и  $\xi, \eta$ , а  $U$  при  $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$  принимает предельное значение  $1/2\pi$ .

Функцию, обладающую такими свойствами, мы называем *главным решением* соответствующего дифференциального уравнения  $M(v) = 0$ . Аналогично будем говорить о главном решении сопряженного уравнения  $L(u) = 0$ . Так как оно также должно соответствовать единичному источнику, то оно имеет такую же форму, как и выраже-

ние (2.40) при измененных, вообще говоря, значениях  $U$  и  $V$ . И в этом случае следует считать  $U$  и  $V$  аналитическими функциями, если коэффициенты  $D$ ,  $E$ ,  $F$  дифференциального уравнения являются аналитическими. В случае уравнения потенциала  $\Delta u = 0$  главное решение, определенное таким образом, совпадает в главной части с логарифмическим потенциалом [см. второй том наших лекций, § 19, формула (21)]. В этом случае, опуская постоянную интегрирования как несущественную, будем иметь не только в окрестности  $Q$ , но и для любого  $\rho$

$$v = \frac{1}{2\pi} \ln \rho. \quad (2.40a)$$

**4. Аналитический характер решения эллиптического дифференциального уравнения.** Вернемся к уравнению (2.38). Подставим в это уравнение главное решение  $v = u \ln \rho + V$ . Тогда при интегрировании по  $K$  конечную величину дает только член, имеющий множитель

$$\frac{\partial v}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{U}{\rho} + \dots = -\frac{1}{2\pi\rho} + \dots$$

Все другие члены левой части уравнения (2.38), как, например,  $\rho \ln \rho$ , или члены еще более высокого порядка дают нуль. Так как  $u$  непрерывно в точке  $Q$  и периметр окружности  $K$  равен  $2\pi\rho_0$ , то мы получаем для левой части

$$-\int_K u \frac{\partial v}{\partial n} ds = \frac{u_Q}{2\pi\rho_0} \int_K ds = u_Q;$$

таким образом, в силу равенства (2.38), имеем

$$u_Q = -\int_C [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y)] ds. \quad (2.41)$$

В этой формуле нас интересует зависимость правой части от  $\xi$ ,  $\eta$ , осуществляемая через посредство множителей  $v$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$ , входящих в  $X$  и  $Y$  и являющихся, в силу формулы (2.40), аналитическими функциями от  $\xi$ ,  $\eta$ .



Пусть  $Q$  — внутренняя точка области  $S$ . Так как  $Q$  не лежит на границе  $S$ , то  $\ln \rho$  также представляет собой регулярную аналитическую функцию, поскольку точка  $P(x, y)$  при интегрировании пробегает граничную кривую  $C$ , не совпадая с  $Q$ . Таким образом,  $u_Q = u(\xi, \eta)$  есть аналитическая функция ее аргументов внутри  $S$ . При этом аналитический характер граничных значений  $u$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$  не играет роли, так как определенный интеграл не является функцией от переменной интегрирования. Возможные разрывы граничных значений также не нарушают аналитичности  $u(\xi, \eta)$  внутри  $S$ . Разрывы не распространяются от границы внутрь  $S$  (характеристики являются мнимыми). Таким образом, мы доказали утверждения § 9.

Для самосопряженного дифференциального уравнения, приведенного к нормальному виду, в силу уравнений (2.36) имеем

$$D = E = 0.$$

В этом случае, представив правую часть равенства (2.41) в форме правой части равенства (2.37в), получим

$$u_Q = \int_C \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds. \quad (2.41a)$$

В частности, для уравнения потенциала, пользуясь выражением (2.40а) для  $v$ , находим

$$u_Q = u(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int \left( u \frac{\partial \ln \rho}{\partial n} - \ln \rho \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds. \quad (2.41б)$$

**5. Главное решение в пространстве произвольного числа измерений.** Здесь мы приведем несколько замечаний по поводу главных решений в случае числа измерений, большего (или меньшего) двух, причем для краткости ограничимся уравнением потенциала.

В трехмерном случае мы имеем ( $r$  — расстояние от источника  $Q$ ,  $4\pi r^2$  — площадь поверхности сферы), по аналогии с формулой (2.39б),

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{4\pi r^2}, \quad v = -\frac{1}{4\pi r} + \text{const.}$$

Это выражение с точностью до постоянного слагаемого совпадает <sup>1)</sup> с так называемым «ньютоновским потенциалом»

$$\Phi = \frac{A}{r}.$$

В четырехмерном случае имеем уравнение (2.5). Здесь соответствующие формулы принимают вид

$$\frac{\partial v}{\partial R} = \frac{1}{2\pi^2 R^3}, \quad v = -\frac{1}{4\pi^2 R^2} + \text{const},$$

где  $R$  — расстояние от  $Q$  и  $2\pi^2 R^3$  — площадь гиперсферы. Приводимая ниже таблица показывает последовательное ослабление порядка обращения в бесконечность функции  $v$  при уменьшении числа измерений, что приводит в случае одного измерения к непрерывности функции  $v$  в точке  $Q$ .

Число измерений	grad $v$	$v$
4	$\frac{1}{2\pi^2 R^3}$	$-\frac{1}{4\pi^2 R^2}$
3	$\frac{1}{4\pi r^2}$	$-\frac{1}{4\pi r}$
2	$\frac{1}{2\pi r}$	$-\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}$
1	$C_1$ или $C_2$	Постоянная

Действительно, в случае одного измерения уравнение потенциала имеет вид

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = 0,$$

откуда следует:  $\frac{dv}{dx} = \text{const}$ , причем постоянная интегрирования справа и слева от источника имеет различные значения  $C_1, C_2$ . Это следует из определения единичного

---

<sup>1)</sup> Добавленный здесь множитель  $\frac{1}{4\pi}$ , очевидно, соответствует системе «рациональных единиц» электродинамики, описанной в т. III.

источника, в силу которого должно быть  $C_1 - C_2 = 1$ . Разрывность перешла от функции  $v$  к ее градиенту (см. по этому поводу задачу II. 3).

**6. Определение функции Грина для самосопряженных дифференциальных уравнений.** Теперь рассмотрим поставленную в § 9 граничную задачу. Введенное нами главное решение (2.40) еще недостаточно для решения этой задачи. Ограничиваясь простейшим случаем самосопряженного уравнения, рассмотрим равенство (2.41a). Чтобы с его помощью вычислить  $u$  в точке  $Q$ , мы должны знать значения  $u$  и  $\frac{\partial u}{\partial n}$ , в то время как в граничной задаче заданы одни только значения  $u$  или  $\frac{\partial u}{\partial n}$ . Нас интересует, как нужно изменить главное решение  $v$ , чтобы член с  $\frac{\partial u}{\partial n}$  (соответственно  $u$ ) в формуле (2.41a) обратился в нуль. Назовем эту измененную функцию двух пар переменных  $x; y$  и  $\xi, \eta$  функцией Грина и обозначим ее через  $G(P, Q)$ . Она должна удовлетворять следующим трем условиям:

а)  $L(G) = 0$  внутри  $C$ ,

б)  $G = 0$  (соответственно  $\frac{\partial G}{\partial n} = 0$ ) на  $C$ ,

в)  $\lim_{P \rightarrow Q} G(P, Q) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \ln \rho$

(условие единичного источника).

Условия «а» и «в» такие же, что и для главного решения  $v$ , добавлено лишь условие «б». Если оно выполнено, то, подставляя вместо  $v$  в формулу (2.41a) функцию  $G$ , получим

$$u_Q = \int u \frac{\partial G}{\partial n} ds, \text{ соответственно } u_Q = - \int \frac{\partial u}{\partial n} G ds. \quad (2.42)^1$$

Таким образом, решение граничной задачи в обоих слу-

<sup>1)</sup> Вторая из формул (2.42) неверна. Функция Грина  $G$ , удовлетворяющая условию  $\frac{\partial G}{\partial n} = 0$  на  $C$ , имеет при  $P = Q$  не логарифмическую особенность, а точку ветвления. Формула (2.37) неприменима в силу многозначности функции  $v = G$ . (Прим. ред.)

чаях (при заданных граничных значениях  $u$  или соответственно  $\frac{\partial u}{\partial n}$ ) определяется явно. Правда, нахождение  $G$  вследствие добавочного условия «б» предполагает решение некоторой граничной задачи. Но эта задача является более простой, чем граничная задача для  $u$ , и в особых случаях, как мы увидим далее, может быть просто решена наглядным способом отражений. С другой стороны,  $G$  не является, как это требуется от  $u$ , регулярной внутри  $S$  функцией, а должна быть, подобно  $v$ , функцией с заданной особенностью типа единичного источника.

С помощью равенств (2.42) и (2.41а) задача сводится к простым квадратурам. Аналогичную роль играет функция Грина в общей теории интегральных уравнений. Она называется там «разрешающим ядром».

Мы упомянем еще интересное свойство функции  $G$ , которое следует из условий «а», «б», «в», именно *условие взаимности*:

$$\text{г) } G(P, Q) = G(Q, P).$$

Это условие выражает симметричность функции Грина относительно источника  $Q$  и точки  $P$ .

Для доказательства мы полагаем в формуле (2.37а)

$$M = L, \quad u = G(I, P), \quad v = G(I, Q).$$

Точку  $I = (\bar{\xi}, \bar{\eta})$  мы называем «точкой интегрирования». Так как функция  $u$  обращается в бесконечность при  $I = P$ , а функция  $v$  — при  $I = Q$ , то обе эти точки нужно заключить в два бесконечно малых круга  $K_P$  и  $K_Q$ , исключив их из области интегрирования. Для области  $S$ , заключенной между этими кругами, и граничной кривой  $C$  получаем, в силу условия «а», в левой части уравнения (2.37а) значение нуль; аналогично, в силу условия «б», интегрирование по граничной кривой  $C$  дает нуль для соответствующего члена правой части уравнения (2.37а). Остаются только контурные интегралы по обоим окружностям  $K_P$  и  $K_Q$ , которые, в силу условия «в», дают вместе

$$u_Q \int_{K_Q} \frac{ds}{2\pi\rho_Q} - v_P \int_{K_P} \frac{ds}{2\pi\rho_P} = G(Q, P) - G(P, Q).$$

Так как эта величина должна обращаться в нуль, то тем самым теорема взаимности доказана.

Формула (2.42) выражает решение граничной задачи для однородного дифференциального уравнения  $L(u) = 0$ . Сопоставим с ним решение граничной задачи для неоднородного дифференциального уравнения

$$L(u) = \rho, \quad (2.43)$$

где  $\rho(x, y)$  обозначает произвольную функцию, заданную в области  $S$ , непрерывную вместе со своими первыми и вторыми производными. Если мы будем исходить из уравнения (2.37а) и положим там  $v = G(P, Q)$ , то первый член левой части примет вид

$$\int_S \rho G(P, Q) d\tau_P$$

и прибавляется к интегралу (2.42), содержащему граничные значения функции  $u$  вдоль границы  $C$ . Поэтому вместо (2.42) получаем

$$u_Q = \int_S \rho G d\tau + \int_C u \frac{\partial G}{\partial n} ds. \quad (2.43a)$$

Соответственно, если на границе  $C$  задано не  $u$ , а  $\frac{\partial u}{\partial n}$ , то имеем

$$u_Q = \int_S \rho G d\tau - \int_C \frac{\partial u}{\partial n} G ds. \quad (2.43б)$$

Предыдущие выкладки непосредственно применяются ко всякому самосопряженному дифференциальному выражению в нормальной форме  $L(u) = \Delta u + Fu$ , в частности, к обычному уравнению колебаний ( $F = k^2 = \text{const}$ ), равно как и к уравнению потенциала ( $F = 0$ ).

В случае несамосопряженного дифференциального выражения  $L(u)$  формулы (2.42), (2.43а) и (2.43б) остаются также в силе. Однако в этом случае функция Грина  $G(x, y, \xi, \eta)$ , как это видно из формулы (2.37а), должна удовлетворять относительно переменных  $x, y$  уравнению  $M(\dot{G}) = 0$ , сопряженному к  $L$ ; далее, как вытекает из этого же уравнения, второе условие «б» также должно быть несколько изменено.

Таким образом, вместо условий «а» и «б» получаем условия

$$a') \quad M(G) = 0$$

и

$$b') \quad G = 0, \text{ соответственно } \frac{\partial G}{\partial n} - G[D \cos(n, x) + E \cos(n, y)] = 0.$$

Условие «в» сохраняется. Условие взаимности «г», однако, имеет теперь вид

$$г') \quad G(P, Q) = H(Q, P).$$

Здесь  $H$  есть функция Грина для уравнения, сопряженного с уравнением  $M = 0$ , и, следовательно, относительно переменных  $\xi, \eta$  удовлетворяет уравнению

$$L(H) = 0.$$

#### § 11. МЕТОД РИМАНА ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Нормальная форма линейного дифференциального уравнения второго порядка гиперболического типа получается из уравнения (2.17), если там положить  $A = C = 0$ ,  $B = \frac{1}{2}$ , в следующем виде:

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0. \quad (2.44)$$

Сопряженное дифференциальное уравнение в силу формулы (2.34) принимает вид

$$M(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial Dv}{\partial x} - \frac{\partial Ev}{\partial y} + Fv = 0. \quad (2.45)$$

Наряду с этим из формулы (2.35) получаем

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} \left( v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) + Duv, \\ Y &= \frac{1}{2} \left( v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + Euv. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Подставим выражения (2.44), (2.45), (2.46) в формулу Грина

$$\int_S [vL(u) - uM(v)] dz = \int_C [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y)] ds. \quad (2.47)$$

Для получения точных решений уравнений гидродинамики Риман выбрал в качестве области  $S$ , для эквивалентных им линейных дифференциальных уравнений в частных производных, треугольник  $PP_1P_2$ , изображенный на фиг. 12, состоящий из отрезков обеих характеристик  $PP_1$ ,  $PP_2$  и из дуги  $P_1P_2$  граничной кривой  $\Gamma$ .

На  $\Gamma$  заданы значения  $u$  и  $\frac{\partial u}{\partial n}$ , зная которые получаем также  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u}{\partial y}$  (стр. 57). Эта кривая должна удовлетворять поставленному на стр. 58 требованию отсутствия общих касательных с характеристиками. Входящую в уравнение (2.47) функцию  $v$  Риман определяет с помощью следующих условий:

$$M(v) = 0 \text{ в области } S \text{ относительно переменных } x, y; \quad (2.48a)$$

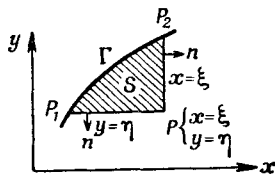
$$v = 1 \text{ в точке } P \text{ с координатами } x = \xi, y = \eta; \quad (2.48б)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} - Dv = 0 \text{ на характеристике } x = \xi; \quad (2.48в)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - Ev = 0 \text{ на характеристике } y = \eta.$$

В пояснение к этому сделаем следующие замечания:

а) Было бы нецелесообразно вместо условия (2.48б) требовать существования особенности типа (2.40), так как в случае дифференциального уравнения гиперболического типа не имеется изолированных особенностей, ибо последние распространяются вдоль характеристик. Поэтому мы избегаем также прежнего наименования «главное решение»



Фиг. 12. К интегрированию по методу Римана дифференциального уравнения гиперболического типа в нормальной форме с помощью характеристической функции  $v$ .

или «функция Грина» для  $v$ , предпочитая называть ее «характеристической функцией».

б) В силу условий (2.48в)  $v$  удовлетворяет на каждой из характеристик  $x = \xi$  и  $y = \eta$  только *одному* граничному условию, в то время как для  $u$  вдоль кривой  $\Gamma$  заданы *два* граничных условия. Это как раз соответствует сделанному в § 9 замечанию о том, что характеристики находятся в особом положении в смысле постановки граничной задачи. Если мы назовем задачу интегрирования, возникающую при задании граничных условий на характеристиках, *граничной задачей второго рода*, в противоположность *граничной задаче первого рода*, относящейся к обычной кривой  $\Gamma$ , то мы можем сказать, что способ Римана состоит в сведении *граничной задачи первого рода* к *гораздо более простой граничной задаче второго рода*.

Полагая в формуле (2.47) в силу условия (2.48а)  $M(v) = 0$  и подчиняя  $u$  условию  $L(u) = 0$ , получаем

$$0 = \int_{\Gamma} \dots + \int_{P_1}^P \dots + \int_P^{P_2} \dots \quad (2.49)$$

В последнем интеграле, в котором  $\cos(n, y) = 0$  и который содержит поэтому только  $X$ , мы преобразуем член, содержащий  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , с помощью интегрирования по частям:

$$\frac{1}{2} \int_P^{P_2} v \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{1}{2} v u \Big|_P^{P_2} - \frac{1}{2} \int_P^{P_2} u \frac{\partial v}{\partial y} dy,$$

откуда

$$\int_P^{P_2} X dy = \frac{1}{2} (vu)_{P_2} - \frac{1}{2} (vu)_P - \int_P^{P_2} u \left( \frac{\partial v}{\partial y} - Dv \right) dy. \quad (2.49a)$$

Для среднего интеграла в равенстве (2.49), в котором  $\cos(n, x) = 0$  и  $\cos(n, y) = -1$  ( $n$  — внешняя нормаль), получаем аналогичное выражение

$$- \int_{P_1}^P Y dx = \frac{1}{2} (vu)_{P_1} - \frac{1}{2} (vu)_P + \int_{P_1}^P u \left( \frac{\partial v}{\partial x} - Ev \right) dx. \quad (2.49б)$$



В формулах (2.49а) и (2.49б) оба интеграла в правых частях обращаются в нуль в силу условий (2.48в). Поэтому, если принять во внимание условие (2.48б), то равенство (2.49) приводится к следующему виду:

$$u_P = \int_{\Gamma} [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y)] ds + \\ + \frac{1}{2} [(vu)_{P_1} + (vu)_{P_2}]. \quad (2.50)$$

Значение  $u$  в произвольной точке  $P$  выражается здесь через значения  $u$  и ее первых производных на кривой  $\Gamma$  ( $u_{P_1}$  и  $u_{P_2}$  определяются также этими значениями). Мы можем, следовательно, констатировать: наша граничная задача *первого* рода для  $u$  сводится к нахождению  $v$ , т. е. к решению граничной задачи *второго* рода для  $v$ , определенной требованиями (2.48а), (2.48б), (2.48в).

Определение  $v$  не представляет значительных трудностей, особенно в случае гидродинамической задачи, рассматриваемой Риманом. В последнем случае имеем<sup>1)</sup>

$$D = E = -\frac{a}{x+y}, \quad F = 0. \quad (2.51)$$

Требования (2.48в) при этом означают:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{a}{\xi+y}, \quad v = C_1 (\xi+y)^{-a} \quad \text{на характеристике } x = \xi,$$

$$\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{a}{x+\eta}, \quad v = C_2 (x+\eta)^{-a} \quad \text{на характеристике } y = \eta.$$

Оба требования и в то же время условие (2.48б) будут выполнены, если положить

$$C_1 = C_2 = (\xi+\eta)^a, \quad v = \left(\frac{\xi+\eta}{x+y}\right)^a. \quad (2.52)$$

Наконец, чтобы удовлетворить условию (2.48а), Риман

<sup>1)</sup> Постоянная  $a$ , введенная в рассмотренном выше уравнении (2.51), зависит от показателя политропного уравнения состояния, положенного в основу гидродинамической задачи.

заменяет выражение (2.52) следующим:

$$v = \left( \frac{\xi + \eta}{x + y} \right)^a F(a + 1, -a, 1, z);$$

$$z = - \frac{(x - \xi)(y - \eta)}{(x + y)(\xi + \eta)}, \quad (2.53)$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (2.53a)$$

есть гипергеометрический ряд. В § 24, п. 4, мы вкратце изложим теоретико-функциональные свойства этого ряда и в приложении II к гл. IV докажем, что, действительно, выражение (2.53) для  $v$  удовлетворяет поставленному в уравнении (2.48a) требованию  $M(v) = 0$ . Здесь достаточно заметить, что на характеристиках  $x = \xi$  или  $y = \eta$ , где  $z = 0$  и поэтому  $F = 1$ , выражение (2.53) совпадает с выражением (2.52). Выражение (2.53) для  $v$  и интегральное представление (2.50) для  $u$  в этом случае полностью решают поставленную нами граничную задачу гиперболического типа.

## § 12. ФОРМУЛА ГРИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

### ГЛАВНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Дифференциальное уравнение теплопроводности (2.14), соответствующее случаю линейного проводника тепла,

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad y = kt, \quad (2.54)$$

не является самосопряженным.

Сопряженное с ним уравнение имеет вид

$$M(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2.55)$$

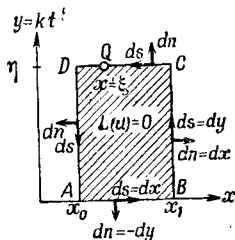
Это выражение для  $M(v)$  получается непосредственно из формул (2.34), если в них в соответствии с уравнением (2.54) положить

$$B = C = D = F = 0, \quad A = 1, \quad E = -1;$$

наряду с этим согласно формулам (2.35) получаем

$$X = v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x}, \quad Y = -uv. \quad (2.56)$$

Пользуясь выражениями (2.54), (2.55), (2.56) и интегрируя по некоторой области, лежащей в плоскости  $x, y$ , и ее границе, получим по схеме (2.32), так же как и в эллиптическом и гиперболическом случае, формулу Грина для уравнения теплопроводности в линейном случае. Поскольку  $x, y$  — переменные существенно различной природы ( $x$  — пространственная координата,  $y$  — координата времени), мы должны будем рассматривать здесь не области интегрирования, ограниченные кривыми линиями, а области, границы которых состоят из кусков прямых, параллельных оси  $x$  или оси  $y$ , как это показано на фиг. 13. В частности, вдоль стороны  $AB$   $ds = dx$ ,  $dn = -dy$ ,  $\cos(n, x) = 0$ ,  $\cos(n, y) = -1$ , следовательно,



Фиг. 13. Приведение общей граничной задачи теплопроводности к нахождению главного решения  $V$  для стержня с концами  $x_0$  и  $x_1$ . Единичный источник тепла лежит в точке  $Q$  и имеет координаты  $x = \xi$ ,  $y = \eta$ .

$$\int_A^B [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y)] ds = - \int_A^B Y dx.$$

То же самое справедливо для стороны  $CD$ , параллельной оси  $x$ , вдоль которой знаки  $ds$  и  $\cos(n, y)$  следует изменить на противоположные. Соответственно для сторон  $BC$  и  $AD$  (см. фиг. 13), параллельных оси  $y$ , получаем

$$\int_B^A [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y)] ds = + \int_B^A X dy.$$

Подставляя вместо  $L, M, X, Y$  их выражения (2.54),

(2.55), (2.56), получаем формулу Грина в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int \left[ v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - u \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dx dy = \\ = \int u v dx + \int \left( v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy, \end{aligned} \quad (2.57)$$

где первый интеграл правой части берется по обеим сторонам прямоугольника, параллельным оси  $x$ , второй — по сторонам, параллельным оси  $y$ .

Чтобы из формулы (2.57) получить формулу Грина для уравнения теплопроводности в двухмерном и трехмерном случаях, достаточно заменить в правой части

$$dx \text{ на } \begin{cases} d\sigma & (\text{двухмерный случай}), \\ d\tau & (\text{трехмерный случай}); \end{cases} \quad (2.58a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, dy \text{ на } \frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial v}{\partial n}, \begin{cases} dy ds & (\text{двухмерный случай}), \\ dy d\sigma & (\text{трехмерный случай}), \end{cases} \quad (2.58b)$$

а в левой части

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \text{ на } \Delta u, \Delta v. \quad (2.58b)$$

Таким образом, в трехмерном случае интегрирование в левой части необходимо производить по четырехмерному цилиндру, основание которого есть трехмерный проводник тепла, а образующие параллельны оси времени; в первом члене справа, в котором, в силу формулы (2.58b), элементом интеграла является теперь  $dy d\sigma = k dt d\sigma$ , интегрирование производится по трехмерной боковой поверхности этого цилиндра, параллельной оси времени.

Прежде чем приступить к анализу этих общих формул, мы определим функцию, аналогичную главному решению уравнения (2.39). Мы увидим, что вместо «единичного источника» появляется «тепловой полюс единичной силы».

Рассмотрим сначала линейный проводник тепла и соответствующее этому случаю дифференциальное уравнение теплопроводности  $L = 0$ ; переход к сопряженному уравнению  $M = 0$  и к случаю двух или трех измерений не представит труда.

Пусть проводник тепла простирается бесконечно в обе стороны; пусть его температура для  $t=0$  задана как функция от  $x$

$$u = f(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Согласно формуле (1.47) мы представляем  $f(x)$  посредством интеграла Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\omega(x-\xi)} d\xi. \quad (2.59)$$

Чтобы получить отсюда решение уравнения (2.54), дополним функцию  $\exp[i\omega(x-\xi)]$  до произведения

$$\varphi(y) e^{i\omega(x-\xi)}. \quad (2.60)$$

Подставляя выражение (2.60) в дифференциальное уравнение (2.54), получим

$$-\omega^2 \varphi(y) = \frac{d^2 \varphi(y)}{dy^2}, \quad \varphi(y) = C e^{-\omega^2 y}.$$

При этом  $C=1$  вследствие очевидного условия  $\varphi(0)=1$ . Таким образом, в формуле (2.59) необходимо заменить выражение

$\exp[i\omega(x-\xi)]$  выражением  $\exp[i\omega(x-\xi) - \omega^2 y]$ . (2.60a)

После этой замены интеграл Фурье (2.59) становится по своему внешнему виду сложнее. Однако по существу предыдущее преобразование упрощает интеграл Фурье. В самом деле, в двойном интеграле (2.59) внутренний интеграл по  $\xi$  сходится лишь тогда, когда функция  $f(x)$  имеет на бесконечности достаточно высокий порядок обращения в нуль, причем интегрирование по  $\xi$  должно предшествовать более простому интегрированию по  $\omega$ . В противном случае интегрирование приводило бы к совершенно бессмысленному и неопределенному результату. Введение же множителя  $\varphi(y) = \exp(-\omega^2 y)$  значительно ослабляет условия, относящиеся к поведению функции  $f(x)$  на бесконечности; кроме того, двойной интеграл становится теперь абсолютно сходящимся и допускает изменения порядка интегрирования. Множитель  $\varphi(y)$  при  $y > 0$  играет роль множителя сходимости.

Полагая  $y = kt$ , получаем

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2 kt + i\omega(x-\xi)} d\omega; \quad (2.61)$$

показатель  $-\omega^2 kt + i\omega(x-\xi)$ , встречающийся во внутреннем интеграле, запишем сокращенно в виде  $-\alpha\omega^2 + \beta$  и дополним до полного квадрата

$$-\alpha\omega^2 + \beta\omega = -\alpha\left(\omega - \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\beta^2}{4\alpha}.$$

Тогда, принимая во внимание, что  $\alpha = kt$ ,  $\beta = i(x-\xi)$ , и произведя подстановку  $p = \omega - \beta/2\alpha$ , получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2 kt + i\omega(x-\xi)} d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4kt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha p^2} dp. \quad (2.62)$$

Из элементарного курса анализа известен интеграл Лапласа

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2} dp = \sqrt{\pi} \quad \text{или} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha p^2} dp = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Правая часть уравнения (2.62), которую мы обозначаем через  $U$ , равна

$$U = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4kt}}, \quad (2.63)$$

и формула (2.61) принимает вид

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) U d\xi. \quad (2.63a)$$

Отсюда следует, что начальная температура, имеющаяся в точке  $x = \xi$ , распространяется в пространстве и времени независимо от начальной температуры в других точках по закону, определяемому функцией  $U$  (причина этого — линейность дифференциального уравнения и вытекающее отсюда свойство суперпозиции его решений). При  $t \rightarrow 0$  решение  $u(x, t)$  переходит в функцию  $f(x)$ , и уравне-

ние (2.63а) приводит к равенству

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) U d\xi.$$

Таким образом, при  $t \rightarrow 0$  функция  $U$  имеет в пределе характер  $\delta$ -функции, т. е. обращается в нуль для всех  $x \neq \xi$  и в бесконечность при  $x = \xi$  и притом так, что

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} U d\xi = 1 \quad (2.63б)$$

[эти свойства функции  $U$ , впрочем, легко получаются непосредственно из выражения (2.63)]. Следовательно, если временно будем делать различия между тепловой энергией и температурой, то можно сказать:  $U$  описывает пространственно-временное поведение *единичного источника тепла или теплового полюса единичной силы*.

В более общем случае положения теплового полюса, когда мы относим начальное состояние к моменту  $t = \tau$ ,

$$U = [4\pi k(t - \tau)]^{-1/2} \exp \left[ -\frac{(x - \xi)^2}{4k(t - \tau)} \right], \quad (2.63в)$$

а в частном случае при  $\tau = 0$ ,  $\xi = 0$

$$U = (4\pi kt)^{-1/2} \exp \left( -\frac{x^2}{4kt} \right). \quad (2.63г)$$

Прежде чем выяснить более глубокий смысл этих формул, распространим их на случай двух и трех измерений.

О возможности обобщения двойного интеграла Фурье на четырех- или соответственно шестикратный интеграл мы говорили уже в конце § 4. Это обобщение можно провести последовательно, полагая сначала

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \int f(\xi, y) e^{i\omega(x - \xi)} d\xi \quad (2.64)$$

и заменяя затем функцию  $f(\xi, y)$  двойным интегралом

$$f(\xi, y) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega' \int f(\xi, \eta) e^{i\omega'(x - \eta)} d\eta; \quad (2.64а)$$

сопоставляя формулы (2.64) и (2.64а), получаем

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\omega \int d\omega' \iint f(\xi, \eta) e^{i\omega(x - \xi) + i\omega'(y - \eta)} d\xi d\eta. \quad (2.64б)$$

С помощью того же самого процесса, который привел нас от формулы (2.59) к формуле (2.63а) для рассматриваемого двухмерного случая, получаем, исходя из формулы (2.64б),

$$u(x, y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int f(\xi, \eta) U d\xi d\eta, \quad (2.65)$$

где  $U$  есть произведение двух множителей вида (2.63),

$$U = (4\pi kt)^{-1} e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4kt}}. \quad (2.66)$$

Аналогично, в трехмерном случае  $U$  имеет вид произведения трех множителей вида (2.63),

$$U = (4\pi kt)^{-3/2} e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4kt}}. \quad (2.67)$$

Эти выражения, (2.66) и (2.67), представляют действие *единичных тепловых полюсов в плоскости и пространстве*. Они показывают, так же как и (2.63), связь между *теплопроводностью и вероятностными законами*.

Сравним сначала (2.63г) с гауссовым законом ошибок:

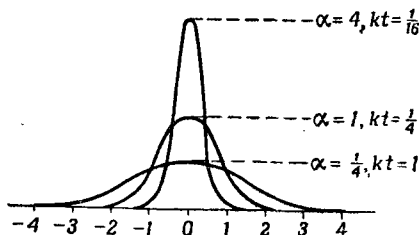
$$dW = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2} dx, \quad (2.68)$$

где  $dW$  есть вероятность того, что ошибка, возникающая при некотором способе измерения, точность которого задается с помощью «коэффициента точности»  $\alpha$ , заключена между  $x$  и  $x + dx$ . В нашем случае роль  $\alpha$  играет величина  $(4kt)^{-1}$ ; «бесконечная точность» соответствует, в случае теплопроводности, моменту  $t=0$ , т. е. абсолютной концентрации тепла в точке  $x=0$ ; «уменьшающаяся точность» соответствует увеличивающемуся  $t$ . Колоколообразные кривые на фиг. 14 изображают поведение  $U$  при убывающем  $\alpha$  и при возрастающем  $t$ . В формуле (2.68) функция  $U$  в точности равна плотности вероятности  $\frac{dW}{dx}$ .

Аналогично, выражения (2.66) и (2.67) можно сопоставить с функциями ошибок, соответствующими измерению координат точки плоскости или пространства. Коэффициент точности в обоих случаях, как и раньше, равен  $\alpha = (4kt)^{-1}$ . Отсюда естественно сделать заключение, что физические основы теплопроводности имеют не динамиче-



скую, а статистическую природу. Особенно отчетливо это видно при рассмотрении теплопроводности с точки зрения кинетической теории газов, которую лучше было бы называть «статистической теорией газов». С этим связан также следующий факт, который для пространственной задачи лучше всего пояснить с помощью формулы (2.67). При  $t=0$  вся тепловая энергия находится в точке  $(\xi, \eta, \zeta)$ .



Ф и г. 14. Гауссовы кривые ошибок для коэффициента точности  $\alpha=4$ ,  $1$ ,  $\frac{1}{4}$ , изображающие вместе с тем главное решение уравнения теплопроводности при  $kt = \frac{1}{16}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $1$ .

Однако уже через любой сколь угодно малый промежуток времени в сколь угодно далекой точке  $(x, y, z)$  температура  $U$  отлична от нуля. Следовательно, теплота распространяется с бесконечной скоростью. С точки зрения динамической это невозможно, так как никакая скорость не может превосходить предельной скорости  $c$ .

Из § 7 (стр. 54) мы знаем, что диффузия, электропроводность и вязкость удовлетворяют тому же уравнению, что и теплопроводность. В этих явлениях также обнаруживается их статистическая природа. Действительно, диффузия основывается на броуновском движении отдельных растворенных молекул в среде, статистический характер которой установлен как теорией, так и экспериментом. Далее, электронная теория металлов показывает, что в случае электропроводности электроны, взаимодействуя с атомной решеткой металла, диффундируют через последнюю, и т. д.

Для всех этих процессов функция  $U$ , определяемая формулами (2.63), (2.66) и (2.67), является главным решением

соответствующих дифференциальных уравнений  $L(u) = 0$ . Перейдем от  $U$  к главному решению  $V$  сопряженного дифференциального уравнения  $M(v) = 0$ . Это достигается, как показывает сравнение уравнений (2.54) и (2.55), простым изменением знака перед  $y = kt$ , причем следует изменить также знак перед  $y_0 = k\tau$  для того, чтобы тепловой полюс вновь находился в точке  $x = \xi$ ,  $t = \tau$ .

Таким образом, функция  $V$ , записанная по образцу (2.63в), имеет вид

$$V = [4\pi k(\tau - t)]^{-1/2} \exp \left[ -\frac{(x - \xi)^2}{4k(\tau - t)} \right]. \quad (2.69)$$

$V$  имеет, таким образом, при  $t = \tau$  существенную особенность и применимо только для прошедшего времени, т. е. для  $t < \tau$ , в противоположность главному решению  $U$ , которое согласно формуле (2.63) ведет себя регулярно только для будущего времени, т. е. при  $t > \tau$ .

Возвращаясь к формуле Грина (2.57), положим  $v = V$  и подчиним  $u$  условию  $L(u) = 0$ ; тогда мы получим

$$\int uV dx + k \int \left( V \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial V}{\partial x} \right) dt = 0. \quad (2.70)$$

Первый интеграл формулы (2.70) берется по двум горизонтальным сторонам четырехугольника фиг. 13, второй — по вертикальным сторонам.

Так как  $V$  подобно  $U$  является « $\delta$ -функцией», то первый интеграл, взятый по стороне  $t = \tau$ , равняется  $-u_Q$ . Если разбить второй интеграл уравнения (2.70) на его составные части, принадлежащие концам стержня  $x_0$ ,  $x_1$ , и обозначить это разбиение через  $\sum^{(x_1, x_0)}$ , то из уравнения (2.70) следует

$$u_Q = \int_{x_0}^{x_1} uV_0 dx + k \sum^{(x_1, x_0)} \int_0^{\tau} \left( V \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial V}{\partial x} \right) dt. \quad (2.71)$$

$V_0$  здесь обозначает выражение (2.69), взятое при  $t = 0$ .

Так как источник  $Q$  может быть расположен в любой точке  $x = \xi$ ,  $t = \tau$ , то это выражение для функции  $u$  действительно всюду. Однако формула (2.71) не решает поставленной в § 9 граничной задачи, так как она предполагает знание не только начальных и граничных значений  $u$ , но и граничных значений производной  $\frac{\partial u}{\partial x}$  на кон-

цах стержня, в то время как мы ранее видели, что там могут быть заданы только  $u$  или только  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . Для того чтобы прийти к решению граничной задачи, мы должны заменить в (2.71) функцию  $U$  функцией Грина  $G$ , которая на концах стержня удовлетворяет условию  $G=0$ , обращая тем самым в формуле (2.71) в нуль член с  $\frac{\partial u}{\partial x}$ . Как мы увидим в следующей главе, в случае линейного проводника  $G$  может быть получено из  $V$  методом отражений.

В задаче II.4 дается применение формулы (2.63) к ламинарному потоку жидкости, обладающей внутренним трением. Очевидно, предыдущие рассуждения непосредственно переносятся на двух- или трехмерный случай. При этом нужно только производить интегрирование в первом интеграле формулы (2.71) по основанию, а во втором — по боковой поверхности трех- или четырехмерного пространственно-временного цилиндра в соответствии с указаниями (2.58а), (2.58б). Однако в двух- и трехмерных задачах построение соответствующих функций Грина  $G$  с помощью метода отражений возможно только для исключительных случаев (см. § 17).

С другой стороны, без помощи функции Грина, непосредственно из уравнения (2.71) вытекает аналитический характер функции  $u$ , о котором говорится в конце § 9. В самом деле, координаты  $\xi, \tau$  (или  $\xi, \eta, \tau$ , соответственно  $\xi, \eta, \zeta, \tau$ ) точки  $Q$  входят в правую часть уравнения (2.71) только через посредство главного решения  $V$ , которое является аналитической функцией от этих переменных. Таким образом, решения рассматриваемого дифференциального уравнения параболического типа в области их определения являются аналитическими функциями<sup>1)</sup> своих аргументов, совершенно так же как и в эллиптическом случае. Однако в параболическом случае область определения решения является открытой сверху полосой и не имеет своей границей замкнутую кривую, как это имеет место в эллиптическом случае (см. замечание в конце § 9). Для уравнения параболического типа граничная задача примыкает с этой точки зрения к задаче гиперболического типа.

<sup>1)</sup> Это неверно. Автор не учитывает того, что при  $t=\tau$  функция  $V$  имеет существенно-особую точку. (Прим. ред.)

## Г л а в а III

### ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

#### § 13. ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫЙ ЛИНЕЙНЫЙ ПРОВОДНИК ТЕПЛА

В предыдущих параграфах уже рассматривался процесс выравнивания температуры для случая бесконечного линейного проводника, представляемый формулой (2.63а)

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) U d\xi, \quad U = (4\pi kt)^{-1/2} \exp \left[ -\frac{(x-\xi)^2}{4kt} \right]. \quad (3.1)$$

Дополнительно отметим, что эта формула с помощью подстановки

$$\xi = x + \sqrt{4kt} z \quad (3.1a)$$

приводится к формуле Лапласа

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + \sqrt{4kt} z) e^{-z^2} dz. \quad (3.2)$$

Полезно сравнить выражение (3.2) с решением Даламбера (2.29), содержащим две произвольные функции  $F_1, F_2$ , что соответствует гиперболическому типу уравнения колебаний, тогда как формулы (3.1) и (3.2) содержат одну произвольную функцию  $f$ , в соответствии с параболическим типом уравнения теплопроводности.

В случае полубесконечного проводника тепла,  $0 < x < \infty$ , мы встречаемся со следующими граничными условиями, задаваемыми на конце  $x=0$ .

а) Задана температура  $u(0, t)$ , в частности *изотермическое* граничное условие

$$u = 0. \quad (3.3a)$$

б) Задан приток тепла  $G(0, t)$  [обозначения те же, что и в § 7, уравнения (2.9)–(2.12)], в частности *адиабатическое* граничное условие

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (3.3b)$$

в) Линейная комбинация предыдущих условий соответствует наличию так называемой *внешней теплопроводности*. Граничное условие имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu = 0. \quad (3.3в)$$

Здесь  $n$  обозначает внешнюю нормаль, направленную в нашем случае в сторону отрицательной оси  $x$ . Под термином «внешняя теплопроводность» обычно понимают совместное действие конвекции, излучения в окружающую среду и (обычно пренебрегаемой) передачи тепла за счет проводимости этой среды. В частности, условие (3.3в) может быть приближенно получено из закона излучения Стефана-Больцмана, который, как известно, утверждает: тепловое излучение, отнесенное к единице времени и площади поверхности для тела при абсолютной температуре  $T$ , пропорционально  $T^4$ .

Допустим, что конец стержня<sup>1)</sup> находится в среде с температурой  $T_0$ , причем эта среда излучает в направлении стержня количество тепла (отнесенное к единице времени и площади), выражающееся формулой  $aT_0^4$ , где  $a$  — множитель пропорциональности<sup>2)</sup>.

Тогда суммарное количество энергии, излученной по направлению нормали к элементу поверхности  $d\sigma$  конца стержня, будет равно

$$dQ_n = a(T^4 - T_0^4) d\sigma dt.$$

Так как обе температуры  $T$  и  $T_0$  обычно далеки от абсолютного нуля, то имеем

$$dQ_n \sim 4aT_0^3 u d\sigma dt, \quad \text{где } u = T - T_0 \ll T \text{ и } \ll T_0. \quad (3.4)$$

<sup>1)</sup> Мы говорим о «стержне» и «конце стержня», хотя линейный проводник тепла не должен обязательно иметь форму тонкого стержня и может иметь поперечное сечение конечных размеров и произвольной формы, но состояние проводника должно зависеть только от одной координаты, кроме того, в понятие «стержня» включается требование, чтобы на его боковой поверхности выполнялось адиабатическое условие  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ ; см. об этом также конец § 16.

<sup>2)</sup> Множитель  $a$  в основном совпадает с употребляемой в теории излучения постоянной закона Стефана-Больцмана.

Это количество теплоты  $dQ_n$  должно покрываться притоком тепла  $q$  изнутри стержня, который определяется по закону Фурье

$$dQ_n = -\kappa \frac{\partial u}{\partial n} dz dt. \quad (3.4a)$$

Сравнивая формулы (3.4) и (3.4a), получаем

$$4aT_0^3 u = -\kappa \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu = 0, \quad h = \frac{4aT_0^3}{\kappa}, \quad (3.5)$$

что согласуется с условием (3.3в), причем  $h$  существенно положительная величина.

Рассмотрим сначала условия (3.3a) и (3.3б). Они выполняются, если мы разложим функцию  $f$ , заданную только на положительной полуоси  $0 < x < \infty$ , в интеграл по синусам или соответственно по косинусам, что в силу формул (1.50a) и (1.50б) эквивалентно продолжению функции  $f$  на отрицательную полуось  $-\infty < x < 0$  нечетным, соответственно четным образом. Чтобы учесть зависимость от времени, требуемую уравнением теплопроводности, мы добавляем в подынтегральное выражение множитель  $\exp(-\omega^2 kt)$ , как это делалось в формуле (2.61), и после интегрирования по  $\omega$  получаем вместо формулы (3.1) следующее выражение:

$$u(x, t) = \int_0^\infty f(\xi) U(\xi) d\xi \mp \int_0^\infty f(\xi) U(-\xi) d\xi. \quad (3.6)$$

Второй из этих интегралов, который первоначально нужно было брать от  $-\infty$  до 0, изменением знака переменного интегрирования преобразован в интеграл от 0 до  $+\infty$ ; при этом главное решение  $U(\xi)$  преобразуется к виду

$$U(-\xi) = (4\pi kt)^{-1/2} \exp \left[ -\frac{(x+\xi)^2}{4kt} \right]. \quad (3.7)$$

Функция  $U(-\xi)$  представляет действие единичного теплового полюса, помещенного в точке  $x = -\xi$ , в момент

времени  $t=0$ . Формула (3.6), таким образом, принимает вид

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} f(\xi) G d\xi, \quad G = U(\xi) \mp U(-\xi). \quad (3.8)$$

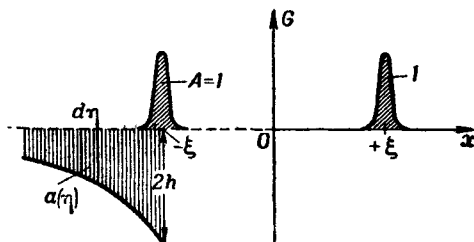
Введенная здесь функция Грина  $G$  удовлетворяет всем условиям, поставленным на стр. 91. В самом деле, в области  $0 < x < \infty$  имеется только один тепловой полюс, так как дополнительный тепловой полюс  $x = -\xi$  лежит вне этой области; требование, чтобы функция  $G$  удовлетворяла относительно переменных  $\xi, \tau$  сопряженному уравнению, также выполняется, так как в данном случае  $\tau = 0$ , и поэтому отпадает необходимость перемены знака  $\tau$  при переходе к сопряженному уравнению.

Более наглядным является другой метод решения данной задачи, при котором исходят из температуры  $U(x, \xi)$ , обусловленной единичным тепловым полюсом при  $x = \xi$ . Отражая единичный тепловой полюс относительно граничной точки  $x = 0$ , придадим функции  $U$  положительный или отрицательный знак, в зависимости от того, задано ли условие (3.3а) или же условие (3.3б). Построив, таким образом, сначала функцию Грина  $G$ , рассмотрим затем суперпозицию тепловых источников  $f(x) dx$ , воспроизводящих заданную начальную температуру  $f(x)$ . В дальнейшем мы будем большей частью применять этот второй, более наглядный метод и ограничимся построением функции Грина, с помощью которой может быть тотчас же написано решение для любой начальной температуры  $f(x)$  по образцу формулы (3.8). Чтобы испытать плодотворность этого метода, применим его для случая несколько более сложного граничного условия (3.3в). (В задаче III.1, совпадающей с рассматриваемой задачей, будет применен для сравнения способ Фурье).

Сначала покажем, что здесь нельзя ограничиться введением единственного изолированного зеркального отражения единичного источника при  $x = -\xi$ , а приходится строить непрерывное размещение тепловых источников, заполняющих полупрямую  $\eta < -\xi$ . Пусть  $A$  — мощность изолированного источника тепла при  $x = -\xi$ , а  $a(\eta) d\eta$  — мощность непрерывно распределенных источников при

$x = \eta < -\xi$  (см. фиг. 15). Тогда выражение

$$G = U(\xi) \mp U(-\xi)$$



Фиг. 15. Функция Грина для полубесконечного линейного проводника тепла при наличии внешней теплопроводности. Тепловой полюс находится в точке  $x = +\xi$ , его зеркальное изображение — в точке  $x = -\xi$ , а полубесконечная прямая  $-\infty < x < -\xi$  сплошь покрыта непрерывным спектром тепловых источников, примаыкающим к зеркальному изображению теплового полюса.

для функции Грина предыдущей задачи изменяется следующим образом:

$$\begin{aligned} G &= U(\xi) + AU(-\xi) + \int_{-\infty}^{-\xi} a(\eta) U(\eta) d\eta = \\ &= (4\pi kt)^{-1/2} \left[ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4kt}} + Ae^{-\frac{(x+\xi)^2}{4kt}} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{-\xi} a(\eta) e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4kt}} d\eta \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Отсюда при  $x = 0$  следует

$$(4\pi kt)^{1/2} G = (1 + A) e^{-\frac{\xi^2}{4kt}} + \int_{-\infty}^{-\xi} a(\eta) e^{-\frac{\eta^2}{4kt}} d\eta. \quad (3.10)$$

Пользуясь формулой (3.9), вычислим производную  $\frac{\partial G}{\partial x}$ , причем производная  $\frac{\partial}{\partial x}$  под знаком интеграла заменяется равной ей производной  $-\frac{\partial}{\partial \eta}$ .



Для точки  $x=0$  получаем

$$(4\pi kt)^{1/2} \frac{\partial G}{\partial x} = \xi \left( \frac{1}{2kt} - \frac{A}{2kt} \right) e^{-\frac{\xi^2}{4kt}} - \int_{-\infty}^{-\xi} a(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} e^{-\frac{\eta^2}{4kt}} d\eta. \quad (3.10a)$$

Интегрирование по частям приводит формулу (3.10a) к виду

$$\begin{aligned} (4\pi kt)^{1/2} \frac{\partial G}{\partial x} = & \left[ (1-A) \frac{\xi}{2kt} - a(-\xi) \right] e^{-\frac{\xi^2}{4kt}} + \\ & + \int_{-\infty}^{-\xi} a'(\eta) e^{-\frac{\eta^2}{4kt}} d\eta. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Если подставить выражения (3.10) и (3.11) в условие (3.3в), заменяя в этом условии  $\frac{\partial}{\partial n}$  на  $-\frac{\partial}{\partial x}$ , то получается тождество для всех значений  $t > 0$ . Приравнявая нулю отдельные члены этого тождества, различным образом зависящие от  $t$ , получим для постоянных  $A$  и  $a(-\xi)$  уравнения

$$A - 1 = 0, \quad A = +1, \quad (3.12)$$

$$a(-\xi) + h(1+A) = 0, \quad a(-\xi) = -2h, \quad (3.13)$$

а для функции  $a(\eta)$  получается дифференциальное уравнение

$$a'(\eta) - ha(\eta) = 0. \quad (3.14)$$

Решение дифференциального уравнения (3.14), удовлетворяющее условию (3.13), имеет вид

$$a(\eta) = be^{h\eta} = -2he^{h(\xi+\eta)}.$$

Таким образом, определены постоянная  $A$  и дополнительная функция  $a(\eta)$ .

Отсутствие других решений нашей задачи, т. е. единственность найденного решения, будет доказано в § 18 этой главы.

Полученная функция Грина выражается следующей формулой:

$$(4\pi kt)^{1/2} G = e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4kt}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4kt}} - \\ - 2he^{h\xi} \int_{-\infty}^{-\xi} e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4kt}} e^{h\eta} d\eta. \quad (3.15)$$

Для числовых расчетов можно привести интеграл (3.15) к табулированному интегралу ошибок<sup>1)</sup>.

В отдельных случаях, когда начальная температура  $f(x)$  имеет особенно простой вид, формулы (3.1) или (3.2) являются более удобными для решения задачи по сравнению с методом функции Грина, несмотря на всю наглядность этого метода.

Поясним это на одном примере, в котором рассмотренные выше вопросы теплопроводности трактуются на языке задач диффузии.

Пусть цилиндрический сосуд в своей нижней части  $0 < x < H$  заполнен концентрированным раствором (например,  $\text{CuSO}_4$ ); пусть над ним расположен чистый растворитель (вода), простирающийся до сколь угодно большой высоты  $x = \infty$ . Концентрацию раствора обозначим через  $u$ , положив ее в начальный момент равной 1. На дне цилиндра для всех последующих моментов времени соблюдается условие  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ , так как растворенные молекулы не могут проникнуть через дно.

Этому условию легко удовлетворить, продолжив сосуд мысленно вниз и продолжив четным образом относительно  $x=0$  начальное распределение концентрации в верхней части. (В случае конечной высоты столба воды нужно было бы применить более сложный способ отражения, изложенный в § 16.) Начальные условия для  $u$  тогда принимают вид

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \dots -H < x < +H, \\ 0 & \dots H < |x| < \infty. \end{cases}$$

<sup>1)</sup> См., например, Янке и Эмде, Таблицы функций, М.—Л., 1949.

Формула (3.2) дает

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2} dz. \quad (3.16)$$

Полагая в формуле (3.1а)  $\xi = \mp H$ , найдем значение пределов интегрирования  $z_1$  и  $z_2$

$$z_1 = \frac{-H - x}{\sqrt{4kt}}, \quad z_2 = \frac{H - x}{\sqrt{4kt}}. \quad (3.17)$$

Обозначая, как обычно, интеграл ошибок через

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz, \quad (3.18)$$

получим чрезвычайно простую формулу

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\Phi(z_2) - \Phi(z_1)]. \quad (3.19)$$

#### § 14. ЗАДАЧА О ТЕМПЕРАТУРЕ ЗЕМЛИ

Мы считаем поверхность земли плоской и предполагаем, что усредненный ход температуры  $f(t)$  является периодической функцией времени  $t$  (например, среднегодовая или среднесуточная температура). Для определения температуры внутри земли<sup>1)</sup> мы могли бы использовать метод, представленный на фиг. 13, полагая  $x_0 = 0$  (поверхность земли),  $x_1 = \infty$  (большая глубина) и принимая в качестве граничного значения температуры  $u_0$  при  $x = 0$  эмпирически известную функцию  $f(t)$ . В нашем случае, однако, удобнее разложить эту функцию непосредственно в ряд Фурье, записанный в комплексной форме (1.12)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{2\pi i n t / T}, \quad (3.20)$$

где  $T$  — длина года или соответственно дня. Температуру

<sup>1)</sup> Мы не касаемся здесь физической проблемы «геотермических глубинных ступеней», т. е. вопроса об увеличении температуры внутри земли вследствие радиоактивных или ядерных процессов.

внутри земли на глубине  $x$  представим тогда соответствующим рядом

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n u_n(x) e^{2\pi i n t/T}. \quad (3.21)$$

Каждый член этого ряда в отдельности должен удовлетворять уравнению теплопроводности. Это приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению для  $u_n$

$$\frac{d^2 u_n}{dx^2} = p_n^2 u_n \dots, \text{ где } p_n^2 = \frac{2\pi i n}{kT}. \quad (3.22)$$

Далее, для того чтобы выражение (3.21) при  $x=0$  переходило в выражение (3.20), должно выполняться условие

$$u_n(0) = 1. \quad (3.22a)$$

В зависимости от того, положительно или отрицательно  $n$ , мы полагаем

$$2in = (1 \pm i)^2 |n|$$

и

$$p_n = (1 \pm i) q_n, \quad q_n = \sqrt{\frac{|n|\pi}{kT}} > 0. \quad (3.23)$$

Тогда общий интеграл (3.22) записывается в виде

$$u_n(x) = A_n e^{(1 \pm i) q_n x} + B_n e^{-(1 \pm i) q_n x}. \quad (3.24)$$

Здесь  $A_n$  должно равняться нулю, так как в противном случае при  $x \rightarrow \infty$  температура становилась бы бесконечно большой. Далее, условие (3.22a) дает  $B_n = 1$ . Подставляя определенное таким образом выражение (3.24) в формулу (3.21), получим

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{-(1 \pm i) q_n x} e^{2\pi i n t/T}. \quad (3.25)$$

Переходя к вещественному выражению функции  $u(x, t)$ , положим при  $n > 0$

$$C_n = |C_n| e^{i\gamma_n}.$$

Для  $n = -n < 0$ , в силу формулы (1.13), нужно положить  $C_m = C_{-n} = |C_n| e^{-i\gamma_n}$ . Таким образом, из формулы (3.25) следует

$$u(x, t) = \\ = C_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |C_n| e^{-q_n x} \cos \left( 2\pi n \frac{t}{T} + \gamma_n - q_n x \right). \quad (3.26)$$

Формула (3.26) показывает, что амплитуда  $|C_n|$   $n$ -ой элементарной волны с проникновением в глубину земли уменьшается по показательному закону, причем тем сильнее, чем больше  $n$  и  $x$ . Одновременно происходит отставание фазы  $\gamma_n$  элементарной волны. Оно также тем сильнее, чем больше  $n$  и  $x$ .

Представляют интерес числовые данные. Для средних сортов почвы теплопроводность приблизительно равна

$$k = 2 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/\text{сек.}$$

Отсюда для годовичного периода  $T = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 3,15 \cdot 10^7$  сек. и для  $x = 1 \text{ м} = 100 \text{ см}$  следует

$$q_1 x = 0,7 \sim \frac{\pi}{4}, \quad e^{-q_1 x} \sim \frac{1}{2}. \quad (3.27)$$

На глубине 4 м «отставание» фазы  $q_1 x$  составляет, следовательно,  $\pi$ , а затухание амплитуды становится равным  $2^{-4} = \frac{1}{16}$ . Уже для первой и самой главной элементарной волны температурного колебания на глубине 4 м господствует зима в тот момент, когда на поверхности имеем лето; амплитуда равняется небольшой части амплитуды на поверхности. Для элементарных волн высшего порядка ( $n > 1$ ) отставание фазы и затухание амплитуды становится соответственно большими вследствие множителя  $\sqrt{|n|}$  в  $q_n$ . Можно сказать: земля действует подобно гармоническому анализатору (см. стр. 15), выделяя из всех элементарных колебаний главное колебание, правда, сильно ослабленное.

В качестве специального примера рассмотрим годовичную кривую «резко континентального климата», характеризуемого равномерной летней температурой и равномерной отрицательной зимней температурой, которые мы условно положим равными  $\pm 1$ . Эта годовичная кривая гра-

фически представится с помощью ступенчатой линии на фиг. 1, аналитически же — формулой (1.15)

$$u(0, t) = \frac{4}{\pi} \left( \sin \tau + \frac{1}{3} \sin 3\tau + \frac{1}{5} \sin 5\tau + \dots \right),$$

$$\tau = 2\pi \frac{t}{T}. \quad (3.28)$$

Чтобы получить соответствующий ряд для  $u(x, t)$ , нужно согласно формуле (1.14а) определить коэффициенты  $C$  в формуле (3.26) следующим образом:

$$C_{2n} = 0, \quad |C_{2n+1}| = \frac{2}{\pi(2n+1)}, \quad \gamma_{2n+1} = -\frac{\pi}{2}.$$

Однако несколько проще будет, если непосредственно перейти от ряда (3.28) для  $u(0, t)$  к соответствующему ряду для  $u(x, t)$  по тому же образцу, по которому выше из ряда (3.20) был получен ряд (3.26). Тогда можно сразу написать

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \left[ e^{-q_1 x} \sin(\tau - q_1 x) + \frac{1}{3} e^{-q_3 x} \sin(3\tau - q_3 x) + \dots \right]. \quad (3.28a)$$

Если дополнить числовые величины (3.27) величинами  $q_3, q_5$ , то при  $x = 100$  см получаем

$$u(x, t) \approx \frac{4}{\pi} \left[ \frac{1}{2} \sin\left(\tau - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{3 \cdot 3,4} \sin\left(3\tau - \frac{\sqrt{3}\pi}{4}\right) + \frac{1}{5 \cdot 4,8} \sin\left(5\tau - \frac{\sqrt{5}\pi}{4}\right) + \dots \right], \quad (3.28б)$$

а при  $x = 400$  см

$$u(x, t) \approx \frac{4}{\pi} \left[ \frac{1}{16} \sin(\tau - \pi) + \frac{10^{-2}}{3 \cdot 1,3} \sin(3\tau - \sqrt{3}\pi) + \frac{10^{-2}}{5 \cdot 5,3} \sin(5\tau - \sqrt{5}\pi) + \dots \right]. \quad (3.28в)$$

Сравнение формул (3.28), (3.28б) и (3.28в) обнаруживает влияние глубины как на амплитуду, так и на фазу температуры.

Отсюда можно прийти к заключению о пользе глубокого погребка: в нем не только уменьшаются температур-

ные колебания сравнительно с поверхностью земли, но и температура его зимой выше, чем летом (предполагается отсутствие доступа воздуха).

Картина становится более резко выраженной, если перейти от среднегодовой к среднесуточной температуре. Значения  $q_n$  увеличиваются тогда в  $\sqrt{365} \approx 19$  раз. Поэтому затухание и отставание по фазе, соответствующие в случае годовой кривой глубине  $x$ , наступают для суточной кривой уже на глубине  $x/19$ . Уменьшение амплитуды в 16 раз и отставание по фазе на половину суток (полночь вместо полудня) наступают в случае суточной кривой уже на глубине  $x = 400/19 = 21$  см. Суточные температурные колебания проникают с заметной интенсивностью только на несколько сантиметров в глубь почвы; весь процесс происходит в пределах тонкого поверхностного слоя почвы.

Рассмотренный термический процесс является аналогом скин-эффекта электротехники.

Хотя скин-эффект на практике наблюдается главным образом на цилиндрических проводах, он должен иметь место и на проводниках, имеющих плоскую поверхность, как это показано в т. III наших лекций, обладая почти такой же интенсивностью. Суточная температурная кривая соответствует в случае электричества высокочастотному переменному току, а годовичная кривая — току с периодом, в 365 раз большим. Действительно, из § 7 мы знаем, что дифференциальные уравнения в обоих случаях, термическом и электрическом, полностью совпадают по форме и отличаются только физическим смыслом входящих в них величин.

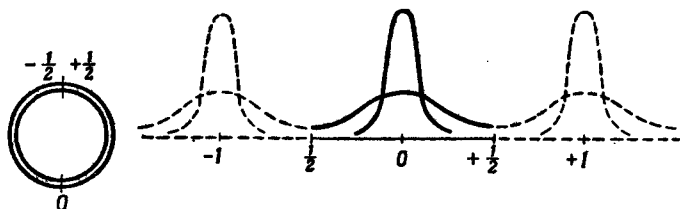
## § 15. ЗАДАЧА О КОЛЬЦЕ

Перейдем от бесконечного и полубесконечного проводников тепла, рассмотренных в § 12, 13, к проводнику конечной длины, которую для простоты можно положить равной единице.

На концах проводника при  $x = \pm \frac{1}{2}$  зададим, вместо граничных условий «а», «б», «в» (стр. 92, 93), более простые условия периодичности. Это означает, что на обоих концах

проводника функция  $u$ , а также все ее производные принимают одинаковые значения.

Тем самым по существу оба конца стержня отождествляются, и стержень рассматривается как кольцо. Форма кольца не играет роли, так как мы считаем его поверхность адиабатически изолированной, как у всех линейных проводников. На фиг. 16 кольцо имеет форму круга.



Фиг. 16. Теплопроводность в кольце.

Тепловой полюс, находящийся в точке  $x=0$ , и его периодические повторения. Распределение температуры при  $kt < 1$  (крутая кривая) и при  $kt > 1$  (пологая кривая).

Начальное распределение температуры на кольце мы задаем с помощью произвольной, но симметричной относительно точки  $x=0$  функции  $f(x)$ . Ее ряд Фурье является рядом по косинусам, который автоматически удовлетворяет условию периодичности на концах. Согласно формулам (1.40) и (1.41), в которых нужно положить  $a = \frac{1}{2}$ , этот ряд имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(2\pi nx) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0 = \int_{-1/2}^{+1/2} f(z) dz, \\ A_n = 2 \int_{-1/2}^{+1/2} f(z) \cos(2\pi nz) dz. \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Чтобы отсюда получить соответствующее решение  $u(x, t)$  уравнения теплопроводности, нужно умножить  $n$ -й член на  $e^{-(2\pi n)^2 kt}$  и написать вместо ряда (3.29) ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-4\pi^2 n^2 kt} \cos(2\pi nx). \quad (3.30)$$



Теперь рассмотрим случай, когда функция  $f(x)$  является « $\delta$ -функцией», т. е. удовлетворяет условиям

$$f(x) = 0 \text{ при } x \neq 0, \text{ но } \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} f(x) dx = 1.$$

Тогда, как следует из формул (3.29),

$$A_0 = 1, A_1 = A_2 = \dots = 2.$$

Подставляя эти значения коэффициентов в формулу (3.30), получаем ряд, который по исторически установившейся традиции принято обозначать буквой  $\vartheta$

$$u(x, t) = \vartheta(x, t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-4\pi^2 n^2 k t} \cos(2\pi n x). \quad (3.31)$$

Тэта-функция,  $\vartheta(x, t)$ , была впервые введена Якоби в теории эллиптических функций и имеет большое значение для многих числовых расчетов<sup>1)</sup>. Тот факт, что  $\vartheta$ -функция удовлетворяет уравнению теплопроводности, является в теории эллиптических функций довольно случайным свойством этой функции, тогда как для нас это свойство непосредственно послужило для определения  $\vartheta$ .

В соответствии с общепринятыми в теории  $\vartheta$ -функций обозначениями мы переходим к новому переменному  $\tau$ , полагая

$$\tau = 4\pi i k t. \quad (3.32)$$

Эта переменная  $\tau$  не имеет ничего общего с координатой времени, входящей в разность  $t - \tau$ , от которой зависит рассмотренное выше главное решение  $U$ , отличается от времени по размерности и является в нашем частном случае чисто мнимым числом. (В теории эллиптических функций  $\tau$  является, вообще говоря, комплексным числом с положительной мнимой частью, в точности равной отношению обоих периодов эллиптической функции.)

<sup>1)</sup> Причиной особенно хорошей сходимости ряда (3.31) является то обстоятельство, что сумма этого ряда вместе со всеми своими производными периодична и не имеет разрывов при  $x = +\frac{1}{2}$  и  $x = -\frac{1}{2}$ . Поэтому, как было указано в § 3, члены этого ряда уменьшаются быстрее любой степени  $n$ .

Пользуясь этим обозначением, мы получаем формулу, тождественную с формулой (3.31),

$$\vartheta(x|\tau) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\pi\tau n^2} \cos(2\pi nx). \quad (3.33)$$

Этот ряд быстро сходится для больших  $|\tau|$ , т. е. для больших значений произведения  $kt$ . Он, следовательно, хорошо представляет позднейшие стадии процесса затухания функции единичного источника на нашем кольце, не давая, однако, точного представления о начале процесса.

Поэтому, наряду с применявшимся до сих пор методом Фурье, воспользуемся другим методом, основанным, подобно методу отражения, на периодическом продолжении начального состояния (см. фиг. 16, правая половина).

Развернув разрезанное кольцо в отрезок  $-\frac{1}{2} < x < +\frac{1}{2}$  оси  $x$ , отложим вправо и влево по оси  $x$  равные ему отрезки. Заданному в кольце источнику тепла  $U_0(x, t)$  будут соответствовать новые тождественные ему источники тепла, расположенные в точках  $x = n$ ; соответственно получаем

$$U_n(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \exp\left(-\frac{(x-n)^2}{4kt}\right). \quad (3.34)$$

Ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} U_n(x, t) \quad (3.35)$$

быстро сходится для малых значений  $kt$  и дает новое аналитическое представление решения. Главную роль в ряде (3.35) играют  $U_0$  и ближайшие к  $U_0$  члены ряда, так как благодаря множителю  $\exp(-n^2/4kt)$ , содержащемуся в выражении (3.34), члены ряда  $U_n$  перестают действовать при большом  $n$ . Поэтому ряд (3.35) является искомым дополнением к ряду (3.33). Фиг. 16 показывает характер обоих рядов: пологая кривая изображает решение для больших  $kt$  согласно формуле (3.33), а крутая кривая — для малых  $kt$  согласно формуле (3.35).

Любопытно, что ряд (3.35) можно просто выразить через  $\vartheta$ -функцию.

Для этого достаточно вынести множитель  $\exp(-x^2/4kt)$  за знак суммы и соединить члены с индексами  $\pm n$ .

Тогда формула (3.35) принимает следующий вид:

$$u(x, t) = (4\pi kt)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right) \times \\ \times \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{4kt}} \cos \frac{inx}{2kt}\right). \quad (3.35a)$$

Если в соответствии с уравнением (3.32) перейти от переменного  $t$  к переменному  $\tau$ , то получим ряд

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{\tau}} \cos 2\pi n \frac{x}{\tau}.$$

Этот ряд отличается от ряда (3.33) только тем, что под знаком косинуса стоит  $x/\tau$  вместо  $x$ , а в показателе стоит  $-1/\tau$  вместо  $\tau$ . Скобка в формуле (3.35a) представляет собой поэтому не что иное, как

$$\vartheta\left(\frac{x}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right).$$

Если перейти к  $\tau$  также и в множителях перед скобкой и принять во внимание, что выражения (3.33) и (3.35) являются решениями одной и той же задачи теплопроводности, то получим соотношение

$$\vartheta(x|\tau) = \left(\frac{\tau}{i}\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\pi i x^2}{\tau}\right) \vartheta\left(\frac{x}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right)$$

или, обратно,

$$\vartheta\left(\frac{x}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}} \exp\left(\frac{\pi i x^2}{\tau}\right) \vartheta(x|\tau). \quad (3.36)$$

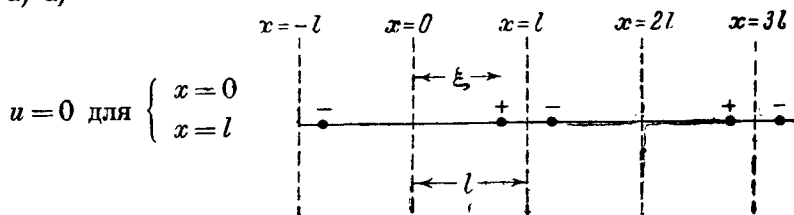
Формула (3.36) представляет собой известную формулу преобразования  $\vartheta$ -функций. Она служит в теории эллиптических функций для перехода от медленно сходящегося (для малых  $\tau$ ) ряда  $\vartheta(x|\tau)$  к быстро сходящемуся ряду  $\vartheta\left(\frac{x}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right)$ .

В нашем случае она означает переход от метода Фурье в теории теплопроводности к методу тепловых полюсов. В квантовой теории формула преобразования (3.36) играет важную роль при определении энергии вращения двухатомных молекул и при подсчете их удельной теплоты для низких температур.

## § 16. ОГРАНИЧЕННЫЙ ЛИНЕЙНЫЙ ПРОВОДНИК ТЕПЛА

Считая в предыдущих параграфах длину кольца равной единице, что было удобно с точки зрения применения теории  $\vartheta$ -функций, мы тем самым неявно вводили новую безразмерную координату  $x' = x/l$ , которую обозначали попрежнему через  $x$ . Для рассматриваемого теперь случая стержня длины  $l$  нужно поэтому, применяя рассмотренные выше формулы, заменять в них  $x$  через  $x/l$ ;  $\tau$  при этом имеет то же значение, что и в формуле (3.32). Приведем сначала табличный обзор граничных задач типа «а» и «б» и их решений как методом Фурье, так и методом тепловых полюсов. Нужно отметить, что в противоположность задаче, рассмотренной в § 13, в случае ограниченного проводника метод тепловых полюсов приводит к бесконечной последовательности отражений, так как необходимо последовательно отражать относительно концов стержня не только первичный тепловой полюс, но и его зеркальные изображения. Например, в зале с двумя параллельными зеркалами люстра отражается в каждом зеркале не один, а бесконечное число раз.

а) а)



$$f(x) = \sum B_n \sin \pi n \frac{x}{l}, \quad B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \pi n \frac{x}{l} dx,$$

$$G = \vartheta \left( \frac{x - \xi}{2l} \middle| \tau \right) - \vartheta \left( \frac{x + \xi}{2l} \middle| \tau \right).$$

б) б)



$$f(x) = \sum A_n \cos \pi n \frac{x}{l}, \quad A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \pi n \frac{x}{l} dx,$$

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx,$$

$$G = \vartheta \left( \frac{x - \xi}{2l} \middle| \tau \right) + \vartheta \left( \frac{x + \xi}{2l} \middle| \tau \right).$$

а) б)

 $u = 0$  для  $x = 0$  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  для  $x = l$ 

$$f(x) = \sum B_n \sin \pi \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{x}{l},$$

$$B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{x}{l} dx,$$

$$G = \vartheta \left( \frac{x - \xi}{4l} \middle| \tau \right) - \vartheta \left( \frac{x + \xi}{4l} \middle| \tau \right) + \\ + \vartheta \left( \frac{x + \xi - 2l}{4l} \middle| \tau \right) - \vartheta \left( \frac{x - \xi - 2l}{4l} \middle| \tau \right).$$

б) а)

 $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  для  $x = 0$  $u = 0$  для  $x = l$ 

$$f(x) = \sum A_n \cos \pi \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{x}{l},$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{x}{l} dx,$$

$$G = \left( \frac{x - \xi}{4l} \middle| \tau \right) + \vartheta \left( \frac{x + \xi}{4l} \middle| \tau \right) - \\ - \vartheta \left( \frac{x + \xi - 2l}{4l} \middle| \tau \right) - \vartheta \left( \frac{x - \xi - 2l}{4l} \middle| \tau \right).$$

Что касается данных в таблице выражений для  $f(x)$ , то легко убедиться, что они удовлетворяют написанным слева граничным условиям «а) а» ... «б) а»; тем же гра-

ничным условиям удовлетворяют функции  $u(x, t)$ , которые получаются из рядов для  $f(x)$  по методу Фурье, т. е. путем

умножения членов ряда на  $e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 kt}$  и соответственно

на  $e^{-\left[\frac{\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)}{l}\right]^2 kt}$ , откуда и следует, что функции  $u(x, t)$  являются решениями соответствующих граничных задач.

Схематические чертежи, приводимые в таблице, показывают положение и знак тепловых полюсов, построенных по методу отражения в каждом из четырех отрезков. В двух первых случаях тепловые полюсы имеют, как нетрудно видеть, период  $2l$ , а в двух последних случаях период  $4l$ . Суммирование по полюсам дает каждый раз функцию Грина  $G = \sum U$ , которая для краткости выражается в виде комбинации  $\vartheta$ -функций. В случаях «а) а» и «б) б» функция  $G$  является комбинацией двух  $\vartheta$ -функций, а в случаях «а) б» и «б) а» — комбинацией четырех  $\vartheta$ -функций.

Чтобы получить эти формулы из формул предыдущего параграфа, в которых период равнялся единице, а тепловой полюс был расположен в точке  $x=0$ , нужно заменить, в случаях «а) а» и «б) б»  $x$  на  $x-\xi_i/2l$ , а в случаях «а) б» и «б) а»,  $x$  на  $x-\xi_i/4l$ , причем  $\xi_i$  обозначает положение какого-нибудь теплового полюса. В силу периодичности  $\vartheta$ -функции все полюсы  $\xi_i = \xi$  равноправны.

В частности, в наших формулах  $\xi_i$  соответствует тепловому полюсу исходной области  $0 < x < l$  или одной из примыкающих областей. С помощью функции Грина, как известно, можно получить решение граничной задачи при любом начальном распределении температуры

$$u(x, 0) = f(x)$$

по общему правилу

$$u(x, t) = \int_0^l f(\xi) G(x, \xi, t) d\xi. \quad (3.37)$$

Перейдем к граничному условию (3.3в), заданному при  $x=l$ , тогда как при  $x=0$  пусть задано граничное условие (3.3а). Чтобы заранее удовлетворить условию «а»

при  $x=0$ , положим

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \lambda_n \pi \frac{x}{l}. \quad (3.38)$$

Таким образом, в решении задачи при граничных условиях «а) а» вместо ряда целых чисел используется ряд чисел

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots,$$

которые нужно определить так, чтобы для  $x=l$  каждый член суммы (3.38) удовлетворял нашему условию «в». Это приводит к трансцендентному уравнению

$$\lambda_n \frac{\pi}{l} \cos \lambda_n \pi + h \sin \lambda_n \pi = 0$$

или

$$\operatorname{tg} \lambda_n \pi = -\frac{\pi \lambda_n}{hl}. \quad (3.39)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (1.68а), если положить в последнем  $\alpha = -\pi/hl$ ; графический метод решения этого уравнения представлен на фиг. 7.

Таким образом, мы встретились здесь с типичным случаем *ангармонического анализа Фурье*. Значения коэффициентов  $B_n$  ряда (3.38) можно поэтому прямо взять из формулы (1.69б). Окончательное решение рассматриваемой граничной задачи (задача «а) в») будет тогда получено путем дополнения каждого члена суммы (3.38) множителем, зависящим от времени в соответствии с уравнением теплопроводности. Решение имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \lambda_n \pi \frac{x}{l} \exp \left[ -\left( \frac{\lambda_n \pi}{l} \right)^2 kt \right]. \quad (3.40)$$

Как было указано в § 6, изложенный там формальный способ вычисления коэффициентов  $B$  следует заменить менее формальным способом, имеющим физический смысл. Сделаем это очень кратко и притом так, чтобы в дальнейшем при разложении функции в ряд по «собственным функциям» общего вида можно было сослаться на рассматриваемый здесь простейший частный случай.

Рассмотрим два произвольных члена ряда (3.38)

$$u_n = \sin \frac{\lambda_n \pi x}{l}, \quad u_m = \sin \frac{\lambda_m \pi x}{l}. \quad (3.41)$$

Они удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^2 u_n}{dx^2} + k_n^2 u_n = 0, \quad \frac{d^2 u_m}{dx^2} + k_m^2 u_m = 0, \quad \begin{cases} k_n = \lambda_n \frac{\pi}{l}, \\ k_m = \lambda_m \frac{\pi}{l}. \end{cases} \quad (3.41a)$$

Из уравнений (3.41a) следует

$$u_m \frac{d^2 u_n}{dx^2} - u_n \frac{d^2 u_m}{dx^2} = (k_m^2 - k_n^2) u_m u_n. \quad (3.41b)$$

Левая часть уравнения (3.41b) является полной производной. [При выводе формулы Грина аналогичную роль играет «выражение типа дивергенции» (см. § 10).] Взятый по основной области  $0 < x < l$  интеграл от левой части уравнения (3.41b) приводится к подстановкам в точках  $x=0$ ,  $l$ . (При выводе формулы Грина — к интегралам вдоль границы области.)

Это обстоятельство дает возможность определить значение интеграла от правой части уравнения (3.41b) без всяких вычислений

$$(k_m^2 - k_n^2) \int_0^l u_m u_n dx = u_m \frac{du_n}{dx} - u_n \frac{du_m}{dx} \Big|_{x=0}^{x=l}. \quad (3.42)$$

Выражение  $u_m \frac{du_n}{dx} - u_n \frac{du_m}{dx}$  при  $x=0$  обращается в нуль, так как при  $x=0$  согласно формулам (3.41)  $u_n = u_m = 0$ ; при  $x=l$  это выражение также равно нулю, так как каждый член ряда (3.38) в отдельности удовлетворяет граничному условию «в», откуда следует, что при  $x=l$  производные  $\frac{du_n}{dx}$  пропорциональны значениям  $u_n$ .

Таким образом, из равенства (3.42) непосредственно вытекает при  $k_m \neq k_n$  условие ортогональности (1.69).

В задаче III.2 будет показано, что и нормирующий интеграл (1.69б) также получается почти без вычислений.

Вся применявшаяся в этом параграфе терминология, а также все соответствующие математические формули-



ровки основывались на предположении, что боковая поверхность стержня полностью защищена от теплоотдачи.

Покажем теперь, как нужно применить предыдущие формулы в случае неполной тепловой изоляции.

Предполагая, например, что стержень имеет цилиндрическую форму, введем для элемента  $d\sigma$  боковой поверхности, вместо адиабатического условия «б», условие «в», которое означает, что через  $d\sigma$  в единицу времени проходит количество тепла

$$- \kappa \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \kappa h u d\sigma.$$

Применим это условие к цилиндрическому элементу стержня высоты  $dx$  и с радиусом поперечного сечения  $b$ ; боковая поверхность элемента стержня равна  $2\pi b dx$ , а внешняя нормаль  $n$  направлена в сторону возрастания радиуса. Количество теплоты, теряемое через боковую поверхность за время  $dt$ , равно

$$dQ_1 = \kappa h u \cdot 2\pi b dx dt. \quad (3.43)$$

Алгебраическая сумма количеств тепла, теряемого тем же цилиндрическим элементом через сечения  $x = \text{const}$  и  $x + dx = \text{const}$ , равняется

$$dQ_2 = - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pi b^2 dx dt. \quad (3.44)$$

Общее количество теплоты  $dQ_1 + dQ_2$ , выделяемой элементарным цилиндром, равно согласно формуле (2.9) произведению  $\text{div } G dt$  на соответствующий объем; таким образом, в рассматриваемом теперь случае получаем

$$\text{div } G \pi b^2 dx dt = dQ_1 + dQ_2. \quad (3.45)$$

Отсюда следует в силу формул (3.43) и (3.44)

$$\text{div } G = \frac{2\kappa h}{b} u - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.46)$$

С другой стороны,  $\text{div } G$  в соответствии с уравнением (2.11) пропорционально падению температуры  $-\frac{\partial u}{\partial t}$  элемента стержня. После деления на  $\kappa$  получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{2h}{b} u. \quad (3.47)$$

Таким образом, в результате наличия «внешней теплопроводности» через боковую поверхность в правой части дифференциального уравнения появляется добавочный член  $(2h/b)u$ , отсутствовавший в прежнем уравнении.

Заметим при этом, что в основе нашего вывода лежит предположение линейности термического состояния также и при наличии бокового излучения, т. е. и в этом случае термическое состояние определяется только одной координатой  $x$ . Для достаточно малого поперечного сечения такое предположение вполне допустимо.

Чтобы учесть при интегрировании добавочный член уравнения (3.47), достаточно положить

$$u = ve^{-\lambda t}.$$

Тогда получим для  $v$ , после деления на  $\exp(-\lambda t)$ , дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial v}{\partial t} + \left( \frac{2h}{b} - \frac{\lambda}{k} \right) v.$$

Полагая

$$\lambda = \frac{2hk}{b}, \quad (3.48)$$

приходим снова к обычному уравнению теплопроводности. Таким образом, все формулы этой главы, относящиеся к изолированному стержню, остаются справедливыми и при наличии внешней теплопроводности, если только произвести замену переменных

$$u = ve^{-\frac{2hk}{b}t}.$$

Остроумное экспериментальное определение отношения коэффициентов внешней и внутренней теплопроводности, а также отношений коэффициентов теплопроводности и электронной проводимости рассмотрено в задачах III.3 и IV.4.

## § 17. ОТРАЖЕНИЕ В ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Перейдем теперь от линейных проводников тепла к трехмерным, граница которых состоит из плоских граней и

к которым можно применить простой метод отражения. Для соответствующих двумерных проводников, граница которых состоит из прямолинейных отрезков, получаются совершенно аналогичные результаты (см. ниже).

Простейшим случаем является *полупространство* с граничными условиями

$$u = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0.$$

Зная функцию теплового полюса для полного пространства [см. формулу (2.67)], можно непосредственно написать функцию Грина  $G$  для полупространства. Если принять плоскость, ограничивающую полупространство, за координатную плоскость  $z=0$  и обозначить координаты источника через  $\xi, \eta, \zeta$ , то получим

$$\begin{aligned} (4\pi kt)^{3/2} G &= e^{-\frac{r^2}{4kt}} \mp e^{-\frac{r'^2}{4kt}}, \\ r^2 &= (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2, \\ r'^2 &= (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Так как при  $z=0$  имеют место равенства

$$r^2 = r'^2 \quad \text{и} \quad \frac{\partial(r^2)}{\partial z} = -\frac{\partial(r'^2)}{\partial z},$$

то в первом случае (когда берется знак минус)

$$G|_{z=0} = 0,$$

а во втором случае (когда берется знак плюс)

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{z=0} = -\left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{z=0} = 0.$$

В случае граничного условия (3.3в) полученное раньше выражение (3.15) для функции Грина может быть таким же образом непосредственно обобщено на трехмерное пространство.

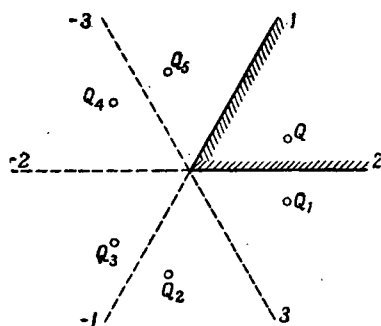
В этом случае функция Грина определяется следующей формулой:

$$(4\pi kt)^{3/2} G = e^{-\frac{r^2}{4kt}} + e^{-\frac{r'^2}{4kt}} - 2he^{h\zeta} e^{-\frac{r^2}{4kt}} \int_{-\infty}^{-\zeta} e^{-\frac{(z-\beta)^2}{4kt}} e^{h\beta} d\beta, \quad (3.50)$$

где

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2.$$

Переходя от полупространства к произвольной трехмерной области, ограниченной плоскостями, заметим прежде



Фиг. 17. Клин с углом раствора  $\frac{\pi}{3}$ . Однократное и сплошное покрытие пространства при последовательном отражении.

всего, что метод отражения применим далеко не для всех областей этого вида. Для применимости этого метода необходимо, чтобы последовательные зеркальные изображения исходной области однократно и полностью, без всяких пробелов, покрывали все пространство.

Убедимся в этом на примере клина. Если угол раствора клина равен  $60^\circ$  (см. фиг. 17), то при последовательном зеркальном отражении он воспроизводится пять раз, на

чем процесс заканчивается; поэтому функция Грина для клина может быть получена путем суммирования шести тепловых полюсов. При граничном условии  $u = 0$  три полюса, а именно первоначальный полюс  $Q$  и его изображения  $Q_2, Q_4$  положительны, а остальные три изображения  $Q_1, Q_3, Q_5$  отрицательны.

Уже фиг. 17 показывает, что метод отражения может быть применен только к таким многогранникам, у которых каждый двухгранный угол содержится целое число раз в  $\pi$  (а не в  $2\pi$ ). Уже угол  $2\pi/3 = 120^\circ$  приводит к двукратному покрытию пространства, внешний угол прямоугольного клина — к трехкратному, а несоизмеримый с  $\pi$  угол — к бесконечно кратному покрытию пространства.

Особый интерес представляет клин с углом раствора в  $2\pi$ , т. е. внешнее пространство для полуплоскости<sup>1)</sup>.

В этом случае применение метода отражения требует изучения главного решения в двойном римановом пространстве<sup>2)</sup>, у которого линией ветвления является ребро полуплоскости<sup>3)</sup>.

Простейшими многогранниками рассматриваемого вида являются внутренние области куба и прямоугольного параллелепипеда (внешние области ведут к чрезвычайно сложным разветвлениям).

Зеркальные изображения первичного точечного источника образуют восемь прямоугольных пространственных решеток, примыкающих одна к другой соответственно восьми комбинациям знаков  $\pm\xi$ ,  $\pm\eta$ ,  $\pm\zeta$ . Каждая из этих решеток, взятая в отдельности, дает трижды периодическое решение дифференциального уравнения, так сказать,  $\vartheta$ -функцию высшего порядка (см. ниже).

Если разбить квадрат на четыре равнобедренных прямоугольных треугольника с помощью прямых, проведенных из центра, и построить прямую призму, имеющую основанием один из этих треугольников, то также получится многогранник рассматриваемого вида.

Дальнейшими примерами являются прямая призма, имеющая основанием равносторонний треугольник, и половина такой призмы, полученная делением ее на две части плоскостью, проходящей через высоту основания перпендикулярно к последнему.

Правильная шестиугольная призма приводит не к простому, а к двухкратному покрытию пространства,

---

<sup>1)</sup> Пространство с удаленной от него полуплоскостью. (Прим. ред.)

<sup>2)</sup> Т. е. математическом пространстве, состоящем из одного реального физического экземпляра, заполняющего все пространство, и второго воображаемого экземпляра физического пространства, примыкающего к первому вдоль поверхности разреза. Край поверхности разреза называется линией разветвления двойного риманова пространства. (Прим. ред.)

<sup>3)</sup> Это решение было получено автором уже в 1894 г. сначала для уравнения теплопроводности, а затем перенесено на проблему преломления света (Math. Ann., т. 45). Более подробно см. в книге: Ф. Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, М., 1937, гл. XX.

так как двухгранные углы такой призмы равны  $2\pi/3$  и не содержатся в  $\pi$  целое число раз.

Куб можно в силу предыдущего разбить на четыре призмы, допускающие применение метода отражения. Кроме того, при соответствующем разбиении куба получаются тетраэдры, допускающие применение метода отражения, а именно рассмотренные Ляме «тетраэдры  $1/6$  и  $1/24$ », из которых первый заполняет куб при 6-кратном, а второй при 24-кратном отражении, а также тетраэдр Шенфлиса, открытый им при его общих исследованиях по структуре кристаллов<sup>1)</sup>.

Все пространственные области этого вида обладают тем общим свойством, что для них могут быть решены методом отражения не только задачи теплопроводности, но и задачи для любых других физических процессов, обладающих изотропной симметрией, например акустические, оптические и электрические задачи.

В частности, на связь этого метода с оптикой указывает уже сам термин «отражение».

Класс областей, для которых применим метод отражения, значительно расширяется, если аналогично случаю кольца (см. начало § 15) заменить *граничные условия* гораздо более простым условием периодичности. Тогда можно рассматривать вместо прямоугольного параллелепипеда произвольный параллелепипед; заданный в исходной области полюс функции Грина должен быть в этом случае периодически продолжен на все области, получающиеся из исходной с помощью группы переносов. Вместо эллиптической  $\vartheta$ -функции тогда появились бы  $\vartheta$ -функции высших порядков (гиперэллиптические или абелевы  $\vartheta$ -функции). Однако детальное рассмотрение последних не представляет для нас интереса, так как они не находят непосредственных физических применений.

Все сказанное здесь о пространственных областях полностью переносится на плоские области, т. е. на случаи, когда состояние зависит только от двух координат

---

<sup>1)</sup> G. Lamé. Leçons sur la théorie de la chaleur, Paris, 1861. Ляме, однако, применяет не метод отражения, а метод Фурье, продолжая соответствующим образом заданное в исходной области начальное распределение. Относительно тетраэдра Шенфлиса см. A. Schönflies, Math. Ann., т. 34.

*x, y.* Вместо полупространства появляется тогда полуплоскость, вместо прямоугольного параллелепипеда — прямоугольник, вместо призмы с равносторонним треугольным основанием — равносторонний треугольник. В формуле (3.49), выражающей функцию Грина для полупространства, нужно при переходе к полуплоскости заменить в левой части степень  $3/2$  первой степенью, а в правой части квадрат трехмерного расстояния между полюсом и точкой, на которую он действует, — квадратом  $r^2$  двухмерного расстояния  $r$  между этими точками.

К сожалению, метод отражения в задачах теплопроводности нельзя перенести на области, ограниченные частями сфер в трехмерном случае и дугами окружностей — в двухмерном (см. § 23).

## § 18. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ В СЛУЧАЕ ПРОВОДНИКА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Доказательство единственности решения этой задачи может показаться физiku излишним. Однако это доказательство имеет большое методическое значение и математически очень изящно. Изложим поэтому его возможно короче.

Будем исходить из формулы Грина теории потенциала, которая взята в измененном виде, названном в задаче II. 2 «второй формой» теоремы Грина. Параболический характер уравнения теплопроводности не играет при этом никакой роли; он сказывается только в том случае, когда задаются граничные условия, меняющиеся со временем, как, например, в случае, изображенном на фиг. 13.

Здесь же имеются в виду только простые граничные условия типа (3.3а), (3.3б) и (3.3в).

Форма поверхности, ограничивающей проводник, может быть совершенно произвольной. В случае наличия внутренних полостей граница ( $\sigma$ ) проводника состоит из внешней границы и из поверхности внутренних полостей. Вдоль границы ( $\sigma$ ) могут быть заданы произвольным образом граничные условия вида

$$а) u = f_1(\sigma), \text{ б) } \frac{\partial u}{\partial n} = f_2(\sigma), \text{ в) } \frac{\partial u}{\partial n} + hu = f_3(\sigma)$$

[неоднородные граничные условия, в отличие от однородных условий (3.3а), (3.3б) и (3.3в), у которых правые части равны нулю]. Пусть, далее, задана начальная температура  $u$  как произвольная функция точки  $f = (x, y, z)$ . Обозначим через  $u_1$  и  $u_2$  два различных решения уравнения теплопроводности при заданных граничных и начальных условиях. Их разность  $u_1 - u_2 = w$  удовлетворяет вместе с  $u_1, u_2$  дифференциальному уравнению

$$\Delta w = \frac{1}{k} \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (3.51)$$

заданным на границе  $\sigma$  «однородным» граничным условиям

$$\text{а) } w = 0, \text{ б) } \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \text{ в) } \frac{\partial w}{\partial n} + hw = 0 \quad (3.52)$$

и, наконец, начальному условию

$$w = 0 \text{ при } t = 0. \quad (3.53)$$

Полагая в формуле Грина из задачи II.2  $u$  и  $v$  равными функциям  $w$ , получим

$$\int w \Delta w \, dt + \int (\text{grad } w, \text{grad } w) \, d\tau = \int w \frac{\partial w}{\partial n} \, d\sigma. \quad (3.54)$$

В силу уравнения (3.51) и условий (3.52) равенство (3.54) принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2k} \frac{\partial}{\partial t} \int w^2 \, d\tau = - \int Dw \, d\tau - \int hw^2 \, d\sigma_3, \quad (3.55)$$

где  $Dw$  обозначает так называемый первый дифференциальный параметр

$$Dw = \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2,$$

а индекс 3 в элементе поверхности  $d\sigma_3$  указывает, что последний интеграл формулы (3.55) должен быть взят только по той части поверхности, на которой задано третье граничное условие  $\frac{\partial w}{\partial n} + hw = 0$ .

Докажем теперь, что уравнение (3.55) внутренне противоречиво. В самом деле, как показывает формула (3.5), величина  $k$  существенно положительна, причем  $h$  может



и не быть постоянной и может меняться от точки к точке вдоль поверхности  $\varepsilon_3$ , в зависимости от характера этой последней.

Отсюда следует, что правая часть уравнения (3.55) существенно отрицательна. Левая же часть этого уравнения для малых  $t$  должна быть, напротив, существенно положительной, так как в силу условия (3.53) величина  $w^2$  равна нулю при  $t=0$  и, следовательно, должна возрастать вместе с  $t$  в некоторой окрестности значения  $t=0$ . Внутренняя противоречивость уравнения (3.55) становится еще более отчетливой и обнаруживается при любом значении  $t$ , если проинтегрировать это уравнение по  $t$ . В результате получается явно противоречивое равенство

$$\frac{1}{2k} \int w^2 d\tau = - \int_0^t dt \int D w d\tau - \int_0^t dt \int h w^2 d\varepsilon_3. \quad (3.56)$$

Чтобы устранить это противоречие, не остается ничего другого, как сделать вывод, что

$$w = 0 \text{ и, следовательно, } u_1 = u_2. \quad (3.57)$$

Доказанная теорема единственности может быть формулирована так: в случае теплопроводности при любой форме проводника тепла не существует собственных функций (см. гл. V). В этом отношении теплопроводность и различные другие аналогичные процессы выравнивания существенно отличаются от колебательных процессов.

---

## Глава IV

### ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ И СФЕРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Целью этой главы является скорее расширение математического аппарата, нежели решение новых физических задач. К числу самых необходимых инструментов математической физики принадлежат цилиндрические и шаровые функции.

Теория этих функций будет изложена в этой главе не абстрактно математически, а в связи с простыми физическими представлениями. Шаровые функции будут связаны с *теорией потенциала*, из которой они первоначально возникли, а цилиндрические функции — с *уравнением колебаний* и его простейшим решением — монохроматической плоской волной.

#### § 19. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ И ХАНКЕЛЯ

Допустим, что в уравнении колебаний (2.4) зависимость от времени чисто периодическая и представлена в наиболее удобном виде с помощью множителя

$$e^{-i\omega t}, \text{ где } \omega \text{ — круговая частота.} \quad (4.1)$$

С помощью обозначения

$$k = \frac{\omega}{c}, \text{ где } k \text{ — волновое число,} \quad (4.2)$$

и при сохранении прежнего обозначения  $u$  для неизвестной функции уравнение (2.4) в случае одного или двух измерений принимает следующий вид:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + k^2 u = 0, \quad (4.3a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0. \quad (4.36)$$

Решениями уравнения (4.3а) являются функции

$$u = Ae^{ikx} \text{ и } u = Be^{-ikx}. \quad (4.4a)$$

При нашем выборе отрицательного знака в выражении (4.1) первая функция определяет плоскую волну, распространяющуюся в положительном, а вторая — плоскую волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси  $x$ . То обстоятельство, что удобнее иметь дело с волной, распространяющейся в положительном направлении  $x$ , является главной причиной выбора знака в выражении (4.1).

В двухмерном случае, которому соответствует уравнение (4.35), при том же выборе знака в выражении (4.1) получаем

$$u = Ae^{i(ax+by)}, \quad a^2 + b^2 = k^2, \quad \left\{ \begin{array}{l} a = k \cos \alpha, \\ b = k \sin \alpha. \end{array} \right\} \quad (4.4b)$$

Если ввести полярные координаты  $r, \varphi$ , полагая

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

то получим

$$u = Ae^{ikr \cos(\varphi - \alpha)}. \quad (4.5)$$

Определяемая формулой (4.5) функция  $u$  представляет плоскую волну, распространяющуюся в направлении  $\varphi = \alpha$ . При  $\alpha = 0$  получается, конечно, снова волна (4.4а). Из таких плоских волн может быть построено общее решение уравнения (4.3б) с помощью суммирования (интегрирования) по  $\alpha$  с коэффициентами  $A$ , которые при этом могут зависеть от  $\alpha$ .

В переменных  $r, \varphi$  уравнение (4.3б) имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0 \quad (4.6)$$

или, полагая  $\rho = kr$ ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + u = 0. \quad (4.6a)$$

Ищем решения этого уравнения, имеющие вид

$$u = Z_n(\rho) e^{in\varphi}, \quad (4.7)$$

причем множитель  $Z_n(\rho)$  будем называть цилиндрической функцией.

Чтобы найти вид этой функции, положим в формуле (4.5)  $A$  равным показательной функции от  $\alpha$ ; пусть

$$A = c_n e^{in\alpha},$$

где  $c_n$  — постоянная, не зависящая от  $\alpha$ . Интегрируя по  $\alpha$  в соответствующих пределах  $\beta$  и  $\gamma$ , получим

$$u = c_n \int_{\beta}^{\gamma} e^{i\rho \cos(\varphi - \alpha)} e^{in\alpha} d\alpha. \quad (4.8)$$

В отличие от функции вида (4.5), функции вида (4.8) представляют не одну плоскую волну, распространяющуюся в направлении  $\alpha$ , а пучок плоских волн, направления распространения которых изменяются от  $\alpha = \beta$  до  $\alpha = \gamma$ . Очевидно, что функции  $u$  вида (4.8) удовлетворяют дифференциальному уравнению (4.6а).

Поставим себе целью выбрать  $\beta$  и  $\gamma$  так, чтобы решение вида (4.8) приняло форму (4.7), т. е. допускало выделение множителя  $e^{in\varphi}$ .

Для этого положим

$$\alpha = \omega + \varphi, \quad \omega_0 = \beta + \varphi, \quad \omega_1 = \gamma + \varphi. \quad (4.8a)$$

Формула (4.8) принимает после этого вид

$$u = c_n \int_{\omega_0}^{\omega_1} e^{i\rho \cos \omega} e^{in\omega} d\omega \cdot \omega e^{in\varphi}. \quad (4.9)$$

Входящий сюда множитель при  $e^{in\varphi}$  будет функцией от одного только  $\rho$ , как этого требует формула (4.7), если будет снова устранена путем искусственного приема зависимость пределов интеграла  $\omega_0$  и  $\omega_1$  от  $\varphi$ . Для того чтобы при любом значении  $n$  пределы интеграла (4.9) не зависели от  $\varphi$ , необходимо в силу формул (4.8а) заставить  $\beta$  и  $\gamma$ , а вместе с тем  $\omega_0$  и  $\omega_1$ , удаляться в бесконечность по соответствующему закону. Для того чтобы иметь воз-

возможность произвести такой предельный переход, необходимо, прежде всего исследовать сходимость интеграла (4.9) на бесконечности (см. фиг. 18). Задача, очевидно, сводится к определению тех областей комплексного переменного  $w$ , в которых показатель  $i\rho \cos w$  первого множителя подинтегральной функции в выражении (4.9) имеет отрицательную вещественную часть.

Допустим сначала, что аргумент  $\rho$  функции  $u$  — вещественное и положительное число.

Если  $w = p + iq$ , то  $\operatorname{Re}(i \cos w) = \operatorname{sh} q \sin p$ . Поэтому на верхней полуплоскости  $w$ , т. е. при  $q > 0$ , должно выполняться условие

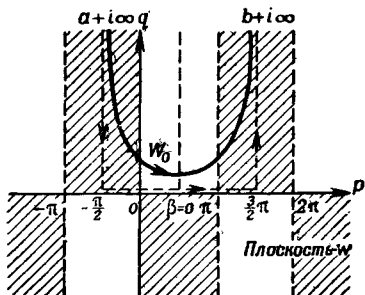
$$\begin{aligned} \sin p < 0, & \quad (4.10a) \\ -\pi < p < 0 \pmod{2\pi}, \end{aligned}$$

а при  $q < 0$ , т. е. на нижней полуплоскости  $w$ ,

$$\begin{aligned} \sin p > 0, & \quad (4.10б) \\ 0 < p < \pi \pmod{2\pi}. \end{aligned}$$

(Знак  $\operatorname{mod} 2\pi$  читается «по модулю  $2\pi$ » и указывает, что соответствующий интервал может быть сдвинут на целое кратное  $2\pi$  в положительную или отрицательную сторону.) Так как условия (4.10а) и (4.10б) накладываются только на вещественную часть  $p$  переменного  $w$  и не содержат  $q$ , то искомые области являются полосами, параллельными мнимой оси. Эти полосы, в которых должны лежать пределы  $w_0, w_1$  интеграла (4.9), заштрихованы на фиг. 18 и расположены в шахматном порядке.

Если  $\rho$  не вещественное и положительное, а комплексное число, равное  $|\rho|e^{i\theta}$ , то картина полос в целом остается та же, сдвигаясь только на  $\pm \theta$  вдоль вещественной оси, причем знак  $+$  относится к верхней, а знак  $-$  к нижней полуплоскости  $w$ .



Фиг. 18. На фигуре заштрихованы области плоскости  $w = p + iq$ , в которых вещественная часть функции  $i\rho \cos w$  отрицательна.

Принадлежащий бесселевой функции  $I_0$  путь интегрирования  $w_0$  представляет собой линию произвольного вида, начинающуюся в точке  $w_0 = a + i\infty$  и заканчивающуюся в точке  $w_1 = b + i\infty$ . Кроме переменной интегрирования  $w$ , используется также переменная интегрирования  $\beta = w - \frac{\pi}{2}$ .

В этом случае при рассмотрении вопроса о сходимости необходимо только заменить в условиях (4.10а) и (4.10б)  $\sin p$  на  $\sin(p \mp \theta)$  (см. в связи с этим указания к задаче IV.2).

При любом выборе пределов интегрирования  $w_0, w_1$ , удовлетворяющих предыдущим условиям, множитель при  $e^{in\varphi}$  в формуле (4.9) представляет собой соответствующий частный вид *общей цилиндрической функции*  $Z_n(\rho)$ , определяемой формулой (4.7), и удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 Z_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dZ_n}{d\rho} + \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right) Z_n = 0, \quad (4.11)$$

которое получается в результате подстановки выражения (4.7) в уравнение (4.6а).

**1. Бесселевы функции и их интегральное представление.** В качестве первого частного случая рассмотрим следующие значения пределов интегрирования:

$$\begin{aligned} w_0 &= a + i\infty, & -\pi < a < 0, \\ w_1 &= b + i\infty, & \pi < b < 2\pi. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Соответствующий тип пути интегрирования обозначен на фиг. 18 буквой  $W_0$ ; получающаяся при этом цилиндрическая функция называется *бесселевой функцией*, если только множитель  $c_n$ , являющийся неопределенным в формуле (4.9), выбрать следующим образом:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} e^{-in\pi/2}. \quad (4.13)$$

Используя общеупотребительное обозначение  $I_n$ <sup>1)</sup>, получаем

$$I_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{W_0} e^{i\rho \cos w} e^{in(w-\pi/2)} dw. \quad (4.14)$$

Нормирование по формуле (4.13) выбрано таким образом, что, с одной стороны,  $I_0(\rho) = 1$  для  $\rho = 0$ , с другой сто-

<sup>1)</sup> Обычно, правда, пишут  $J_n$  вместо  $I_n$  и полагают  $I_n(\rho) = J_n(i\rho)$ . Мы хотим сохранить букву  $J$  для обозначения «интенсивности», не вводя для  $I_n(i\rho)$  никакого особого символа.

роны,  $I_n(\rho)$  для любых вещественных  $n$  и  $\rho$  является вещественным. Первое условие следует непосредственно из формулы (4.14), если перейти к прямоугольной форме пути интегрирования, показанной штрихом на фиг. 18, так что при этом взаимно компенсируются обе части интеграла, взятые по прямым, параллельным мнимой оси  $w$  (взятые в отдельности, они расходятся при  $\rho \rightarrow 0$ ). Второе условие легко доказывается, если применить замену переменной  $w - \frac{\pi}{2} = \beta$ . Если вновь выбрать в качестве пути интегрирования  $W_0$  вышеуказанный прямоугольный путь, который при переходе к переменной  $\beta$  должен быть записан следующим образом:

$$-\pi + i\infty \rightarrow -\pi \rightarrow \pi \rightarrow \pi + i\infty,$$

то этот путь будет симметрично расположен относительно мнимой оси  $\beta$ :  $I_n(\rho)$  разлагается тогда, при вещественных  $\rho$  и  $n$ , на две вещественные составные части:

$$I_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(n\beta - \rho \sin \beta)} d\beta - \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_0^\infty e^{-(n\gamma + \rho \sinh \gamma)} d\gamma, \quad (4.15)$$

из которых вторая получается из интеграла, взятого по двум путям  $\pi \rightarrow \pi + i\infty$  и  $-\pi + i\infty \rightarrow -\pi$  с помощью дальнейшей замены  $\beta = \pm \pi + i\gamma$ , и при целом значении  $n$  не обращается в нуль. Таким образом, при нашей нормировке, согласно формуле (4.14),  $I_n(\rho)$  является вещественным, если  $\rho$  и  $n$  вещественны.

Так как интегральное представление (4.14) сходится для всех значений  $\rho$ , то отсюда следует, что  $I_n(\rho)$  есть *регулярная трансцендентная функция*<sup>1)</sup>, которая только в бесконечности имеет *существенно особую точку*, а при  $\rho = 0$  имеет *точку ветвления* порядка  $n$ , которая при отрицательном  $n$  является также точкой, где функция обращается в бесконечность того же порядка.

Если  $n$  — целое число, что до сих пор не предполагалось,

<sup>1)</sup> Такое рассуждение неверно. Из сходимости интеграла (4.14) при соответствующем выборе пути интегрирования регулярность функции  $I_n(\rho)$  вытекает только для тех значений  $\rho$ , в окрестности которых  $I_n(\rho)$  выражается интегралом, взятым по одному и тому же пути, что, например, невозможно для  $\rho = 0$ . (Прим. ред.)

лось, то второе слагаемое в формуле (4.15) обращается в нуль, и мы получаем

$$I_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(n\beta - \rho \sin \beta)} d\beta. \quad (4.16)$$

Если перейти от показательной функции к тригонометрическим и принять во внимание, что синус есть нечетная, косинус — четная функция  $\beta$ , то получим представление, указанное еще Бесселем, а именно:

$$I_n(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(\rho \sin \beta - n\beta) d\beta. \quad (4.17)$$

К тому же выводу мы, естественно, приходим, исходя из нашего первоначального интеграла по  $w$ ; при интегрировании по  $W_0$  взаимно уничтожаются части интеграла, соответствующие прямым, параллельным мнимой оси, и остается только интеграл вдоль отрезка вещественной оси плоскости  $w$  от  $-\pi/2$  до  $3\pi/2$ , который, вследствие периодичности подинтегрального выражения, может быть заменен интегралом от  $-\pi$  до  $+\pi$ . Таким образом, получаем

$$I_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\rho \cos w} e^{in(w-\pi/2)} dw, \quad (4.18)$$

в соответствии с формулой (4.16). По сравнению с этими вещественными представлениями наш интеграл (4.14) с его комплексным путем  $W_0$  имеет то существенное преимущество, что он сохраняет силу для любых  $n$ , а не только целых. Интеграл (4.14) встречается у Шлефли в 1871 г.<sup>1)</sup>, однако только для прямоугольной формы пути. Приводимые ниже интегралы (4.22) были указаны автором в 1896 г.

Так как уравнение (4.11) зависит только от  $n^2$ , то наряду с  $I_n$  его решением является также и  $I_{-n}$ . Поэтому

<sup>1)</sup> Более подробно об этом смотри в книге Г. Н. Ватсона, Теория бесселевых функций, М., 1949, ч. 1, стр. 194 — 197.



его общее решение может быть записано в виде

$$Z_n(\rho) = c_1 I_n(\rho) + c_2 I_{-n}(\rho). \quad (4.19)$$

Это, однако, является верным только для *нецелого*  $n$ . При *целом*  $n$  решения  $I_n$  и  $I_{-n}$  являются линейно зависимыми, так как тогда имеем

$$I_{-n}(\rho) = (-1)^n I_n(\rho). \quad (4.19a)$$

Это соотношение следует непосредственно из формулы (4.16), если в  $I_{-n}(\rho)$  сделать подстановку

$$\beta = \pi - \beta'.$$

**2. Функции Ханкеля и их интегральное представление.** Примем в качестве пределов интегрирования в интеграле (4.9) следующие значения:

$$\omega_0 = a_1 + i\infty, \quad -\pi < a_1 < 0, \quad (4.20)$$

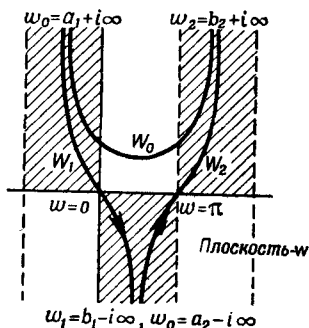
$$\omega_1 = b_1 - i\infty, \quad 0 < b_1 < \pi,$$

$$\omega_0 = a_2 - i\infty, \quad 0 < a_2 < \pi, \quad (4.20a)$$

$$\omega_1 = b_2 + i\infty, \quad \pi < b_2 < 2\pi.$$

Соответствующие пути, которые должны проходить по заштрихованным полосам только в удаленной части плоскости и в остальном являются совершенно произвольными, обозначим на фиг. 19 через  $W_1$  и  $W_2$ . То обстоятельство, что мы заставили их проходить через точку  $\omega = 0$  (соответственно  $\omega = \pi$ ), является для дальнейшего более удобным, хотя и необязательным. Вообще говоря, пути  $W_1$ ,  $W_2$ , равно как и прежний путь  $W_0$ , могли бы в конечной части плоскости проходить и не по заштрихованной области. Постоянная  $c_n$  теперь определяется не формулой (4.13), а с помощью равенства

$$c_n = \frac{1}{\pi} e^{-in\pi/2}. \quad (4.21)$$



Фиг. 19. Пути интегрирования  $W_1$  и  $W_2$  для функций  $H^1$  и  $H^2$ . Последовательное прохождение этих путей равносильно пути  $W_0$ .

Получающиеся таким образом цилиндрические функции называются *первой и второй функциями Ханкеля*:

$$\begin{aligned} H_n^1(\rho) &= \frac{1}{\pi} \int_{W_1} e^{i\rho \cos w} e^{in(w-\pi/2)} dw, \\ H_n^2(\rho) &= \frac{1}{\pi} \int_{W_2} e^{i\rho \cos w} e^{in(w-\pi/2)} w dw. \end{aligned} \quad (4.22)$$

В математической физике они играют не менее важную роль, чем бесселевы функции  $I_n$ . От последних они отличаются тем, что для  $\rho=0$  они обращаются в бесконечность также и при положительных  $n$ . Действительно, оба интеграла, получающиеся из формулы (4.22) при  $\rho=0$

$$\int_{W_1, W_2} e^{in(w-\pi/2)} dw,$$

расходятся в бесконечно удаленной точке нижней плоскости  $w$ .

Появляющуюся в силу этого особенность  $H^1$  и  $H^2$  при  $\rho=0$  мы подробнее рассмотрим в п. 3. В силу их определения  $H^1$  и  $H^2$  являются, естественно, вновь решениями дифференциального уравнения (4.11); общий интеграл этого уравнения можно поэтому представить также в форме

$$Z_n(\rho) = C_1 H_n^1(\rho) + C_2 H_n^2(\rho). \quad (4.23)$$

Докажем, что частный интеграл  $I_n$  получается из формулы (4.23), если положить  $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$ .

Для этого достаточно обратиться к фиг. 19; нижние части обоих путей  $W_1$  и  $W_2$ , пройденных последовательно, взаимно уничтожаются, и пути  $W_1$  и  $W_2$  могут быть поэтому стянуты в путь  $W_0$ . Интегрируя по последнему и учитывая, что коэффициент  $c_n$  теперь определяется формулой (4.21), получим удвоенный интеграл (4.14).

Таким образом, действительно, имеем

$$I_n(\rho) = \frac{1}{2} [H_n^1(\rho) + H_n^2(\rho)]. \quad (4.24)$$

Рассмотрим наряду с этим разность  $H_n^1 - H_n^2$ , которая для вещественных  $\rho$  и  $n$  является чисто мнимой величиной,

как это особенно ясно видно, если перейти к переменным интегрирования  $\beta$  и  $\gamma$ , введенным в формуле (4.15). Обозначим эту разность через  $2iN_n$ ; функция  $N_n(\rho)$  называется функцией Неймана:

$$N_n(\rho) = \frac{1}{2i} [H_n^1(\rho) - H_n^2(\rho)]. \quad (4.25)$$

Из формул (4.24) и (4.25) следует

$$\begin{aligned} H_n^1(\rho) &= I_n(\rho) + iN_n(\rho), \\ H_n^2(\rho) &= I_n(\rho) - iN_n(\rho). \end{aligned} \quad (4.26)$$

В этом разложении  $H^{1,2}$  имеется полная аналогия с разложением показательной функции на ее тригонометрические составные части, что может быть выражено с помощью следующего соответствия:

$$\begin{array}{cccc} e^{ix} & e^{-ix} & \cos x & \sin x \\ H^1(\rho) & H^2(\rho) & I(\rho) & N(\rho). \end{array}$$

В п. 4 мы увидим, что эта аналогия имеет не только качественный характер, но что она асимптотически (при  $\rho \rightarrow \infty$ ) переходит в количественное соответствие. Аналогично тому как во всех колебательных процессах комплексное экспоненциальное представление следует предпочесть вещественному тригонометрическому, представление с помощью функций Ханкеля, как правило, следует предпочесть представлению с помощью функций Бесселя и Неймана, тем более, что вещественные интегралы и в том и в другом случае хорошо выражаются через комплексные.

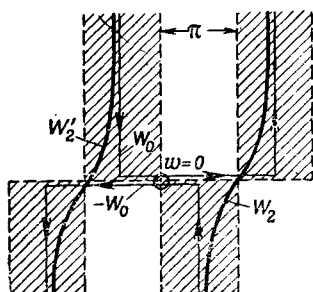
Функции  $H^1, H^2$  могут быть представлены для нецелых  $n$  также в форме (4.19). Нас интересуют соответствующие коэффициенты  $c_1, c_2$ . С этой целью проведем следующую выкладку: в силу формулы (4.14) имеем

$$2\pi e^{in\pi/2} I_n(\rho) = \int_{W_0} e^{i\rho \cos w + inw} dw. \quad (4.27)$$

Для функции  $I_{-n}(\rho)$  получаем, заменяя  $w$  на  $-\omega$  и  $W_0$  на  $-W_0$ , следующую формулу:

$$-2\pi e^{-in\pi/2} I_{-n}(\rho) = \int_{-W_0} e^{i\rho \cos w + inw} dw. \quad (4.28)$$

На фиг. 20 оба пути  $W_0$  и  $-W_0$  для большей наглядности имеют прямоугольную форму (направления обхода указаны стрелками). Эти пути взаимно уничтожаются в своей средней части между  $w = -\pi/2$  и  $w = +\pi/2$ . Остаточные части составляют две прямоугольные ломаные линии, которые для наглядности деформированы в криволинейные ветви подобно пути  $W_2$  (фиг. 19). Правый путь,



Фиг. 20. Пути  $W_0$  и  $-W_0$ , принадлежащие функциям  $I_n$  и  $I_{-n}$ , эквивалентные путям  $W_2$  и  $W'_2$ , принадлежащих функции  $H_n^2$ .

ведущий от  $\pi/2 - i\infty$  к  $3\pi/2 + i\infty$ , совпадает с  $W_2$ , левый — от  $-\pi/2 + i\infty$  до  $-3\pi/2 - i\infty$  обозначим через  $W'_2$ . Складывая равенства (4.27) и (4.28), получаем

$$2\pi [e^{in\pi/2} I_n(\rho) - e^{-in\pi/2} I_{-n}(\rho)] = \left( \int_{W_2} + \int_{W'_2} \right) e^{i\rho \cos w + inw} dw. \quad (4.29)$$

Здесь интеграл, взятый по  $W_2$ , в силу формулы (4.22) равен

$$\pi e^{in\pi/2} H_n^2(\rho). \quad (4.29a)$$

Интеграл, взятый по  $W'_2$ , отличается от первого только на-

правлением обхода и тем, что путь интегрирования сдвинут на  $-2\pi$ . Поэтому также в силу формулы (4.22) этот интеграл равен

$$-\pi e^{-3in\pi/2} H_n^2(\rho). \quad (4.29b)$$

Если подставить выражения (4.29a) и (4.29b) в равенство (4.29), то после соответствующих сокращений получаем

$$2[I_n(\rho) - e^{-in\pi} I_{-n}(\rho)] = (1 - e^{-2in\pi}) H_n^2(\rho)$$

и отсюда

$$H_n^2(\rho) = \frac{e^{in\pi} I_n(\rho) - I_{-n}(\rho)}{i \sin n\pi}. \quad (4.30)$$

Соответствующее представление для  $H_n^1$  получается из формулы (4.24) в следующем виде:

$$H_n^1(\rho) = 2I_n(\rho) - H_n^2(\rho) = \frac{e^{-in\pi} I_n(\rho) - I_{-n}(\rho)}{-i \sin n\pi}. \quad (4.31)$$

Тем самым искомые коэффициенты  $c_1, c_2$  из равенства (4.19) определены для обеих функций Ханкеля. При этом можно заметить, что в случае вещественного  $n$  и комплексного  $\rho$  имеем

$$H_n^1(\rho^*) = [H_n^2(\rho)]^*, \quad \text{следовательно, также} \\ H_n^2(\rho^*) = [H_n^1(\rho)]^*. \quad (4.32)$$

Здесь значок  $*$  обозначает, как всюду в нашей книге, комплексно сопряженную величину. При получении формул (4.32) из формул (4.30) и (4.31) применялось соотношение  $I_n(\rho^*) = [I_n(\rho)]^*$ , которое вытекает, например, из формулы (4.34).

Далее из формул (4.30) и (4.31) следует

$$H_{-n}^1(\rho) = e^{in\pi} H_n^1(\rho), \quad H_{-n}^2(\rho) = e^{-in\pi} H_n^2(\rho). \quad (4.32a)$$

Приведем еще одну формулу, вытекающую из формул (4.25), (4.30) и (4.31), а именно

$$N_n(\rho) = \frac{\cos n\pi I_n(\rho) - I_{-n}(\rho)}{\sin n\pi}. \quad (4.33)$$

**3. Разложения в ряд в окрестности нуля.** Функция  $I_n(\rho)$ , как мы видели, регулярна всюду в конечной области. Поэтому она допускает разложение в ряд по возрастающим степеням  $\rho$ . Действительно, можно без труда убедиться, что дифференциальное уравнение (4.11) удовлетворяется следующим рядом:

$$I_n(\rho) = \left(\frac{\rho}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+n+1)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m}, \quad (4.34)$$

который при  $n=0$  принимает особенно изящную форму, известную уже Фурье:

$$I_0(\rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! m!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2m}. \quad (4.35)$$

Совпадение этих рядов с нашим интегральным представлением (4.14) мы покажем в задаче IV.1. Для того чтобы получить ряды, представляющие цилиндрические функции  $Z_n$  общего вида и одновременно исследовать появляющуюся при  $\rho=0$  особенность, будем поступать по методу, при-

меняемому в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Положим

$$Z_n = \rho^\lambda (a_0 + a_1 \rho + a_2 \rho^2 + \dots + a_k \rho^k + \dots) \quad (4.36)$$

и подставим ряд (4.36) в дифференциальное уравнение (4.11), причем каждый член получающегося при этом ряда должен обращаться в нуль. Член с низшей степенью  $\rho^{\lambda-2}$  дает тогда уравнение для определения  $\lambda$ , общий член  $\rho^{\lambda+k-2}$  — рекуррентную формулу для  $a_k$ . Таким образом, получаем

$$\lambda(\lambda-1) + \lambda - n^2 = 0, \quad \lambda = \pm n \quad (4.37)$$

и

$$[(\lambda+k)(\lambda+k-1) + \lambda+k-n^2] a_k + a_{k-2} = 0; \quad (4.37a)$$

последнее соотношение, принимая во внимание равенство (4.37), можно записать в виде

$$(k^2 + 2k\lambda) a_k + a_{k-2} = 0. \quad (4.37b)$$

Последовательным применением рекуррентного соотношения (4.37b) получаем при  $k=2m$

$$a_{2m} = \frac{-a_{2m-2}}{4m(m+\lambda)} = \frac{(-1)^2}{2^4} \frac{a_{2m-4}}{m(m-1)(m+\lambda)(m+\lambda-1)} = \dots$$

Чтобы добиться совпадения с формулой (4.34), положим  $a_0 = \frac{1}{2^n} \Gamma(\lambda+1)$  и  $a_1 = 0$ , тогда

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+n}} \frac{1}{m! \Gamma(m+\lambda+1)}, \quad a_{2m+1} = 0. \quad (4.38)$$

Формула (4.34), таким образом, доказана. В силу формулы (4.37) она справедлива как для  $\lambda = -n$ , так и для  $\lambda = +n$ . Мы получаем отсюда, наряду с  $I_n(\rho)$ , также и второе решение  $I_{-n}(\rho)$  уравнения (4.11), как было уже указано на стр. 128; при  $\rho \rightarrow 0$  первое решение при положительной вещественной части  $n$  стремится к нулю, как  $\rho^n$ , а второе решение стремится к бесконечности, как  $\rho^{-n}$ . Таким образом, наряду с формулой (4.23), формула (4.19) оказывается общим решением уравнения (4.11).

Однако все до сих пор сказанное в этом пункте справедливо только для *нецелых* значений  $n$ . Для целого  $n$

или, точнее, когда разность корней уравнения (4.37) — целое число<sup>1)</sup>, возникают известные из теории линейных дифференциальных уравнений затруднения при получении решения, соответствующего меньшему значению  $\lambda$ , и связанные с появлением логарифмических членов. В нашем случае это может быть показано таким простым способом.

Положим в уравнении (4.37б)  $\lambda = -n$  и  $k = 2n$ , так что первое слагаемое обращается в нуль и, таким образом,  $a_{2n-2} = 0$ . Если, применяя рекуррентную формулу, будем переходить от коэффициента  $a_{2n-2}$  к коэффициентам с меньшими индексами, то в ряде (4.36) для  $Z_n = I_{-n}$  обратятся в нуль все коэффициенты, предшествующие коэффициенту  $a_k = a_{2n}$ . Отсюда вытекает, так же как из ряда (4.34), известное нам уже соотношение (4.19а) между  $I_n$  и  $I_{-n}$ . Поэтому необходимо найти второе, действительно отличное от  $I_n$  решение дифференциального уравнения Бесселя. Для этой цели применим предельный переход, считая  $n$  сколь угодно близким к целому положительному числу, беря при этом не функции Ханкеля  $H$ , а функции Неймана  $N$ , рассмотрение которых особенно важно при определении характера особенности уравнения Бесселя при  $\nu = 0$ . До перехода к пределу для функции  $N$  остается в силе формула (4.33); в пределе, вследствие соотношения (4.19а), эта формула принимает вид  $0/0$ . Предельное значение определяется по правилу Лопиталья. Если временно обозначить предельное целочисленное значение  $n$  через  $\bar{n}$ , то правило Лопиталья дает для знаменателя формулы (4.33) значение

$$\frac{\partial}{\partial n} \sin n\pi \Big|_{n=\bar{n}} = \pi \cos n\pi \Big|_{n=\bar{n}} = \pi (-1)^{\bar{n}},$$

а для числителя

$$\begin{aligned} & \left[ -\pi \sin n\pi I_n(\nu) + \cos n\pi \frac{\partial}{\partial n} I_n(\nu) - \frac{\partial}{\partial n} I_{-n}(\nu) \right]_{n \rightarrow \bar{n}} = \\ & = (-1)^{\bar{n}} \left[ \frac{\partial}{\partial n} I_n(\nu) - (-1)^{\bar{n}} \frac{\partial}{\partial n} I_{-n}(\nu) \right]_{n \rightarrow \bar{n}}. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Это имеет место также и для функций Бесселя с полуцелым индексом  $n$ . Тем не менее в случае полуцелого индекса не возникает рассмотренных в тексте затруднений; это будет показано в § 21, п. 3.

Таким образом,

$$\pi N_n^-(\rho) = \lim_{n \rightarrow n} \left[ \frac{\partial}{\partial n} I_n(\rho) - (-1)^{\bar{n}} \frac{\partial}{\partial n} I_{-n}(\rho) \right]. \quad (4.39)$$

Знак предела указывает здесь на то, что дифференцирование по  $n$  нужно произвести до перехода к пределу, т. е. при нецелом  $n$ . Так как нас интересует прежде всего окрестность точки  $\rho = 0$ , то целесообразно использовать ряд (4.34), который для нецелых  $n$  представляет не только функцию  $I_n$ , но и функцию  $I_{-n}$ . Вычислим каждый из двух членов правой части уравнения (4.39) в отдельности.

Пользуясь формулой

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a,$$

получаем, дифференцируя первый член ряда (4.34),

$$\lim \frac{\partial}{\partial n} I_n = \frac{1}{\Gamma(\bar{n}+1)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{\bar{n}} \left[ \ln \frac{\rho}{2} - \frac{\Gamma'(\bar{n}+1)}{\Gamma(\bar{n}+1)} \right] + \dots, \quad (4.40)$$

где через  $+\dots$  обозначен остаток, образованный из последующих членов ряда, имеющих при  $\rho \rightarrow 0$  более высокий порядок малости, чем  $\rho^{\bar{n}}$ . Далее, используем введенное Гауссом обозначение

$$\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = -C + \sum_{v=1}^{\infty} \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{z+v} \right), \quad (4.41)$$

где  $C$  — постоянная Эйлера, равная

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0,5772.$$

Полагая

$$C = \ln \gamma, \quad \gamma = 1,781 \quad (4.41a)$$

и пользуясь формулами (4.41) и (4.41a), представим выражение, заключенное в квадратную скобку в формуле (4.40), в виде

$$\ln \frac{\rho}{2} - \Psi(\bar{n}) = \ln \frac{\gamma \rho}{2} - \sum_{v=1}^{\bar{n}} \frac{1}{v}. \quad (4.41b)$$



С другой стороны, множитель перед [] в формуле (4.40), с точностью до членов более высокого порядка, чем  $\rho^{\bar{n}}$ , равен  $I_{\bar{n}}^2(\rho)$ . Пользуясь выражением (4.41б), можно поэтому записать формулу (4.40) в виде

$$\lim_{\partial} \frac{\partial}{\partial n} I_n = \left( \ln \frac{\rho}{2} - \sum_{v=1}^n \frac{1}{v} \right) I_{\bar{n}}(\rho) \dots \quad (4.42)$$

Многоточие означает, что равенство (4.42) является приближенным с точностью до членов порядка выше  $\rho^{\bar{n}}$ . Несколько иначе проводится подсчет для второго члена правой части формулы (4.39). Воспользуемся представлением  $I_{-n}$  в виде ряда по  $\rho$ :

$$I_{-n} = \left( \frac{\rho}{2} \right)^{-n} \left[ \frac{1}{\Gamma(-n+1)} - \frac{1}{1! \Gamma(-n+2)} \left( \frac{\rho}{2} \right)^2 + \dots + \frac{(-1)^{\bar{n}}}{\bar{n}! \Gamma(-n+\bar{n}+1)} \left( \frac{\rho}{2} \right)^{2\bar{n}} + \dots \right]. \quad (4.43)$$

Отсюда, если сначала продифференцировать член  $(\rho/2)^{-n}$  по  $n$ , то получим, как и в формуле (4.40), выражение

$$-\ln \frac{\rho}{2} \left( \frac{\rho}{2} \right)^{-n} \left[ \frac{1}{\Gamma(-n+1)} - \dots + \frac{(-1)^{\bar{n}}}{\bar{n}! \Gamma(-n+\bar{n}+1)} \left( \frac{\rho}{2} \right)^{2\bar{n}} \right] + \dots$$

Так как все знаменатели, кроме последнего, становятся бесконечными при  $n \rightarrow \bar{n}$ , то получим в пределе

$$-\ln \frac{\rho}{2} \frac{(-1)^{\bar{n}}}{\bar{n}!} \left( \frac{\rho}{2} \right)^{\bar{n}} = (-1)^{\bar{n}+1} \ln \frac{\rho}{2} I_{\bar{n}}(\rho) + \dots \quad (4.44)$$

С другой стороны, дифференцируя по  $n$ <sup>1)</sup> скобку [], вхо-

<sup>1)</sup> При дифференцировании два знака минус взаимно компенсируются, так как для  $z = -n+1, -n+2, \dots$  получаем

$$\frac{d}{dn} \frac{1}{\Gamma(z)} = -\frac{\Gamma'(z)}{[\Gamma(z)]^2} \frac{dz}{dn} = (-1)^2 \frac{\Gamma'(z)}{[\Gamma(z)]^2} = \frac{\Psi(z-1)}{\Gamma(z)}.$$

дающую в формулу (4.43), получаем

$$\left(\frac{\rho}{2}\right)^{-n} \left[ \frac{\Psi(-n)}{\Gamma(-n+1)} - \frac{\Psi(-n+1)}{1!\Gamma(-n+2)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 + \dots + \right. \\ \left. + \frac{(-1)^{\bar{n}} \Psi(-n+\bar{n})}{\bar{n}!\Gamma(-n+\bar{n}+1)} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2\bar{n}} \right] + \dots \quad (4.44a)$$

Но  $\Psi(z)$ , так же как и  $\Gamma(z+1)$ , имеет в точках  $z = -1, -2, -3$  простые полюсы. Для окрестности  $\nu$ -го полюса в силу формулы (4.41) имеем

$$\Psi(z) = -\frac{1}{z+\nu}. \quad (4.45)$$

Разложение  $\Gamma(z+1)$  для этой же точки имеет вид <sup>1)</sup>

$$\Gamma(z+1) = \frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \frac{1}{z+\nu}. \quad (4.45a)$$

Следовательно,

$$\frac{\Psi(z)}{\Gamma(z+1)} = (-1)^\nu (\nu-1)! \quad \text{при } z = -\nu. \quad (4.45b)$$

Напротив, для окрестности точки  $z=0$ , вследствие равенств  $\Gamma(1)=1$  и  $\Psi(0)=-C$ , будем иметь

$$\frac{\Psi(z)}{\Gamma(z+1)} = -C = -\ln \gamma. \quad (4.45b)$$

После этих подготовительных вычислений в выражении (4.44a) можно перейти к пределу. Все множители  $\Psi/\Gamma$ , кроме последнего, в силу формул (4.45) и (4.45a), принимают вид  $\infty/\infty$  и должны быть, согласно формуле (4.45b), заменены выражениями  $(-1)^\nu (\nu-1)!$ , где в первом члене  $\nu = n$ , во втором  $\nu = n-1$  и т. д., в то время

<sup>1)</sup> См. по поводу этих и предыдущих формул упомянутые выше таблицы Янке и Эмде.

как для последнего члена, для которого справедливо равенство (4.45в), получаем

$$-\frac{(-1)^{\bar{n}}}{\bar{n}!} \ln \gamma \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2\bar{n}} = (-1)^{\bar{n}} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{\bar{n}} \ln \gamma I_{\bar{n}}(\rho).$$

Таким образом, в качестве предельного значения выражения (4.44а) получаем

$$(-1)^n \left[ (n-1)! \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-n} + \right. \\ \left. + \frac{(n-2)!}{1!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-n+2} + \dots - \ln \gamma I_n \right] + \dots \quad (4.46)$$

Вместо  $\bar{n}$  можно теперь писать  $n$ , причем и в дальнейшем  $n$  будет обозначать целое число.

Сумма выражений (4.46) и (4.44) дает теперь для второго члена скобки [] в формуле (4.39) следующее выражение:

$$-(-1)^n \lim \frac{\partial}{\partial n} I_{-n} = -(n-1)! \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-n} - \\ - \frac{(n-2)!}{1!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-n+2} - \dots + \ln \frac{\gamma \rho}{2} I_n + \dots,$$

которое вместе с выражением (4.42) окончательно определяет следующее значение для выражения (4.39) при  $n > 0$ :

$$\pi N_n(\rho) = -(n-1)! \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-n} - \frac{(n-2)!}{1!} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{-n+2} - \\ - \dots + 2 \ln \frac{\gamma \rho}{2} I_n - \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu} + \dots \quad (4.47)$$

Члены, стоящие справа, расположены в порядке их величины, член, содержащий  $(\rho/2)^{-n}$ , имеет высший, логарифмический член — низший порядок. При  $n=0$  получается простая логарифмическая особенность, так что можно писать

$$\frac{\pi}{2} N_0(\rho) = \ln \frac{\gamma \rho}{2} I_0 + \dots \quad (4.48)$$

или в более полной форме

$$\frac{\pi}{2} N_0(\rho) = \ln \frac{\gamma \rho}{2} I_0(\rho) + \\ + 2 \left[ I_2(\rho) - \frac{1}{2} I_4(\rho) + \frac{1}{8} I_6(\rho) - \dots \right]. \quad (4.48a)$$

На доказательстве последнего соотношения мы здесь останавливаться не будем. Эта логарифмическая особенность, согласно формуле (4.26), имеется не только в  $N$ , но и у мнимой части обеих функций  $H$ . Отсюда мы заключаем, что нулевая точка комплексной плоскости  $\rho$  является точкой ветвления функций  $H_n$  не только для нецелых, но и для целых  $n$ . После обхода вокруг точки  $\rho=0$  значение функции  $H_n$  в силу формул (4.26) и (4.47) получает приращение, равное  $\mp 4I_n(\rho)$ . Подробнее этот вопрос будет рассмотрен в задаче IV.2. В задаче IV.3 логарифмическая функция  $H_0$  выводится более прямым, но математически менее строгим способом.

**4. Рекуррентные формулы.** В то время как относительно  $\rho$  функции  $Z_n(\rho)$  удовлетворяют дифференциальному уравнению, относительно  $n$  они удовлетворяют уравнению в конечных разностях при любом, также и нецелом,  $n$ . Это вытекает из нашего общего интегрального представления функций  $H$ , откуда следует справедливость соответствующих формул также и для любых линейных комбинаций функций  $H$ , в частности для функций  $I$  и  $N$ .

Принимая во внимание, что в формуле (4.22) пути интегрирования  $W_1$  и  $W_2$  не зависят от  $n$ , образуем следующие выражения:

$$\frac{\pi}{2} (H_{n+1} + H_{n-1}) = \int e^{i\rho \cos w} e^{in(w-\frac{\pi}{2})} \left( \begin{array}{c} \\ \end{array} \right)_1 dw, \quad (4.49)$$

$$\frac{\pi}{2} (H_{n+1} - H_{n-1}) = \int e^{i\rho \cos w} e^{in(w-\frac{\pi}{2})} \left( \begin{array}{c} \\ \end{array} \right)_2 dw, \quad (4.50)$$

где

$$\left( \begin{array}{c} \\ \end{array} \right)_1 = \frac{1}{2} \left[ e^{i(w-\frac{\pi}{2})} + e^{-i(w-\frac{\pi}{2})} \right] = \sin w,$$

$$\left( \begin{array}{c} \\ \end{array} \right)_2 = \frac{1}{2} \left[ e^{i(w-\frac{\pi}{2})} - e^{-i(w-\frac{\pi}{2})} \right] = -i \cos w.$$

Интегралы в правых частях уравнений (4.49) и (4.50)

можно поэтому записать в следующем виде:

$$-\frac{1}{i\rho} \int \frac{\partial}{\partial w} (e^{i\rho \cos w}) e^{in(w-\frac{\pi}{2})} dw, \quad (4.49a)$$

$$-\frac{\partial}{\partial \rho} \int e^{i\rho \cos w} e^{in(w-\frac{\pi}{2})} dw; \quad (4.50a)$$

причем выражение (4.49a) интегрированием по частям можно преобразовать к виду

$$\frac{n}{\rho} \int e^{i\rho \cos w} e^{in(w-\frac{\pi}{2})} dw. \quad (4.49b)$$

С помощью этих преобразований правые части формул (4.49) и (4.50) могут быть теперь непосредственно выражены через функцию Ханкеля индекса  $n$ . Однако получающиеся при этом формулы, справедливые при соответствующем выборе пути интегрирования как для  $H^1$ , так и для  $H^2$ , напишем сразу же для общей цилиндрической функции  $Z$ , как линейной комбинации  $H^1$  и  $H^2$ . При этом формулы принимают вид

$$Z_{n+1} + Z_{n-1} = \frac{2n}{\rho} Z_n, \quad (4.51)$$

и

$$Z_{n+1} - Z_{n-1} = -2 \frac{dZ_n}{d\rho}. \quad (4.52)$$

Формулы (4.51) и (4.52) являются искомыми рекуррентными формулами, характеризующими зависимость цилиндрической функции  $Z_n$  от переменной  $n$ . Они имеют место при любом  $n$ , целом или нецелом, положительном или отрицательном.

При  $n=0$  получаем отсюда, в частности,

$$Z_{-1} = -Z_1 \quad (4.51a)$$

и

$$Z_1 = -\frac{dZ_0}{d\rho}. \quad (4.52a)$$

Полагая в формуле (4.52а)  $Z$  равной функции Бесселя, получаем соотношение, следующее, впрочем, непосредственно из рядов (4.27) и (4.27а),

$$I_1(\rho) = -\frac{d}{d\rho} I_0(\rho). \quad (4.52б)$$

**5. Асимптотическое представление функции Ханкеля.** Подинтегральное выражение интегралов (4.14) и (4.22) в незаштрихованных областях плоскости  $\omega$  колеблется с возрастанием  $\rho$  все быстрее и с возрастающей амплитудой, в то время как амплитуды колебаний этого выражения в заштрихованных областях стремятся к нулю. Пути интегрирования  $W_1$  и  $W_2$  в интегралах, представляющих функции  $H^1$  и  $H^2$ , в случае вещественного  $\rho$  проходят только по заштрихованной области, как это было показано уже на фиг. 19. Для комплексного  $\rho$  это не имеет места, как показывают, например, фигуры к задаче IV.2. Уже из рассмотрения фиг. 19 следует, что точки  $\omega = 0$  и  $\omega = \pi$  путей  $W_1$  и соответственно  $W_2$ , лежащие на границе между двумя незаштрихованными областями, должны играть особую роль при асимптотическом определении функций  $H^1$  и  $H^2$ .

Мы имеем в виду на рассматриваемом примере наглядно и, так сказать, топографически изложить здесь метод седловых точек, откладывая до § 21 углубленный анализ этого метода с общей точки зрения. Введем следующие предположения:

$$\rho \text{ вещественно; } \rho \gg 1 \text{ и } n \ll \rho. \quad (4.53)$$

Путь  $W_1$ , соответствующий функции  $H^1$ , начинается и кончается в заштрихованной области. То же самое имеет место для пути  $W_2$ , соответствующего функции  $H^2$ . Показатель  $i\rho \cos \omega$ , играющий решающую роль, достигает экстремума, если

$$\sin \omega = 0, \text{ т. е. } \begin{cases} \text{либо в точке } \omega = 0 \text{ пути } W_1, \\ \text{либо в точке } \omega = \pi \text{ пути } W_2. \end{cases}$$

Однако, как это всегда имеет место для вещественной или мнимой части аналитической функции, точки  $\omega = 0$

и  $\omega = \pi$  не дают действительного максимума или минимума, а являются так называемыми «седловыми» точками. Справа и слева от путей  $W_1$  и  $W_2$  возвышаются в этих точках круто поднимающиеся хребты. Между ними проходят пути  $W_1$  и  $W_2$ , подобные перевалам. Вместо термина «метод седловых точек» употребляют поэтому также термин «метод перевала». Высота перевала при  $\omega = 0$  и  $\omega = \pi$  равна

$$|e^{i\rho}| = 1 \quad \text{и} \quad |e^{-i\rho}| = 1.$$

Как выбирает свой путь альпинист для быстрого преодоления перевала? Он, очевидно, отдаст предпочтение линии наиболее крутого подъема и спуска, так называемой «линии спада». Этот путь, однако, не является обязательным и из соображений удобства (аналитических или альпинистских) может быть заменен другим. Английское название «метод быстрого спуска» вместо «метод перевала» не может быть поэтому рекомендовано.

Рассмотрим небольшой участок пути  $W_1$ , в окрестности наиболее высокой точки перевала. Пусть  $ds$  означает элемент пути, отсчитываемый в направлении положительного обхода пути  $W_1$ , а  $s=0$  — сама точка перевала. Положим

$$\begin{aligned} \omega &= se^{i\gamma}, \quad i \cos \omega = i \left( 1 - \frac{s^2}{2} e^{2i\gamma} \right) = \\ &= \frac{s^2}{2} \sin 2\gamma + i \left( 1 - \frac{s^2}{2} \cos 2\gamma \right). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Так как линии уровня вещественной части функции  $i \cos \omega$  перпендикулярны к линиям уровня мнимой части и своим собственным линиям спада, то линия уровня мнимой части является одновременно искомой линией спада вещественной части (последняя определяет высоту перевала). Интересующая нас линия уровня мнимой части функции (4.54) определяется уравнением

$$1 - \frac{s^2}{2} \cos 2\gamma = C,$$

причем  $C=1$ , так как путь должен проходить через точку перевала  $s=0$ ; отсюда следует

$$\cos 2\gamma = 0, \quad \gamma = \mp \frac{\pi}{4}. \quad (4.54a)$$

В случае  $H^1$  мы должны выбрать верхний знак  $\gamma$  (см. фиг. 19), так что формулы (4.54) принимают следующий вид:

$$w = e^{-i\pi/4} s, \quad dw = e^{-i\pi/4} ds, \quad i \cos w = i - \frac{s^2}{2}. \quad (4.546)$$

Подставим это выражение для  $w$  в формулы (4.22) и одновременно положим  $s$  равным нулю в «медленно изменяющемся» множителе  $\exp[in(w - \pi/2)]$ ; при интегрировании можно, очевидно, ограничиться ближайшей окрестностью точки перевала, считая, например, что расстояние  $|s|$  от перевала меньше сколь угодно малого, но фиксированного числа  $\varepsilon$ . В результате получим

$$H_n^1(\rho) = \frac{1}{\pi} e^{i \left[ \rho - \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} \right]} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-\frac{\rho}{2} s^2} ds. \quad (4.54в)$$

Замена переменных  $s = \sqrt{2/\rho} t$ , при которой пределы интегрирования  $+\varepsilon$  и  $-\varepsilon$  заменяются пределами

$$\sqrt{\frac{\rho}{2}} \varepsilon \rightarrow \infty \quad \text{и} \quad -\sqrt{\frac{\rho}{2}} \varepsilon \rightarrow -\infty,$$

преобразует интеграл (4.54в) в интеграл Лапласа. Отсюда следует окончательно

$$H_n^1(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\rho\pi}} e^{i \left[ \rho - \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} \right]}. \quad (4.55)$$

В случае  $H^2$ , когда седловой точкой является точка  $w = \pi$ , нужно использовать путь  $W_2$  и в формуле (4.54а) выбрать нижний знак  $\gamma$ . Тогда соответственно получаем

$$H_n^2(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\rho\pi}} e^{-i \left[ \rho - \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} \right]}. \quad (4.56)$$

Наконец, беря полусумму выражений (4.55) и (4.56), приходим к формуле

$$I_n(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\rho\pi}} \cos \left[ \rho - \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2} \right]. \quad (4.57)$$

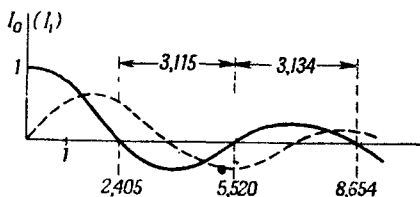


Эти асимптотические представления получены в предположении вещественного  $\rho$ , однако они могут быть аналитически продолжены в комплексную плоскость  $\rho$ , причем последняя в случае функции Ханкеля  $H$  должна мыслиться разрезанной по соответствующей полуоси, вследствие разветвлений, о которых говорилось в п. 3. На основании равенств (4.55) и (4.56) можно утверждать, что  $H^1$  асимптотически стремится к нулю в верхней,  $H^2$  — в нижней полуплоскости  $\rho$ . Это обстоятельство делает особенно удобным применение функций Ханкеля для проблем затухающих колебаний. Напротив, функция Бесселя  $I$  (так же как и функция Неймана  $N$ ) асимптотически стремится к бесконечности в обеих полуплоскостях.

В § 21 будет показано, каким путем, вместо одних только асимптотических предельных значений, можно получить полные асимптотические ряды, и будет выяснено, как изменяются асимптотически предельные значения, если отбросить условие  $n \ll \rho$ . Наличие в асимптотических формулах (4.55) и (4.56) множителя  $\rho^{-1/2}$  связано с тем обстоятельством, что функция  $H_0^1$  (или  $H_0^2$  при противоположном законе зависимости от времени) представляет *распространяющуюся цилиндрическую волну*, если рассматривать переменные  $r, \varphi$  вместе с третьей координатой  $z$ , перпендикулярной к плоскости  $r, \varphi$ , как цилиндрические координаты в пространстве, причем источник волны лежит в точке  $r = 0$ . Так как энергия, проходящая через любой цилиндр радиуса  $r$  с осью  $r = 0$ , равна  $2\pi r |H_0|^2$  и (в случае отсутствия поглощения) не должна зависеть от  $r$ , то отсюда, действительно, следует пропорциональность  $|H_0|$  и  $r^{-1/2}$  или, что то же,  $|H_0|$  и  $\rho^{-1/2}$ .

Поверхность, изображающая функцию  $\operatorname{Re}(H_0^1)$ , экспоненциально приближается к верхней полуплоскости  $\rho$ , а над нижней полуплоскостью эта поверхность состоит из экспоненциально возвышающихся «хребтов», перемежающихся со все более углубляющимися долинами. Поверхность, принадлежащая функции  $\operatorname{Im}(H_0^1)$ , имеет аналогичный вид и обладает, кроме того, узкой воронкой в нуле, соответствующей логарифмической особенности функции  $H_0$  [последняя аналогична особенности функции  $N_0$  в формуле (4.48)], а также разрывна вдоль отрицательной вещественной оси (в соответствии с разветвлением функции  $H_0$

при обходе вокруг точки  $\rho = 0$ ). Поверхность, изображающая функцию  $\operatorname{Re}(I_0)$ , состоит из пологой волнообразной лоцины, ограниченной с обеих сторон поднимающимися горными ландшафтами. Волнообразный вид русла лоцины вытекает из асимптотической формулы (4.57) и указывает на существование бесконечного числа корней уравнения  $I_0 = 0$  вдоль вещественной оси. Эти корни изображены на фиг. 21. Поверхность, изображающая функцию  $\operatorname{Im}(I_0)$ ,



Ф и г. 21. Графики функций  $I_0(x)$  (сплошная кривая) и  $I_1(x)$  (пунктирная кривая) для действительных значений аргумента. Указаны также значения первых трех корней уравнения  $I_0(\rho) = 0$ .

имеет аналогичный вид, только в этом случае дно лоцины всюду горизонтально, в соответствии с тем обстоятельством, что функция  $I_0$  вдоль вещественной оси имеет вещественные значения<sup>1)</sup>.

## § 20. ВЫРАВНИВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ЦИЛИНДРЕ

Вернемся к уравнению теплопроводности и рассмотрим одну частную задачу, решенную в свое время Фурье и представляющую собой прекрасный образец применения теории бесселевых функций.

Эти функции для целого  $n$  встречались уже в работах Фурье; поэтому их иногда с полным правом называют

<sup>1)</sup> На лекции автор демонстрировал картонные модели вещественных и мнимых частей функций  $H_0^i$  и  $I_0$ , построенные в виде поверхностей над комплексной плоскостью  $\rho$  и составленные из скрепленных между собой контуров соответствующих плоских сечений.

функциями Фурье — Бесселя. Мы рассмотрим задачу в три этапа:

1) Для бесконечно длинного цилиндра и симметричного начального состояния

$$f = f(r).$$

2) При зависимости начального состояния также и от азимута

$$f = f(r, \varphi).$$

3) Для цилиндра конечной длины и начального состояния самого общего вида

$$f = f(r, \varphi, z).$$

В качестве граничного условия будем, ради простоты, всюду рассматривать условие изотермии:

$$u = 0 \dots \text{ для } r = a, \quad (4.58)$$

где  $a$  — радиус цилиндра. К этому следует присоединить требование конечности вдоль оси цилиндра, являющееся, так сказать, вторым «граничным» условием

$$u \neq \infty \dots \text{ для } r = 0. \quad (4.58a)$$

**1. Одномерный случай  $f = f(r)$ .** Уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (4.59)$$

Положив

$$u = R(r) e^{-\lambda^2 k t} \quad (4.60)$$

и подставив выражение (4.60) в уравнение (4.59), получим для  $R$  дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0. \quad (4.60a)$$

Это уравнение представляет собой дифференциальное уравнение Бесселя (4.11) при  $n = 0$  и  $\nu = \lambda r$ . Общее его решение можно записать в виде

$$Z_0 = AI_0(\lambda r) + BN_0(\lambda r).$$

Однако вследствие условия конечности (4.58а) необходимо положить  $B=0$ ; далее, согласно условию (4.58), нужно потребовать, чтобы  $\lambda$  удовлетворяло уравнению

$$I_0(\lambda a) = 0. \quad (4.61)$$

Это уравнение имеет, как мы уже видели, бесконечно много корней, расстояния между которыми асимптотически стремятся к  $\pi$ ; для  $m$ -го корня этого уравнения формула (4.57) дает

$$\lambda_m a - \frac{\pi}{4} = \left(m - \frac{1}{2}\right)\pi, \text{ следовательно } \lambda_m a = \left(m - \frac{1}{4}\right)\pi. \quad (4.61a)$$

Это приближение при  $m \geq 2$  обеспечивает точность до 1%; при  $m=1$  получаем

$$\lambda_1 a = 2,40, \quad (4.61b)$$

вместо значения 2,36, даваемого формулой (4.61a) (см. фиг. 21).

Таким образом, получаем бесконечно много решений уравнения (4.60a)

$$R(r) = A_m I_0(\lambda_m r), \quad m = 1, 2, \dots$$

В соответствии с этим, вместо решения (4.60), в качестве общего решения нашей задачи получается ряд

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} A_m I_0(\lambda_m r) e^{-\lambda_m^2 k t}. \quad (4.62)$$

Таким образом, остается только удовлетворить начальному условию

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m I_0(\lambda_m r). \quad (4.63)$$

Путь к этому дает проведенное ранее в § 16 исследование ангармонического ряда по синусам. Для того чтобы более отчетливо подчеркнуть полную аналогию с уравнениями (3.44) и (3.42) из § 16, положим

$$u_n = I_0(\lambda_n r), \quad u_m = I_0(\lambda_m r)$$

и запишем соответствующие уравнения (4.60а) в виде

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{du_n}{dr} \right) + \lambda_n^2 r u_n = 0, \quad \frac{d}{dr} \left( r \frac{du_m}{dr} \right) + \lambda_m^2 r u_m = 0.$$

Отсюда после умножения на  $u_m$ , соответственно на  $u_n$ , и вычитания получается соотношение, аналогичное соотношению (3.41б) из § 16

$$u_m \frac{d}{dr} \left( r \frac{du_n}{dr} \right) - u_n \frac{d}{dr} \left( r \frac{du_m}{dr} \right) = (\lambda_m^2 - \lambda_n^2) r u_m u_n. \quad (4.64)$$

Левая часть соотношения (4.64) является полной производной. Интегрирование по основной области  $0 < r < a$  приводит к соотношению, аналогичному соотношению (3.42):

$$(\lambda_m^2 - \lambda_n^2) \int_0^a r u_m u_n dr = r \left( u_m \frac{du_n}{dr} - u_n \frac{du_m}{dr} \right) \Big|_0^a. \quad (4.64a)$$

Вместе с тем это соотношение является формулой Грина для круга с радиусом  $r = a$ .

Правая часть в уравнении (4.64a) обращается в нуль для  $r = a$  в силу равенства (4.58), для  $r = 0$  — в силу условия конечности (4.58а) и наличия множителя  $r$ . Так как  $\lambda_m \neq \lambda_n$ , то отсюда следует условие ортогональности

$$\int_0^a u_m u_n r dr = 0. \quad (4.65)$$

Появление множителя  $r$  в этом условии связано, очевидно, с тем, что элемент площади в полярных координатах имеет вид  $r dr d\varphi$ .

Из равенства (4.64a) можно получить также и нормирующий интеграл

$$N_m = \int u_m^2 r dr,$$

если только отказаться от требования, чтобы  $\lambda_n$  было корнем уравнения (4.61), и рассматривать  $\lambda_n$  как непрерывно меняющуюся величину, которая в пределе стремится к  $\lambda_m$ .  $N_m$  будет тогда пределом интеграла, кото-

рый в силу равенства (4.64а) может быть представлен дробью, принимающей при  $\lambda_n \rightarrow \lambda_m$  вид  $0/0$ . Дифференцируя ее числитель и знаменатель по  $\lambda_n$ , подставляя  $r=a$  и  $r=0$  и принимая во внимание условие (4.58), получаем

$$N_m = \frac{a}{2\lambda_n} \left( \frac{du_n}{d\lambda_n} \frac{du_m}{dr} \right)_{r=a} \rightarrow \frac{a}{2\lambda_m} \left( \frac{du_m}{d\lambda_m} \frac{du_m}{dr} \right)_{r=a}. \quad (4.66)$$

Но для  $r=a$

$$\frac{du_m}{d\lambda_m} = a I'_0(\lambda_m a), \quad \frac{du_m}{dr} = \lambda_m I'_0(\lambda_m a).$$

После подстановки этих выражений в правую часть формулы (4.66) находим:

$$N_m = \frac{a^2}{2} [I'_0(\lambda_m a)]^2. \quad (4.66a)$$

Теперь коэффициенты  $A_m$  ряда (4.63) определяются в силу соотношений (4.65) и (4.66a) обычным способом:

$$A_m N_m \int_0^a f(r) I_0(\lambda_m r) r dr; \quad (4.67)$$

подставив их в ряд (4.62), получим решение задачи 1.

**2. Двухмерный случай  $f=f(r, \varphi)$ .** Разложим сначала  $f(r, \varphi)$  в ряд Фурье (записанный для большего удобства в комплексной форме)

$$f(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n e^{in\varphi}, \quad C_n = C_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(r, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi. \quad (4.68)$$

Функция  $u$  должна удовлетворять уравнению (4.59), дополненному членом с  $\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$  до двухмерного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (4.69)$$

Ищем решения в форме

$$u = R_n(r) e^{in\varphi} e^{-\lambda^2 kt}. \quad (4.70)$$

Тогда функция  $R_n(r)$  должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 R_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_n}{dr} + \left( \lambda^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R_n = 0. \quad (4.71)$$

Это уравнение представляет собой уравнение Бесселя (4.11), если в нем положить  $\rho = \lambda r$ . Вследствие требования (4.58а) можно рассматривать только решения вида  $A_n I_n(\lambda r)$ . Здесь  $\lambda$ , в силу условия (4.58), должно удовлетворять уравнению  $I_n(\lambda a) = 0$ , которое, подобно уравнению  $I_0(\lambda a) = 0$ , имеет бесконечно много корней

$$\lambda_{n,1}, \lambda_{n,2}, \dots, \lambda_{n,m}, \dots$$

Каждому из них соответствует частное решение вида (4.70)

$$u_{n,m} = A_{n,m} I_n(\lambda_{n,m} r) e^{in\varphi} e^{-\lambda_{n,m}^2 kt}, \quad (4.72)$$

удовлетворяющее вместе с тем дифференциальному уравнению (4.69). С помощью суперпозиции этих решений получается общее решение, которое в то же время удовлетворяет нашему граничному условию

$$u = \sum \sum u_{n,m} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m} I_n(\lambda_{n,m} r) e^{in\varphi} e^{-\lambda_{n,m}^2 kt}. \quad (4.73)$$

Коэффициенты  $A_{n,m}$ , являющиеся пока еще произвольными, следует выбрать таким образом, чтобы при  $t=0$  для каждого целого значения  $-\infty < n < +\infty$  выполнялось соотношение

$$C_n(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{n,m} I_n(\lambda_{n,m} r), \quad (4.74)$$

левая часть которого является, согласно формуле (4.68), известной функцией от  $r$ . Равенство (4.74) требует разложения этой функции в ряд по функциям Бесселя  $I_n$ . Это возможно в силу их ортогональности. Последняя

следует, как и соотношение (4.65), из дифференциального уравнения Бесселя (4.71) и из формулы Грина<sup>1)</sup>. Полагая

$$v_m = I_n(\lambda_n, m r), \quad v_l = I_n(\lambda_n, l r),$$

приходим к равенству

$$(\lambda_{n,m}^2 - \lambda_{n,l}^2) \int_0^a r v_m v_l dr = r \left( v_m \frac{dv_l}{dr} - v_l \frac{dv_m}{dr} \right) \Big|_0^a,$$

которое является обобщением равенства (4.64).

И в этом случае правая часть обращается в нуль. При  $l \neq m$  имеем, следовательно,

$$\int_0^a v_m v_l r dr = 0. \quad (4.75)$$

В то же время с помощью предельного перехода, аналогичного формуле (4.66), получаем при  $l \rightarrow m$

$$N_{n,m} = \int_0^a v_m^2 r dr = \frac{a^2}{2} [I_n'(\lambda_n, ma)]^2. \quad (4.76)$$

В силу формул (4.75) и (4.76) коэффициенты  $A_{n,m}$  в формуле (4.74) могут быть подсчитаны способом Фурье, исходя из заданной функции  $C_n(r)$ , аналогично тому как в формуле (4.63) подсчитывались коэффициенты  $A_m$  при заданной функции  $f(r)$ . Подставив, далее, вместо  $C_n(r)$  выражение (4.68) для этой функции, получаем

$$2\pi N_{n,m} A_{n,m} = \int_0^a \int_{-\pi}^{+\pi} f(r, \varphi) I_n(\lambda_n, m r) e^{-in\varphi} r dr d\varphi. \quad (4.77)$$

Решение (4.73) доведено, таким образом, до конца.

<sup>1)</sup> Применяя формулу Грина к кругу  $r=a$  в плоскости  $r, \varphi$ , необходимо, во избежание тривиального результата  $0=0$ , использовать функции

$$v_{n,m} = I_n(\lambda_n, m r) e^{+in\varphi} \text{ и } v_{n,l}^* = I_n(\lambda_n, l r) e^{-in\varphi},$$

азимутальные множители которых представляют собой комплексно сопряженные функции.



3. Трехмерный случай  $f = f(r, \varphi, z)$ . Пусть цилиндр имеет конечную длину  $h$  и пусть  $0 < z < h$ . Разложим, прежде всего, функцию  $f(r, \varphi, z)$  в ряд Фурье по  $z$ , который, в силу граничного условия  $u = 0$  для  $z = 0$  и  $h$ , должен быть рядом по синусам:

$$f(r, \varphi, z) = \sum_{\mu=1}^{\infty} B_{\mu} \sin \mu \pi \frac{z}{h}, \quad B_{\mu} = \frac{2}{h} \int_0^h f(r, \varphi, z) \sin \mu \pi \frac{z}{h} dz; \quad (4.78)$$

далее, разложим функции  $B_{\mu} = B_{\mu}(r, \varphi)$  в ряд по функциям  $\exp(in\varphi)$ ,

$$B_{\mu}(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_{\mu, n} e^{in\varphi}, \quad C_{\mu, n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} B_{\mu}(r, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi. \quad (4.79)$$

Наконец, функции  $C_{\mu, n} = C_{\mu, n}(r)$  следует представить рядом по бесселевым функциям  $I_n(\lambda r)$ , расположенным по возрастающим корням  $\lambda$  уравнения

$$I_n(\lambda a) = 0, \quad \lambda = \lambda_{n, m}, \quad m = 1, 2, \dots$$

В силу дифференциального уравнения теплопроводности, соответственно дополненного членами с  $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t},$$

множитель, зависящий от времени, должен иметь вид

$$e^{-\alpha^2 kt}, \quad \text{где } \alpha^2 = \lambda_{n, m}^2 + \left(\frac{\mu \pi}{h}\right)^2.$$

Полное решение представляется тройным рядом

$$u = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{\mu n m} I_n(\lambda_{n, m} r) e^{in\varphi} \sin \mu \pi \frac{z}{h} e^{-[\lambda_{n, m}^2 + (\frac{\mu \pi}{h})^2] kt}. \quad (4.80)$$

Коэффициенты  $A$  вычисляются по соответственно расширенной схеме (4.67) или (4.77)

$$\pi h N_{n,m} A_{n,m} = \int_0^a \int_{-\pi}^{+\pi} \int_0^h f(r, \varphi, z) I_n(\lambda_{n,m} r) e^{-in\varphi} \sin \mu \pi \frac{z}{h} r dr d\varphi dz, \quad (4.81)$$

причем множители  $N_{n,m}$  определяются формулой (4.76). Тем самым решение (4.80) принимает вполне законченный вид. В случае полого цилиндра, вследствие отсутствия условия конечности (4.58а) при  $r=0$ , наряду с функциями  $I_n$  должны появиться также функции  $N_n$  (или, в симметрической записи, вместо  $I_n$  и  $N_n$  — обе функции  $H_n^1$  и  $H_n^2$ ); в качестве примера практического применения этой теории приведем задачу о потоке тепла через отопительную трубу.

## § 21. ДАЛЬНЕЙШИЕ СВЕДЕНИЯ О БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЯХ

### 1. Производящая функция и теоремы сложения.

В § 19 мы исходили из двухмерного волнового уравнения  $\Delta u + k^2 u = 0$  и его простейшего решения

$$u = e^{ikx} = e^{i\rho \cos \varphi}, \quad \rho = kr, \quad k — \text{волновое число.} \quad (4.82)$$

Если разложить это решение в ряд Фурье, то коэффициенты последнего, в соответствии с первоначальным способом вывода уравнения Бесселя, должны быть решениями этого дифференциального уравнения и притом решениями вида  $c_n I_n(\rho)$ , вследствие регулярности функции (4.82) при  $\rho=0$ . Полагая поэтому коэффициент при  $\exp(in\varphi)$  равным  $c_n I_n$ , получаем, в силу формулы (1.12),

$$c_n I_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\rho \cos \varphi} e^{-in\varphi} d\varphi.$$

Если сравнить это выражение с интегральным представлением (4.18), в котором, очевидно, можно заменить  $w$  на  $-w$ , находим  $c_n = e^{in\pi/2}$ . Таким образом, приходим

к ряду Фурье:

$$e^{i\rho \cos \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\pi/2} I_n(\rho) e^{in\varphi} \quad (4.83)$$

или, полагая  $\psi = \varphi + \frac{\pi}{2}$ ,

$$e^{i\rho \sin \psi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n(\rho) e^{in\psi}. \quad (4.83a)$$

В математической литературе XIX века применялась менее симметричная запись

$$e^{i\rho \cos \varphi} = I_0(\rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n I_n(\rho) \cos n\varphi. \quad (4.83b)$$

Левую часть формулы (4.83) или (4.83a) называют поэтому *производящей функцией бесселевых функций с целочисленным индексом*.

От плоской волны перейдем к цилиндрической, имеющей в нулевой точке источник логарифмического типа, которая может быть представлена с помощью функции  $H_0(\rho)$  (здесь опущен верхний индекс, так как последующее справедливо в равной мере для обеих функций  $H$ , т. е. как для уходящей, так и для приходящей волны).

Переместим нулевую точку  $\rho = 0$  в точку  $\rho = \rho_0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ , причем  $H_0(\rho)$  переходит в  $H_0(R)$ ,

$$R = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

Если разложить волну в ряд Фурье по кратным аргумента  $\varphi - \varphi_0$ , то коэффициенты ряда вновь должны быть цилиндрическими функциями, а именно функциями  $H_n(\rho)$  для  $\rho > \rho_0$  и функциями  $I_n(\rho)$  для  $\rho < \rho_0$ . Последнее утверждение следует из того, что точка  $\rho = 0$  является теперь регулярной, а первое из того, что каждый отдельный член ряда для  $\rho \rightarrow \infty$  должен быть уходящей или приходящей волной, соответственно типу функции  $H_0(R)$ . Это же рассуждение относится, в силу соображений симметрии, и к зависимости наших коэффициентов от переменного  $\rho_0$ , с той только разницей, что функции

$I_n$  и  $H_n$  меняются ролями, так как условие  $\rho \cong \rho_0$  равносильно условию  $\rho_0 \cong \rho$ . Следовательно,  $n$ -ый коэффициент Фурье должен иметь вид

$$c_n \begin{cases} I_n(\rho_0) H_n(\rho) & \text{при } \rho > \rho_0, \\ H_n(\rho_0) I_n(\rho) & \text{при } \rho < \rho_0. \end{cases}$$

Числовой множитель  $c_n$ , входящий сюда, не зависит от  $\rho$  и  $\rho_0$  и является одним и тем же для обеих разложений, так как оба ряда при  $\rho = \rho_0$  должны непрерывным образом переходить друг в друга (за исключением случая, когда одновременно  $\varphi = \varphi_0$ , так как тогда оба ряда расходятся); он оказывается равным единице, в чем можно убедиться, если в случае  $\rho < \rho_0$  совершить предельный переход к плоской волне, заставляя  $\rho_0$  стремиться к  $\infty$ , положить  $\varphi_0 = \pi$  и сравнить получающуюся асимптотическую формулу с формулой (4.83). Мы получаем таким образом *теорему сложения*

$$H_0(R) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n(\rho_0) H_n(\rho) e^{in(\varphi - \varphi_0)}, & \rho > \rho_0, \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_n(\rho_0) I_n(\rho) e^{in(\varphi - \varphi_0)}, & \rho < \rho_0. \end{cases} \quad (4.84)$$

Если мы напишем выражение (4.84) для обеих функций Ханкеля и возьмем полусумму, то приходим к теореме сложения для бесселевых функций:

$$I_0(R) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} I_n(\rho_0) I_n(\rho) e^{in(\varphi - \varphi_0)}. \quad (4.84a)$$

Аналогично, из соответственно образованной полуразности этих же выражений получается теорема сложения для функции Неймана, где вновь следует, как и в формуле (4.84), различать случаи  $\rho > \rho_0$  и  $\rho < \rho_0$ . Относительно формулы (4.84) заметим дополнительно, что ряд по  $I_n$  соответствует в теории аналитических функций ряду Тэйлора, ряд по  $H_n$  — ряду Лорана. Это становится более ясным на следующем примере, в котором переменные  $z$

и  $z_0$  соответствуют  $\rho e^{i\varphi}$  и  $\rho_0 e^{i\varphi_0}$ :

$$\begin{aligned}\frac{z}{z-z_0} &= \sum_{n=0}^{\infty} z_0^n z^{-n} \quad \text{при } |z| > |z_0|, \\ \frac{z_0}{z_0-z} &= \sum_{n=0}^{\infty} z_0^{-n} z^n \quad \text{при } |z| < |z_0|.\end{aligned}\quad (4.85)$$

В § 24 будет выведена теорема сложения для сферической волны в пространстве и соответственно обобщено представление (4.83) для плоской волны.

**2. Интегральное представление с помощью бесселевых функций.** Поставим себе задачу получить разложение данной функции  $f(r)$  по бесселевым функциям, аналогичное интегралу Фурье. Согласно формуле (2.646), функция двух переменных может быть представлена интегралом Фурье:

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega d\omega' \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi d\eta f(\xi, \eta) e^{i\omega(x-\xi) + i\omega'(y-\eta)}. \quad (4.86)$$

Введем полярные координаты

$$x = r \cos \varphi, \quad \xi = \rho \cos \psi, \quad \omega = \sigma \cos \alpha,$$

$$y = r \sin \varphi, \quad \eta = \rho \sin \psi, \quad \omega' = \sigma \sin \alpha,$$

$$d\xi d\eta = \rho d\rho d\psi, \quad d\omega d\omega' = \sigma d\sigma d\alpha.$$

Предположим, что функция зависит от угла  $\varphi$  следующим образом:

$$f(x, y) = f(r) e^{in\varphi} \quad (n - \text{целое число}). \quad (4.87)$$

С помощью соотношений

$$\omega x + \omega' y = \sigma r \cos(\alpha - \varphi),$$

$$\omega \xi + \omega' \eta = \sigma \rho \cos(\psi - \alpha)$$

формула (4.86) приводится к виду

$$f(r) e^{in\varphi} = \int_0^\infty \sigma d\sigma \int_0^\infty f(\rho) \rho d\rho \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i\sigma r \cos(\alpha - \varphi)} d\alpha \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{in\psi} e^{-i\sigma \rho \cos(\psi - \alpha)} d\psi. \quad (4.88)$$

Для того чтобы привести интегралы по  $\alpha$  и  $\psi$  к виду (4.18), т. е. к виду

$$\begin{aligned} I_n(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{iz \cos \beta} e^{in(\beta - \frac{\pi}{2})} d\beta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-iz \cos \beta'} e^{in(\beta' + \frac{\pi}{2})} d\beta', \quad (\beta' = \beta - \pi), \end{aligned}$$

умножим подинтегральные выражения в предпоследнем и последнем интегралах равенства (4.88) на множители  $e^{in(\alpha - \pi/2)}$  и соответственно  $e^{in(-\alpha + \pi/2)}$ . Если перенести множитель  $e^{in\varphi}$  из левой части в предпоследний интеграл правой части, то этот интеграл станет равным  $I_n(\sigma r)$ , а последний интеграл станет равным  $I_n(\sigma \rho)$ . Таким образом, получим простое представление

$$f(r) = \int_0^\infty \sigma d\sigma \int_0^\infty f(\rho) I_n(\sigma r) I_n(\sigma \rho) \rho d\rho. \quad (4.89)$$

Аналогично формулировке (1.52) интегральной теоремы Фурье, можно привести эту зависимость к симметричному виду

$$f(r) = \int_0^\infty \sigma d\sigma \varphi(\sigma) I_n(\sigma r), \quad (4.89a)$$

$$\varphi(\sigma) = \int_0^\infty \rho d\rho f(\rho) I_n(\sigma \rho).$$

Преобразование двойного интеграла от прямоугольных декартовых координат к полярным, использованное при переходе от формулы (4.86) к формуле (4.88), обусловлено некоторыми требованиями относительно поведения  $f$  на бесконечности, на чем не будем здесь останавливаться. Формула (4.88) окажется полезной в § 24 при рассмотрении сферических волн. Из формулы (4.89) может быть получено новое интересное следствие, если в нем положить функцию  $f$  равной  $\delta$ -функции.

Для этого функция  $f(r)$  должна удовлетворять условиям

$$f(r) = \delta(r|s) = \begin{cases} 0 & \text{при } r \neq s \\ \infty & \text{при } r = s \end{cases},$$

$$\text{причем } \int_{s-s}^{s+s} f(r) r dr = 1. \quad (4.90)^1$$

Тогда из формулы (4.89) следует

$$\int_0^\infty I_n(sr) I_n(st) s ds = \delta(r|s). \quad (4.90a)$$

Эта формула выражает ортогональность обеих функций  $I_n$  для двух точек  $r$  и  $s$  непрерывной области значений  $0 < r < \infty$ ,  $0 < s < \infty$ . Она является аналогом формулы (4.75), в которой идет речь о двух точках  $m$  и  $l$  дискретного ряда значений параметра  $\lambda$ . В § 36 мы еще вернемся к важному для нас соотношению (4.90a).

**3. Бесселевы функции с индексами  $n \pm 1/2$ ,  $n \pm 1/3$ .**  
Ряд (4.34) при  $n = 1/2$ ,  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma(3/2) = 1/2 \sqrt{\pi}$ , ...

<sup>1)</sup> Следует обратить внимание на множитель  $r$  (так называемый вес элемента интеграла) в интеграле формулы (4.90); множитель  $r$  характерен для двухмерных цилиндрических задач. Именно благодаря этому вместо прежнего соотношения  $\int \delta(r|s) ds = 1$  здесь вводится условие

$$\int \delta(r|s) r dr = 1.$$

принимает вид

$$\begin{aligned} I_{1/2}(\rho) &= \\ &= \sqrt{\frac{\rho}{2}} \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} - \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3 \sqrt{\pi}} \left(\frac{\rho}{2}\right)^2 + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \sqrt{\pi}} \left(\frac{\rho}{2}\right)^4 - \dots \right] = \\ &= \sqrt{\frac{2\rho}{\pi}} \left( 1 - \frac{\rho^2}{3!} + \frac{\rho^4}{5!} - \dots \right) = \sqrt{\frac{2\rho}{\pi}} \frac{\sin \rho}{\rho}. \quad (4.91) \end{aligned}$$

Аналогично находим для  $n = -1/2$

$$I_{-1/2}(\rho) = \sqrt{\frac{2\rho}{\pi}} \frac{\cos \rho}{\rho}. \quad (4.91a)$$

Положим теперь в общем случае

$$I_{n+1/2}(\rho) = \sqrt{\frac{2\rho}{\pi}} \psi_n(\rho), \text{ в частности, } \psi_0 = \frac{\sin \rho}{\rho}. \quad (4.92)$$

Из дифференциального уравнения Бесселя (4.11) путем несложных вычислений получаем дифференциальное уравнение для  $\psi_n$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d^2(\rho \psi_n)}{d\rho^2} + \left[ 1 - \frac{n(n+1)}{\rho^2} \right] \psi_n = 0. \quad (4.92a)$$

Это уравнение еще встретится нам в теории шаровых функций. Покажем теперь, что решение уравнения (4.92a), конечное при  $\rho = 0$ , выражается через функцию  $\psi_0$  с помощью

$$\psi_n = (-\rho)^n \left( \frac{d}{\rho d\rho} \right)^n \psi_0. \quad (4.93)$$

Лучше всего вести доказательство, пользуясь рядом (4.34). Если  $p$  обозначает произвольный индекс (в нашем случае  $p = 1/2$ ), то имеем

$$\frac{I_p(\rho)}{(\rho/2)^p} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(p+m+1)} \frac{(\rho^2/2)^m}{2^m}. \quad (4.94)$$

Дифференцируя это равенство  $n$  раз по  $\rho^2/2$ , получаем справа

$$\sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m-n)! \Gamma(p+m+1)} \frac{(\rho^2/2)^{m-n}}{2^m}.$$



Меняя обозначение индекса суммирования ( $\mu = m - n$ ,  $m = n + \mu$ ), получаем

$$\frac{(-1)^n}{2^n} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu}{\mu!} \frac{(\rho^2/4)^\mu}{\Gamma(\mu + n + p + 1)} = \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{I_{n+p}(\rho)}{(\rho/2)^{n+p}}. \quad (4.94a)$$

С другой стороны, так как  $d(\rho^2/2) = \rho d\rho$ , то левая часть формулы (4.94) в результате  $n$ -кратного дифференцирования принимает вид

$$\left( \frac{d}{\rho d\rho} \right)^n \frac{I_p(\rho)}{(\rho/2)^p}. \quad (4.94б)$$

Сравнивая формулы (4.94a) и (4.94б), получим общее соотношение

$$\frac{I_{n+p}(\rho)}{\rho^p} = (-\rho)^n \left( \frac{d}{\rho d\rho} \right)^n \frac{I_p(\rho)}{\rho^p}. \quad (4.94в)$$

При  $p = 1/2$  соотношение (4.94в), в силу формулы (4.91), тождественно с соотношением (4.93). Если дифференцировать  $n$  раз по  $\rho^2/2$  не частное, а произведение функций  $I_p(\rho)$  и  $(\rho/2)^p$ , то вместо формулы (4.94в) получится

$$I_{-n+p}(\rho) \cdot \rho^p = \rho^n \left( \frac{d}{\rho d\rho} \right)^n [I_p(\rho) \cdot \rho^p]. \quad (4.94г)$$

Вновь полагая  $p = 1/2$  и пользуясь определением (4.92), получим в качестве дополнения к формуле (4.93)

$$\psi_{-n}(\rho) = \rho^{n-1} \left( \frac{d}{\rho d\rho} \right)^n (\rho \psi_0). \quad (4.94д)$$

Из формул (4.93) и 4.94д) легко выводятся *рекуррентные формулы* для  $\psi_n$  и  $\psi_{-n}$

$$\begin{aligned} \psi_{n+1} &= -\frac{d\psi_n}{d\rho} + \frac{n}{\rho} \psi_n, \\ \psi_{-n-1} &= \frac{d\psi_{-n}}{d\rho} - \frac{n-1}{\rho} \psi_{-n}. \end{aligned} \quad (4.95)$$

Соответствующие рекуррентные формулы для  $Z_{\pm n}$  были рассмотрены в § 19, п. 4. Последовательно вычисляя  $\psi_n$ ,

начиная с  $\psi_0 = \sin \rho / \rho$ , с помощью формул (4.95) получим

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \frac{\sin \rho - \rho \cos \rho}{\rho^2}, \quad \psi_2 = \frac{3(\sin \rho - \rho \cos \rho) - \rho^2 \sin \rho}{\rho^3}, \dots \\ \psi_{-1} &= \frac{\cos \rho}{\rho}, \quad \psi_{-2} = \frac{\cos \rho + \rho \sin \rho}{\rho^2}, \\ \psi_{-3} &= \frac{3(\cos \rho + \rho \sin \rho) - \rho^2 \cos \rho}{\rho^3} \dots\end{aligned}\quad (4.95a)$$

Отсюда можно заключить, что все  $\psi_{\pm n}$  при целом  $n$  выражаются элементарным образом через синус и косинус. Эти формулы подтверждают сделанное в примечании на стр. 135 замечание о нелогарифмическом характере полуцелых функций Бесселя.

Для функций Ханкеля вводятся функции  $\zeta_n$ , соответствующие  $\psi_n$ , с помощью формулы

$$H_{n+1/2}(\rho) = \sqrt{\frac{2\rho}{\pi}} \zeta_n(\rho) \quad (4.96)$$

верхние индексы 1 и 2 в левой и правой частях для простоты опущены). В частности, нас интересуют функции  $\zeta_0$ . Эти функции выражаются через  $H_{1/2}$ , для которых в свою очередь, на основании формул (4.31), (4.30) и выведенной здесь формулы (4.92), получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned}H_{1/2}^1 &= \frac{-iI_{1/2} - I_{-1/2}}{-i} = \sqrt{\frac{2\rho}{\pi}} \frac{e^{i\rho}}{i\rho}, \\ H_{1/2}^2 &= \frac{iI_{1/2} - I_{-1/2}}{i} = \sqrt{\frac{2\rho}{\pi}} \frac{ie^{-i\rho}}{\rho}.\end{aligned}$$

Таким образом, согласно формуле (4.96), имеем

$$\zeta_0^1 = \frac{e^{i\rho}}{i\rho}, \quad \zeta_0^2 = \frac{e^{-i\rho}}{-i\rho}. \quad (4.96a)$$

Заметим, что применяемые здесь обозначения совпадают с определением функции  $\psi_n$  в принадлежащей автору пятой части книги Ф. Франка и Р. Мизеса (см. русский перевод, 1937 г., гл. XX). Функции  $\psi_n$  отличаются множи-

телем  $\rho$  от обозначений других авторов, которые вместо формулы (4.92) пишут

$$I_{n+1/2}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \psi_n(\rho)^1, \quad (4.97)$$

что иногда более удобно.

В соответствии с равенствами (4.95a) для  $\psi_n$  функции  $\zeta_n$  выражаются в элементарной форме через  $\exp(\pm i\rho)$ . Это эквивалентно доказываемому в п. 3 факту, что асимптотические разложения функций Ханкеля в случае полупелых индексов обрываются на конечном числе членов.

Весьма удобную форму принимает дифференциальное уравнение для  $Z_{\pm 1/2}(kr)$ , если произвести замену зависимого и независимого переменных с помощью формул

$$kr = \frac{2}{3} \rho^{3/2}, \quad Z_{\pm 1/2}(kr) = \rho^{-1/2} \Phi(\rho). \quad (4.98)$$

Прямой расчет привел бы к длинным преобразованиям. Этого можно избежать, если применить конформное отображение  $x + iy = f(\xi + i\eta)$ ,  $\Delta_{xy} = \frac{1}{|f'(\xi + i\eta)|^2} \Delta_{\xi\eta}$ , которое переводит уравнение

$$\Delta_{xy} u + k^2 u = 0 \quad (4.98a)$$

в уравнение

$$\Delta_{\xi\eta} v + k^2 |f'(\xi + i\eta)|^2 v = 0, \quad (4.98b)$$

где  $u(x, y) = v(\xi, \eta)$ .

В частности, если функция  $f$  пропорциональна некоторой степени переменной  $\xi + i\eta$ , например

$$kf(\xi + i\eta) = \frac{2}{\mu} (\xi + i\eta)^{\mu/2}, \quad \begin{cases} x + iy = re^{i\varphi}, \\ \xi + i\eta = \rho e^{i\psi}, \end{cases}$$

<sup>1)</sup> Р. Деbye, Ann. d. Phys., 30 (1909); В. ван дер Поl und Н. Времмер, Phil. Mag., 24 (1937).

Дальнейшие доказательства см. в книге Г. Н. Ватсона, Теория бесселевых функций, М., 1949, ч. 1, стр. 68. Функция  $\psi_n$ , определенная формулой (4.97), обозначается в технической акустике через  $S_n$ ; используемую там же функцию  $C_n$  следовало бы в нашей терминологии назвать «функцией Неймана», так как она пропорциональна  $\zeta_n^1 - \zeta_n^2$ .

то получим

$$k|x + iy| = kr = \frac{2}{\mu} |\xi + i\eta|^{\mu/2} = \frac{2}{\mu} \rho^{\mu/2}, \quad \varphi = \frac{\mu}{2} \psi$$

и

$$k|f'(\xi + i\eta)| = \rho^{\mu/2-1}.$$

Решение уравнения (4.98а)

$$u = I_{\mp 1/\mu}(kr) e^{i\varphi/\mu}$$

переходит тогда в решение уравнения (4.98б) вида

$$v = I_{\mp 1/\mu}\left(\frac{2}{\mu} \rho^{\mu/2}\right) e^{i\psi/2}. \quad (4.98в)$$

Поэтому

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \rho^{\mu-2} v = 0.$$

Если, кроме того, положить

$$v = \rho^{-1/2} \Phi(\rho) e^{i\psi/2},$$

то, как показывают простые вычисления, получится уравнение

$$\frac{d^2 \Phi}{d\rho^2} + \rho^{\mu-2} \Phi = 0, \quad (4.98г)$$

имеющее решения  $\Phi_0$  и  $\Phi_1$ , разлагающиеся в ряды следующего вида:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= 1 - \frac{\rho^\mu}{\mu(\mu-1)} + \frac{\rho^{2\mu}}{\mu(\mu-1)2\mu(\mu-1)} - \dots, \\ \Phi_1 &= \rho - \frac{\rho^{\mu+1}}{(\mu+1)\mu} + \frac{\rho^{2\mu+1}}{(\mu+1)\mu(2\mu+1)2\mu} - \dots \end{aligned} \quad (4.98д)$$

Вследствие зависимости между  $\Phi$  и  $v$  эти ряды связаны с двумя указанными в формуле (4.98в) решениями  $v$ ; именно, обозначая через  $C_{\mp}$  некоторые постоянные множители, будем иметь

$$\left. \begin{matrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \end{matrix} \right\} = C_{\mp} \rho^{1/2} I_{\mp 1/\mu} \left( \frac{2}{\mu} \rho^{\mu/2} \right). \quad (4.98е)$$

Если подставить сюда степенной ряд для  $I$  по формуле (4.34), то сравнение с рядом (4.98д) дает

$$C_- = \mu^{-1/\mu} \Gamma\left(1 - \frac{1}{\mu}\right), \quad C_+ = \mu^{1/\mu} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\mu}\right). \quad (4.98ж)$$

При  $\mu = 3$  уравнение (4.98г) принимает вид

$$\Phi''(\rho) + \rho \Phi(\rho) = 0. \quad (4.99)$$

Ряды (4.98д) переходят в ряды

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= 1 - 1 \cdot \frac{\rho^3}{3!} + 1 \cdot 4 \cdot \frac{\rho^6}{6!} - 1 \cdot 4 \cdot 7 \frac{\rho^9}{9!} + \dots, \\ \Phi_1 &= \rho - 2 \cdot \frac{\rho^4}{4!} + 2 \cdot 5 \cdot \frac{\rho^7}{7!} - 2 \cdot 5 \cdot 8 \frac{\rho^{10}}{10!} + \dots, \end{aligned} \quad (4.100)$$

а из формул (4.98е) и (4.98ж) следует при  $\mu = 3$

$$\begin{aligned} \Phi_0(\rho) &= 3^{-1/3} \Gamma\left(1 - \frac{1}{3}\right) \rho^{1/2} I_{-1/3}\left(\frac{2}{3} \rho^{3/2}\right), \\ \Phi_1(\rho) &= 3^{1/3} \Gamma\left(1 + \frac{1}{3}\right) \rho^{1/2} I_{+1/3}\left(\frac{2}{3} \rho^{3/2}\right). \end{aligned} \quad (4.101)$$

Функции  $I_{\pm 1/3}$  встретятся в конце следующего пункта. Заметим, что при  $\mu = 2$  уравнение (4.98г) переходит в дифференциальное уравнение тригонометрических функций, а  $\Phi_0$ ,  $\Phi_1$  переходят в  $\cos \rho$ ,  $\sin \rho$ .

При  $\mu = 1$  разложения в ряды вида (4.98д) не имеют места, так как  $\rho = 0$  является тогда особой точкой дифференциального уравнения (4.98 г.).

#### 4. Обобщение метода седловых точек по Дебаю.

Хотя в последующих приложениях мы будем пользоваться только асимптотическим предельным значением функций Бесселя, найденным в конце § 19, мы хотим упомянуть также о некоторых, более общих рядах, полученных впервые Ханкелем, которые располагаются по отрицательным степеням  $\rho$  и первый член которых является как раз указанным выше асимптотическим предельным значением. Эти ряды в действительности расходятся (как разложения в существенно особой точке), однако часто называются полусходящимися. Их члены сначала сильно убывают,

однако, начиная с некоторого минимального члена, возрастают до бесконечности.

Если оборвать такой ряд на минимальном члене, то он может служить в качестве *приближенной формулы*. Чтобы получить кратчайшим путем такие ряды для функций Ханкеля, исходя из дифференциального уравнения, подставим в дифференциальное уравнение ряд с неопределенными коэффициентами и найдем находящиеся в нашем распоряжении коэффициенты так, как это обычно делается для сходящихся рядов (т. е. приравнявая нулю коэффициенты при каждой степени), что, очевидно, математически не вполне строго. В соответствии с формулами (4.55) и (4.56) мы пишем общую формулу для  $H_n^1$  и  $H_n^2$ :

$$H_n^{1,2}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{\pm i[\rho - (n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}]} \left( a_0 + \frac{a_1}{\rho} + \frac{a_2}{\rho^2} + \dots + \frac{a_m}{\rho^m} + \dots \right), \quad (4.102)$$

и, подставив этот ряд в дифференциальное уравнение (4.11), после сокращения на общий множитель

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp \{ \pm i [\rho - (n + \frac{1}{2})\pi/2] \},$$

собираем члены с  $\rho^{-m-3/2}$ ; после несложных вычислений получаем:

$$\begin{aligned} -a_{m+1} \mp 2i \left( m + \frac{1}{2} \right) a_m + \left( m + \frac{1}{2} \right) \left( m - \frac{1}{2} \right) a_{m-1}, \\ \pm i a_m - \left( m - \frac{1}{2} \right) a_{m-1}, \\ + a_{m+1} - n^2 a_{m-1}. \end{aligned}$$

Здесь последовательно расположенные строки соответствуют членам

$$\frac{d^2 Z}{d\rho^2}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{dZ}{d\rho}, \quad \left( 1 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) Z$$

уравнения (4.11). Сумма всех трех строк, приравненная нулю, дает простую *двухчленную рекуррентную формулу*

$$\mp 2i m a_m = \left[ n^2 - \left( m - \frac{1}{2} \right)^2 \right] a_{m-1}. \quad (4.103)$$

Отсюда следует при  $a_0 = 1$

$$\frac{a_1}{\rho} = \frac{4n^2 - 1}{2^2 (\mp 2i\rho)}, \quad \frac{a_2}{\rho^2} = \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)}{2^4 2! (\mp 2i\rho)^2}, \dots \quad (4.104)$$

Если мы воспользуемся введенным Ханкелем символом

$$(n, m) = \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9) \dots [4n^2 - (2m - 1)^2]}{2^{2m} m!}, \quad (4.105)$$

причем  $(n, 0)$  должно быть положено равным единице, то получаем общую формулу

$$\frac{a_m}{\rho^m} = \frac{(n, m)}{(\mp 2i\rho)^m}. \quad (4.106)$$

В силу формулы (4.102) получаются для каждой функции Ханкеля в отдельности ряды следующего вида:

$$H_n^1(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{i\left[\rho - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]} \sum_{m=0,1,2,\dots} \frac{(n, m)}{(-2i\rho)^m}, \quad (4.107)$$

$$H_n^2(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{-i\left[\rho - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]} \sum_{m=0,1,2,\dots} \frac{(n, m)}{(+2i\rho)^m}. \quad (4.108)$$

Взяв их полусумму, получаем

$$\begin{aligned} I_n(\rho) = & \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \cos\left[\rho - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] \sum_{m=0,2,4,\dots} (-1)^{m/2} \frac{(n, m)}{(2\rho)^m} - \\ & - \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} \sin\left[\rho - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] \sum_{m=1,3,5,\dots} (-1)^{(m-1)/2} \frac{(n, m)}{(2\rho)^m}. \end{aligned} \quad (4.109)$$

Что касается главных членов рядов (4.107) и (4.108), найденных не с помощью дифференциального уравнения, а методом седловых точек, то в задаче IV.5 будет описан соответствующий способ их получения, исходя из укороченного для больших значений  $\rho$  дифференциального уравнения Бесселя, причем главный член определяется с точностью до произвольного постоянного нормирующего множи-

теля, который, понятно, не может быть определен с помощью дифференциального уравнения.

После работы Пуанкаре<sup>1)</sup>, посвященной области применимости этих рядов в комплексной плоскости, появилось много обширных математических исследований по этому вопросу, на которых мы здесь не будем останавливаться. Из всех этих рядов сходятся только ряды с полуцелым индексом  $n = \nu + \frac{1}{2}$ , которые в силу определения символа  $(m, n)$  обрываются на  $\nu$ -м члене и в точности равны соответствующей функции Бесселя. Таким путем получают указанные в п. 3 элементарные выражения для функций  $\zeta_n$ ,  $\psi_n$ .

До сих пор наши разложения существенно ограничивались требованием  $n \ll \rho$ ; они становятся недействительными, если  $n$  каким-либо образом растет вместе с  $\rho$  до бесконечности. Это имеет место для всех оптических проблем, находящихся на границе между геометрической оптикой (оптика очень малых длин волн) и собственно волновой оптикой. Именно, при изучении проблемы радуги, являющейся проблемой такого рода (радиус капельки воды примерно равен длине световой волны), Дебай<sup>2)</sup> пришел к фундаментальным обобщениям асимптотических рядов Ханкеля. Для того чтобы понять их происхождение, мы должны обобщить метод седловых точек. В этом случае в интегральном представлении (4.22) для функций Ханкеля показатель

$$f(w) = i \left[ \rho \cos w + n \left( w - \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (4.110)$$

зависит от двух больших чисел  $\rho$  и  $n$ . Для простоты мы предполагаем здесь  $\rho$  и  $n$  положительными вещественными числами и, в зависимости от знака неравенства  $n \leq \rho$ , полагаем

$$n = \rho \cos \alpha \quad (4.110a)$$

или соответственно

$$n = \rho \operatorname{ch} \alpha. \quad (4.110б)$$

<sup>1)</sup> Poincaré, Acta Math., 8 (1886).

<sup>2)</sup> P. Debye, Math. Ann., 67 (1909); Bayr. Akad., 1910.



Кроме того, как и для фиг. 18, введем переменную интегрирования

$$\beta = w - \frac{\pi}{2}. \quad (4.110в)$$

а) Для  $n < \rho$  имеем тогда

$$f(w) = F(\beta) = -i\rho (\sin \beta - \beta \cos \alpha). \quad (4.111)$$

Седловая точка  $\beta = \beta_0$ , в которой  $F'(\beta) = 0$ , определяется из уравнения

$$\cos \beta - \cos \alpha = 0.$$

Для функции  $H^1$  она совпадает с точкой  $\beta_0 = -\alpha$ , а для функции  $H^2$  с точкой  $\beta_0 = +\alpha$  в соответствии с прежними значениями  $w_0 = 0$  и  $w_0 = \pi$ , которые в силу формулы (4.110в) переходят в значения  $\beta_0 = \mp \pi/2$ . Из формулы (4.111) следует

$$F''(\beta_0) = \mp i\rho \sin \alpha,$$

а для  $F(\beta)$  получаем разложение, оборванное на квадратичном члене, вида

$$F(\beta) = \pm i\rho (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \mp \frac{1}{2} i\rho \sin \alpha (\beta - \beta_0)^2. \quad (4.111а)$$

Введем вместо  $\beta$  длину дуги  $s$ , отсчитываемую от седловой точки  $\beta_0 = \mp \alpha$ , и положим  $(\beta - \beta_0)^2 = (\beta \pm \alpha)^2 = \mp is^2$ ,

$$d\beta = e^{\mp i\pi/4} ds,$$

причем знак в последней формуле выбирается совершенно так же, как и в формуле (4.54б). Интегрируя по окрестности соответствующей седловой точки, получаем

$$\begin{aligned} H_n^{1,2}(\rho) &= \frac{1}{\pi} \int e^{F(\beta)} d\beta = \\ &= e^{\pm i\rho (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho \frac{\sin \alpha}{2} s^2} e^{\mp i\pi/4} ds. \end{aligned} \quad (4.111б)$$

Это выражение сводится снова к интегралу Лапласа и дает

$$H_n^{1,2}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi \rho \sin \alpha}} e^{\pm i\rho(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \mp i\pi/4}. \quad (4.112)$$

В пределе при  $\alpha \rightarrow \pi/2$  формула (4.112) переходит, как это и должно быть, в прежние асимптотические формулы (4.55), (4.56).

б) Те же самые вычисления приводят к цели также и в случае  $n > \rho$ ; нужно только согласно формуле (4.110б) заменить  $\cos \alpha$  на  $\operatorname{ch} \alpha$  и соответственно в качестве функции (4.111) выбрать

$$F(\beta) = -i\rho(\sin \beta - \beta \operatorname{ch} \alpha).$$

Из обеих седловых точек  $\beta_0 = \pm i\alpha$  основную роль играет точка, которой соответствует более высокий перевал именно  $\beta_0 = -i\alpha$ . Для нее  $F''(\beta_0) = \rho \operatorname{sh} \alpha$ . Таким образом, вместо формулы (4.112) получаем

$$H_n^{1,2}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi \rho \operatorname{sh} \alpha}} e^{\rho(\alpha \operatorname{ch} \alpha - \operatorname{sh} \alpha) \mp i\pi/2} \quad (4.113)$$

Дебай получил наряду с предельными значениями (4.112), (4.113) также разложения в ряд, аналогичные разложениям Ханкеля, но мы не будем здесь останавливаться на этом.

в) Остается рассмотреть еще переходный случай  $n \sim \rho$ , когда согласно формулам (4.110а) и (4.110б)  $\alpha$  близко к нулю и асимптотические формулы (4.112) и (4.113) теряют силу вследствие близости к нулю знаменателей  $\sqrt{\sin \alpha}$  и соответственно  $\sqrt{\operatorname{sh} \alpha}$ . Это указывает на то, что теперь также и величина  $F''(\beta_0)$ , откуда появились эти знаменатели, приближается к нулю и что только третий член ряда Тэйлора для  $F(\beta)$  имеет заметно отличное от нуля значение. Поэтому требуется более точная аппроксимация в окрестности седловой точки, которая успешнее всего была проведена Ватсоном<sup>1)</sup>, использовавшим в приведенных выше вычислениях вместо формулы (4.111а) разло-

<sup>1)</sup> Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, М., 1949, ч. 1, гл. VIII, стр. 279.

жение, содержащее члены третьего порядка. Получающиеся тогда вместо интегралов Лапласа интегралы типа Эйри (см. ниже) вполне точно вычисляются.

Таким образом, находим в случае  $n \leq \rho$

$$H_n^{1,2}(\rho) = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt[3]{3}} e^{\pm i n \left( \operatorname{tg} \alpha - \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg}^3 \alpha - \alpha \right) \pm i \pi/6} H_{1/3}^{1,2} \left( \frac{1}{3} n \operatorname{tg}^3 \alpha \right), \quad (4.114)$$

с другой стороны, для  $n > \rho$  [ $n$  положено равным  $\rho \operatorname{sch} \alpha$ , как в равенстве (4.110б)] имеем

$$H_n^{1,2}(\rho) = \frac{\operatorname{th} \alpha}{\sqrt[3]{3}} e^{-n \left( \operatorname{th} \alpha + \frac{1}{3} \operatorname{th}^3 \alpha - \alpha \right) \mp 2i\pi/3} H_{1/3}^{1,2} \left( \pm \frac{i n}{3} \operatorname{th}^3 \alpha \right). \quad (4.115)$$

Формулы Ватсона (4.114) и (4.115) охватывают все рассмотренные Дебаем случаи асимптотических предельных значений, включая переходный случай  $n \sim \rho$ , который мы теперь рассмотрим. В этом случае как в формуле (4.110а), так и в формуле (4.110б) значение  $\alpha$  близко к нулю. Мы можем поэтому заменить функцию  $H_{1/3}$  ее предельным значением для малого аргумента, которое в силу формул (4.34) и (4.30) имеет вид (членом  $I_{1/3}$  можно тогда пренебречь сравнительно с  $I_{-1/3}$ )

$$H_{1/3}^{1,2}(z) = \mp \frac{i}{\sin \frac{\pi}{3}} I_{-1/3}(z).$$

В соответствии со значением  $z = \frac{1}{3} n \operatorname{tg}^3 \alpha$  в формуле (4.114)  $I_{-1/3}$  становится пропорциональной величине  $1/\operatorname{tg} \alpha$ , которая сокращается с имеющимся в правой части формулы (4.114) множителем  $\operatorname{tg} \alpha$ ; из формулы (4.114) после соответствующих преобразований следует

$$H_\rho^{1,2}(\rho) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \left(\frac{2}{9\rho}\right)^{1/3} e^{\mp i\pi/3}. \quad (4.116)$$

То же самое выражение получается, как это и должно быть, из формулы (4.115). В качестве соответствующего

предельного значения для  $I$  отсюда следует

$$I_p(\rho) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \left(\frac{2}{9\rho}\right)^{1/3}. \quad (4.117)$$

Это совпадает с первоначальными результатами Дебая.

Нетрудно убедиться в том, что выражения (4.114), (4.115) для значений  $n$ , не слишком близких к  $\rho$ , совпадают с формулами (4.112), (4.113) Дебая. В этом случае можно использовать для функций  $H_{1/3}$  (большой аргумент при малом индексе) предельное значение (4.55) и (4.56) Ханкеля:

$$H_{1/3}^{1,2}\left(\frac{1}{3} n \operatorname{tg}^3 \alpha\right) = \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{\pi n \cdot \operatorname{tg}^3 \alpha}} e^{\pm \frac{in}{3} \operatorname{tg}^3 \alpha \mp i\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}},$$

благодаря чему выражение (4.114) принимает более простой вид:

$$H_n^{1,2}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi n \operatorname{tg} \alpha}} e^{\pm in (\operatorname{tg} \alpha - \alpha) \mp i\pi/4}.$$

Так как  $n = \rho \cos \alpha$ , то это действительно совпадает с формулой (4.112). Аналогично можно показать, что формула (4.115) совпадает с формулой (4.113).

Рассмотрим еще вкратце вопрос о корнях уравнения  $H_n^{1,2}(\rho) = 0$  при больших значениях  $n$  и  $\rho$ . При этом мы должны допускать для  $n$  любые комплексные значения, тогда как до сих пор  $n$  и  $\rho$  считались вещественными.

Что касается переменной  $\rho = kr$ , то попрежнему будем считать ее вещественной, так как эта величина вещественна по своей физической природе. Относительно параметра  $\alpha$ , знак которого согласно формуле (4.110a) остается неопределенным, условимся, что его вещественная часть должна быть положительной.

На первый взгляд может показаться, что в силу формул (4.112) и (4.113) уравнение  $H_n^{1,2}(\rho) = 0$  не имеет корней также и для комплексного  $n$ , так как показательная функция не обращается в нуль ни для какого конечного значения показателя. Однако эти формулы были получены в силу того, что из двух седловых точек принималась во внимание только точка с более высоким перева-

лом. Если же обе точки имеют одну и ту же высоту и если, кроме того, соответствующий допустимый путь интегрирования (идуший от «низменности» к «низменности») может быть проведен через оба перевала, то в результате суммирования соответствующих экспоненциальных выражений получается *тригонометрическая функция*, допускающая возможность существования нулей.

В соответствии с обозначениями формул (4.110)–(4.112) седловые точки совпадают с точками  $\beta = \mp \alpha$ , а соответствующие экспоненциальные выражения в функциях  $H$  имеют вид

$$e^{\pm i\rho(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)} \mp i\pi/4.$$

Высота соответствующих перевалов определяется вещественной частью показателя. Следовательно, равенство высот означает равенство вещественных частей обоих показателей; если разделить каждый из них на предполагаемое вещественным  $\rho$ , то это условие будет равносильно равенству мнимых частей выражений  $\pm (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$ , т. е. условию

$$\text{Im}(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) = 0. \quad (4.118)$$

В частности, для малых  $\alpha$  уравнение (4.118) можно заменить уравнением  $\text{Im}(\alpha^3) = 0$ , так что получаются три ветви, проходящие через начало координат и пересекающиеся между собой под углом  $\pi/3$ , причем одна ветвь совпадает с вещественной осью  $\alpha$ .

Вещественная ось является решением уравнения (4.118) также и для конечного  $\alpha$ , в то время как две другие ветви представляют собой кривые, симметричные относительно мнимой оси  $\alpha$ .

Согласно представленной на фиг. 19 общей схеме путей интегрирования для обеих функций Ханкеля путь интегрирования, принадлежащий функции  $H^1$ , может последовательно проходить через обе седловые точки только тогда, когда эти последние лежат на ветви кривой (4.118), проходящей из второй в четвертую четверть плоскости  $\alpha$ , т. е. когда  $\alpha$  при положительной вещественной части имеет отрицательную мнимую часть и поэтому комплексное число  $n = \rho \cos \alpha$  (при вещественном  $\rho$ ) имеет положительную мнимую часть.

На основе этих соображений в результате сложения компонент, принадлежащих обоим седловым точкам, получаем в соответствии с формулой (4.112) для  $H^1$  следующее выражение:

$$\begin{aligned} H_n^1(\rho) &= \sqrt{\frac{2}{\pi \rho \sin \alpha}} [e^{i\rho(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) - i\pi/4} - \\ &\quad - e^{-i\rho(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) + i\pi/4}] = \\ &= 2i \sqrt{\frac{2}{\pi \rho \sin \alpha}} \sin \left[ \rho(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (4.119) \end{aligned}$$

Отсюда мы сразу же получаем корни уравнения  $H_n^1(\rho) = 0$  как корни трансцендентного относительно  $\alpha$  уравнения

$$\rho(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) - \frac{\pi}{4} = -m\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.120)$$

причем в правой части должен быть взят отрицательный знак, с тем чтобы корень  $\alpha$  этого уравнения лежал в четвертой четверти.

Для малых  $\alpha$  получаем из уравнения (4.120) разложением в ряд

$$\rho \frac{\alpha^3}{3} = -(4m-1) \frac{\pi}{4}$$

и, выбирая нужный корень третьей степени, находим

$$\alpha = \left[ \frac{3\pi}{4\rho} (4m-1) \right]^{1/3} e^{-i\pi/3}.$$

Подставляя это выражение в формулу (4.110а), связывающую величины  $\alpha$  и  $\rho$ , получим для малого  $\alpha$

$$n = \rho + \frac{1}{2} \rho^{1/3} \left[ \frac{3\pi}{4} (4m-1) \right]^{2/3} e^{i\pi/3}. \quad (4.121)$$

Эти корни уравнения  $H_n^1(\rho) = 0$  образуют счетную последовательность и лежат в верхней полуплоскости  $n$ , чем мы и воспользуемся в дальнейшем. Разрешая уравнение (4.121) относительно  $\rho$ , получаем, что корни лежат в нижней полуплоскости  $\rho$ . Из формулы (4.121) следует, что  $n$  и  $\rho$  — величины одного порядка, как это и предполагалось вначале. Формула (4.121) дает, таким образом, решение задачи определения нулей уравнения

$$H_n^1(\rho) = 0.$$

Очевидно, метод седловых точек имеет большую общность. Он применим не только к интегральным представлениям функций Ханкеля, но может быть использован для вычисления любых интегралов вида

$$\int e^{F(w, \rho, n, \dots)} dw, \quad (4.122)$$

где функция  $F$ , кроме переменной интегрирования  $w$ , зависит от одного или многих больших чисел  $\rho, n, \dots$ , а путь интегрирования  $W$  проходит в комплексной плоскости из одной области, в которой выполняется условие  $\lim \exp F(w, \dots) = 0$ , в другую такую же область. Те особенности, которые наблюдались для функций Ханкеля в предельном случае  $n \sim \rho$ , обнаруживаются и для интегралов типа (4.122), когда седловая точка, т. е. точка, в которой  $F' = 0$ , приближается к точке, в которой  $F'' = 0$ . Именно так обстоит дело в теории Эйри преломления света в радуге. Действительно, явление радуги связано с появлением во фронте волны точки перегиба ( $F'' = 0$ ), которая в асимптотическом приближении сливается с седловой точкой ( $F' = 0$ ). Подсчет соответствующего интеграла Эйри приводит тогда, как и в формулах (4.114) и (4.115), к функциям  $H_{1/3}$  или, что то же, к функциям  $I_{1/3}$ <sup>1)</sup>.

## § 22. ШАРОВЫЕ ФУНКЦИИ И ТЕОРИЯ ПОТЕНЦИАЛА

**1. Производящая функция.** Теорию шаровых функций проще всего строить на основе теории потенциала. Будем исходить из ньютоновского потенциала  $1/r$ . Если перенести начальную точку  $x = y = z = 0$  в точку  $(x_0, y_0, z_0)$ , то выражение для потенциала примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr_0 \cos \vartheta + r_0^2}}. \end{aligned} \quad (4.123)$$

Применяемые здесь сферические полярные координаты  $r, \vartheta, \varphi$  выбраны так, что полярная ось  $\vartheta = 0$  проходит

<sup>1)</sup> W. Wirtinger, Ber. des Naturw.-mediz. Vereins in Innsbruck, 23 (1896); J. W. Nicholson, Phil. Mag., 18 (1909).

через точку  $(x_0, y_0, z_0)$ . Тогда получим  $x_0 = y_0 = 0, z_0 = r_0$ , как это следует из формул преобразования

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta. \quad (4.124)$$

Выражение (4.123), в зависимости от того, меньше ли  $r$ , чем  $r_0$ , или больше, можно разложить в ряд по возрастающим или убывающим степеням  $r$ .

Обозначим и в том и в другом разложении коэффициент при  $(n+1)$ -ом члене через  $P_n$ . Тогда

$$\frac{1}{R} = \begin{cases} \frac{1}{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos \vartheta) & \text{при } r < r_0, \\ \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos \vartheta) & \text{при } r > r_0. \end{cases} \quad (4.125)$$

Коэффициенты  $P_n$  в обоих рядах совпадают, так как при  $r = r_0$  и  $\vartheta \neq 0$  эти ряды должны переходить друг в друга. Точка  $r = r_0, \vartheta = 0$  является особой точкой; сфера  $r = r_0$  играет здесь такую же роль, какую в двухмерном случае играет круг сходимости степенного ряда, причем круг сходимости всегда проходит через ближайшую к центру особую точку.

Коэффициенты  $P_n$  рядов (4.125) являются полиномами  $n$ -й степени от  $\cos \vartheta$ . Мы назовем их *шаровыми функциями* и докажем, что они совпадают с полиномами  $P_n$ , введенными в § 5. Функция  $1/R$  называется *производящей функцией шаровых функций*.

**2. Дифференциальное уравнение и уравнение в конечных разностях.** В первую очередь выведем дифференциальное уравнение шаровых функций. Функция  $1/R$  удовлетворяет основному уравнению теории потенциала  $\Delta u = 0$ , которое мы запишем в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (4.126)$$

Отсюда следует, что каждый член рядов (4.125) в отдельности должен удовлетворять уравнению (4.126). Подставляя  $(n+1)$ -й член первого из рядов (4.125) в уравнение (4.126),



получим после сокращения на общий множитель  $r^{n-2}/r_0^{n+1}$

$$n(n+1)P_n + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{dP_n}{d\vartheta} \right) = 0; \quad (4.127)$$

то же самое уравнение следует из второго ряда после сокращения на множитель  $r_0^n/r^{n+3}$ . Мы обозначим аргумент  $P_n$  через  $\zeta$ , полагая  $\cos \vartheta = \zeta = z/r$  и замечая при этом, что

$$-\sin \vartheta d\vartheta = d\zeta, \quad \sin \vartheta \frac{d}{d\vartheta} = \sin^2 \vartheta \frac{d}{\sin \vartheta d\vartheta} = -(1-\zeta^2) \frac{d}{d\zeta}.$$

После этого уравнение (4.127) примет вид

$$\frac{d}{d\zeta} \left[ (1-\zeta^2) \frac{dP_n}{d\zeta} \right] + n(n+1)P_n = 0 \quad (4.128)$$

или

$$\left[ (1-\zeta^2) \frac{d^2}{d\zeta^2} - 2\zeta \frac{d}{d\zeta} + n(n+1) \right] P_n = 0. \quad (4.128a)$$

Запишем такое же уравнение для индекса  $l$ , умножим его на  $P_n$  и вычтем из уравнения (4.128a), умноженного на  $P_l$ , действуя по схеме вывода формулы Грина. В результате получим

$$\begin{aligned} P_l \frac{d}{d\zeta} \left[ (1-\zeta^2) \frac{dP_n}{d\zeta} \right] - P_n \frac{d}{d\zeta} \left[ (1-\zeta^2) \frac{dP_l}{d\zeta} \right] &= \\ = \frac{d}{d\zeta} \left[ (1-\zeta^2) \left( P_l \frac{dP_n}{d\zeta} - P_n \frac{dP_l}{d\zeta} \right) \right] &= \\ = [l(l+1) - n(n+1)] P_l P_n. \end{aligned} \quad (4.129)$$

Область значений переменного  $\zeta$ , имеющих физический смысл, простирается от  $\zeta = -1$  ( $\vartheta = \pi$ ) до  $\zeta = +1$  ( $\vartheta = 0$ ). Интегрируя по этой области, получаем для  $l \neq n$  условие ортогональности

$$\int_{-1}^{+1} P_l P_n d\zeta = 0, \quad (4.130)$$

так как проинтегрированная по  $\zeta$  левая часть второй строки формулы (4.129) обращается в нуль при  $\zeta = \pm 1$ , если только  $P_n$  не становятся там сингулярными, чего не может быть в силу их определения из равенства (4.125).

Мы покажем, что наши  $P_n$  удовлетворяют также выраженному формулой (4.59) условию нормировки

$$P_n(1) = 1. \quad (4.131)$$

Действительно, из формулы (4.123) следует при  $\cos \vartheta = \pm 1$

$$\frac{1}{|r \mp r_0|} = \begin{cases} \frac{1}{r_0} \sum (\pm 1)^n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n & \text{для } r < r_0, \\ \frac{1}{r} \sum (\pm 1)^n \left(\frac{r_0}{r}\right)^n & \text{для } r > r_0. \end{cases}$$

Отсюда после сравнения с рядами (4.125) получаем

$$P_n(\pm 1) = (\pm 1)^n. \quad (4.131a)$$

Формула (4.131a) является несколько более общей, чем формула (4.131). Но в § 5 мы установили, что введенные там функции  $P_n$  полностью определяются требованиями ортогональности (4.130) и нормировки (4.131). Наше последнее определение с помощью производящей функции приводит, таким образом, к тем же функциям  $P_n$ , что и метод наименьших квадратов в § 5. В частности, справедливо также представление (1.60)

$$P_n(\zeta) = \frac{1}{2^{n_n} n!} \frac{d^n}{d\zeta^n} (\zeta^2 - 1)^n \quad (4.132)$$

и как следствие из него согласно формуле (1.64) соотношение

$$\int P_n^2(\zeta) d\zeta = \frac{1}{n + \frac{1}{2}}. \quad (4.132a)$$

$P_n$  являются четными или нечетными функциями от  $\zeta$ , в зависимости от четности или нечетности  $n$ :

$$P_n(-\zeta) = (-1)^n P_n(\zeta). \quad (4.132b)$$

Наша производящая функция дает нам непосредственно, кроме дифференциального уравнения по переменному  $\zeta$ , также и уравнение в конечных разностях по индексу  $n$ . Выпишем еще раз, например, первую строку формулы

(4.125), положив  $\alpha = r/r_0$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha\zeta + 1}} = \sum \alpha^n P_n; \quad (4.133)$$

отсюда логарифмическим дифференцированием по  $\alpha$  получаем

$$\frac{\zeta - \alpha}{\alpha^2 - 2\alpha\zeta + 1} = \frac{\sum n\alpha^{n-1} P_n}{\sum \alpha^n P_n} \quad (4.133a)$$

и после освобождения от знаменателей приходим к равенству

$$(\zeta - \alpha) \sum \alpha^n P_n = (\alpha^2 - 2\alpha\zeta + 1) \sum n\alpha^{n-1} P_n.$$

Если сравнить теперь коэффициенты при одинаковых степенях  $\alpha$  справа и слева, например при  $\alpha^n$ , то получим

$$\zeta P_n - P_{n-1} = (n-1) P_{n-1} - 2\zeta n P_n + (n+1) P_{n+1},$$

или

$$(n+1) P_{n+1} - (2n+1) \zeta P_n + n P_{n-1} = 0. \quad (4.133б)$$

Та же самая рекуррентная формула получается, естественно, из второй строки формулы (4.125).

С другой стороны, из формулы (4.133) логарифмическим дифференцированием по  $\zeta$  получаем смешанное дифференциально-разностное уравнение. Сначала получаем при этом равенство, аналогичное равенству (4.133a),

$$\frac{\alpha}{\alpha^2 - 2\alpha\zeta + 1} = \frac{\sum \alpha^n P'_n}{\sum \alpha^n P_n}, \quad P'_n = \frac{dP_n(\zeta)}{d\zeta}, \quad (4.133в)$$

а после освобождения от знаменателей и сравнения коэффициентов при  $\alpha^{n+1}$  приходим к соотношению

$$P_n - P'_{n-1} + 2\zeta P'_n - P'_{n+1} = 0. \quad (4.133г)$$

Если продифференцировать уравнение (4.133б) по  $\zeta$ , умножить на два и сложить с равенством (4.133г), умноженным на  $2n+1$ , то получим

$$-(2n+1) P_n - P'_{n-1} + P'_{n+1} = 0.$$

Последнее соотношение, представленное в более сжатом

виде, дает искомую *дифференциальную рекуррентную формулу*:

$$\frac{d}{d\xi}(P_{n+1} - P_{n-1}) = (2n+1)P_n. \quad (4.133\text{д})$$

**3. Присоединенные шаровые функции.** Кроме рассмотренного частного решения уравнения потенциала (4.126), зависящего только от  $r$  и  $\vartheta$ ,

$$u_n = \left\{ \begin{matrix} r^n \\ r^{-n-1} \end{matrix} \right\} P_n(\cos \vartheta), \quad (4.134)$$

следует еще рассмотреть частные решения, зависящие от  $r$ ,  $\vartheta$  и  $\varphi$

$$u_{nm} = \left\{ \begin{matrix} r^n \\ r^{-n-1} \end{matrix} \right\} P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}, \quad (4.134a)$$

для чего необходимо ввести *присоединенные к  $P_n$  шаровые функции  $P_n^m$*  ( $m$  — целое число, которое пока предполагается положительным). Для их определения служит получаемое из уравнения (4.126) дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{dP_n^m}{d\vartheta} \right) + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \right] P_n^m = 0, \quad (4.135)$$

которое, будучи написано в форме, аналогичной уравнениям (4.128) и (4.128a), имеет вид

$$\frac{d}{d\zeta} \left[ (1-\zeta^2) \frac{dP_n^m}{d\zeta} \right] + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-\zeta^2} \right] P_n^m = 0 \quad (4.135a)$$

или

$$\left[ (1-\zeta^2) \frac{d^2}{d\zeta^2} - 2\zeta \frac{d}{d\zeta} + n(n+1) - \frac{m^2}{1-\zeta^2} \right] P_n^m = 0. \quad (4.135b)$$

По терминологии Томсона и Тэта наши первоначальные функции  $P_n$  называются *зональными шаровыми функциями*, присоединенные — *тессеральными*. Нулевые линии первых делят сферу на широтные зоны, которым соответствуют различные знаки функции; нулевые линии последних делят сферу на криволинейные четырехугольники (*tesserae* —

клетки), ограниченные меридианами и параллелями, которым соответствуют различные знаки присоединенной шаровой функции. Присоединенные, или тессеральные, шаровые функции для различных нижних индексов, но одинаковых верхних являются ортогональными друг к другу; в самом деле, из дифференциального уравнения (4.135) непосредственно следует, так же как из уравнений (4.128) и (4.129),

$$\int_{-1}^{+1} P_l^m P_n^m d\zeta = 0 \quad \text{для} \quad l \neq n. \quad (4.136)$$

Для того чтобы получить аналитическое выражение для  $P_n^m$ , мы разлагаем эти функции в точках  $\zeta = \pm 1$  (северный и южный полюсы единичного шара) по степеням  $\zeta \mp 1$ , полагая аналогично формуле (4.36)

$$P_n^m = (\zeta \mp 1)^{\lambda} [a_0 \mp a_1 (\zeta \mp 1) + a_2 (\zeta \mp 1)^2 + \dots].$$

Уравнение, определяющее  $\lambda$ , получается тогда по образцу уравнения (4.37) из дифференциального уравнения (4.135б):

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda - \frac{m^2}{4} = 0, \quad \lambda = +\frac{m}{2} \quad (4.137)$$

(другой корень  $\lambda = -m/2$  из соображений непрерывности следует исключить).

Мы полагаем далее

$$P_n^m = (1 - \zeta^2)^{m/2} v = \sin^m \vartheta v, \quad (4.138)$$

объединяя оба множителя  $(1 - \zeta)^{m/2}$  и  $(1 + \zeta)^{m/2}$ , появляющиеся в точках  $\zeta = \pm 1$ , в выражение  $(1 - \zeta^2)^{m/2}$ . Для введенной таким образом функции  $v$  получаем, подставляя выражение (4.138) в уравнение (4.135б), следующее дифференциальное уравнение:

$$\left\{ (1 - \zeta^2) \frac{d^2}{d\zeta^2} - 2(m+1)\zeta \frac{d}{d\zeta} + [n(n+1) - m(m+1)] \right\} v = 0, \quad (4.139)$$

которое должно иметь решения, разлагающиеся в ряды, содержащие только целые степени  $\zeta \mp 1$ . Однако нам нет необходимости исследовать соответствующие рекуррентные

формулы, так как искомый интеграл уравнения (4.138) может быть получен из уравнения (4.128а) в компактном виде. Действительно, если продифференцируем уравнение (4.128а)  $m$  раз по  $\zeta$  и применим известное правило многократного дифференцирования произведения, например

$$\frac{d^m}{d\zeta^m} \zeta \frac{d}{d\zeta} = \left[ \zeta \frac{d}{d\zeta} + \binom{m}{1} \right] \frac{d^m}{d\zeta^m}, \quad (4.139a)$$

то мы приходим как раз к дифференциальному выражению, заключенному в скобки  $\{ \}$  в уравнении (4.139), примененному к  $m$ -й производной от  $P_n$ . Отсюда можно заключить, что уравнению (4.139) удовлетворяет функция

$$v = \frac{d^m P_n}{d\zeta^m}. \quad (4.139b)$$

Принимая во внимание уравнение (4.139) и (4.132), получаем отсюда для присоединенной шаровой функции простое представление, которое может одновременно служить для определения нормирующего множителя

$$P_n^m = \frac{(1 - \zeta^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{n+m} (\zeta^2 - 1)^n}{d\zeta^{n+m}}. \quad (4.140)$$

В силу этого  $P_n^m$ , так же как и  $P_n$ , являются полиномами степени  $n$  (по крайней мере для четного  $m$ ; для нечетного  $m$  они имеют вид произведения  $\sqrt{1 - \zeta^2}$  на полином степени  $n - 1$ ). Далее из формулы (4.140) следует

$$P_n^0 = P_n, \quad P_n^m = 0 \quad \text{для } m > n. \quad (4.140a)$$

Последнее соотношение следует из того, что при  $m > n$  порядок дифференцирования в формуле (4.140) больше степени дифференцируемой функции.

**4. Присоединенные функции с отрицательным индексом.** До сих пор мы предполагали индекс  $m$  положительным, например в формуле (4.139b), где применя-

лось  $m$ -кратное дифференцирование по  $\zeta$ . Однако наше окончательное представление (4.140) может быть без труда распространено и на отрицательные  $m$ , если только  $m \geq -n$ . Поэтому возможно распространить формулу (4.140) на  $2n+1$  значений  $|m| \leq n$ .

В случае отрицательных  $m$  функция  $P_n^m$  является также полиномом  $n$ -й степени (в том же смысле, что и для положительного  $m$ ); первый множитель  $(1-\zeta^2)^{m/2}$ , обращающийся для отрицательного  $m$  при  $\zeta = \pm 1$  в бесконечность, компенсируется вторым множителем в выражении (4.140), который вследствие уменьшенного на  $|m|$  порядка дифференцирования имеет при  $\zeta = \pm 1$  нуль более высокого порядка. Кроме того, выражение (4.140) удовлетворяет также и при отрицательном  $m$  дифференциальному уравнению (4.135) (зависящему только от  $m^2$ ). Вследствие этого  $P_n^m$  с отрицательным  $m$  может отличаться от  $P_n^{|m|}$  только постоянным множителем  $C$ , который удобнее всего определить сравнением высших степеней  $\zeta$  в выражениях для  $P_n^{-m}$  и  $P_n^m$ , вычисленных по формуле (4.140); таким образом получим

$$\begin{aligned} \frac{P_n^{-m}}{P_n^m} &= \frac{(1-\zeta^2)^{-m} \frac{d^{n-m}}{d\zeta^{n-m}} \zeta^{2n}}{\frac{d^{n+m}}{d\zeta^{n+m}} \zeta^{2n}} \sim \\ &\sim \frac{(-1)^{m\zeta-2m} \frac{(2n)!}{(n+m)!} \zeta^{n+m}}{\frac{(2n)!}{(n-m)!} \zeta^{n-m}} = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$P_n^{-m} = C \cdot P_n^m, \quad C = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!}. \quad (4.140б)$$

Нетрудно видеть, что это равенство остается в силе как для положительных, так и для отрицательных  $m$ .

Наше определение функций  $P_n^m$ , сильно отличающееся от определения, принятого в прежней математической литературе, оправдало себя в волновой механике и, кроме

того, приводит к большему единообразию формул и способов выражения во всем дальнейшем изложении<sup>1)</sup>.

В соответствии с этим получаем в точности  $2n + 1$  присоединенных функций  $P_n^m$ , из которых одна совпадает с функцией  $P_n$ , а остальные с точностью до постоянного множителя  $C$  попарно равны, но входят в формулу (4.134а) для функции  $u_{nm}$  с различными множителями:  $e^{im\varphi}$  и соответственно  $e^{-im\varphi}$ .

**5. Сферические функции и представление произвольных функций.** Назовем «сферической функцией общего вида» (по Максвеллу — сферическая гармоника) следующее выражение, содержащее  $2n + 1$  произвольных постоянных:

$$Y_n = \sum_{m=-n}^{+n} A_m P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}. \quad (4.144)$$

Выражение  $Y_n$ , помноженное на  $r^n$  (или  $r^{n-1}$ ), представляет однородный относительно координат  $x, y, z$  потенциал  $n$ -го [соответственно  $(-n - 1)$ -го] порядка наиболее общего вида (по Максвеллу — объемная гармоника). Он образуется из специальных, также однородных относительно  $x, y, z$  потенциальных форм  $u_{nm}$ , определяемых формулой (4.134а):

$$\left. \begin{matrix} r^n \\ r^{n-1} \end{matrix} \right\} Y_n = \sum_{m=-n}^{+n} A_m u_{nm}. \quad (4.141a)$$

<sup>1)</sup> В прежней литературе верхний индекс выражения  $P_n^m$  считался положительным, а зависимость от  $\varphi$  выражалась посредством множителей  $\cos m\varphi$  или  $\sin m\varphi$ . Гораздо проще выражать зависимость от  $\varphi$  экспоненциально по формуле (4.134а), но при этом нужно отбросить условие положительности  $m$ . Дарвин [C. G. Darwin, Proc. Roy. Soc., 115 (1927)] предложил определение, в силу которого в числитель правой части формулы (4.140) ставится множитель  $(n - m)!$ . Формула (4.140б) принимает тогда более простой вид  $P_n^{-m} = (-1)^m P_n^{[m]}$ . Но это определение приводит к необходимости изменить классическое выражение для полиномов Лежандра  $P_n = P_n^0$ , чего мы хотели бы избежать.

Следует также упомянуть, что некоторые авторы (в частности, см., например, E. W. Hobson, Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics, Cambridge, 1931) в определении  $P_n^m$  согласно формуле (4.140) добавляют множитель  $(-1)^m$ , что, однако, для наших целей не имеет существенного значения.



В свою очередь, общее неоднородное решение уравнения потенциала (4.126) может быть разложено в бесконечный ряд по однородным решениям этого уравнения,

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{r^n}{r^{-n-1}} \right\} Y_n. \quad (4.141б)$$

Для частного случая сферы единичного радиуса, на которой заданы граничные значения потенциала  $u$  как произвольная функция  $f(\vartheta, \varphi)$ , получаем

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} A_{nm} P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}. \quad (4.142)$$

Вводя обозначение  $A_{nm}$  вместо прежнего  $A_m$  в равенстве (4.141), мы подчеркиваем тем самым, что соответствующие каждому  $Y_n$  произвольные постоянные независимы от постоянных для других  $Y_n$  и отличны от них по величине. Ряды (4.141б) и (4.142) показывают, что граничная *задача теории потенциала всегда разрешима для шара* (например, для шара радиуса 1), как для его внутренней области [множитель  $r^n$  в формуле (4.141б)], так и для его внешней области (множитель  $r^{-n-1}$ ) при любых заданных на сфере значениях  $f(\vartheta, \varphi)$  потенциальной функции. В следующем параграфе мы решим эту задачу непосредственным построением функции Грина и снова придем к тем же рядам. Первое строгое доказательство представления (4.142) дал Дирихле в 1837 г. при очень общих предположениях относительно  $f(\vartheta, \varphi)$ .

## 6. Интегральное представление шаровых функций

Рассмотрим теперь одну специальную, однородную относительно  $x, y, z$  функцию  $n$ -й степени, а именно

$$\begin{aligned} (z + ix)^n &= r^n (\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos \varphi)^n = \\ &= r^n (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \cos \varphi)^n, \end{aligned} \quad (4.143)$$

которая, как всякая аналитическая функция  $f(z + ix)$  или  $f(z + iy)$ , очевидно, удовлетворяет уравнению  $\Delta u = 0$ . Множитель при  $r^n$  в выражении (4.143) является поэтому сферической функцией  $Y_n$ . Если мы осредним ее по  $\varphi$ , благодаря чему она становится функцией только  $\vartheta$ , то

получим зональную шаровую функцию

$$P_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \cos \varphi)^n d\varphi. \quad (4.144)$$

Если, с другой стороны, в соответствии с формулой (1.12) мы образуем  $m$ -й коэффициент Фурье нашего  $Y_n$ , то получаем присоединенную (тессеральную) шаровую функцию

$$P_n^m(\zeta) = \frac{C}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \cos \varphi)^n e^{-im\varphi} d\varphi. \quad (4.145)$$

Интегральное представление (4.144) встречается уже у Лапласа в пятом томе его «Небесной механики». Оно правильно нормировано с помощью знаменателя  $2\pi$ , что станет очевидным, если положить  $\zeta = 1$ ; тогда подинтегральное выражение становится равным 1, и поэтому, действительно,  $P_n(1) = 1$ . Напротив, нормирующий множитель  $C$  в формуле (4.145) следует еще определить. Сравнение с содержащейся в формуле (4.140) нормировкой дает

$$C = \frac{(n+m)!}{n!} e^{-im\pi/2}. \quad (4.145a)$$

Другое выражение для  $P_n$  получается, если в формуле (4.143) заменить  $n$  на  $-n-1$ , что, как мы знаем, всегда возможно. Тогда приходим к представлению, равносиль-

---

<sup>1)</sup> Это можно сделать, например, производя в формулах (4.145) и (4.140) предельный переход  $\zeta \rightarrow \infty$ , причем подинтегральное выражение в формуле (4.145) с точностью до множителей  $\zeta^n$  и  $\exp(-im\varphi)$  сводится к

$$(1 + \cos \varphi)^n = 2^n \cos^{2n} \frac{\varphi}{2} = 2^{-n} e^{in\varphi} (1 + e^{-i\varphi})^{2n}.$$

В биномиальном разложении этого выражения достаточно принять во внимание только член с  $e^{im\varphi}$ , так как все остальные члены дают нуль при интегрировании по  $\varphi$ . Множитель  $\exp(-im\pi/2)$  в формуле (4.145a) появляется от множителя  $\sin^m \vartheta$  в формуле (4.140). Относительно предельного перехода  $\zeta \rightarrow \infty$  в формуле (4.140) см. также аналогичный прием, примененный выше при выводе формулы (4.140б).

ному формуле (4.144):

$$P_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d\varphi}{(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \cos \varphi)^{n+1}}, \quad (4.145б)$$

которое, очевидно, также правильно нормировано.

**7. Рекуррентная формула для присоединенных функций.** Отправляясь от рекуррентных формул (4.133б) и (4.133г) для зональных шаровых функций, мы дифференцируем формулу (4.133б)  $m$  раз по  $\zeta$ , используем для среднего члена правило (4.139а) и умножим каждый член на  $\sin^m \vartheta$ . В силу формулы (4.140) получаем

$$(n+1)P_{n+1}^m - (2n+1)\zeta P_n^m - \\ - m(2n+1)\sin \vartheta P_n^{m-1} + nP_{n-1}^m = 0. \quad (4.146)$$

С другой стороны, из формулы (4.133б) после  $(m-1)$ -кратного дифференцирования по  $\zeta$  и повторного умножения на  $\sin^m \vartheta$  получаем

$$P_{n+1}^m - P_{n-1}^m = (2n+1)\sin \vartheta P_n^{m-1}. \quad (4.147)$$

Из формул (4.146) и (4.147) после исключения члена с  $\sin \vartheta$  получаем рекуррентную формулу, обобщающую формулу (4.133б),

$$(n+1-m)P_{n+1}^m - (2n+1)\zeta P_n^m + (n+m)P_{n-1}^m = 0. \quad (4.148)$$

Формула (4.148), на первый взгляд, кажется справедливой только для положительного  $m$ , так как она получена с помощью  $m$ -кратного дифференцирования. Однако она без труда распространяется и на отрицательные  $m$ , если только воспользоваться определением  $P_n^m$  по формуле (4.140) и перейти от  $P_n^m$  к  $P_n^{-m}$  посредством формулы (4.140б).

**8. Нормировка присоединенных функций.** Нам известно значение нормирующего интеграла для полиномов Лежандра  $P_n^0$ , определяемое формулой (4.132а). Обозначим этот интеграл через  $N_n$  или  $N_n^0$ . При его вычислении в § 5 использовался символ  $D_{k,1}$  из формулы (1.61). Рассмотрим сначала обобщенную формулу нормирующего

интеграла

$$N_n^{\pm m} = \int_{-1}^{+1} P_n^m(\zeta) P_n^{-m}(\zeta) d\zeta. \quad (4.149)$$

Записанная в символах  $D_{k,l}$  формула (4.149) в силу нашего общего определения (4.140) принимает следующий вид:

$$N_n^{\pm m} = \frac{1}{2^{2n} n! n!} \int_{-1}^{+1} D_{n+m,n} D_{n-m,n} d\zeta. \quad (4.150)$$

Последовательно понижая порядок высшего символа дифференцирования  $D$  и повышая порядок низшего символа с помощью  $m$ -кратного интегрирования по частям, причем все появляющиеся свободные от интеграции члены при  $\zeta = \pm 1$  обращаются в нуль, получим

$$N_n^{\pm m} = \frac{(-1)^m}{2^{2n} n! n!} \int_{-1}^{+1} D_{n,n} D_{n,n} d\zeta = (-1)^m N_n^0 = \frac{(-1)^m}{n + \frac{1}{2}}. \quad (4.151)$$

Здесь подставлено значение  $N_n^0$  по формуле (4.132а). Обычно считают нормирующим интегралом выражение

$$N_n^m = \int_{-1}^{+1} P_n^m(\zeta) P_n^m(\zeta) d\zeta. \quad (4.152)$$

Последний легко вычисляется с помощью формул (4.150) и (4.140б), из которых следует

$$N_n^m = \frac{1}{C} N_n^{\pm m} = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \quad (4.153)$$

Непосредственное вычисление интеграла (4.152) по образцу интеграла (4.150) было бы несколько затруднительным.

Заметим еще, что в следующей главе будет положена в основу «нормировка собственных функций к единице». Если нормированную таким образом присоединенную шаровую функцию обозначить через  $\Pi_n^m$ , то для этой функции

должно выполняться условие

$$\int_{-1}^{+1} P_n^m(\zeta) P_n^m(\zeta) d\zeta = 1, \quad (4.153a)$$

откуда, сравнивая с формулой (4.152), получаем

$$P_n^m = \frac{P_n^m}{\sqrt{N_n^m}} = P_n^m \cdot \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2}. \quad (4.153б)$$

**9. Теорема сложения шаровых функций.** При доказательстве этой теоремы мы будем опираться на одно вспомогательное предположение, которое, правда, мы можем доказать только методами следующей главы и которое должно здесь рассматриваться как аксиома, а именно: шаровая функция

$$Y_n = \sum_{m=-n}^{+n} P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} P_n^m(\cos \vartheta_0) e^{-im\varphi_0} \quad (4.154)$$

зависит только от взаимного положения обеих точек  $\vartheta, \varphi$  и  $\vartheta_0, \varphi_0$  на сфере, следовательно, имеет инвариантное значение, не зависящее от выбора системы координат. Если мы переместим координатную систему  $\vartheta, \varphi$ , заставив проходить полярную ось новой системы  $\Theta, \Phi$  через точку  $\vartheta_0, \varphi_0$ , то координата  $\vartheta_0$  этой точки становится равной  $\Theta_0 = 0$  (в то время как  $\Phi_0$  остается неопределенной), а координата  $\Theta$  прежней точки  $\vartheta, \varphi$  определяется посредством соотношения

$$\cos \Theta = \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0). \quad (4.155)$$

Однако при  $\Theta_0 = 0$  все члены суммы (4.154), за исключением члена с индексом  $m=0$ , обращаются в нуль. Правая часть становится при этом равной произведению обеих зональных шаровых функций  $P_n(\cos \Theta)$  и  $P_n(1)$ . В силу предположенной ранее инвариантности  $Y_n$  имеем поэтому

$$P_n(\cos \Theta) P_n(1) = \sum_{m=-n}^{+n} P_n^m(\cos \vartheta) P_n^m(\cos \vartheta_0) e^{im(\varphi - \varphi_0)}. \quad (4.156)$$

Мы получили теорему сложения в симметричной форме, в которой ее структура выражается чрезвычайно простым

образом. Обычно встречающуюся в литературе формулировку теоремы сложения получим, если заменим в соответствии с формулами (4.153б) и (4.153)  $P_n^m$  на  $P_n^m$ . Из формулы (4.156) тогда получается

$$P_n(\cos \Theta) = \sum_{m=-n}^{+n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \vartheta) P_n^m(\cos \vartheta_0) e^{im(\varphi - \varphi_0)}, \quad (4.157)$$

или после перехода к вещественной форме записи

$$P_n(\cos \Theta) = P_n(\cos \vartheta) P_n(\cos \vartheta_0) + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \vartheta) P_n^m(\cos \vartheta_0) \cos m(\varphi - \varphi_0). \quad (4.158)$$

Однако формула (4.156) выражает теорему сложения в наиболее симметричном и естественном виде.

Другую также достаточно обозримую форму теоремы сложения получаем из формулы (4.157) после замены одного из верхних индексов  $m$  на  $-m$  и применения равенства (4.140б):

$$\begin{aligned} P_n(\cos \Theta) &= \\ &= \sum_{m=-n}^{+n} (-1)^m P_n^m(\cos \vartheta) P_n^{-m}(\cos \vartheta_0) e^{im(\varphi - \varphi_0)}. \end{aligned} \quad (4.159)$$

### § 23. ФУНКЦИЯ ГРИНА ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ ШАРА. ШАРОВЫЕ И КРУГОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДРУГИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

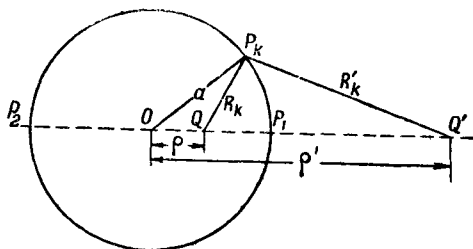
Составим разность двух главных решений  $u$ ,  $u'$  уравнения потенциала  $\Delta u = 0$

$$\begin{aligned} u &= \frac{e}{R}, \quad R^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2, \\ u' &= \frac{e'}{R'}, \quad R'^2 = (x - \xi')^2 + (y - \eta')^2 + (z - \zeta')^2 \end{aligned} \quad (4.160)$$

и найдем вид поверхностей уровня функции  $G = u - u'$ , в частности поверхности  $G = 0$ ; она определяется в силу формул (4.160) посредством уравнения  $R'^2 = (e'/e)^2 R^2$  или

в более подробной записи

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{e'^2}{e^2}\right) (x^2 + y^2 + z^2) - \\ & - 2 \left[ \left(\xi' - \frac{e'^2}{e^2} \xi\right) x + \left(\eta' - \frac{e'^2}{e^2} \eta\right) y + \left(\zeta' - \frac{e'^2}{e^2} \zeta\right) z \right] + \\ & + \xi'^2 - \frac{e'^2}{e^2} \xi^2 + \eta'^2 - \frac{e'^2}{e^2} \eta^2 + \zeta'^2 - \frac{e'^2}{e^2} \zeta^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.161)$$



Фиг. 22. К геометрии обратных радиусов.  $Q$  и  $Q'$  переходят друг в друга с помощью зеркального отражения относительно сферы радиуса  $a$  с центром в  $O$ . Треугольники  $OQP_k$  и  $OP_k'Q'$  подобны.

Уравнение (4.161) — уравнение сферы; положение ее центра и величина радиуса определяются легко из формулы (4.162): центр  $O$  лежит на отрезке, соединяющем оба «источника»  $Q = (\xi, \eta, \zeta)$  и  $Q' = (\xi', \eta', \zeta')$ ; радиус  $a$  получается как среднее геометрическое величин  $OQ = \rho$  и  $OQ' = \rho'$

$$\rho\rho' = a^2, \quad (4.162)$$

откуда следует, что один из источников лежит внутри этой сферы, а другой — вне ее.

При дальнейшем исследовании мы, однако, не будем пользоваться громоздкой формулой (4.162). Вместо этого применим геометрический аппарат, связанный с преобразованием инверсии (фиг. 22).

**1. Геометрия обратных радиусов.** Фиг. 22 наглядно представляет сформулированное с помощью равенства (4.162)

соотношение между *обратными радиусами*<sup>1)</sup>. Мы называем  $Q'$  зеркальным образом  $Q$  относительно сферы радиуса  $a$ , или также электрическим образом (Максвелл); обозначения  $e$  и  $e'$  в формулах (4.160) имеют прямую связь с электрической интерпретацией. Очевидно, отношение между  $Q$  и  $Q'$  взаимно;  $Q$  есть также зеркальный образ  $Q'$ . Из формулы (4.162) следует, как известно, что пара точек  $Q$  и  $Q'$  гармонически разделяет пару точек пересечения  $P_1, P_2$  окружности радиуса  $a$  с лучом  $OQQ'$ .

Метод обратных радиусов был разработан Вильямом Томсоном<sup>2)</sup> в его первых работах и применен им к самым различным проблемам электростатики и магнитостатики. Вместо преобразования с помощью обратных радиусов говорят также для краткости об инверсии.

Из формулы (4.162) следует далее, что треугольник  $OP_kQ$  подобен треугольнику  $OQ'P_k$ , так что имеет место соотношение

$$\frac{\rho}{R_k} = \frac{a}{R'_k}, \quad (4.163)$$

причем  $R_k = P_kQ$  и  $R'_k = P_kQ'$ . Здесь для обозначения расположенной на сфере точки применяется символ  $P_k$ , в то время как  $P, R$  и  $R'$  обозначают произвольно расположенную точку  $P = (x, y, z)$  и ее расстояния от  $Q$  и  $Q'$ . Для того чтобы определить теперь введенный с помощью формулы (4.160) «зеркально отраженный заряд»  $e'$ , мы сравниваем уравнение (4.163) со следующим соотношением, вытекающим из уравнений (4.160) и справедливым для всех точек  $P_k$ , лежащих на рассматриваемой сфере

$$\frac{e}{R_k} = \frac{e'}{R'_k},$$

и заключаем отсюда:

$$\frac{e'}{e} = \frac{a}{\rho} = \frac{\rho'}{a}. \quad (4.164)$$

<sup>1)</sup> Термин «обратные радиусы» возник в силу привычки полагать  $a=1$ , причем тогда  $\rho'=1/\rho$ . Из соображений размерности целесообразнее сохранить произвольную длину радиуса  $a$ .

<sup>2)</sup> W. Thomson, Journal de Mathem., 10 (1845); 12 (1847); Максвелл цитирует в своем «Treatise» (т. I, гл. XI) одну работу из Cambridge and Dublin Math. Journ., 1848.



[Последнее равенство получается, если принять во внимание соотношение (4.162).]

**2. Граничная задача теории потенциала для шара; интеграл Пуассона.** Получив уравнения (4.164), вернемся к нашему исходному требованию  $G = u - u' = 0$  и оправдаем введенное обозначение  $G$ . Это обозначение указывает на связь с функцией Грина. Действительно, функция

$$G = G(P, Q) = \frac{e}{R} - \frac{e'}{R'} \quad (4.165)$$

является функцией Грина для нашей «внутренней граничной задачи»: определить во внутренней области шара свободный от особенностей потенциал  $U$  при заданных граничных значениях  $\bar{U}$  на поверхности шара. Аналогично функция

$$G = G(P, Q') = \frac{e'}{R'} - \frac{e}{R} \quad (4.165a)$$

является функцией Грина для соответствующей «внешней граничной задачи». Из трех условий «а», «б», «в» стр. 75, которые служили для определения функции Грина, «а» и «б» выполнены: «б» — вследствие равенства (4.164), «а» — вследствие самосопряженности уравнения потенциала, благодаря чему дифференциальное уравнение для  $G$  совпадает с дифференциальным уравнением для  $U$ . Для того чтобы удовлетворить также условию «в» единичного источника, необходимо согласно таблице стр. 74 для внутренней задачи положить  $e = -1/4\pi$ , а для внешней задачи  $e' = -1/4\pi$ . Запишем подробнее формулу (4.165), вводя для  $P$  сферические координаты  $r, \vartheta, \varphi$  ( $r=0$  в центре шара,  $\vartheta=0$  в некотором фиксированном направлении). Пусть точки  $Q$  и  $Q'$  имеют следующие координаты:

$$r_0, \vartheta_0, \varphi_0 \text{ при } r_0 = \rho,$$

$$r'_0, \vartheta'_0, \varphi'_0 \text{ при } r'_0 = \rho', \vartheta'_0 = \vartheta_0, \varphi'_0 = \varphi_0.$$

Положим, как и в формуле (4.155),

$$\cos \Theta = \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos (\varphi - \varphi_0);$$

пусть далее для  $e'/e$  взята первая из указанных в формуле

(4.164) величин, а для  $e$  — величина  $-1/4\pi$ . Формула (4.165) благодаря этому принимает вид

$$-4\pi G = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \Theta}} - \frac{a/\rho}{\sqrt{r^2 + \frac{a^4}{\rho^2} - 2r \frac{a^2}{\rho} \cos \Theta}}. \quad (4.166)$$

Решение внутренней граничной задачи в соответствии со схемой формулы (2.42) принимает тогда следующий вид:

$$U(Q) = \int \bar{U} \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma. \quad (4.167)$$

Интегрирование справа производится по поверхности сферы, причем  $\frac{\partial G}{\partial n}$  равняется  $\frac{\partial G}{\partial r}$  при  $r = a$ , а  $d\sigma = a^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ .

Точка  $Q$  может принимать любое положение внутри шара. Мы получаем из формулы (4.166), пользуясь прежними обозначениями  $R$  и  $R'$ ,

$$4\pi \frac{\partial G}{\partial r} = \frac{r - \rho \cos \Theta}{R^3} - \frac{a}{\rho} \frac{r - \frac{a^2}{\rho} \cos \Theta}{R'^3}.$$

Следовательно, для поверхности шара, на которой по формуле (4.163) выполняется условие  $R'_k = \frac{a}{\rho} R_k$ , имеем

$$4\pi \frac{\partial G}{\partial r} = \frac{1}{R_k^3} \left[ a - \rho \cos \Theta - \frac{\rho^2}{a^2} \left( a - \frac{a^2}{\rho} \cos \Theta \right) \right] = \frac{a}{R_k^3} \left( 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right).$$

Из формулы (4.167) получаем тогда, полагая  $\bar{U} = f(\vartheta, \varphi)$ ,

$$4\pi U(Q) = a^3 \left( 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) \iint \frac{f(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{(a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \Theta)^{3/2}}. \quad (4.168)$$

Это интегральное представление было получено Пуассоном окольным путем, с помощью разложения  $f(\vartheta, \varphi)$  по шаровым функциям. Изложенный выше путь решения задачи с помощью функции Грина является прямым путем, непосредственно приводящим к окончательному виду решения в форме интеграла (4.168). Соответствующий интеграл для внешней граничной задачи получается, согласно формуле (4.165а), в которой нужно положить  $e' = -1/4\pi$  и определить  $e$  с помощью второго из указанных в формуле

(4.164) значений отношения  $e'/e$ , и имеет следующий вид:

$$4\pi U(Q') = a^3 \left( \frac{\rho'^3}{a^2} - 1 \right) \iint \frac{f(\vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{(a^2 + \rho'^2 - 2a\rho' \cos \Theta)^{3/2}}. \quad (4.168a)$$

Следует отметить то замечательное обстоятельство, что так называемая «вторая граничная задача», в которой на поверхности шара вводится условие  $\frac{\partial G}{\partial n} = 0$ , не решается методом обратных радиусов. Уясним себе теперь геометрически, каким образом решение, определяемое с помощью чисто аналитической формулы (4.168), принимает на поверхности шара в каждой ее точке  $K$  произвольно заданные, в общем случае не аналитические предельные значения  $f(\vartheta, \varphi)$ . Для этого мы должны совершить предельный переход  $Q \rightarrow K$ , т. е.  $\rho \rightarrow a$ . При этом множитель  $1 - (\rho^2/a^2)$  перед интегралом (4.168) обращается в нуль, тем самым обращаются в нуль все частные интегралы, соответствующие поверхностным элементам  $d\Omega$ , для которых знаменатель  $R^3$  при  $\rho \rightarrow a$  не обращается в 0. Знаменатель стремится к нулю при  $\rho \rightarrow a$  только тогда, когда  $\cos \Theta = 1$ , т. е.  $\vartheta = \vartheta_0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ . Тем самым главную роль играют те элементы поверхности, к которым приближается  $Q$ , так что в пределе решающим является значение  $f(\vartheta_0, \varphi_0)$ . Для большей ясности запишем формулу (4.168) в следующем виде:

$$4\pi \lim_{Q \rightarrow K} U(Q) = a^3 \left( 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) f(\vartheta_0, \varphi_0) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin \Theta d\Theta d\Phi}{(a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \Theta)^{3/2}}. \quad (4.169)$$

В числителе последнего интеграла выражение  $\sin \vartheta d\vartheta d\varphi$  заменено через  $\sin \Theta d\Theta d\Phi$ , после чего интегрирование непосредственно выполняется в конечном виде, так что интеграл равняется

$$\frac{2\pi}{a\rho} \left[ \frac{1}{a - \rho} - \frac{1}{(a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos \varpi)^{1/2}} \right].$$

При подстановке этого выражения в формулу (4.169) второй член скобки дает слагаемое, обращающееся в нуль при  $\rho \rightarrow a$ , первый же после деления на знаменатель  $a - \rho$

множителя  $1 - (\rho^2/a^2)$  при  $a \rightarrow \rho$  дает

$$\lim_{Q \rightarrow K} U = f(\vartheta_0, \varphi_0),$$

как это и должно быть.

В двухмерном случае (круг вместо шара) получаются формулы, аналогичные выражениям (4.168), (4.168а), но соответственно упрощенные, так что вместо формулы (4.168) имеем

$$2\pi U(Q) = a^2 \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right) \int \frac{f(\varphi) d\varphi}{a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \varphi_0)}. \quad (4.170)$$

**3. Общие сведения о преобразовании с помощью обратных радиусов.** Возвращаясь к трехмерному пространству, рассмотрим с более общей точки зрения наше преобразование с помощью обратных радиусов. При этом в качестве центра инверсии выберем произвольную точку  $Q$ , которую рассматриваем вместе с тем как центр сферической полярной системы координат, и построим шар произвольного радиуса  $a$  с центром в  $Q$  в качестве шара инверсии. Произвольная точка  $P = (r, \vartheta, \varphi)$  преобразуется в точку  $P' = (r', \vartheta', \varphi')$ ; при этом имеют место соотношения

$$rr' = a^2, \quad \vartheta' = \vartheta, \quad \varphi' = \varphi;$$

$$dr = -\frac{a^2}{r'^2} dr', \quad d\vartheta = d\vartheta', \quad d\varphi = d\varphi'. \quad (4.171)$$

Ради полноты мы даем соответствующее преобразование также в прямоугольных координатах  $x, y, z \rightarrow x', y', z'$ . Согласно формулам (4.124) получаем непосредственно из формул (4.171)

$$x' = r' \sin \vartheta' \cos \varphi' = \frac{a^2}{r} \sin \vartheta \cos \varphi = \frac{a^2}{r^2} x \text{ и т. д.,}$$

что можно записать общей формулой

$$(x', y', z') = \frac{a^2}{r^2} (x, y, z) \quad (4.171a)$$

и, обратно,

$$(x, y, z) = \frac{a^2}{r'^2} (x', y', z'). \quad (4.171b)$$

Найдем формулу преобразования линейного элемента в полярных координатах  $ds^2 \rightarrow ds'^2$ . Согласно формулам (4.171) имеем

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 = \\ &= \left(\frac{a}{r'}\right)^4 (dr'^2 + r'^2 d\vartheta'^2 + r'^2 \sin^2 \vartheta' d\varphi'^2) = \left(\frac{a}{r'}\right)^4 ds'^2. \end{aligned} \quad (4.172)$$

Таким образом, преобразование с помощью обратных радиусов является конформным: каждый бесконечно малый треугольник со сторонами  $ds$  переходит в подобный ему треугольник со сторонами  $ds'$  [коэффициент растяжения каждой стороны  $= (a/r')^2 = (r/a)^2$ ]. При этом, как показал Лиувилль, это отображение является единственным нетривиальным конформным отображением в трехмерном пространстве.

Геометрическая характеристика нашего преобразования состоит, вообще говоря, в том, что оно переводит сферы в сферы, причем плоскость следует рассматривать как сферу бесконечно большого радиуса. Сфера, которая проходит через центр инверсии, превращается в плоскость, так как сам центр инверсии отображается в бесконечно удаленную точку (в этой «геометрии сфер» имеется только одна бесконечно удаленная точка, а не целая плоскость, как это имеет место в проективной геометрии). Обратно, плоскость, не проходящая через центр инверсии, переходит в сферу.

**4. Сферическое отражение в теории потенциала.** Перейдем теперь к преобразованию дифференциального выражения  $\Delta u$ ; будем исходить из некоторой функции  $u(r, \vartheta, \varphi)$  и преобразуем *произведение*  $gu$  с помощью инверсии ( $r$  — расстояние от центра инверсии). Получающуюся функцию обозначим через

$$v(r', \vartheta', \varphi') = \frac{a^2}{r'} u\left(\frac{a^2}{r'}, \vartheta', \varphi'\right). \quad (4.173)$$

Это выражение показывает, по какому закону значение  $gu$  в первоначальной точке  $P$  переносится в точку  $P'$ , имеющую координаты

$$r' = \frac{a^2}{r}, \quad \vartheta' = \vartheta, \quad \varphi' = \varphi. \quad (4.173a)$$

Покажем, что вычисленное в координатах  $r', \vartheta', \varphi'$  дифференциальное выражение  $\Delta'v$  определяется с помощью формулы

$$\Delta'v = \left(\frac{a}{r'}\right)^4 r \Delta u. \quad (4.174)$$

Это соотношение обусловлено конформностью отображения, на что указывает встречающийся здесь квадрат коэффициента растяжения  $(r/a)^2$  из формулы (4.172). Соотношение (4.174) доказывается с помощью следующего элементарного подсчета. В соответствии с уравнением (4.126) определим операторы  $\Delta$  и  $D$  с помощью формул

$$r^2 \Delta = \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + D, \quad (4.174a)$$

$$D = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (4.174б)$$

Из уравнений (4.173) и (4.173a) получаем тогда, если  $\Delta'$  и  $D'$  означают те же самые выражения относительно  $r', \vartheta', \varphi'$ ,

$$D'v = r Du, \quad \frac{\partial v}{\partial r'} = \frac{\partial (ru)}{\partial r} \frac{dr}{dr'} = -\frac{a^2}{r'^2} \frac{\partial (ru)}{\partial r}, \quad (4.174в)$$

$$\frac{\partial}{\partial r'} \left( r'^2 \frac{\partial v}{\partial r'} \right) = -a^2 \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} \frac{dr}{dr'} = \frac{a^4}{r'^2} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}; \quad (4.174г)$$

поэтому из уравнений (4.174a), (4.174г) и (4.174в) следует

$$\begin{aligned} r'^2 \Delta'v &= \frac{a^4}{r'^2} \left( \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{rr'^2}{a^4} Du \right) = \\ &= \frac{a^4}{r'^2} \left( \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} Du \right). \end{aligned} \quad (4.174д)$$

Стоящее в последней скобке выражение согласно уравнению (4.126) равняется  $r \Delta u$ . Уравнение (4.174д) переходит, таким образом, в уравнение

$$\Delta'v = \left(\frac{a}{r'}\right)^4 r \Delta u, \quad (4.175)$$

что и требуется доказать<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Целесообразность размерного написания с сохранением  $a$  здесь очевидна: при  $a=1$  множитель  $1/r'^4$  в формуле (4.175) был бы непонятен, в то время как наш способ записи непосредственно указывает на правильность равенства (4.175) с точки зрения размерности.

Таким образом, если мы исходим из решения и дифференциального уравнения  $\Delta u = 0$ , написанного в координатах  $x, y, z$ , то преобразованная с помощью инверсии функция  $v = ru$  удовлетворяет записанному в координатах  $x', y', z'$  дифференциальному уравнению  $\Delta v = 0$ .

Доказанная нами теорема, принадлежащая Вильяму Томсону, делает возможным переносить решения задач потенциала, полученные для некоторой пространственной области  $S$ , на преобразованную пространственную область  $S'$ . Это, в частности, справедливо для функции Грина: если последняя известна в ограниченной плоскостями области  $S$  с граничным условием  $G=0$ , то наша теорема дает возможность построить функцию Грина  $G'$  для области  $S'$ , ограниченной, вообще говоря, сферами, и обеспечивает также выполнение граничного условия  $G'=0$ . При этом область  $S'$  способна принимать весьма различные формы, в зависимости от положения центра инверсии. Совокупность рассмотренных в § 17 областей, допускающих метод зеркального отражения, переходит при этом в более богатое формами многообразие областей, ограниченных сферами, которые допускают обобщенное отражение с помощью инверсии и при этом дают, как и прежние области, однократное и не содержащее пробелов покрытие пространства. Прежнее условие, состоявшее в том, что двухгранные углы должны содержаться целое число раз в  $\pi$ , вследствие конформности отображения, остается в силе также и для областей  $S'$ , ограниченных сферами. Там, где раньше существовало бесконечно много отраженных точек (например, плоско-параллельная пластинка), сейчас также требуется бесконечно много инверсных отражений (например, пространство между двумя касающимися друг друга в центре инверсии сферами как отображение плоско-параллельной пластинки). Там, где мы раньше обходились конечным числом зеркальных отражений (например, в случае клина с двухгранным углом в  $60^\circ$ , см. фиг. 17), теперь для соответствующей шаровой задачи процесс отражения заканчивается также после конечного числа шагов.

Соответствующие примеры даются в задачах IV.6 и IV.7, где, в частности, рассматривается также вопрос о целесообразном выборе центра инверсии.

Очевидно, все предыдущее переносится на двумерную теорию потенциала, причем отображение относительно сферы переходит в отображение относительно произвольной окружности. В то же время возможности отображения чрезвычайно сильно увеличиваются, так как в двумерном случае всякое преобразование  $z' = f(z)$  комплексного переменного  $z = x + iy$  приводит к конформному отображению. Коэффициент растяжения линейных элементов становится тогда равным  $\left| \frac{df}{dz} \right|$ , и вместо формулы (4.175) получаем

$$\Delta' v = \left| \frac{df}{dz} \right|^2 \Delta u. \quad (4.176)$$

**5. Невозможность применения метода сферического отражения к волновому уравнению.** К сожалению, метод отражения как в двумерном, так и в трехмерном случаях может быть применен только в теории потенциала. Если бы мы захотели применить инверсию к самому простому волновому уравнению

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (4.177)$$

то по формуле (4.175) после преобразования в дифференциальном уравнении появился бы множитель  $(a/r')^4 r$ , и уравнение приняло бы вид

$$\Delta' v + k^2 \left( \frac{a}{r'} \right)^4 v = 0. \quad (4.178)$$

Осложняющий уравнение множитель  $(a/r')^4 r$  выпадает только при  $k=0$ , т. е. в случае уравнения потенциала. Если  $k \neq 0$ , то этот множитель означает переход от первоначальной однородной среды ( $k = \text{const}$ ) к чрезвычайно неоднородной среде, которая в окрестности точки  $r' = 0$  обладает такой же особенностью, какую имеет показатель преломления в линзообразной оптической среде. То же самое имеет место и для уравнения теплопроводности, которое, будучи записано в своей обычной форме, с температурой  $u$  и коэффициентом теплопроводности  $k$ , приняло бы после преобразования следующий вид:

$$\Delta' v = \frac{1}{k} \left( \frac{a}{r'} \right)^4 \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (4.178a)$$



Эта форма уравнения, конечно, не может послужить для упрощения граничной задачи, поставленной для шара. Поэтому целесообразнее прибегнуть к более кропотливому методу разложения в ряд, который был нами применен для соответствующего двухмерного случая в § 20, п. 1.

## § 24. ДАЛЬНЕЙШИЕ СВЕДЕНИЯ О ШАРОВЫХ ФУНКЦИЯХ

**1. Плоская и сферическая волна в пространстве.** Простейшим решением трехмерного волнового уравнения

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (4.179)$$

является плоская волна, например звуковая волна, распространяющаяся в направлении оси  $z$  и чисто периодическая по времени:

$$u = e^{ikz} = e^{i\rho \cos \vartheta}, \quad (4.180)$$

где  $\rho = kr$ ,  $k$  — волновое число. Если разложить это решение в ряд по зональным шаровым функциям  $P_n(\cos \vartheta)$ , то в качестве коэффициентов разложения получим  $\psi_n(\rho)$  (см. § 21, п. 3). Это следует, с одной стороны, из волнового уравнения, с другой стороны, из дифференциального уравнения для  $P_n$ . При отсутствии зависимости от азимута  $\varphi$  уравнение (4.179) может быть записано в соответствии с левой частью уравнения (4.126) в следующем виде:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + k^2 u = 0.$$

После этого функция  $u$  допускает разделение переменных, так что ее можно представить в виде произведения  $P_n$  на некоторую зависящую только от  $r$  функцию  $R(r)$ . В силу дифференциального уравнения (4.127) для  $P_n$ ,  $R$  должно удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{d^2 rR}{dr^2} + \left( k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) R = 0,$$

вместо чего, пользуясь прежним обозначением  $\rho$ , можно записать также

$$\frac{1}{\rho} \frac{d^2 \rho R}{d\rho^2} + \left( 1 - \frac{n(n+1)}{\rho^2} \right) R = 0. \quad (4.181)$$

Но это дифференциальное уравнение совпадает с уравнением (4.92а), которое имеет в качестве своих непрерывных

при  $\rho = 0$  решений функции  $\psi_n$ , так что с точностью до постоянного множителя мы можем в соответствии с формулой (4.92) написать:

$$R(r) = \psi_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} I_{n+\frac{1}{2}}(\rho). \quad (4.182)$$

Аналогично этому решения (4.181), разрывные при  $\rho = 0$ , получаются как линейные комбинации функций  $\zeta^{1,2}(\rho)$ , определенных в формуле (4.96). Так как последние не могут быть приняты во внимание в нашем случае разложения плоской волны, то мы должны положить

$$e^{i\rho \cos \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(\rho) P_n(\cos \theta). \quad (4.183)$$

Здесь следует определить еще коэффициенты  $c_n$ . Они получаются из условий ортогональности  $P_n$ . Именно, в соответствии с равенством (4.130) и (4.130а), обозначая, как и раньше, переменное интегрирование через  $\zeta = \cos \theta$ , получаем

$$c_n \psi_n(\rho) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{+1} e^{i\rho \zeta} P_n(\zeta) d\zeta. \quad (4.184)$$

Сравним теперь асимптотическое значение выражений слева и справа при  $\rho \rightarrow \infty$ . Слева получим в силу зависимости между  $\psi_n$  и  $I_{n+\frac{1}{2}}$  согласно формуле (4.57)

$$c_n \frac{\cos \left[ \rho - \frac{(n+1)\pi}{2} \right]}{\rho}. \quad (4.184a)$$

Стоящий справа интеграл можно разложить в ряд по возрастающим степеням  $1/\rho$  с помощью интегрирования по частям. Пренебрегая всеми высшими степенями  $1/\rho$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\rho}}{i\rho} P_n(1) - \frac{e^{-i\rho}}{i\rho} P_n(-1) &= \frac{1}{i\rho} [e^{i\rho} - (-1)^n e^{-i\rho}] = \\ &= 2i^n \frac{\sin\left(\rho - \frac{n\pi}{2}\right)}{\rho}. \end{aligned} \quad (4.184б)$$

Зависимость этого выражения от  $\rho$  та же самая, что и в формуле (4.184а). Если подставить выражения (4.184а)

и (4.184б) в уравнение (4.184), то получим

$$c_n = (2n + 1) i^n. \quad (4.184в)$$

Разложение (4.183) плоской волны принимает тем самым окончательную форму

$$e^{i\rho \cos \vartheta} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1) i^n \psi_n(\rho) P_n(\cos \vartheta). \quad (4.185)$$

Ряд (4.185) аналогичен разложению двумерной плоской волны в ряд Фурье по формуле (4.83б). Следовательно, подобно тому, как двумерная плоская волна может быть названа производящей функцией для бесселевых функций  $I_n$ , *трехмерная плоская волна может быть рассматриваемая в качестве производящей функции для функций  $\psi_n$* . Формула (4.184), в которой коэффициент  $c_n$  заменен своим значением (4.184в), приводит к интегральному представлению функции  $\psi_n(\rho)$  в следующем виде:

$$2i^n \psi_n(\rho) = \int_{-1}^{+1} e^{i\rho \zeta} P_n(\zeta) d\zeta. \quad (4.185а)$$

Формула (4.185а) не дает, очевидно, ничего нового сравнительно с разложением (4.183). Следующим простым решением волнового уравнения (4.179) является сферическая волна

$$u = \frac{e^{ikr}}{ikr} = \frac{e^{i\rho}}{i\rho}. \quad (4.186)$$

Выражение (4.186) представляет уходящую волну, распространяющуюся в направлении возрастания  $r$ , зависимость которой от времени мы задаем с помощью  $\exp(-i\omega t)$ . В силу формулы (4.96а) функция  $u$  совпадает с решением уравнения (4.181), обладающим особенностью при  $r=0$  и имеющим вид

$$\zeta_0^1 = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} H_{1/2}^1(\rho). \quad (4.186а)$$

Теперь переместим источник  $r=0$  этого решения в произвольную точку

$$Q = (r_0, \vartheta_0, \varphi_0).$$

Этим путем получим из формулы (4.186)

$$u = \frac{e^{ikR}}{ikR} = \zeta_0^1(kR) \begin{cases} R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \Theta}, \\ \cos \Theta = \cos \vartheta \cos \vartheta_0 + \\ + \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0). \end{cases} \quad (4.186b)$$

Эта функция также разлагается в ряд по шаровым функциям  $P_n(\cos \Theta)$ . При этом в качестве коэффициентов снова появляются решения дифференциального уравнения (4.181), а именно

$$\psi_n(\rho) \quad \text{при} \quad r < r_0, \quad \zeta_n^1(\rho) \quad \text{при} \quad r > r_0;$$

первое имеет место потому, что точка  $r=0$  является теперь регулярной точкой сферической волны, второе — потому, что тип уходящей волны должен сохраняться в каждом члене разложения. В силу симметрии функции  $R$  относительно  $r$  и  $r_0$  для зависимости от  $r_0$  должно иметь место обратное соотношение, так что в коэффициентах при  $P_n(\cos \Theta)$  должны появиться множители

$$\zeta_n^1(\rho_0) \quad \text{при} \quad r < r_0, \quad \psi_n(\rho_0) \quad \text{при} \quad r > r_0$$

и разложение должно иметь вид

$$\frac{e^{ikR}}{ikr} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta_n^1(\rho_0) \psi_n(\rho) P_n(\cos \Theta), & r < r_0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(\rho_0) \zeta_n^1(\rho) P_n(\cos \Theta), & r > r_0. \end{cases} \quad (4.187)$$

Числовые множители должны совпадать для обоих рядов, так как при  $r=r_0$  оба ряда должны непрерывно переходить друг в друга (не считая точки  $Q$ , в которой, кроме того,  $\Theta=0$  и оба ряда расходятся).

Соотношения, имеющие здесь место, носят такой же характер, как и соотношения, выражаемые в случае цилиндрических волн в § 21 формулой (4.85): внутри шара имеем ряд Тэйлора, вне его — ряд типа Лорана. Коэффициенты  $c_n$ , которые следует еще определить, могут быть получены с помощью предельного перехода  $r \rightarrow \infty$ . При

этом имеем

$$R = r \left( 1 - \frac{r_0}{r} \cos \Theta + \dots \right) \rightarrow r - r_0 \cos \Theta, \\ e^{ikR} \rightarrow e^{ikr} e^{-ikr_0 \cos \Theta}.$$

Согласно формуле (4.185), в которой показатель  $ir \cos \vartheta$  заменен показателем  $-ir_0 \cos \Theta$ , в левой части формулы (4.187) можно написать ряд

$$\frac{e^{ir}}{ir} \sum (2n+1) (-i)^n \psi_n(\rho_0) P_n(\cos \Theta).$$

Вторая строка правой части формулы (4.187) в силу формул (4.96) и (4.55) при этом предельном переходе принимает вид

$$\sum c_n \psi_n(\rho_0) \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}} e^{i \left[ \rho - \frac{(n+1)\pi}{2} \right]} P_n(\cos \Theta).$$

Для того чтобы это выражение почленно совпадало с левой частью уравнения (4.187), в нем нужно положить

$$c_n = 2n + 1. \quad (4.187a)$$

Уточненное с помощью формул (4.187a) представление сферической волны мы можем также назвать теоремой сложения для функции

$$\zeta_0^1(kR) = \zeta_0^1(\sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \Theta}).$$

Если в левой части формулы (4.187) перейти от уходящей волны к приходящей сферической волне

$$\frac{e^{-ikR}}{-ikR} = \zeta_0^2(\sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos \Theta}),$$

то в правой части  $\zeta^2$  должно быть заменено на  $\zeta^1$ . Полу-сумма обоих представлений дает теорему сложения для «стоячей волны», не имеющей особенности

$$\psi_0(kR) = \frac{\sin kR}{kR} = \sum (2n+1) \psi_n(\rho_0) \psi_n(\rho) P_n(\cos \Theta). \quad (4.188)$$

В последней формуле пропадает различие между случаями  $r \leq r_0$ .

**2. Асимптотические соотношения.** Если в дифференциальном уравнении (4.135) присоединенных шаровых функций совершить предельный переход

$$n \rightarrow \infty, \quad \vartheta \rightarrow 0, \quad n\vartheta \rightarrow \eta, \quad P_n^m(\cos \vartheta) \rightarrow O_m(\eta), \quad (4.189)$$

то получим

$$\frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left( \eta \frac{dO_m}{d\eta} \right) + \left( 1 - \frac{m^2}{\eta^2} \right) O_m = 0, \quad (4.189a)$$

т. е. дифференциальное уравнение (4.11) цилиндрической функции  $Z_m$ . Так как  $P_n^m$  и поэтому также  $O_m$  при  $\vartheta \rightarrow 0$  остаются конечными, то в качестве решения уравнения (4.189a) может быть рассмотрена только функция Бесселя  $I_m$ . Таким образом, имеем

$$O_m(\eta) = C_m I_m(\eta), \quad \text{причем } C_0 = 1. \quad (4.190)$$

Равенство  $C_0 = 1$  следует из того, что  $I_0(\eta) = 1$  при  $m = 0$  и  $\eta = 0$ , в то время как согласно формуле (4.189)  $\vartheta = 0$  при  $\eta = 0$ , следовательно  $P_n(\cos \vartheta) = 1$  и поэтому  $O_0(\eta) = 1$ . Для того чтобы определить  $C_m$  также и при  $m > 0$ , мы обращаемся к формуле (4.140), которая при  $\vartheta \rightarrow 0$  дает

$$P_n^m \rightarrow \frac{\vartheta^m}{2^n n!} \lim_{\zeta \rightarrow 1} \frac{d^{n+m}}{d\zeta^{n+m}} (\zeta - 1)^n (\zeta + 1)^n. \quad (4.190a)$$

Стоящую под знаком производной функцию запишем в виде

$$(\zeta - 1)^n 2^n \left( 1 + \frac{\zeta - 1}{2} \right)^n = \dots + 2^n (\zeta - 1)^n \binom{n}{m} \left( \frac{\zeta - 1}{2} \right)^m + \dots$$

Мы произвели разложение по формуле бинома, причем записали только член с  $(\zeta - 1)^{n+m}$ , так как члены с меньшими степенями при дифференцировании выпадают, члены с большими степенями обращаются в нуль в пределе при  $\zeta \rightarrow 1$ . Записанный нами член после  $(n + m)$ -кратного дифференцирования сводится к постоянной

$$2^{n-m} (n + m)! \binom{n}{m} = 2^{n-m} \frac{n!}{m!} \frac{(n + m)!}{(n - m)!}.$$

Подставляя в формулу (4.190а), получим

$$P_n^m \rightarrow \frac{1}{m!} \left( \frac{\vartheta}{2} \right)^m \frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \quad (4.190б)$$

Здесь последняя дробь содержит в числителе на  $2m$  множителей более, чем в знаменателе; так как в силу  $m \ll n$  все они могут быть приравнены  $n$ , то формула (4.190б) может быть заменена следующей:

$$P_n^m \rightarrow \frac{1}{m!} \left( \frac{n\vartheta}{2} \right)^m n^m = \frac{1}{m!} \left( \frac{\eta}{2} \right)^m n^m. \quad (4.190в)$$

Сравнение с формулой (4.190), в которой можно заменить  $I_m(\eta)$  первым членом соответствующего степенного ряда (4.34), дает

$$C_m = n^m. \quad (4.191)$$

Следовательно, при  $m > 0$  необходимо перед предельным переходом поделить  $P_n^m$  на  $n^m$ , чтобы непосредственно получить  $I_m$ .

Наш результат имеет следующий геометрический смысл: сфера для окрестности северного полюса  $\vartheta \rightarrow 0$  может быть заменена касательной плоскостью. Решение пространственного волнового уравнения, поведение которого на сфере определяется функцией  $P_n^m e^{im\vartheta}$ , переходит при этом в решение волнового уравнения для касательной плоскости, именно в  $I_m(\eta) e^{im\varphi}$ , если только для  $m > 0$  предельному переходу подвергнуть не  $P_n^m$ , а  $P_n^m/n^m$ . То же самое, очевидно, справедливо для южного полюса шара  $\vartheta \rightarrow \pi$ .

После того как мы предварительно рассмотрели частные случаи  $\vartheta \rightarrow 0$  и  $\vartheta \rightarrow \pi$ , мы хотим теперь исследовать асимптотическое предельное значение  $P_n^m$  в общем случае при  $n \rightarrow \infty$  и  $0 < \vartheta < \pi$ . Чтобы применить метод седловых точек, мы обращаемся к интегралу (4.145), который мы переписываем в следующей комплексной форме:

$$P_n^m(z) = \frac{C}{2\pi i} \oint e^{nf(w)} dw, \quad (4.192)$$

где

$$w = e^{i\varphi}, \quad C = \frac{(n+m)!}{n!} e^{-im\pi/2},$$

(постоянная  $C$  определяется из формулы (4.145а)). Интегрирование следует провести по единичной окружности плоскости  $w$  в положительном направлении (против часовой стрелки);  $f(w)$  имеет значение

$$f(w) = \ln \left[ \cos \vartheta + \frac{i}{2} \sin \vartheta \left( w + \frac{1}{w} \right) \right] - \frac{m+1}{n} \ln w. \quad (4.193)$$

Отсюда следует

$$f'(w) = \frac{\frac{i}{2} \sin \vartheta \left( 1 - \frac{1}{w^2} \right)}{\cos \vartheta + \frac{i}{2} \sin \vartheta \left( w + \frac{1}{w} \right)} - \frac{m+1}{nw}.$$

В соответствии с этим имеются две седловые точки  $w_0$ , которые в предположении  $m \ll n$  и  $\vartheta \neq 0$  лежат на единичной окружности, а именно  $w_0 = \pm 1$ ; поэтому

$$f''(w_0) = \sin \vartheta e^{\mp i \left( \vartheta - \frac{\pi}{2} \right)}. \quad (4.193a)$$

При этих предположениях имеем

$$e^{nf(w_0)} = e^{\pm i n \vartheta} (\pm 1)^{m+1}. \quad (4.193b)$$

В соответствии с формулой (4.54) полагаем для первой и второй седловых точек соответственно

$$w \mp 1 = se^{i\gamma}$$

и, применяя выражение (4.193а), получаем

$$\begin{aligned} f(w) - f(w_0) &= \\ &= f''(w_0) \frac{(w \mp 1)^2}{2} + \dots = \frac{s^2}{2} \sin \vartheta e^{2i\gamma \mp i \left( \vartheta - \frac{\pi}{2} \right)}. \end{aligned} \quad (4.193b)$$

Если положить здесь

$$2i\gamma \mp i \left( \vartheta - \frac{\pi}{2} \right) = \pm i\pi, \text{ т. е. } \gamma = \pm \left( \frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{4} \right), \quad (4.193r)$$

то разность  $f(w) - f(w_0)$  будет вещественной и равной  $-\frac{s^2}{2} \sin \vartheta$ . Этот выбор  $\gamma$  означает, что для обеих седловых точек интегрирование производится вдоль соответствующей линии спада, направление которой согласно формуле (4.193а) зависит от  $\vartheta$ . Оба интеграла принимают после



этого одно и то же значение

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{ns^2}{2} \sin \vartheta} ds, \quad (4.194)$$

которое в силу соотношения  $d\omega = e^{i\gamma} ds$  и формулы (4.193а) должно быть еще умножено на различные для обеих седловых точек величины

$$e^{i\gamma} = e^{\pm i\left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}. \quad (4.194а)$$

Интеграл (4.194) простой подстановкой в пределе при  $n \rightarrow \infty$  приводится к интегралу Лапласа, причем он становится равным

$$\sqrt{\frac{2\pi}{n \sin \vartheta}}. \quad (4.194б)$$

Таким образом, в общем случае, принимая во внимание формулы (4.193в), (4.194а) и (4.194б), получаем для выражения (4.192) следующую форму:

$$P_n^m = \frac{C}{2\pi i} \sqrt{\frac{2\pi}{n \sin \vartheta}} \left( e^{i\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta + \frac{\pi}{4}\right]} + e^{-i\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta + \frac{\pi}{4} + (m+1)\pi\right]} \right). \quad (4.194в)$$

В предположении  $m \ll n$  дробь, выражающая значение  $C$  из формулы (4.192), в числителе которой имеется на  $m$  множителей больше, чем в знаменателе, сводится по аналогии с формулой (4.190б) к выражению

$$C = n^m \exp\left(-im \frac{\pi}{2}\right),$$

следовательно  $C/i$  переходит в  $n^m \exp\left[-i(m+1)\frac{\pi}{2}\right]$ . Подставляя это в формулу (4.194в), после простых преобразований получаем

$$P_n^m = n^m \sqrt{\frac{2}{\pi n \sin \vartheta}} \cos \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right)\vartheta - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (4.195)$$

Тем самым  $P_n^m$  для вещественных  $n$  является быстро осциллирующей функцией с переменной амплитудой; амплитуда

мала в окрестности  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  и возрастает с возрастанием

разности  $\left| \vartheta - \frac{\pi}{2} \right|$  симметрично относительно точки  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ .

При  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$  формула (4.195) не имеет смысла, так как тогда  $f''(w_0) = 0$  в силу формулы (4.193а); ряд для  $f(w) - f(w_0)$  начинается в этом случае только с третьего члена, как это имеет место в предельном случае, рассмотренном в конце § 21 и приводящем к интегралу Эйри. Вместо предельного значения (4.195) следует тогда пользоваться формулой (4.190в), определяющей предельное значение  $P_n^m$  в рассматриваемом предельном случае.

Асимптотическая формула (4.195) будет использована нами в приложении к гл. VI для комплексных значений  $n$  с положительной вещественной частью, причем в этом случае, как показывает наш вывод, она справедлива в такой же степени, как и для положительных вещественных значений  $n$ .

### 3. Шаровые функции и электрические мультиполи.

Вернемся в этом разделе снова к теории потенциала. Так как согласно стр. 184 шаровые функции  $n$ -го порядка можно было определить как однородные потенциалы степени  $n$  или, как теперь нам удобнее говорить, степени  $-n-1$ , то они могут быть получены повторным дифференцированием простейшего потенциала  $1/R$  «по  $n$ -направлениям». Такова точка зрения Максвелла в гл. IX его трактата. Мы выражаем это, следуя Максвеллу, с помощью следующей формулы:

$$Y_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial}{\partial h_1} \frac{\partial}{\partial h_2} \cdots \frac{\partial}{\partial h_n} \left( \frac{1}{R} \right),$$

$$\text{где } \begin{cases} R^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2, \\ \lim x, y, z \rightarrow 0, \lim R \rightarrow r, \\ r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1. \end{cases} \quad (4.196)$$

Точка  $P = (\xi, \eta, \zeta)$  должна теперь лежать на единичной сфере, «источник»  $Q = (x, y, z)$  — в окрестности нуля. Дифференцирование по направлениям  $h_1, h_2, \dots, h_n$  можно производить как по координатам точки  $P$ , так и по координатам точки  $Q$ . Выберем последнее и после дифференцирования, как указано уже в формуле (4.196), перейдем

к пределу  $x, y, z \rightarrow 0, R \rightarrow r$ . Таким образом, в  $Q$  появляется мультиполь, причем тем большего порядка, чем больше число дифференцирований.

Начнем с простого случая, когда направления  $h_1, h_2, \dots$  совпадают между собой, например параллельны оси  $z$ . Полученная таким путем шаровая функция симметрична относительно оси  $z$  и является поэтому *зональной* шаровой функцией типа Лежандра  $P_n$ . Обозначим символом  $\rightarrow$  предельный переход, указанный в формуле (4.196), и представим в развернутом виде последовательные этапы построения полиномов  $P_n$  по схеме, указываемой этой формулой:

$$1) \frac{\partial}{\partial h_1} \frac{1}{R} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R} = \frac{\zeta - z}{R^3} \rightarrow \zeta = P_1,$$

$$2) \frac{1}{2!} \frac{\partial}{\partial h_1} \frac{\partial}{\partial h_1} \frac{1}{R} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{R} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\zeta - z}{R^3} = -\frac{1}{2} \frac{1}{R^3} + \\ + \frac{3}{2} \frac{(\zeta - z)^2}{R^5} \rightarrow \frac{3}{2} \zeta^2 - \frac{1}{2} = P_2,$$

$$3) \frac{1}{3!} \frac{\partial}{\partial h_1} \frac{\partial}{\partial h_1} \frac{\partial}{\partial h_1} \frac{1}{R} = \frac{1}{3!} \frac{\partial^3}{\partial z^3} \frac{1}{R} = \\ = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\frac{1}{2} \frac{1}{R^3} + \frac{3}{2} \frac{(\zeta - z)^2}{R^5} \right] = \\ = -\frac{3}{2} \frac{\zeta - z}{R^5} + \frac{5}{2} \frac{(\zeta - z)^3}{R^7} \rightarrow \frac{5}{2} \zeta^3 - \frac{3}{2} \zeta = P_3,$$

$$4) \frac{1}{4!} \frac{\partial}{\partial h_1} \frac{\partial}{\partial h_1} \frac{\partial}{\partial h_1} \frac{\partial}{\partial h_1} \frac{1}{R} = \frac{1}{4!} \frac{\partial^4}{\partial z^4} \frac{1}{R} = \\ = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\frac{3}{2} \frac{\zeta - z}{R^5} + \frac{5}{2} \frac{(\zeta - z)^3}{R^7} \right] = \\ = \frac{3}{8} \frac{1}{R^5} - \frac{15}{4} \frac{(\zeta - z)^2}{R^7} + \frac{35}{8} \frac{(\zeta - z)^4}{R^9} \rightarrow \frac{35}{8} \zeta^4 - \frac{15}{4} \zeta^2 + \frac{3}{8} = P_4.$$

Эта последовательность полиномов  $P_1, \dots, P_4$ , которая должна быть еще дополнена производной нулевого порядка от  $1/R$ , а именно значением  $P_0 = 1$ , полностью совпадает со значениями, полученными нами, когда мы исходили из нашего первоначального определения на стр. 38—40 (нужно только отождествить прежнее переменное  $x$  с применяемым здесь и ниже переменным  $\zeta$ ). Это является следствием связи между шаровыми функциями и однородными потенциалами, так что в формуле (4.196) проверке подлежал только нормирующий множитель  $1/n!$ . Обратим также внимание

на связь формулы (4.196) со вторым из уравнений (4.125), которое можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{R} = \sum_{m=0}^{\infty} z^m P_m(\cos \vartheta),$$

если положить  $r_0 = z$  (точка  $Q$  на оси  $z$ ) и  $r = 1$  (точка  $P$  лежит на единичной сфере). Отсюда следует при  $z \rightarrow 0$

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \frac{1}{R} = P_n(\cos \vartheta) = P_n(\zeta).$$

Ниже мы даем наглядную схему последовательно получаемых друг из друга мультиполей, причем во избежание предельного процесса сближения точек  $Q$  и  $O$  заменяем производную по  $z$  (координата источника) производной по  $\zeta$ , взятой с обратным знаком, и под  $r$  понимаем непосредственно расстояние

$$OP = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Полюс	Схема заряда	$\bigoplus$	Потенциал $\frac{1}{r}$ ,
Диполь	Схема заряда	$\bigoplus$ $\bigominus$	Потенциал $-\frac{1}{1!} \frac{d}{d\zeta} \frac{1}{r}$ ,
Квадруполь	Схема заряда	$\bigoplus$ $\bigominus$ $\bigominus$ $\bigoplus$	Потенциал $+\frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\zeta^2} \frac{1}{r}$ .

При сближении двух квадруполей противоположной ориентации возникает октуполь с потенциалом

$$-\frac{1}{3!} \frac{d^3}{d\zeta^3} \frac{1}{r}.$$

(Читателю рекомендуется составить схему соответствующего распределения зарядов.)  $n$ -кратным дифференцированием получается мультиполь порядка  $2^n$  и его потенциал

$$\frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{d\zeta^n} \frac{1}{r}.$$

Квадрупольные и октупольные излучения встречаются в атомной физике.

Теперь мы должны рассмотреть еще примеры дифференцирований по различным направлениям, дополняя диф-

ференцирование по направлению  $z$  дифференцированием в плоскости  $xy$ . Чтобы и в этом случае сохранить известную симметрию, мы будем предполагать, что  $m$  направлений дифференцирования, лежащих в плоскости  $x, y$ , располагаются звездообразно под углом  $\pi/m$  друг к другу, в то время как остальные  $n-m$  дифференцирований совершаются по направлению  $z$ . Мы приходим, таким образом, к присоединенным сферическим функциям

$$P_n^m(\zeta) \Phi_m(\varphi), \quad \Phi_m(\varphi) = e^{\pm im\varphi}, \quad (4.197)$$

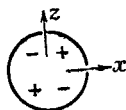
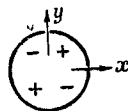
причем естественно вместо указанных здесь показательных функций может встречаться и их линейная комбинация, например  $\frac{\cos}{\sin} m\varphi$ . К типу функций (4.197) относятся, в частности, так называемые секториальные сферические функции (этот термин принадлежит также Максвеллу), для которых  $m=n$  и которые согласно формуле (4.140) имеют вид

$$P_n^n \Phi_n = \sin^n \vartheta \frac{d^n P_n}{d\zeta^n} \Phi_n = \frac{(2n)!}{2^n n!} \sin^n \vartheta e^{\pm in\varphi}. \quad (4.197a)$$

Случай  $n=2$  мы рассмотрим несколько подробнее. Требуемая звездообразная конфигурация получается здесь, если  $h_1$  и  $h_2$  лежат в направлениях оси  $x$  и соответственно оси  $y$ . Формула (4.196) и следующие за ней выражения дают нам тогда

$$\begin{aligned} P_2^2 &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{1}{R} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\eta - y}{R^3} = \\ &= \frac{3}{2} \frac{(\xi - x)(\eta - y)}{R^5} \rightarrow \frac{3}{2} \xi \eta = \frac{3}{4} \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi, \end{aligned}$$

что, действительно, имеет вид выражения (4.197a). В этом случае также говорят о квадруполе (см. правый рисунок нижеследующей схемы; левый рисунок схемы соответствует  $P_2^1$ ).

Квадруполь  $P_1^2$ Квадруполь  $P_2^2$

Формула (4.196) дает полную систему  $2n+1$  сферических функций степени  $n$ , что следует из числа содержащихся в ней постоянных: по две постоянных, определяющих направление для каждого дифференцирования  $h$ , и одна постоянная, входящая множителем.

**4. Некоторые сведения о гипергеометрической функции.** Проще всего можно определить гипергеометрическую функцию с помощью дифференциального уравнения

$$z(1-z)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]y' - \alpha\beta y = 0, \quad (4.198)$$

исходя из которого легко показать, следуя способу § 19, п. 3, что гипергеометрическая функция представляется рядом (2.53а).

Для этой цели введем неопределенный показатель  $\lambda$  и неопределенные коэффициенты  $a_k$  и подставим в уравнение (4.198) обобщенный степенной ряд вида

$$y = z^\lambda (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_k z^k + \dots); \quad (4.199)$$

приравниваем нулю сначала коэффициент при степени  $z^{\lambda-1}$ , а затем коэффициент при общем члене  $z^{\lambda+k}$ ; тогда, во-первых, получится уравнение

$$\lambda(\lambda-1+\gamma) = 0, \quad (4.199a)$$

а во-вторых, рекуррентная формула для коэффициентов

$$\begin{aligned} & [(\lambda+k+1)(\lambda+k) + \gamma(\lambda+k+1)] a_{k+1} = \\ & = [(\lambda+k)(\lambda+k-1) + (\alpha+\beta+1)(\lambda+k) + \alpha\beta] a_k. \end{aligned} \quad (4.199b)$$

Уравнение (4.199a) имеет два корня:

$$\lambda = 0 \quad \text{и} \quad \lambda = 1 - \gamma; \quad (4.200a)$$

для первого из них подстановкой в формулу (4.199b) получим

$$a_{k+1} = \frac{k(k-1) + (\alpha+\beta+1)k + \alpha\beta}{(k+1)k + \gamma(k+1)} a_k = \frac{(x+k)(\beta+k)}{(k+1)(\gamma+k)} a_k. \quad (4.200b)$$

Таким образом, положив дополнительно  $a_0 = 1$ , получим, действительно, ряд Гаусса

$$\begin{aligned} y &= y_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \\ &= 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} z^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.201)$$

Другой корень уравнения (4.199а) дает, как нетрудно подсчитать,

$$y = y_2 = z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, z). \quad (4.201a)$$

Кроме того, имеется целая система аналогичных представлений решений уравнения (4.198) с измененными значениями параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и с линейно преобразованным аргументом  $z$ , которые совпадают в соответствующих областях плоскости  $z$  с решением (4.201) и которые были тщательно классифицированы Гауссом как «*relationes inter contiguas*».

Если сравнить дифференциальное уравнение (4.128а) зональных шаровых функций

$$(1 - \zeta^2) P'' - 2\zeta P' + n(n+1)P = 0 \quad (4.202)$$

с уравнением (4.198), то увидим, что оно получается из последнего с помощью подстановки

$$z' = \frac{1 \mp \zeta}{2}, \quad \alpha = -n, \quad \beta = n+1, \quad \gamma = 1.$$

Отсюда следует, что полином  $P_n$  с точностью до множителя должен совпадать как с  $y_1$ , так и с  $y_2$ , а именно

$$\begin{aligned} P_n(\zeta) &= F\left(-n, n+1, 1, \frac{1-\zeta}{2}\right) = \\ &= (-1)^n F\left(-n, n+1, 1, \frac{1+\zeta}{2}\right), \end{aligned} \quad (4.202a)$$

что обеспечивает также правильную нормировку, так как  $P_n(1) = 1$  для  $\zeta = +1$ . Как всякий гипергеометрический ряд с отрицательным целым  $\alpha$  или  $\beta$ ,  $P_n$  обрывается на конечном числе членов, а в силу того, что  $\alpha = -n$ ,  $P_n$  есть полином  $n$ -й степени [коэффициент при  $(1 \mp \zeta)^{n+1}$  и всех последующих степенях имеет в числителе множитель  $\alpha + n = -n + n = 0$ ]. Попутно мы замечаем, что разложение  $P_n$  в ряд по степеням  $1 - \zeta$  проще (в силу его гипергеометрического характера), чем разложение в ряд по степеням  $\zeta$ , которое мы поэтому и не указали в общем виде.

Разложение по степеням  $1 - \zeta$  имеет вид

$$\begin{aligned}
 P_n &= 1 + \frac{(-n)(n+1)}{1 \cdot 1} \cdot \frac{1-\zeta}{2} + \\
 &+ \frac{(-n)(-n+1)(n+1)(n+2)}{2! 2!} \left(\frac{1-\zeta}{2}\right)^2 + \dots \\
 &\dots + (-1)^n \frac{(2n)!}{n! n!} \left(\frac{1-\zeta}{2}\right)^n = \\
 &= \sum_{p=0}^n (-1)^p \frac{(n+p)!}{(n-p)!} \cdot \frac{1}{p! p!} \left(\frac{1-\zeta}{2}\right)^p. \quad (4.2026)
 \end{aligned}$$

Присоединенные шаровые функции  $P_n^m$  также могут быть представлены с помощью гипергеометрических рядов. Для этого достаточно принять во внимание общее соотношение, которое получается непосредственно из формулы (4.201) почленным дифференцированием

$$\frac{d}{dz} F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, z). \quad (4.203)$$

Таким образом, для положительного  $m$  получаем, согласно формуле (4.140), представление

$$\begin{aligned}
 P_n^m(\zeta) &= C (1 - \zeta^2)^{m/2} F\left(m-n, m+n+1, m+1, \frac{1-\zeta}{2}\right), \\
 C &= \frac{(n+m)!}{2^m m! (n-m)!}. \quad (4.204)
 \end{aligned}$$

Для целых отрицательных  $m$  оно теряет силу, однако с помощью предельного перехода переносится и на этот случай; тогда оно совпадает с нашим общим определением по формуле (4.140).

От гипергеометрической функции Гаусса перейдем теперь к очень важной для волновой механики *конфлюэнтной*<sup>1)</sup> гипергеометрической функции. Она зависит только от двух параметров  $\alpha$  и  $\gamma$ , так как третий параметр  $\beta$  подвергается следующему предельному процессу:  $\beta \rightarrow \infty$ ,  $z \rightarrow 0$ ,  $\beta z \rightarrow \rho$  ( $\rho$  — любое конечное число). (4.205)

<sup>1)</sup> Выражение «вырожденная» не следует рекомендовать, так как это слово, особенно в волновой механике, употребляется в другом смысле.



Из формулы (4.201) получается тогда

$$F(\alpha, \gamma, \rho) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{\rho}{1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \cdot \frac{\rho^2}{2!} + \dots \quad (4.206)$$

Соответствующее дифференциальное уравнение для  $F$

$$\rho \frac{d^2 F}{d\rho^2} + (\gamma - \rho) \frac{dF}{d\rho} - \alpha F = 0 \quad (4.207)$$

следует из уравнения (4.198), если принять во внимание соотношения

$$\frac{d}{dz} = \frac{d}{d\rho} \cdot \frac{d\rho}{dz} = \beta \frac{d}{d\rho}$$

и поделить левую часть уравнения (4.198) на  $\beta$ . Это уравнение встретится нам в волновой механике при исследовании собственных функций атома водорода.

**5. Шаровые функции с нецелым индексом.** Наши представления нуждаются в дополнении с двух точек зрения. Мы ограничились только целыми числами  $n$  и  $m$  и только всюду конечными функциями  $P_n^m$ . Впрочем, оба эти ограничения были обусловлены вначале связью шаровых функций с теорией потенциала.

Что касается первого пункта, то следует иметь в виду, что гипергеометрические функции, разлагаемые в характеристических точках  $\zeta = \pm 1$  по степени  $1 \mp \zeta$ , не обрываются на конечном числе членов, как это имело место для целых  $n$ ; кроме того, регулярное в северном полюсе  $\zeta = +1$  решение расходится в южном полюсе  $\zeta = -1$ , и наоборот. Оба гипергеометрических ряда, входящих в уравнение (4.202а), представляют тогда различные решения дифференциального уравнения, так что соотношение (4.202а) имеет смысл только для целого  $n$ . Требование «всюду конечности на сфере» выполняется только для целых  $n$ . Нецелые  $n$  исключаются, с другой стороны, требованием однозначности относительно координаты  $\varphi$ .

Характер обращения в бесконечность функции  $P_n(\zeta)$  при нецелом  $n$  можно определить, пользуясь общей теорией гипергеометрических рядов. Однако мы предпочитаем получить это прямым вычислением.

В силу их первоначального определения по формуле (4.125), функции  $P_n$  можно рассматривать как коэффициен-

ты некоторого ряда Тэйлора, расположенного по степеням  $t = \frac{r}{r_0}$ , т. е. для целого  $n$ , как  $n$ -е производные

$$P_n(\zeta) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-2\zeta t+t^2}} \text{ при } t=0. \quad (4.208)$$

Вместо этого по известной теореме Коши можно записать:

$$P_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dt}{t^{n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-2\zeta t+t^2}}. \quad (4.208a)$$

Однако это же представление справедливо и для нецелого  $n$ , только в этом случае вследствие многозначности  $t^{-n-1}$  следует произвести разрез, например, от  $t = -\infty$  до  $t = 0$ , при этом путь интегрирования, который в формуле (4.208a) состоял из произвольного контура, окружающего точку  $t=0$  и пробегаемого в направлении против часовой стрелки, теперь должен петлеобразно идти вдоль разреза, а именно начинаться на отрицательном берегу последнего при  $t = -\infty$ , обходить точку  $t=0$  в том же направлении и кончаться на положительном берегу при  $t = -\infty$ . Ясно, что при таком определении  $P_n$  дифференциальное уравнение для  $P_n$  выполняется независимо от того, является  $n$  целым или нет. При этом формула (4.208a) определяет как раз то частное решение дифференциального уравнения, которое является регулярным при  $\zeta=1$  и удовлетворяет условию нормировки  $P_n(1)=1$ . Действительно, для  $\zeta=1$  из формулы (4.208a) следует

$$P_n(1) = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dt}{t^{n+1}} \cdot \frac{1}{t-1}. \quad (4.208б)$$

Подинтегральное выражение имеет теперь при  $t=1$  простой полюс. Путь интегрирования для интеграла (4.208a), описанный выше, можно деформировать в контур, окружающий этот полюс, теперь уже по часовой стрелке. Обход по этому контуру дает, по теореме Коши, значение  $-2\pi i$ , т. е. действительно требуемую величину  $+1$  для правой части равенства (4.208б).

Однако при  $\vartheta > 0$  подинтегральное выражение в формуле (4.208a) имеет, кроме указанной выше точки ветвления при  $t=0$ , еще две точки ветвления, лежащие на единичной окружности плоскости  $t$ , а именно точки  $t = e^{\pm i\vartheta}$

и  $t = e^{-i\vartheta}$ , так как в этих точках обращается в нуль подкоренное выражение квадратного корня, стоящего в знаменателе. Соединим эти точки ветвления вторым разрезом, который можно, например, провести вдоль единичной окружности. Путь интегрирования не должен пересекать и этого разреза. При  $\vartheta = \pi - \delta$ ,  $\delta \ll 1$  начальная и конечная точки нового разреза приближаются к отрицательной вещественной оси плоскости  $t$ , заключая между собой все теснее рассматриваемый петлеобразный путь интегрирования. Отсюда следует, что функция  $P_n(\zeta)$ , представленная интегралом (4.208а), имеет особенность при  $\delta \rightarrow 0$ , т. е. при  $\vartheta \rightarrow \pi$ ,  $\zeta \rightarrow -1$ . Чтобы исследовать характер этой особенности, положим в окрестности точки  $t = -1$  на верхнем берегу нашего разреза  $t = e^{i\pi}(1 + \tau)$ , а на нижнем берегу  $t = e^{-i\pi}(1 + \tau)$ ; тогда квадратный корень в формуле (4.208а) с точностью до членов высшего порядка относительно  $\tau$  и  $\delta$  принимает вид

$$\sqrt{1 - 2\zeta t + t^2} = \sqrt{\tau^2 + \delta^2}.$$

Отсюда следует, что при малом  $\delta$  для предельного значения интеграла при  $\vartheta \rightarrow \pi$  играет роль только окрестность точки  $\tau = 0$ . Следовательно, можно ограничиться интегрированием по малому отрезку между

$$\tau = +\varepsilon \text{ и } \tau = -\varepsilon,$$

взятому по верхнему и нижнему берегам разреза. Принимая во внимание направление пробега на обоих берегах, нужно положить

$$\frac{dt}{t^{n+1}} = \begin{cases} e^{+i\pi n} d\tau & \text{для нижнего берега,} \\ -e^{-i\pi n} d\tau & \text{для верхнего берега,} \end{cases}$$

в силу чего

$$P_n(\zeta) = \frac{e^{+i\pi n} - e^{-i\pi n}}{2\pi i} \int_{+\varepsilon}^{-\varepsilon} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 + \delta^2}} = \frac{\sin n\pi}{\pi} \int_{+\varepsilon}^{-\varepsilon} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 + \delta^2}}. \quad (4.209)$$

По известной формуле интегрального исчисления

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 + \delta^2}} = \ln(\tau + \sqrt{\tau^2 + \delta^2})$$

при неопределенных пределах интегрирования. Отсюда для определенного интеграла в формуле (4.209) получается выражение

$$\ln(-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2}) - \ln(+\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2}),$$

а при  $\delta \ll \varepsilon$  это выражение можно заменить приближенным значением

$$\ln \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\varepsilon} - \ln \left( 2\varepsilon + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\varepsilon} \right).$$

В пределе при  $\delta \rightarrow 0$  играет роль только член  $\ln \delta^2$ . Таким образом, из формулы (4.209) получаем

$$\lim_{\zeta \rightarrow -1} P_n(\zeta) = \frac{\sin n\pi}{\pi} \ln \delta^2 + \dots \quad (4.210)$$

Сумма невыписанных членов стремится при  $\delta \rightarrow 0$  к некоторому конечному постоянному пределу, не зависящему, очевидно, от  $\varepsilon$ .

**6. Шаровые функции второго рода.** Как было показано в начале п. 5, гипергеометрическое дифференциальное уравнение при нецелом  $n$  имеет два отличных друг от друга решения  $P_n$ . Только при целом  $n$  оба эти решения совпадают. Однако и в этом случае,ряду с решением, конечным при  $\zeta = \pm 1$ , должно существовать второе решение, имеющее особенности в точках  $\zeta = \pm 1$ . Его называют *шаровой функцией второго рода* и обозначают через  $Q_n$ .

Характер особенности может быть определен, исходя из общих теорем. Как мы видели, в случае шаровой функции ( $\gamma = 1$ ) квадратное уравнение (4.199а) для показателя  $\lambda$  имеет двойной корень  $\lambda = 0$ , откуда следует, если применить некоторый предельный переход, что существует второе решение, имеющее логарифмическую особенность при  $\zeta = \pm 1$ . Получающиеся при этом шаровые функции второго рода  $Q_n$  можно исследовать более подробно, если, подобно функциям первого рода, определить их

с помощью производящей функции (Ф. Нейман)

$$\frac{1}{\eta - \zeta} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( n + \frac{1}{2} \right) Q_n(\eta) P_n(\zeta)^{-1}. \quad (4.211)$$

Формула (4.211) определяет функции  $Q_n(\eta)$  как коэффициенты разложения функции  $\frac{1}{\eta - \zeta}$  по полиномам  $P_n(\zeta)$ ; это определение равносильно следующему *интегральному представлению* (Ф. Нейман):

$$Q_n(\eta) = \text{главн. знач.} \int_{-1}^{+1} P_n(\zeta) \frac{d\zeta}{\eta - \zeta}. \quad (4.212)$$

Формула (4.212) имеет следующий смысл: чтобы обойти особую точку  $\zeta = \eta$ , деформируют прямолинейный путь интегрирования, заменяя его двумя деформированными в окрестности особой точки путями, из которых один путь обходит особую точку слева, а другой — справа; проинтегрировав по каждому из этих путей, образуют среднее арифметическое обоих интегралов. Это среднее арифметическое стремится к конечному пределу, который называется главным значением особенного интеграла. В дальнейшем символ «главн. знач.» будет опущен. Однако такой обход особой точки становится невозможным, когда особая точка является граничной точкой пути интегрирования, т. е. при  $\eta = \pm 1$ .

Этим обстоятельством обусловлено наличие логарифмических особых точек функции  $Q_n(\eta)$  при  $\eta = \pm 1$ .

В силу симметрии уравнения (4.211), определяющего функции  $Q_n(\eta)$  относительно  $\eta$ ,  $\zeta$  и  $Q$ ,  $P$ , можно ожидать, что функция  $Q_n(\eta)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению (4.202). Чтобы убедиться в этом, запишем уравнение (4.211) сокращенно в виде

$$L_{\zeta}(P) = 0, \quad L_{\zeta} = \frac{d}{d\zeta} (1 - \zeta^2) \frac{d}{d\zeta} + n(n+1)$$

и обозначим через  $L_{\eta}(Q)$  аналогичное выражение, образо-

<sup>1)</sup> Обычно употребляется удвоенная величина, т. е. в формуле (4.211) должно быть записано  $2n + 1$  вместо  $n + \frac{1}{2}$ . В соответствии с этим наши  $Q_n(\eta)$  отличаются от обычно употребляемых на множитель 2.

ванное для  $\eta$  и  $Q$ ; далее убеждаемся в справедливости тождества

$$L_{\eta}\left(\frac{1}{\eta-\xi}\right)=L_{\zeta}\left(\frac{1}{\eta-\xi}\right).$$

Из формулы (4.12) следует поэтому

$$L_{\eta}(Q_n)=\int_{-1}^{+1} P_n(\zeta) L_{\zeta}\left(\frac{1}{\eta-\xi}\right) d\zeta. \quad (4.213)$$

Производя теперь двухкратное интегрирование по частям, при котором обращаются в нуль свободные от интегриации члены, соответствующие крайним значениям  $\zeta = \pm 1$ , вследствие наличия множителя  $1-\zeta^2$ , входящего в оператор  $L_{\zeta}$ , получаем

$$L_{\eta}[Q_n(\eta)]=\int_{-1}^{+1} L_{\zeta}[P_n(\zeta)] \frac{d\zeta}{\eta-\xi}=0, \quad (4.214)$$

что и требовалось доказать.

С помощью формулы (4.212) не представляет труда подсчитать функцию  $Q_n(\eta)$ , исходя из известного нам выражения для полинома  $P_n(\zeta)$ . Таким путем при  $|\eta| < 1$  находим:

полиному  $P_0=1$  соответствует  $Q_0=\ln \frac{1+\eta}{1-\eta}$ ;

полиному  $P_1=\zeta$  соответствует  $Q_1=-2+\eta \ln \frac{1+\eta}{1-\eta}$ .

Общее выражение для функций  $Q_n(\eta)$  имеет следующий вид:

$$Q_n(\eta)=\Pi(\eta)+P_n(\eta) \ln \frac{1+\eta}{1-\eta}, \quad (4.215)$$

где  $\Pi(\eta)$  — полином степени  $n-1$ , равный сумме всех полиномов Лежандра  $P_{n-2k-1}(\eta)$  с неотрицательным индексом.

Наконец, продифференцировав  $m$  раз по  $\eta$  интеграл (4.212) и умножив на множитель  $(1-\eta^2)^{m/2}$ , аналогичный множителю  $\sin^m \vartheta$ , получаем обобщение формулы (4.212)

$$Q_n^m(\eta)=(-1)^m m! (1-\eta^2)^{m/2} \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(\zeta)}{(\eta-\zeta)^{m+1}} d\zeta. \quad (4.216)$$

Возвращаясь к фиг. 8 и введенным там обозначениям, мы продолжаем исследование задач, затронутых в § 6.

## Приложение I

## Отражение от круглого цилиндрического или сферического зеркала

а) *Круглое цилиндрическое металлическое зеркало.* Пусть падающая волна [электрический вектор перпендикулярен к плоскости чертежа, ср. формулу (4.836)] представляется в виде

$$w = e^{ikr \cos \varphi} \approx I_0(kr) + 2 \sum_{n=1}^N i^n I_n(kr) \cos n\varphi. \quad (4.217)$$

Это представление справедливо для всей плоскости  $r, \varphi$  и при  $r=a$  определяет введенную в уравнении (1.70) функцию  $-f(\varphi)$ . Стоящая в правой части сумма из  $N+1$  члена дает наилучшее в смысле метода наименьших квадратов приближение к  $w$ ; совпадение коэффициентов этой суммы с соответствующими коэффициентами полного ряда (4.836) следует из свойства «окончательной определенности» коэффициентов ряда Фурье. Отраженное от зеркала (диффрактированное, рассеянное) излучение представим в виде суммы  $N+1$  частных решений дифференциального уравнения  $\Delta u + k^2 u = 0$ , а именно: для  $r < a$  это решение должно иметь следующий вид:

$$u = \sum_0^N C_n \frac{I_n(kr)}{I_n(ka)} \cos n\varphi. \quad (4.218)$$

В самом деле, так как при  $r=0$  решение должно быть непрерывно, то здесь можно выражать зависимость от  $r$  только с помощью функций  $I_n$ ; члены, содержащие синусы, выпадают в силу симметричности падающей волны относительно  $\varphi$ . Знаменатели  $I_n(ka)$  введены из соображений удобства и влияют только на значение подлежащих определению постоянных  $C_n$ . Аналогичным образом вводятся знаменатели в следующей ниже формуле (4.219).

Рассеянную за внешней стороной зеркала ( $r > a$ ) часть излучения мы представляем в виде следующей суммы из  $N+1$  частных решений волнового уравнения

$$v = \sum_0^N D_n \frac{H_n^1(kr)}{H_n^1(ka)} \cos n\varphi. \quad (4.219)$$

Зависимость от времени всего процесса следует при этом считать заданной с помощью функции  $\exp(-i\omega t)$ , в силу чего рассматриваются только  $H^1$ , причем  $H^2$  соответствовали бы приходящим волнам. Тогда, как было показано уже в § 6, из граничных условий (1.74)–(1.77) следует, что  $C_n = D_n$ , и по методу наименьших квадратов получается система линейных уравнений (1.78). Входящие туда постоянные  $\gamma_n$ , в силу уравнений (1.73), (1.77а) и написанных выше формул (4.218), (4.219), выражаются следующим образом:

$$\gamma_n = ka \left[ \frac{I'_n(ka)}{I_n(ka)} - \frac{H'^1_n(ka)}{H^1_n(ka)} \right]. \quad (4.220)$$

Пользуясь известной теоремой из теории линейных дифференциальных уравнений, можно упростить выражение (4.220) и записать его в таком виде (подробности см. в задаче IV.8):

$$\gamma_n = \frac{-2i/\pi}{I_n(ka) H^1_n(ka)}. \quad (4.221)$$

Введем обозначение

$$a_{nm} = \int_a^\pi \cos n\varphi \cos m\varphi d\varphi \quad (4.222)$$

и после простого преобразования получим

$$\int_0^a \cos n\varphi \cos m\varphi d\varphi = \frac{\pi}{(2)} \delta_{nm} - a_{nm}. \quad (4.223)$$

Здесь и в последующем значок (2) означает число 2 для  $n > 0$  и число 1 для  $n = 0$ . Тогда левые части уравнений (1.78) записываются в виде

$$\frac{\pi}{(2)} C_m + \sum_{n=0}^N a_{nm} (\gamma_n \gamma_m - 1) C_n, \quad (4.224)$$

а в правых частях этой системы уравнений следует положить  $f(\varphi) = -w$ , причем  $w$  следует брать из формулы (4.217), полагая  $r = a$ ,

$$- \pi i^m I_m(ka) + \sum_{n=0}^N a_{nm} (2) i^n I_n(ka). \quad (4.224a)$$



Система уравнений (1,78) переходит тогда в систему уравнений

$$C_m + (2) i^m I_m(ka) - \\ - \frac{(2)}{\pi} \sum_{n=0}^N a_{nm} [C_n + (2) i^n I_n(ka) - \gamma_n \gamma_m C_n] = 0, \quad (4.225)$$

причем  $m = 0, 1, \dots, N$ .

Для проверки вышесказанного мы полагаем сначала  $\alpha = \pi$ , рассматриваем, следовательно, замкнутую окружность (в пространстве соответственно берется замкнутая цилиндрическая идеально проводящая поверхность). Тогда  $a_{nm} = 0$  в силу уравнения (4.222), а из уравнений (4.225) получаем

$$C_m = -(2) i^m I_m(ka). \quad (4.226)$$

Этот результат является в некотором смысле тривиальным. Действительно, подставляя значение (4.226) для  $C_n$  в формулу (4.219) вместо  $D_n$ , получаем для  $r > a$  точное решение  $v$  соответствующей задачи рассеяния:

$$v = - \sum_{n=0}^N (2) i^n I_n(ka) \frac{H_n^1(kr)}{H_n^1(ka)} \cos n \varphi, \quad (4.227)$$

т. е. уходящую волну, которая на цилиндрической поверхности  $r = a$  полностью уничтожает падающую волну  $w$ , задаваемую равенством (4.217), и поэтому при  $N \rightarrow \infty$  дает, действительно, точное решение задачи рассеяния. Для  $u$  получаем точно также

$$u = - \sum_{n=0}^N (2) i^n I_n(kr) \cos \varphi = -w. \quad (4.228)$$

Этот результат является также тривиальным, так как внутри замкнутой окружности  $r = a$ , естественно, должно быть  $u + w = 0$ .

Исследуем, может ли формула (4.226) и в случае  $\alpha < \pi$  привести к достаточно хорошему приближению. Вводя поправочный член  $\beta_n$ , положим

$$C_n = -(2) i^n I_n(ka) + \beta_n \quad (4.229)$$

и получим из уравнений (4.225)

$$\beta_m - \frac{(2)}{\pi} \sum_{n=0}^N a_{nm} [\beta_n (1 - \gamma_n \gamma_m) + \gamma_n \gamma_m (2) i^n I_n(ka)] = 0. \quad (4.230)$$

Подобно системе (1.78), система уравнений (4.230) состоит из  $N + 1$  (в пределе — из бесконечно многих) линейных уравнений, практически, впрочем, неразрешимой. Если, однако, мы предположим, что  $\pi - \alpha$  мало, т. е. цилиндрическая боковая поверхность имеет только узкую щель, то  $a_{nm}$  будет малой величиной, а произведение  $\beta_n a_{nm}$  — величиной второго порядка малости. Если мы пренебрежем ею, то из уравнений (4.230) получим соотношения

$$\frac{\beta_m}{\gamma_m} = - \frac{(2)}{\pi} \sum_{n=0}^N (2) i^n a_{nm} \gamma_n I_n(ka), \quad (4.231)$$

которые дают явное выражение для  $\beta_m$ , что с помощью формул (4.229) приводит к явному выражению для  $C_m$ .

Требуемую здесь степень малости ширины щели мы оцениваем с помощью следующего физического критерия: ширина щели должна быть мала сравнительно с длиной падающей волны, только в этом случае поле во внутреннем пространстве непрерывно примыкает к полю замкнутого цилиндра, равному нулю. Следовательно, должно быть

$$\frac{(\pi - \alpha) a}{\lambda} \ll 1. \quad (4.232)$$

Это условие приблизительно выполняется только для волн Герца. В собственно оптическом случае приближение теряет свою силу, поэтому-то на стр. 47 мы говорили о «квазиоптическом случае». В известном опыте Герца с полным зеркалом, когда  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\lambda = 200$  см,  $a = 50$  см, условие (4.232) примерно выполнялось, так что здесь наш приближенный способ до некоторой степени оправдывался.

б) *Шаровой сегмент как акустический рефлектор.* Чтобы избежать осложнений векторного характера, мы в пространственном случае будем говорить не о направленном излучении, а о скалярных акустических волнах. Под  $w$  (соответственно  $u, v$ ) мы будем понимать тогда

потенциалы скоростей первичного (соответственно вторичного, отраженного) излучения внутри ( $r < a$ ) или вне ( $r > a$ ) сферы. Шаровой сегмент задается с помощью условий  $r = a$ ,  $0 < \vartheta < \alpha$ . В силу формулы (4.185) представим  $w$  в виде

$$w = \sum_{n=0}^N (2n+1) i^n \psi_n(kr) P_n(\cos \vartheta). \quad (4.233)$$

Согласно методу наименьших квадратов сумма в правой части формулы (4.233) дает наилучшую аппроксимацию плоской волны  $\exp(ikr \cos \vartheta)$  с помощью конечного числа шаровых функций. Далее полагаем

$$u = \sum C_n \frac{\psi_n(kr)}{\psi'_n(ka)} P_n(\cos \vartheta), \quad r < a, \quad (4.234)$$

$$v = \sum D_n \frac{\zeta_n(kr)}{\zeta'_n(ka)} P_n(\cos \vartheta), \quad r > a, \quad (4.235)$$

где  $C_n$  и  $D_n$  — произвольные постоянные, подлежащие определению. Знаменатели введены здесь из соображений удобства [см. замечание к формуле (4.218)].  $\zeta_n$  есть определенная с помощью формулы (4.96) полуцелая цилиндрическая функция, соответствующая функции Ханкеля  $H_n^1$ . На шаровом сегменте, который мы предполагаем твердым, имеют место условия

$$\frac{\partial}{\partial n}(u + w) = \frac{\partial}{\partial n}(v + w) = 0 \quad \text{при } 0 \leq \vartheta < \alpha \text{ и } r = a;$$

кроме того, из соображений непрерывности должны выполняться условия

$$u = v, \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial r} \quad \text{при } \alpha < \vartheta \leq \pi \text{ и } r = a.$$

Эти условия приводят снова к соотношениям  $D_n = C_n$  и вместе с тем к требованиям, аналогичным условиям (1.76) и (1.77):

$$\begin{aligned} \sum C_n P_n(\cos \vartheta) &= f(\vartheta), & 0 < \vartheta < \alpha, \\ \sum D_n \gamma_n P_n(\cos \vartheta) &= 0, & \alpha < \vartheta < \pi. \end{aligned} \quad (4.236)$$

Здесь  $f(\vartheta)$  означает величину  $-\frac{\partial w}{\partial(kr)}$  для  $r = a$ ,

$$f(\vartheta) = - \left[ \frac{\partial w}{\partial(kr)} \right]_{r=a}, \quad w = e^{ikr \cos \vartheta}. \quad (4.236a).$$

Кроме того, для постоянных  $\gamma_n$  получаем аналогично формуле (4.221) следующее выражение:

$$\gamma_n = \frac{\psi_n(ka)}{\psi_n'(ka)} - \frac{\zeta_n(ka)}{\zeta_n'(ka)}. \quad (4.236б)$$

С помощью сокращенных обозначений

$$a_{nm} = \int_a^\pi P_n P_m \sin \vartheta \, d\vartheta. \quad (4.237)$$

Соответствующие интегралы, взятые от нуля до  $\alpha$ , запишутся в следующем виде:

$$\int_0^\alpha P_n P_m \sin \vartheta \, d\vartheta = \frac{\delta_{nm}}{m + \frac{1}{2}} - a_{nm}. \quad (4.237а)$$

Таким образом, в силу формул (4.236а) и (4.237а) имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^\alpha f(\vartheta) P_m(\cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta = \\ &= - \sum_{n=0}^N (2n+1) i^n \psi_n'(ka) \int_0^\alpha P_n P_m \sin \vartheta \, d\vartheta = \\ &= -2i^m \psi_m'(ka) + \sum_{n=0}^N a_{nm} (2n+1) i^n \psi_n'(ka). \end{aligned} \quad (4.237б)$$

Метод наименьших квадратов дает теперь по аналогии с системой (4.78) следующую систему уравнений для подсчета  $C_n$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N C_n \left( \int_0^\alpha P_n P_m \sin \vartheta \, d\vartheta + \gamma_n \gamma_m \int_a^\pi P_n P_m \sin \vartheta \, d\vartheta \right) = \\ = \int_0^\alpha f(\vartheta) P_m \sin \vartheta \, d\vartheta, \end{aligned} \quad (4.238)$$

где  $m$  может принимать значения  $0, 1, \dots, N$ ; в силу равенства (4.237а) и (4.237б) система уравнений (4.238)

может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{C_m}{m + \frac{1}{2}} - \sum_{n=0}^N a_{nm} C_n (1 - \gamma_n \gamma_m) = \\ = -2i^m \psi'_m(ka) + \sum_{n=0}^N a_{nm} (2n+1) i^n \psi'_n(ka). \end{aligned} \quad (4.238a)$$

В свою очередь, система (4.238a) может быть преобразована к форме, аналогичной системе уравнений (4.225),

$$\begin{aligned} -\frac{1}{m + \frac{1}{2}} [C_m + (2m+1) i^m \psi'_m(ka)] - \\ - \sum_{n=0}^N a_{nm} [C_n + (2n+1) i^n \psi'_n(ka) - \gamma_n \gamma_m C_n] = 0. \end{aligned} \quad (4.239)$$

Рассмотрим снова предельный случай  $\alpha = \pi$  замкнутой сферы, когда  $a_{nm} = 0$ . Тогда уравнения (4.239) дают

$$C_m = -(2m+1) i^m \psi'_m(ka). \quad (4.240)$$

Эти значения  $C_m$ , будучи подставлены в формулу (4.235), дают точное решение в рассматриваемой акустической задачи отражения падающей плоской волны от полной сферы для  $r > a$ . Внутри сферической оболочки для  $r < a$ , подставляя  $C_m$  в формулу (4.234), получаем поле  $u$ , которое, как это и должно быть, равно и противоположно направлению полю  $w$  падающей волны.

К предельному случаю примыкает случай сферы с малым круглым отверстием вблизи  $\alpha = \pi$ . Полагая

$$C_m = -(2m+1) i^m \psi'_m(ka) + \beta_m \quad (4.241)$$

и пренебрегая членами второго порядка малости  $a_{nm} \beta_n$ , получаем из формулы (4.239)

$$-\frac{1}{m + \frac{1}{2}} \frac{\beta_m}{\gamma_m} = \sum_{n=0}^N (2n+1) i^n a_{nm} \gamma_n \psi'_n(ka), \quad (4.242)$$

т. е. явное выражение для поправочного члена  $\beta_m$  и тем самым для коэффициентов  $C_m$ . Сравним этот результат

с аналогичной формулой (4.231) для цилиндрического зеркала. Диаметр круглого отверстия сферического зеркала должен быть мал сравнительно с длиной волны падающего излучения, подобно тому как в случае цилиндрического зеркала мы требовали достаточной узости щели. Следовательно, и в этом случае мы могли бы исследовать только «квазиакустическую» задачу, задачу инфразвука, весьма далекую от более интересной задачи ультразвука.

В этом несколько схематическом изложении рассмотренных задач главной целью было только показать, что метод наименьших квадратов может при некоторых обстоятельствах давать решение и тогда, когда требование «окончательной определенности» коэффициентов  $C_m$  не выполняется.

## Приложение II

### Дополнение к задаче Римана о звуковых волнах (§ 11)

Это приложение должно восполнить пробел, имеющийся в § 11; именно, докажем здесь, что выражение (2.53)

$$v = \left( \frac{\xi + \eta}{x + y} \right)^a F(a + 1, -a, 1, z), \quad z = -\frac{(x - \xi)(y - \eta)}{(x + y)(\xi + \eta)}, \quad (4.243)$$

в котором  $F$  означает гипергеометрический ряд, удовлетворяет получающемуся из уравнений (2.45) и (2.51) дифференциальному уравнению

$$M(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{a}{x + y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{2av}{(x + y)^2} = 0. \quad (4.244)$$

Дифференциальное уравнение (4.244) было выведено Риманом из общей теории преобразований гипергеометрических функций. Не пользуясь этой теорией, проведем доказательство элементарным путем, просто подставляя выражение (4.243) в уравнение (4.244) и рассматривая  $F(z)$  как неизвестную функцию от  $z$ . В результате подстановки получится дифференциальное уравнение для функции  $F(z)$ , которое, как окажется, совпадает с дифференциальным уравнением (4.198) при соответствующих значениях параметров  $\alpha, \beta, \gamma$ . Этим будет доказано, что существует частное решение дифференциального уравнения (4.244), выражающееся по формуле (4.243) через гипергеометрическую

функцию, содержащую в качестве параметров  $\alpha, \beta, \gamma$  значения

$$\alpha = a + 1, \quad \beta = -a, \quad \gamma = 1.$$

Сначала вычисляем, согласно формуле (4.243), частные производные функции  $v$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \left( \frac{\xi + \eta}{x + y} \right)^a \left[ \frac{-a}{x + y} F(z) + \frac{\partial z}{\partial x} F'(z) \right], \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \left( \frac{\xi + \eta}{x + y} \right)^a \left[ \frac{-a}{x + y} F(z) + \frac{\partial z}{\partial y} F'(z) \right]. \end{aligned}$$

Пользуясь этими выражениями, вычисляем далее сумму двух последних членов уравнения (4.244). Получаем

$$\frac{a}{x + y} \left( \frac{\xi + \eta}{x + y} \right)^a \left[ -\frac{2a + 2}{x + y} F(z) + \left( \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right) F'(z) \right]. \quad (4.245)$$

Первый же член  $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$  уравнения (4.244) принимает после подстановки следующий вид:

$$\begin{aligned} &\frac{a(a+1)(\xi + \eta)^a}{(x + y)^{a+2}} F(z) - \frac{a(\xi + \eta)^a}{(x + y)^{a+1}} \left( \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right) F'(z) + \\ &+ \left( \frac{\xi + \eta}{x + y} \right)^a \left[ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} F'(z) + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} F''(z) \right]. \quad (4.246) \end{aligned}$$

Первый член выражения (4.246) можно объединить с первым членом выражения (4.245), а вторые члены этих выражений взаимно уничтожаются.

После сокращения на общий множитель уравнение в частных производных (4.244) переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} F''(z) + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} F'(z) - \frac{a(a+1)}{(x + y)^2} F = 0. \quad (4.247)$$

Остающиеся еще множители, содержащие частные производные функции  $z$ , могут быть выражены через  $z$  следующим образом:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{(x + y)^2} (z^2 - z), \quad (4.248)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2z - 1}{(x + y)^2}. \quad (4.249)$$

В силу уравнений (4.248) и (4.249) и после еще одного сокращения на общий множитель уравнение (4.247) переходит в уравнение

$$z(1-z)F'' + (1-2z)F' + a(a+1)F = 0,$$

которое, действительно, совпадает с уравнением (4.198), если в этом уравнении положить

$$\alpha = a + 1, \quad \beta = -a, \quad \gamma = 1,$$

что и учтено в формуле (4.243). Задача § 11 тем самым решена.

---



## Глава V

### СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

В этой главе дается далеко идущее обобщение методов, развитых Фурье, и делается доступным для математического исследования весьма широкий круг граничных задач. Плодотворность развиваемых в этой главе методов ярче всего проявилась, когда Шредингер в 1926 г. отождествил квантовые числа с собственными значениями волнового уравнения и тем самым дал в распоряжение атомной физики весь арсенал новейшего анализа. Следует уже здесь отметить, что хотя метод *интегральных уравнений* имеет общепризнанное значение для строгих математических обоснований, в частности для доказательства существования собственных функций и собственных значений, однако и старые методы, связанные с уравнениями в *частных производных*, естественно приводят к тому же кругу понятий. Это можно показать на одном примере, который был известен еще задолго до возникновения теории интегральных уравнений.

#### § 25. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ МЕМБРАНЫ

Предметом исследования в этом параграфе является натянутая на рамку оболочка, которая обладает способностью сопротивляться изменениям формы, обусловленной наличием приложенного на ее границе натяжения (см. стр. 52). Мы считаем, что это натяжение лежит в плоскости мембраны и направлено перпендикулярно к ее границе, подобно тому как это имело место для поверхностного натяжения в теории капилляров [см. т. II, § 17, в частности равенства (7) и (8)]. Отсюда следует, что при деформации мембраны возникает давление  $N$ , направленное по нормали к поверхности и равное натяжению  $T$ , умноженному на среднюю кривизну мембраны, т. е. при

малых деформациях и равное  $T \Delta u$ . Уравнение колебаний (2.4) для чисто гармонических колебаний частоты  $\omega$  дает

$$-\sigma \omega^2 u = T \Delta u,$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность. Последнее уравнение мы записываем в обычном виде

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad k^2 = \frac{\sigma \omega^2}{T}. \quad (5.1)$$

Если мы будем считать  $k^2$  не постоянной величиной, как это предполагается в дальнейшем, а произвольной функцией  $F(x, y)$ , то в соответствии с равенством (2.36) уравнение (5.1) можно рассматривать как наиболее общее линейное *самосопряженное* дифференциальное уравнение второго порядка эллиптического типа для двух переменных  $x, y$ , приведенное к нормальному виду.

Решения уравнения (5.1), удовлетворяющие граничному условию  $u = 0$ , называются *собственными функциями*, соответствующие значения  $k$  — *собственными значениями* задачи. При отрицательном  $k^2$ , соответственно  $F(x, y)$ , не имеется никаких собственных значений, как было уже отмечено в конце указания к задаче II. 2. Покажем сначала на простых примерах, что в случае положительного  $k^2$  имеются собственные значения и притом в бесконечном числе.

а) *Прямоугольник*  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ . Граничные условия будут выполнены, если положить

$$u = u_{nm} = \sin n\pi \frac{x}{a} \sin m\pi \frac{y}{b} \quad \left\{ \begin{array}{l} n = 1, 2, \dots, \infty, \\ m = 1, 2, \dots, \infty. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Из дифференциального уравнения (5.1) следует

$$k = k_{nm} = \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}. \quad (5.2a)$$

Здесь и в дальнейшем мы рассматриваем решения с точностью до постоянного амплитудного множителя. Если предположить, что  $a$  и  $b$  *несоизмеримы*, то все  $k_{nm}$  будут отличны друг от друга и каждому  $k$  соответствует только

одна собственная функция. Число собственных значений бесконечно.

б) *Круг, круговое кольцо, круговой сектор.* В случае полного круга  $0 \leq r \leq a$  подстановка

$$u = I_m(kr) e^{\pm im\varphi}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \infty \quad (5.3)$$

приводит к цели, если только  $k$  удовлетворяет условию

$$I_m(ka) = 0. \quad (5.3a)$$

Так как это уравнение имеет бесконечно много корней (см. фиг 21), то и в этом случае имеется *бесконечно много собственных значений*  $k = k_{nm}$ . Они все отличны друг от друга, но для  $m > 0$  каждому собственному значению соответствуют две различные собственные функции вследствие двойного знака в показателе выражения (5.3) или, если перейти к вещественной записи, вследствие того, что зависимость от  $\varphi$  может быть выражена либо с помощью множителя  $\cos m\varphi$ , либо с помощью  $\sin m\varphi$ . В этом случае говорят, что задача для  $m > 0$  является *вырожденной*, а в нашей задаче однократно *вырожденной*. Основной тон круглой мембраны является невырожденным и, согласно (4.616), равен  $k_{10} = 2,40/a$ .

В случае кругового кольца  $b \leq r \leq a$  полагаем

$$u = [I_m(kr) + cN_m(kr)] e^{\pm im\varphi}. \quad (5.4)$$

Чтобы удовлетворить обоим граничным условиям  $u = 0$  при  $r = a$  и  $r = b$ , необходимо использовать уже оба частных решения  $I$  и  $N$  дифференциального уравнения Бесселя (вместо них можно было бы взять, разумеется,  $H^1$  и  $H^2$ ). Это дает

$$\begin{aligned} I_m(ka) + cN_m(ka) &= 0, \\ I_m(kb) + cN_m(kb) &= 0. \end{aligned} \quad (5.4a)$$

Здесь также имеется бесконечно много отличных друг от друга значений  $k = k_{nm}$  и соответствующих  $c_{nm}$ . Эта задача для  $m > 0$  также является однократно вырожденной, так как в силу (5.4) собственному значению  $k_{nm}$  соответствуют две различные собственные функции  $u_{nm}$ .

Для случая кругового сектора  $0 \leq r \leq a$ ,  $0 \leq \varphi \leq \alpha$  удобнее всего положить

$$u = I_\mu(kr) \sin \mu \varphi, \quad \mu = m \frac{\pi}{\alpha}, \quad (5.5)$$

где  $k$  находится из условия  $I_\mu(ka) = 0$ , дающего бесконечно много собственных значений  $k = k_{nm}$ . Эта задача является невырожденной.

Областью наиболее общего вида, которую можно исследовать таким образом, является сектор кругового кольца  $b \leq r \leq a$ ,  $0 \leq \varphi \leq \alpha$ , ограниченный дугами двух окружностей и двумя радиусами.

в) *Эллипс и криволинейный четырехугольник, ограниченный дугами эллипсов и гипербол.* Волновое уравнение (5.1) при переходе к эллиптическим координатам  $\xi, \eta$  (см. т. II, задача IV.3) допускает разделение переменных и приводит к так называемому уравнению Маттье относительно каждой из координат. Координатные кривые  $\xi = \text{const}$  образуют семейство эллипсов, а кривые  $\eta = \text{const}$  — семейство гипербол. В случае полного эллипса к граничному условию  $u = 0$  вдоль эллипса присоединяются условия непрерывности при  $\xi = 0$  (фокальная линия) и периодичности при  $\eta = \pm \pi$ . Определение собственных значений  $k$  приводит к трансцендентным уравнениям довольно сложного вида, на которых мы не будем останавливаться. Областью наиболее общего вида, которую можно исследовать таким способом, является криволинейный четырехугольник, ограниченный дугами двух эллипсов и двух конфокальных им гипербол.

Результаты, полученные здесь нами на простейших примерах, будучи сформулированы в самом общем виде, составляют *фундаментальную теорему* теории колеблющихся систем с бесконечным числом степеней свободы и общей теории собственных функций. *Произвольной области и граничному условию  $u = 0$ , заданному на границе этой области (или же одному из других граничных условий, перечисленных на стр. 92, 93), соответствует бесконечный ряд собственных значений  $k$ , каждому из которых принадлежит отличное от нуля и непрерывное внутри*

области решение соответствующего дифференциального уравнения  $\Delta u + k^2 u = 0$ <sup>1)</sup>.

Строгому математическому доказательству этой теоремы посвящены многие исследования, начиная с большой работы Пуанкаре<sup>2)</sup> и завершившиеся созданием теории интегральных уравнений Фредгольма-Гильберта. Мы здесь ограничимся тем, что покажем связь сформулированной выше теоремы с соответствующей теоремой для механической системы с конечным числом степеней свободы: система с  $f$  степенями свободы, находящаяся в устойчивом равновесии, способна совершать в окрестности этого положения в точности  $f$  линейно независимых малых (точнее сказать, бесконечно малых) синусоидальных колебаний.

Пользуясь обозначениями § 1 и § 34, мы записываем кинетическую энергию системы в окрестности ее положения равновесия  $q_1 = q_2 = \dots = q_f = 0$  в виде

$$T = \frac{1}{2} \sum \sum a_{nm} \dot{q}_n \dot{q}_m.$$

Здесь коэффициенты  $a_{nm}$  вследствие малости отклонений  $q$  можно считать постоянными. Аналогично, потенциальная энергия  $V$  является квадратичной формой от переменных  $q_n$  с постоянными коэффициентами, так как линейные члены разложения  $V$  по степеням  $q_n$  содержат множители  $\frac{\partial V}{\partial q_n}$ , которые в положении равновесия обращаются в нуль. Следовательно,

$$V - V_0 = \frac{1}{2} \sum \sum b_{nm} q_n q_m.$$

Всегда возможно с помощью линейного преобразования координат одновременно привести обе предыдущие квадра-

<sup>1)</sup> Та же теорема справедлива для самосопряженного дифференциального уравнения

$$\Delta u + \lambda F(x, y) u = 0,$$

где  $F > 0$ , а  $\lambda$  — собственное значение.

<sup>2)</sup> Poincaré, Rendic. Circ. Mathem. di Palermo, 1894.

тичные формы к каноническому виду (приведение к главным осям поверхностей второго порядка):

$$T = \frac{1}{2} \sum a_n \dot{x}_n^2, \quad V - V_0 = \frac{1}{2} \sum b_n x_n^2.$$

Введенные здесь координаты  $x_n$  называются *нормальными координатами* системы. Из уравнений Лагранжа следует

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_n} = - \frac{\partial V}{\partial x_n}, \quad \text{следовательно } a_n \ddot{x}_n = -b_n x_n.$$

Квадратичные формы  $T$  и  $V$  являются положительно определенными квадратичными формами (последняя — в случае устойчивого равновесия); следовательно  $a_n$  и  $b_n$  положительны. Таким образом, для каждой нормальной координаты мы получаем устойчивое колебание

$$x_n = c_n e^{i\omega_n t}, \quad \omega_n^2 = \frac{b_n}{a_n} > 0.$$

Число этих колебаний равно числу степеней свободы. При переходе к пределу  $f \rightarrow \infty$  каждому  $\omega_n$  соответствует собственное значение  $k_n$ , а совокупности величин  $q_1, \dots, q_f$ , относящихся к одному и тому же  $x_n$ , соответствуют собственные функции  $u_n$ . Числа  $k_n$ , так же как и  $\omega_n$ , являются вещественными.

Заметим дополнительно, что эта вещественность  $k$  может быть доказана также и без предельного перехода, непосредственно из дифференциального уравнения. Предположим, что  $k$  было бы комплексным, тогда соответствующее  $u$  также было бы комплексным и сопряженная функция  $u^*$  удовлетворяла бы сопряженному дифференциальному уравнению  $\Delta u^* + k^* u^* = 0$  и граничному условию  $u^* = 0$ . Из формулы Грина

$$\int (u \Delta u^* - u^* \Delta u) d\tau = \int \left( u \frac{\partial u^*}{\partial n} - u^* \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds, \quad (5.6)$$

и из того, что правая часть, в силу граничных условий, обращается в нуль, следует

$$(k^2 - k^{*2}) \int u u^* d\tau = 0. \quad (5.6a)$$

Но  $u_i^*$  всюду  $\geq 0$ , и интеграл не может обращаться в нуль, если только  $u \not\equiv 0$ . Таким образом,  $k = k^*$ , т. е.  $k$  должно быть вещественным. Физический смысл вещественности  $k$  заключается в том, что колебательный процесс в силу сделанных предположений протекает без поглощения энергии.

До сих пор мы предполагали, что наша задача является невырожденной. Однако для теории возмущений в волновой механике представляют собой интерес как раз вырожденные случаи. Мы возвращаемся к нашему случаю прямоугольника и отказываемся теперь от нашего предположения о несоизмеримости сторон. Это имеет место, например, в простейшем случае квадрата  $a = b$ . Тогда в силу формулы (5.2а) имеем

$$k_{nm} = \frac{\pi}{a} \sqrt{n^2 + m^2}, \text{ т. е. } k_{nm} = k_{mn}.$$

Из формулы (5.2) следует

$$u_{nm} = \sin n\pi \frac{x}{a} \sin m\pi \frac{y}{a},$$

в то время как

$$u_{mn} = \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{a},$$

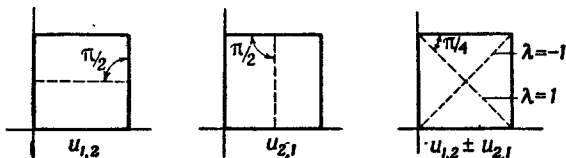
т. е.  $u_{nm} \neq u_{mn}$ , исключая только случай  $n = m$ . При  $m \neq n$  все колебания являются по крайней мере *однократно вырожденными*, так как в этом случае одному и тому же  $k_{nm}$  соответствуют два различных типа колебаний  $u_{nm}$  и  $u_{mn}$ . Только основное колебание  $k_{11}$  и его обертоны  $k_{nn} = nk_{11}$  (гармонические в этом частном случае) являются *невырожденными*.

Рассмотрим несколько подробнее случаи  $n = 1, m = 2$  и  $n = 2, m = 1$ , когда  $k_{12} = k_{21} = \sqrt{5} \frac{\pi}{a}$ . Соответствующие собственные функции характеризуются картиной их узловых линий, представленной на фиг. 23 и 24. Как известно, в акустике узловыми линиями называются линии  $u = 0$ , по которым собирается насыпанный на пластины порошок в опыте с пылевыми фигурами. Одновременно с  $u_{12}$  и  $u_{21}$ .

собственному значению  $k_{12} = k_{21}$  принадлежит также собственная функция

$$u = u_{12} + \lambda u_{21}, \quad (5.7)$$

где  $\lambda$  — произвольная постоянная. При непрерывном изменении  $\lambda$  непрерывно изменяется также форма узловых



Фиг. 23. Однократное вырождение в случае квадратной мембраны при  $n=1$ ,  $m=2$  или  $m=1$ ,  $n=2$ . При  $\lambda = \pm 1$  диагонали являются узловыми линиями.

линий, принадлежащих семейству функций (5.7). Рассмотрим, например, линейную комбинацию, соответствующую  $\lambda = \pm 1$ :

$$\begin{aligned} u &= \sin \pi \frac{x}{a} \sin 2\pi \frac{y}{a} \pm \sin 2\pi \frac{x}{a} \sin \pi \frac{y}{a} = \\ &= 2 \sin \pi \frac{x}{a} \sin \pi \frac{y}{a} \left( \cos \pi \frac{y}{a} \pm \cos \pi \frac{x}{a} \right). \end{aligned}$$

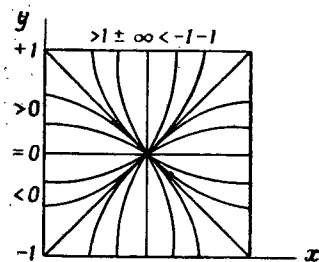
Из последней строки видно, что комбинации  $\lambda = -1$  соответствует в качестве узловой линии диагональ  $y = x$ , комбинации  $\lambda = +1$  — другая диагональ  $y = a - x$ . Фиг. 24. дает общую картину расположения узловых линий для любого параметра  $\lambda$ .

В случае мембраны, имеющей форму квадрата, при некоторых условиях получаются не только однократные вырождения, но и вырождения высшего порядка. Пусть, например,

$$n_1^2 + m_1^2 = n_2^2 + m_2^2,$$

тогда собственному значению

$$k = \frac{\pi}{a} \sqrt{n_1^2 + m_1^2} = \frac{\pi}{a} \sqrt{n_2^2 + m_2^2}$$



Фиг. 24. Общая картина возможных узловых линий в случае квадратной мембраны.

Написанные слева и сверху числа дают значения параметра  $\lambda$  из формулы (5.7).



соответствуют четыре линейно независимые собственные функции

$$u_{n_1 m_2}, u_{n_2 m_2}, u_{m_1 n_1}, u_{m_2 n_2}.$$

Таким образом, здесь мы имеем случай трехкратного вырождения. Вырождение высшего порядка зависит здесь от возможности представления числа несколькими способами в виде суммы квадратов, как это, например, имеет место для числа

$$65 = 1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2.$$

Как доказал Гаусс в своей работе «Disquisitiones arithmeticae», это возможно для всех тех чисел, среди простых сомножителей которых находятся по крайней мере два множителя вида  $4n + 1$ . Такие простые числа допускают комплексное разложение

$$4n + 1 = (a + bi)(a - bi)$$

с целочисленными  $a, b$ ; различные способы группировки комплексных множителей приводят к различным представлениям в виде суммы квадратов. Так, в нашем примере имеем:

$$5 = (1 + 2i)(1 - 2i)$$

и

$$13 = (2 + 3i)(2 - 3i),$$

и поэтому

$$65 = \begin{cases} (1 + 2i)(2 + 3i) \cdot (1 - 2i)(2 - 3i) = \\ = (-4 + 7i)(-4 - 7i) = 4^2 + 7^2, \\ (1 + 2i)(2 - 3i) \cdot (1 - 2i)(2 + 3i) = \\ = (8 + i)(8 - i) = 8^2 + 1^2. \end{cases}$$

Для любых двух собственных функций  $u, u'$  ( $k \neq k'$ ), как это следует из формулы Грина, имеет место условие ортогональности

$$\int uu' d\sigma = 0. \quad (5.8)$$

Доказательство условия (5.8) непосредственно вытекает из рассмотрения уравнений (5.6) и (5.6а), если только

там вместо  $u^*$  написать  $u'$ . Однако оно теряет силу, если  $u$  и  $u'$  являются двумя представителями одного и того же вырожденного колебательного состояния, т. е. если  $k = k'$ .

Во избежание обременительных подразделений на различные случаи необходимо иметь ортогональность также и при наличии вырождения. При этом оказывается целесообразным (см. Курант и Гильберт<sup>1</sup>) ввести следующее обозначение:

$$\int uu' dz = (u, u'). \quad (5.8a)$$

В § 26 мы подробнее остановимся на связи этого символа со скалярным произведением обычного векторного анализа. Впрочем, уже теперь мы будем называть определенный в (5.8a) интеграл скалярным произведением.

Предварительно убедимся в справедливости следующего утверждения:  $n$  непрерывных вещественных ортогональных друг к другу, в остальном произвольных функций  $u_1, u_2, \dots, u_\nu, \dots, u_n$  являются линейно независимыми. Действительно, если бы имело место равенство вида

$$\sum_{\nu=0}^n c_\nu u_\nu = 0 \text{ и одновременно } (u_\mu, u_\nu) = 0$$

для всех  $\mu \neq \nu$ , то после скалярного умножения первого из этих равенств на  $u_\mu$ , учитывая второе равенство, мы имели бы  $c_\mu (u_\mu, u_\mu) = 0$ , т. е.  $c_\mu = 0$  для всех  $\mu$ , что противоречит предположению.

Для простоты рассмотрим сначала случай *однократного вырождения*. Пусть  $u_1, u_2$  — две непрерывные вещественные неортогональные друг другу функции, соответствующие одному и тому же собственному значению. Рассмотрим семейство функций

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

и найдем в этом семействе функцию, ортогональную к  $u_1$ . Она задается условием

$$0 = (u_1, u) = c_1 (u_1, u_1) + c_2 (u_1, u_2).$$

<sup>1</sup>) Курант и Гильберт, Методы математической физики, т. I, гл. II, М.—Л., 1933.

Этому условию можно удовлетворить, если положить

$$c_1 = -(u_1, u_2), \quad c_2 = (u_1, u_1), \quad (5.9)$$

причем  $c_2 \neq 0$ , следовательно также  $u \neq 0$ . Таким образом,  $u_1$  и  $u$  — две взаимно ортогональные собственные функции семейства, которые мы можем выбрать в качестве представителей семейства вместо первоначальных функций  $u_1, u_2$ . Умножая функцию  $u$  на постоянную, можно нормировать  $u$  таким образом, что будет выполнено условие

$$(u, u) = (u_1, u_1). \quad (5.9a)$$

Пусть в случае *двухкратного вырождения*  $u_1$  и  $u_2$  — ортогонализированные и нормированные функции,  $u_3$  — неортогональная к ним собственная функция, принадлежащая к тому же собственному значению, что и  $u_1, u_2$ . Рассмотрим семейство

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3$$

и будем искать в нем функцию  $u$ , ортогональную как к  $u_1$ , так и к  $u_2$ . Мы требуем, следовательно, выполнения условий:

$$0 = (u_1, u) = c_1 (u_1, u_1) + c_3 (u_1, u_3),$$

$$0 = (u_2, u) = c_2 (u_2, u_2) + c_3 (u_2, u_3).$$

Оба условия будут удовлетворены, если положить

$$c_1 = -(u_1, u_3), \quad c_2 = -(u_2, u_3), \quad c_3 = (u_1, u_1) = (u_2, u_2). \quad (5.10)$$

Три функции,  $u_1, u_2, u$ , согласно доказанной выше теореме в силу их взаимной ортогональности являются линейно независимыми: кроме того,  $u$  может быть дополнительно нормировано так, что

$$(u, u) = (u_1, u_1) = (u_2, u_2). \quad (5.10a)$$

Желаемая ортогонализация, таким образом, достигнута и в случае *двухкратного вырождения*.

Этот способ применим также и в случае вырождения высшего порядка. Тем самым вырожденные собственные

функции становятся взаимноортогональными; их ортогональность к остальным собственным функциям, соответствующим другим  $k$ , обеспечивается и без того равенством (5.8).

Далее, наряду с условием ортогональности (5.8) мы рассматриваем условие нормировки

$$(u, u) = \int u^2 d\sigma = 1. \quad (5.11)$$

Эта нормировка к единице приводит к некоторому упрощению в описанном выше процессе ортогонализации [см., например, (5.10a)]. Как мы увидим в § 26, выражение (5.11) имеет свой аналог в векторном анализе. Следует еще отметить, что при комплексном способе записи собственных функций условие (5.11) должно быть заменено условием

$$(u, u^*) = \int uu^* d\sigma = 1 \quad (5.11a)$$

и что в задачах, допускающих разделение переменных, нормировку удобнее производить над отдельными множителями. Так, например, в формуле (5.2) к синусоидальным множителям следует добавить еще множители

$$\sqrt{\frac{2}{a}} \text{ и соответственно } \sqrt{\frac{2}{b}}, \quad (5.12)$$

а к экспоненциальным множителям формулы (5.3) или бесселевым множителям  $I_m(kr)$  в соответствии с формулой (4.66a) следует добавить множители

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ и соответственно } \frac{\sqrt{2}}{aI'_m(ka)}. \quad (5.12a)$$

В примерах, рассмотренных в начале этого параграфа [см. равенства (5.2) и (5.4)], эта нормировка определяет вместе с тем и величину амплитуды.

В заключение покажем сначала на этих частных случаях справедливость двух теорем об узловых линиях, предполагая теперь, что мембрана имеет произвольную форму:

1. Если через одну точку проходят несколько узловых линий, то они пересекаются под равными углами (изого-

нально): в случае двух таких узловых линий угол будет равен  $\pi/2$ , в случае  $\nu$  линий равен  $\pi/\nu$ .

2. Чем больше величина собственного значения  $k$ , тем мельче подразделение мембраны на области знакопостоянства собственной функции; при  $k \rightarrow \infty$  узловые линии располагаются всюду плотно.

Что касается теоремы 1, то мы сошлемся на фиг. 23 и 24, на которых узловые линии пересекаются либо под углом  $\pi/2$ , либо под углом  $\pi/4$ , в зависимости от того, проходят ли через точку пересечения две или четыре узловые линии, причем граница является также узловой линией, или можно сослаться на не показанную на этих фигурах картину узловых линий полного круга, в центре которого [при вещественной форме записи выражения (5.3) это видно особенно ясно] сходятся  $m$  радиальных узловых линий под углом  $\pi/m$  друг к другу. В отношении теоремы 2 достаточно в качестве примера указать на прямоугольник, который для собственных значений  $k_{nm}$  делится на подобласти со сторонами  $a/n$  и  $b/m$ , из которых по крайней мере одна становится бесконечно малой при  $k \rightarrow \infty$ . Перейдем к доказательству этих теорем.

Для доказательства теоремы разложим  $u$  в окрестности некоторой точки  $O$  в ряд Фурье. Используем систему полярных координат  $r, \varphi$ , начало которой лежит в  $O$ . При любой форме границы мы получаем разложение в ряд, сходящийся в некоторой окрестности точки  $O$ ,

$$u = \sum_n I_n(kr) (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \quad (5.13)$$

с определенными коэффициентами  $a, b$ , которые вычисляются как коэффициенты Фурье для функции  $u$ . Из дифференциального уравнения (5.1) и регулярности функции  $u$  в точке  $O$  следует, что радиальными функциями в разложении в ряд Фурье действительно являются бесселевы функции  $I_n$ . Если через точку  $O$  ( $r=0$ ) проходит по меньшей мере одна узловая линия, то согласно (5.13) мы должны иметь  $0 = I_0(0) a_0$ , откуда следует  $a_0 = 0$ . Если тогда  $a_1$  и  $b_1$  не равны одновременно нулю, то через точку  $O$  проходит действительно только одна узловая линия, направление которой определяется из уравнения

$$0 = I_1(kr) (a_1 \cos \varphi + b_1 \sin \varphi).$$

Отсюда следует при  $r > 0$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{a_1}{b_1}.$$

Направление узловой линии тем самым однозначно определено.

Если через точку  $O$  проходит больше, чем одна узловая линия, то  $a_1 = b_1 = 0$ . Если при этом  $a_2, b_2$  не равны одновременно нулю, то в силу (5.13) имеем

$$0 = I_2(kr)(a_2 \cos 2\varphi + b_2 \sin 2\varphi),$$

или же, если через точку  $O$  проходят  $\nu$  узловых линий, то должны соответственно обращаться в нуль все  $a, b$ , предшествующие коэффициентам  $a_\nu, b_\nu$ , так что направления узловых линий определяются уравнением

$$0 = I_\nu(kr)(a_\nu \cos \nu\varphi + b_\nu \sin \nu\varphi).$$

В последнем случае для  $r > 0$  должны иметь

$$\operatorname{tg} \nu\varphi = -\frac{a_\nu}{b_\nu}. \quad (5.13a)$$

Правая часть этого уравнения определяется из нашего разложения в ряд Фурье и может быть положена равной  $\operatorname{tg} \alpha$ . Таким образом, мы получаем в качестве общего решения уравнения (5.13a)

$$\varphi = \alpha, \alpha + \frac{\pi}{\nu}, \alpha + \frac{2\pi}{\nu}, \dots, \alpha + \frac{(\nu-1)\pi}{\nu}. \quad (5.13b)$$

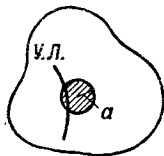
Углы отличаются друг от друга только на постоянную величину  $\pi/\nu$ , и тем самым изогональность доказана.

Переходя к доказательству теоремы 2, мы рассмотрим две функции  $u, v$ , из которых  $u$  должно быть решением уравнения (5.4) для заданной граничной кривой и граничного условия, а  $v$  — частным решением вида

$$v = I_0(kr).$$

Общее для  $u$  и  $v$  значение  $k$  предполагается большим. Для этого большого  $k$  определим малую длину  $a$ , полагая

$ka = \rho_1$ , где  $\rho_1$  есть первый корень уравнения  $I_0(\rho) = 0$ . Вырежем круговую шайбу радиуса  $a$  и наложим ее для пробы на некоторый участок поля узловых линий собственной функции  $u$  (см. фиг. 25). Рассматривая эту шайбу



Фиг. 25. При любой форме границы мембраны узловые линии с возрастанием  $k$  сдвигаются все теснее.

Доказательство проводится с помощью положенной в произвольном месте мембраны пробной шайбы с радиусом  $a$ , стремящимся к нулю при неограниченном возрастании  $k$ . У. Л. обозначает узловую линию, пересекающую шайбу.

как область интегрирования, применим формулу Грина:

$$\int (u \Delta v - v \Delta u) ds = \int \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds. \quad (5.14)$$

Левая часть обращается в нуль, так как  $u$  и  $v$  одновременно удовлетворяют дифференциальному уравнению (5.1) с одним и тем же  $k$ . Справа имеем для  $r = a$

$$v = 0 \text{ и } \frac{\partial v}{\partial n} = k I'_0(\rho_1) \neq 0.$$

Если мы, следовательно, положим  $ds = a d\varphi$ , то из (5.14) следует

$$\rho_1 I'_0(\rho_1) \int_0^{2\pi} u d\varphi = 0.$$

Итак,

$$\int_0^{2\pi} u d\varphi = 0. \quad (5.15)$$

В силу этого  $u$  на окружности меняет свой знак. При этом на окружности должны лежать по крайней мере два нуля функции  $u$ , т. е. наша пробная шайба должна пересекаться по крайней мере одной узловой линией. Чем больше  $k$ , тем меньше должна быть наша пробная шайба. Таким образом, с возрастанием собственного значения  $k$  узловые линии сдвигаются как угодно близко. Это справедливо для любого поля узловых линий.

## § 26. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ АКУСТИКИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Нетрудно обобщить полученные результаты на пространственный случай. При этом во избежание всякого рода осложнений, связанных с использованием векторного и тензорного аппаратов, мы будем рассматривать не колеблющееся твердое тело, а колеблющуюся воздушную массу, заключенную внутри замкнутой твердой оболочки конечных размеров. Под скалярной функцией  $u$  мы, как и раньше (стр. 227), подразумеваем потенциал скоростей для колебаний воздуха  $u$ , так же как и там, рассматриваем граничное условие  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ .

В случае прямоугольного параллелепипеда со сторонами длины  $a$ ,  $b$ ,  $c$  мы должны аналогично § 25, п. 2, положить

$$u = u_{nml} = \cos n\pi \frac{x}{a} \cos m\pi \frac{y}{b} \cos l\pi \frac{z}{c}, \quad (5.16)$$

так что соответствующее собственное значение становится равным

$$k = k_{nml} = \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2}}. \quad (5.16a)$$

Состояние является невырожденным, если  $a$ ,  $b$ ,  $c$  несоизмеримы.

В случае шара радиуса  $a$  вместо (5.3) получаем в качестве собственной функции наиболее общего вида

$$u = u_{nml} = \psi_n(k_{nl} r) P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}. \quad (5.17)$$

Собственные значения при нашем граничном условии задаются уравнением

$$\psi'_n(k_{nl} a) = 0, \quad (5.17a)$$

где под  $k_{nl}$  понимается  $l$ -й корень этого уравнения. Состояние является  $2n$ -кратно вырожденным, так как  $k_{nl}$  не зависят от  $m$  и, таким образом, одному и тому же  $k_{nl}$  соответствуют все различающиеся верхними индексами в  $P_n^m$  состояния —  $n \leq m \leq +n$ .

Собственные функции кругового цилиндра ( $0 < r < a$ ,  $0 < z < h$ ), полученные еще в § 20, п. 3, для случая



нашего граничного условия  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ , имеют вид

$$u_{nlm} = I_n(\lambda r) e^{\pm i n \varphi} \cos m \pi \frac{z}{h}. \quad (5.18)$$

Соответствующее собственное значение определяется из уравнения

$$k_{nlm}^2 = \lambda_{nl}^2 + \frac{m^2 \pi^2}{h^2}, \quad (5.18a)$$

где  $\lambda_{nl}$  есть  $l$ -й корень уравнения  $I'_n(\lambda a) = 0$ . В силу наличия множителя  $\exp(\pm i n \varphi)$  в выражении (5.18) при  $n > 0$  состояние является однократно вырожденным.

В дальнейшем мы представляем себе эти собственные функции «нормированными к единице», причем следует принять во внимание замечания на стр. 244 и в случае вырождения — замечания на стр. 243. Тогда следует, например, в равенстве (5.16) вместо  $\cos n \pi \frac{x}{a}$  написать

$$\cos n \pi \frac{x}{a} \sqrt{\frac{2}{a}}$$

и в равенстве (5.17) вместо  $P_n^m$  согласно формуле (4.154б) —

$$P_n^m = P_n^m \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}}$$

и т. д. См. в связи с этим также задачу V.1.

Теперь распространим нашу фундаментальную теорему, сформулированную на стр. 236, и ее (математически недостаточно строгое) доказательство на случай произвольной пространственной области  $S$ . Теорема тогда формулируется следующим образом: *имеется бесконечная система собственных функций*

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots,$$

*каждая из которых регулярна внутри области  $S$  и удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\Delta u_n + k_n^2 u_n = 0$$

*с однородным граничным условием. Соответствующие собственные значения*

$$k_1, k_2, \dots, k_n, \dots,$$

если их расположить в порядке возрастания, образуют бесконечный ряд неограниченно возрастающих величин; собственные значения образуют «дискретный спектр», если  $S$  лежит целиком в конечной области, и являются вещественными, так как дифференциальное уравнение определяет процесс, не обладающий поглощением.

Эта система собственных функций удовлетворяет условиям ортогональности и нормировки:

$$\int u_n u_m d\tau = \delta_{nm}. \quad (5.19)$$

Вместо этого, в соответствии с обозначением, введенным на стр. 242, можно записать более кратко:

$$(u_n, u_m) = \delta_{nm}, \quad (5.19a)$$

или более общим образом в случае комплексных комбинаций вырожденных собственных функций:

$$(u_n, u_m^*) = \delta_{nm}. \quad (5.19b)$$

Если предположить, что система  $u_n$  является *полной* (см. стр. 16), то любую произвольную, заданную в области  $S$ , и, например, непрерывную функцию точки  $f$  можно разложить по  $u_n$ :

$$f = \sum A_n u_n. \quad (5.20)$$

Если это разложение возможно, то в силу (5.19b) почленным интегрированием уравнения (5.20) получаем

$$A_n = \int f u_n^* d\tau. \quad (5.20a)$$

Возможность представления (5.20) следует из общего принципа разложимости, который мы многократно используем в этой главе, не давая, однако, его подробного доказательства <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Как известно, первое доказательство принципа разложимости (для одного независимого переменного) принадлежит В. А. Стеклову и опубликовано им впервые в 1896 г. в «Сообщениях Харьковского математического общества».

Дальнейшее развитие принципа разложимости дано Гильбертом и Шмидтом в связи с теорией интегральных уравнений (1904г.). Однако автор связывает принцип разложимости с именами Ома и Релея. (Прим. ред.)

Здесь уместно познакомить читателя с понятием *гильбертова пространства*, с тем чтобы не только обосновать заимствованное из векторного анализа обозначение  $(u_n, u_m)$  в формулах (5.19а) и (5.19б), но также дать принципу разложимости более компактную геометрическую форму, которая в школе Гильберта стала даже средством доказательства этого принципа.

Мы определяем в  $N$ -мерном пространстве  $N$  фундаментальных векторов  $e_1, e_2, \dots, e_N$  (соответствующих векторам  $i, j, k$  обычного векторного исчисления), направленных по координатным осям  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , и их скалярные произведения, которые должны удовлетворять условию

$$(e_n e_m) = \delta_{nm}. \quad (5.21)$$

Далее мы рассматриваем направленный под углами  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$  к координатным осям вектор

$$a = \cos \alpha_1 e_1 + \cos \alpha_2 e_2 + \dots + \cos \alpha_N e_N \quad (5.22)$$

и называем его *единичным вектором*, если образованное по правилу (5.21) скалярное произведение этого вектора самого на себя равно по величине единице:

$$(a, a) = \sum_{n=1}^N \cos^2 \alpha_n = 1. \quad (5.22a)$$

Второй такой вектор  $b$  с направляющими углами  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$  называется *ортгональным* к вектору  $a$ , если соответственно образованное скалярное произведение векторов  $a$  и  $b$  равно нулю:

$$(a, b) = \sum_{n=1}^N \cos \alpha_n \cos \beta_n = 0. \quad (5.22б)$$

Формулы (5.22а) и (5.22б) являются, очевидно, обобщениями известных формул аналитической геометрии в пространстве.

С помощью предельного перехода при  $N \rightarrow \infty$  мы переходим теперь к гильбертову пространству. При этом мы устанавливаем формальную аналогию между фундамен-

тельными векторами  $e_n$  и представителями  $u_n$  нашей системы собственных функций. Существующие между последними соотношения, записанные в форме (5.19а), формально эквивалентны соотношениям (5.21) между  $e_n$ . Система  $u_n$ , являющаяся полной, может играть роль фундаментальных единичных векторов  $e_n$ ; в случае комплексных  $u_n$  то же относится к системам функций  $u_n^*$ . Всякая другая ортогонализированная и нормированная к единице система функций может быть в смысле равенства (5.22) представлена через  $u_n$  и рассматривается как вектор в гильбертовом пространстве. Два таких вектора переходят друг в друга с помощью «вращения» в гильбертовом пространстве. Произвольная функция  $f$  может быть также разложена согласно (5.20) по функциям  $u_n$ . В координатной системе, образованной с помощью  $u_n$ , равенство (5.20) ставит в соответствие функции  $f$  определенную точку гильбертова пространства. Координаты этой точки, вычисленные в системе  $u_n$ , совпадают с коэффициентами разложения  $A_n$ . Таким образом, гильбертово пространство становится функциональным пространством. Соответствие между произвольными функциями  $f$  и точками пространства бесконечно большого числа измерений является взаимно однозначным<sup>1)</sup>. Если мы соединим начало координатной системы  $u_n$  с точкой, представляющей функцию  $f$ , то полученный вектор (бесконечной размерности) можно рассматривать как представителя функции  $f$ . Согласно равенству (5.20а), которое мы можем записать в виде  $A_n = (f, u_n^*)$ , координаты точки, представляющей  $f$ , являются одновременно проекциями представляющего вектора на оси системы  $u_n$ .

От этих чрезвычайно абстрактных обобщений мы возвращаемся к физическим применениям. Мы ограничиваемся при этом в первую очередь простейшими задачами акустики и теплопроводности в их традиционной форме. Вопросы волновой механики, имеющие актуальное значение, мы рассмотрим в конце этой главы.

---

<sup>1)</sup> Утверждение о взаимном однозначном соответствии между «произвольными функциями  $f$ » и точками гильбертова пространства не следует из приведенных выше рассуждений и требует более точного определения класса функций  $f$ . (Прим. ред.)

Общая задача акустики для полого объема  $S$  произвольной формы может быть поставлена таким образом: уравнение колебаний

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \Delta v \quad (5.23)$$

( $c$  — скорость звука) с граничным условием

$$\frac{\partial v}{\partial n} = 0$$

должно быть проинтегрировано таким образом, чтобы  $v$  и  $\frac{\partial v}{\partial t}$  для  $t=0$  были бы равны произвольно заданным в  $S$  функциям  $v_0$  и  $v_1$ . Эта задача решается с помощью следующего разложения в ряд:

$$v = \sum A_n u_n \cos \omega_n t + \sum B_n u_n \sin \omega_n t, \quad (5.24)$$

где  $A_n$  и  $B_n$  должны удовлетворять условиям:

$$v_0 = \sum A_n u_n \text{ и } v_1 = \sum B_n \omega_n u_n. \quad (5.24a)$$

В силу соотношения  $c = \frac{\omega_n}{k_n}$  между собственными значениями  $k_n$  и собственными частотами  $\omega_n$  вторая из формул (5.24a) может быть записана в виде

$$\frac{v_1}{c} = \sum B_n k_n u_n. \quad (5.24б)$$

Отсюда следует, как и в (5.20a),

$$A_n = \int v_0 u_n^* d\tau, \quad B_n = \frac{1}{k_n c} \int v_1 u_n^* d\tau. \quad (5.24в)$$

Здесь мы решаем задачу с начальными условиями, считая, что собственно граничная задача об определении  $u_n$  уже разрешена.

Таким же образом решается общая задача теплопроводности. Однако в отличие от предыдущей задачи теперь для описания начального состояния достаточно только одной произвольной функции  $v_0$ , в то время как началь-

ная скорость изменения температуры  $\frac{\partial v}{\partial t}$  определяется из самого дифференциального уравнения теплопроводности. В качестве граничного условия мы можем использовать любое из трех однородных условий «а», «б», «в», стр. 92, 93, которым, разумеется, должна удовлетворять также система собственных функций  $u_n$ . Мы полагаем

$$v = \sum A_n u_n e^{-\kappa k_n^2 t}, \quad (5.25)$$

где  $\kappa$  означает коэффициент температуропроводности. Коэффициенты  $A_n$  определяются снова из начального условия  $v = v_0$ ,

$$A_n = \int v_0 u_n^* d\tau. \quad (5.25a)$$

Кроме этого начального условия, функция  $v$  из равенства (5.25) удовлетворяет также дифференциальному уравнению (5.1) и наложенному на  $u_n$  граничному условию.

Уравнение потенциала  $\Delta u = 0$  не имеет собственных функций, так как всякое его регулярное в области  $S$  решение для граничных условий  $u = 0$  или  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  необходимо равняется внутри  $S$  нулю или соответственно постоянной (см. т. II, стр. 24). Поэтому в этом случае не существует замкнутых «узловых линий» или замкнутых линий, вдоль которых  $u = 0$  или  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ . Однако в следующих

параграфах мы построим решение общей граничной задачи потенциала (заданные на границе значения  $u = U$ ) с помощью собственных функций уравнения колебаний.

Решение уравнения потенциала, регулярное в  $S$ , не может иметь внутри  $S$  максимума или минимума. Экстремальные значения функции  $u$  могут лежать только на границе  $S$ . Это следует из теоремы о среднем значении, которая легко получается из формулы Грина (см. задачу V. 2).

Дифференциальное уравнение  $\Delta u - k^2 u = 0$  или уравнение более общего вида  $\Delta u - Fu = 0$  при положительном  $F(x, y, z)$ , подобно уравнению потенциала, также не имеет собственных функций (см. конец указания к задаче II. 2).

## § 27. СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ. ФУНКЦИЯ ГРИНА УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

Собственные функции соответствуют *свободным* колебаниям; в непоглощающей среде они не требуют никакого притока энергии. Мы хотим теперь рассмотреть *вынужденные* колебания, которые должны возбуждаться в ритме, соответствующем некоторому периоду, для того чтобы оставаться чисто периодическим. Так же как и свободные колебания, они должны удовлетворять однородному условию на поверхности, например  $u=0$ ; мы будем предполагать в этом параграфе, что область  $S$ , ограниченная замкнутой поверхностью, лежит вся в конечной части пространства. Зададим сначала плотность возбуждающей силы как непрерывную в  $S$  функцию точки, и по аналогии с уравнением Пуассона в теории потенциала обозначим ее через  $\rho$ <sup>1)</sup>. В соответствии с этим мы записываем дифференциальное уравнение вынужденных колебаний в виде

$$\Delta u + k^2 u = \rho. \quad (5.26)$$

$k$  выражается в акустическом случае через круговую частоту возбуждения  $\omega$  и скорость звука  $c$  с помощью формулы  $k = \omega/c$  [см. замечание к формуле (5.24a)]. При этом предполагается, что

$$k \neq k_n, \quad (5.27)$$

т. е.  $k$  не равно ни одному из собственных значений области  $S$  для того же граничного условия. Случай «резонанса»  $k = k_n$  мы рассмотрим только в конце этого параграфа.

Согласно принципу разложимости, представим  $\rho$  с помощью ряда по функциям  $u_n$ , нормированным к единице [см. равенства (5.20) и (5.20a)]:

$$\rho = \sum A_n u_n, \quad A_n = \int \rho u_n^* d\tau, \quad (5.28)$$

<sup>1)</sup> Величина  $\rho$  не является, как в случае теории потенциала плотностью заряда, а имеет размерность сек<sup>-1</sup>, если  $u$  означает акустический потенциал скоростей.

и найдем решение  $u$  уравнения (5.26) в такой форме:

$$u = \sum B_n u_n. \quad (5.28a)$$

Подставляя оба разложения в уравнение (5.26); принимая во внимание дифференциальное уравнение  $\Delta u_n + k_n^2 u_n = 0$  для собственных функций и приравнивая коэффициенты при  $u_n$  в правой и левой частях уравнения (5.26), получаем

$$B_n = \frac{A_n}{k^2 - k_n^2}, \quad u = \sum \frac{A_n u_n}{k^2 - k_n^2}. \quad (5.29)$$

Теперь в качестве  $\rho$  мы выбираем  $\delta$ -функцию<sup>1)</sup>, т. е. концентрируем возбуждение, предполагавшееся до сих пор непрерывным, в одну точку, где располагаем единичный источник  $Q$  (см. § 10, п. 3). Мы имеем тогда

$$\int_Q \rho \, d\tau = 1,$$

если область интегрирования содержит точку  $Q$ ; напротив, для всякой области, не содержащей точку  $Q$ , имеем

$$\int \rho \, d\tau = 0.$$

Из формул (5.28) следует в силу этого

$$A_n = u_n^*(Q) \int_Q \rho \, d\tau = u_n^*(Q), \quad (5.29a)$$

и отсюда в силу формул (4.29) получаем

$$G(P, Q) = \sum \frac{u_n(P) u_n^*(Q)}{k^2 - k_n^2}. \quad (5.30)$$

Здесь в левой части мы заменили  $u$  через  $G(P, Q)$ , так как полученное при этом решение является действительно функцией Грина нашего дифференциального уравнения (5.26)

<sup>1)</sup> В этой книге мы отказались в пользу дираковского термина « $\delta$ -функция» от введенного ранее автором для этого случая названия «зубчатая функция» [см. Jahresbericht d. D. Math.-Vereinigung, 21, 312 (1912)].



для произвольного положения точки  $P$  и источника  $Q$  и для области  $S$  произвольной формы. При этом предполагается только, что известна полная система собственных значений, принадлежащих области  $S$ . Однако следует принять во внимание, что принцип разложимости не может быть использован для сингулярной  $\delta$ -функции, так как он применим только для случая, когда функция  $\rho$  в равенстве (5.28) непрерывна (например, она может быть положена равной регулярной гауссовой функции ошибок). Следовательно, в нашем выводе речь может идти не о разложении произвольных функций по  $u_n$ , а только о разложении всюду регулярных функций. Аналогично почленное дифференцирование, необходимое для вывода формул (5.29), было выполнено над функцией (5.28а), регулярной до предельного перехода, а не над предельной функцией (5.30).

Наша функция Грина является одновременно решением интегрального уравнения. Чтобы доказать это, напомним о равенстве (2.43а), которое справедливо для любого самосопряженного дифференциального выражения  $L(u)$ , в частности для левой части волнового уравнения  $\Delta u + k^2 u$ , и которое в трехмерном случае при заданных граничных значениях  $u = 0$  представляется в виде

$$u_Q = \int \rho(P) G(P, Q) d\tau_P. \quad (5.31)$$

Функцию  $G(P, Q)$  называют «ядром» интегрального уравнения (5.31). В соответствии со свойством взаимности «г», приведенным на стр. 76, которое при комплексной форме записи собственных функций можно представить в виде

$$G(P, Q) = G^*(Q, P), \quad (5.31a)$$

в терминологии интегральных уравнений  $G$  называется «симметрическим ядром». Действительно, из выражения (5.30) непосредственно вытекает соотношение (5.31а). Сходимость ряда (5.30) является абсолютной только в одномерном случае, в случае двух или большего числа измерений она обеспечивается только знакопеременностью последовательности собственных функций при соответствующем выборе порядка их следования. Поэтому в общей теории интегральных уравнений Гильберта вместо

ряда (5.30) рассматривают ряд, получающийся из него почленным интегрированием и сходящийся абсолютно.

Недостаточная сходимость ряда (5.30) проявляется при попытке доказать почленным дифференцированием, что дифференциальное уравнение (5.26) удовлетворяется. Действительно, тогда для общего члена ряда получаем

$$\Delta u_n + k^2 u_n = \Delta u_n + k_n^2 u_n + (k^2 - k_n^2) u_n = (k^2 - k_n^2) u_n$$

и после суммирования по  $n$ , когда множитель  $k^2 - k_n^2$  сокращается со знаменателем, находим

$$\Delta G + k^2 G = \sum u_n(P) u_n^*(Q). \quad (5.316)$$

При  $P = Q$  сумма, стоящая справа, состоит только из положительных членов и расходится; то обстоятельство, что при  $P \neq Q$  эта сумма сходится и равна нулю, может быть обусловлено только знакопеременностью ряда и не следует из этой формы представления функции Грина. Порядок обращения в бесконечность при  $P \rightarrow Q$  определяется, впрочем, прямо из дифференциального уравнения (5.26). Для этого опишем шар малого радиуса  $r$  с центром в  $Q$  и проинтегрируем уравнение (5.26) по внутренности шара. В силу  $\delta$ -особенности функции  $\rho$  получим в правой части единицу. В левой части первый член может быть представлен в виде

$$\int \frac{\partial G}{\partial r} d\tau = 4\pi r^2 \frac{\partial G}{\partial r},$$

в то время как второй член дает в пределе нуль. Таким образом, имеем

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{1}{4\pi r^2}, \quad G = -\frac{1}{4\pi r} + \text{const при } r \rightarrow 0. \quad (5.32)$$

Это непосредственно показывает, что  $G(P, Q)$  имеет в точке  $P = Q$  особенность типа единичного источника.

Предыдущие формулы особенно удобно интерпретировать в гильбертовом пространстве (см. стр. 252): формула (5.316) выражает, что  $\Delta G + k^2 G$  является в этом пространстве

<sup>1)</sup> По формуле Остроградского. (Прим. ред.)

скалярным произведением двух единичных векторов  $u(P)$  и  $u^*(Q)$ , которые, таким образом, будут взаимно ортогональными, если только  $u(P)$  и  $u^*(Q)$  отличны друг от друга ( $P \neq Q$ ); если же  $u(P)$  и  $u^*(Q)$  комплексно сопряжены, т. е. если  $P=Q$ , то ортогональность, конечно, невозможна; более того, в этом случае, скалярное произведение обращается в бесконечность. Выражение (5.30) составляется из отдельных членов этого же скалярного произведения с «резонансным знаменателем»  $k^2 - k_n^2$  в качестве весового множителя.

Несмотря на свою плохую сходимость, ряд (5.30) многократно оправдал себя в различных расчетах волновой механики (см. § 30). Мы используем его здесь, чтобы восполнить пробел в теории шаровых функций. Предварительно сделаем несколько общих замечаний:

1) Если система собственных функций допускает разделение переменных, например в ортогональных криволинейных координатах, к которым отнесена поверхность  $\sigma$  области  $S$ , то сумма в формуле (5.30) приводится к трехкратному последовательному суммированию по каждой из трех координат. В случае прямоугольного параллелепипеда, используя, например, индексы  $n, m, l$ , из формулы (5.16), получаем

$$\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty}, \quad (5.33)$$

так что составные части собственных функций, соответствующие  $x, y, z$ , могут быть распределены по суммам, соответствующим индексам  $n, m, l$ .

2) Функция Грина зависит от положения обеих точек  $P$  и  $Q$  относительно граничной поверхности  $\sigma$  и от их взаимного расстояния  $R$ . От ориентации системы координат в пространстве она, напротив, не должна зависеть. При изменении координатной системы, которое преобразует поверхность  $\sigma$  в себя и оставляет неизменным  $R, G(P, Q)$  ведет себя инвариантно.

3) Если  $\sigma$  является сферой, то требование инвариантности удовлетворяется при каждом вращении *сферической полярной системы*  $r, \vartheta, \varphi$  с  $r=0$  в центре шара. Пусть  $r, \vartheta, \varphi$  будут координаты  $P$ , а  $r_0, \vartheta_0, \varphi_0$  — координаты  $Q$ .

4) В этом случае следует дополнительно отметить, что система собственных функций (5.17) является *вырожденной*, так как собственное значение  $k_{nl}$ , определенное уравнением (5.17а), не зависит от  $m$ . Поэтому в представленной согласно (5.33) тройной сумме можно перед суммированием по  $m$  вынести знаменатель  $k^2 - k_{nl}^2$ , а также радиальные составные части собственных функций. Следовательно, можно положить

$$G(P, Q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Psi_n(k_{nl}r) \Psi_n(k_{nl}r_0)}{k^2 - k_{nl}^2} Y_n, \quad (5.34)$$

$$Y_n = \sum_{m=-n}^{+n} \Pi_n^m(\cos \vartheta) \Pi_n^m(\cos \vartheta_0) e^{im(\varphi - \varphi_0)}, \quad (5.34a)$$

где  $\Psi_n$  означает нормированную к единице функцию  $\phi_n$  из формулы (5.17);  $\Pi_n$  в формуле (5.34а) означает аналогично нормированную шаровую функцию  $P_n$ ;  $Y_n$  есть сферическая функция. В формуле (5.34а) мы использовали тот факт, что собственную функцию аргумента  $Q = (r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ , комплексно сопряженную собственной функции

$$\Psi_n(k_{nl}r) \Pi_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi},$$

вследствие вещественности  $\Psi_n$  и  $\Pi_n^m$ , очевидно, можно записать в виде

$$\Psi_n(k_{nl}r_0) \Pi_n^m(\cos \vartheta_0) e^{-im\varphi_0},$$

что справедливо для всех положительных и отрицательных  $m$ , заключенных между  $-n$  и  $+n$ .

Из нашего замечания об инвариантности  $G$  и из представления (5.34) мы видим теперь, что сферическая функция (5.34а) инвариантна относительно поворота полярной системы координат. Это и доказывает теорему, которую мы постулировали на стр. 189 при доказательстве теоремы сложения для шаровых функций. Теперь этот пробел в доказательствах выполнен.

До сих пор мы предполагали, что возбуждение вынужденных колебаний происходит *внутри* области  $S$ , в част-

ности для случая функции Грина в отдельной точке  $Q$  области. Теперь мы сделаем предположение, что возбуждение производится на поверхности. Это имеет место, если однородное граничное условие  $u=0$  будет заменено неоднородным

$$u = U. \quad (5.35)$$

Поверхность будет тогда пульсировать с частотой, равной частоте  $\omega$  вынужденных колебаний, и амплитудой  $U$ , меняющейся от точки к точке, в то время как внутри  $S$  всюду должно соблюдаться дифференциальное уравнение (5.26) с  $\rho=0$ . Из формулы (2.42) мы знаем, что эта граничная задача решается с помощью функции Грина  $G(P, Q)$  посредством формулы

$$u_Q = \int U \frac{\partial G}{\partial \nu_P} d\tau_P, \quad (5.36)$$

где интеграл в правой части берется по поверхности  $\sigma$  ( $d\tau_P$  — элемент поверхности,  $d\nu_P$  — элемент нормали в точке  $P$ ). Согласно формуле (5.30), тогда получаем

$$u_Q = \sum \frac{u_n^*(Q)}{k^2 - k_n^2} \int U \frac{\partial u_n(P)}{\partial \nu_P} d\tau_P. \quad (5.36a)$$

В этой формуле одновременно содержится общее решение известной задачи Дирихле теории потенциала, если только положить  $k=0$ ,

$$u_Q = - \sum \frac{u_n^*(Q)}{k_n^2} \int \frac{du_n(P)}{\partial \nu_P} d\tau_P. \quad (5.37)$$

При этом следует отметить, что это решение разлагается не по частным решениям дифференциального уравнения  $\Delta u=0$ , а по собственным функциям волнового уравнения (уравнение потенциала не имеет собственных функций). Равенство (5.37) сохраняет свой смысл и в том случае, когда вместо граничного условия (5.35) предписывается более общее условие

$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu = U,$$

причем тогда, естественно, собственные функции должны удовлетворять соответствующему однородному условию

$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu = 0.$$

В частном случае шара радиуса  $a$  из формулы (5.37) и условия (5.35), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{a^2} u(r_0, \vartheta_0, \varphi_0) = \\ & = - \sum_n \sum_l \sum_m \frac{A_{nm}}{k_{nl}} \Psi_n(k_{nl}r_0) \Psi'_n(k_{nl}a) \Pi_n^m(\cos \vartheta_0) e^{-im\varphi_0}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$A_{nm} = \iint U \Pi_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (5.38a)$$

где  $\Psi_n$  и  $\Pi_n$  имеют прежнее значение. Множитель  $2\pi$  в левой части (5.38) появляется вследствие того, что в формулах (5.38) и (5.38a) наряду с бесселевыми шаровыми функциями были нормированы к единице также и обе функции  $\exp(-im\varphi_0)$  и  $\exp(im\varphi)$ .

Решение, разложенное обычным образом по частным решениям уравнения  $\Delta u = 0$  и записанное в тех же координатах  $r_0, \vartheta_0, \varphi_0$  точки  $Q$ , имеет вид

$$2\pi u(r_0, \vartheta_0, \varphi_0) = \sum_n \sum_m A_{nm} \left(\frac{r_0}{a}\right)^n \Pi_n^m(\cos \vartheta_0) e^{-im\varphi_0}. \quad (5.39)$$

Приравнивая оба решения, получаем замечательные формулы суммирования [суммирование по полной системе корней  $k$  уравнения  $\Psi_n(ka) = 0$ ]; см. в связи с этим задачу V.3.

Наконец мы должны рассмотреть еще исключительный случай  $k = k_m$ . В механике и электродинамике колеблющихся систем известно понятие «резонансной катастрофы»: при совпадении частоты возбуждающей силы и собственной частоты системы амплитуда колебаний растет до бесконечности. Для этого необходимо  $\omega = \omega_m$ , т. е.  $k = k_m$ . Уравнение (5.26) принимает тогда вид

$$\Delta u + k_m^2 u = \rho. \quad (5.40)$$

Таким образом, получаем неоднородное уравнение, левая часть которого совпадает с однородным уравнением свободных колебаний.

Для наглядности вернемся сначала к двумерному случаю мембраны из § 25. Теперь, однако, мы будем предполагать, что мембрана подвергается периодически меняющемуся нормальному давлению  $p = p(x, y)^1$ , распределенному вдоль пластинки по некоторому закону. Имеется ли распределение давления, при котором не наступает резонансной катастрофы и, следовательно, допускает ли уравнение (5.40) всюду непрерывное решение (при заданном граничном условии  $u = 0$ )? Ответ на этот вопрос физически очевиден: давление на пластинку не должно совершать никакой работы; оно должно, так сказать, действовать безваттно. Следовательно, мы должны иметь

$$\int p u_m dz = 0. \quad (5.41)$$

Функция распределения должна быть ортогональна к собственной функции  $u = u_m$ , находящейся с ней в резонансе, и в секторах мембраны, совершающих противоположные колебания, должна иметь одинаковую величину; *в частности, вдоль узловой линии давление может быть произвольным.*

Эта теорема ортогональности играет фундаментальную роль в теории интегральных уравнений и находит важное применение в теории возмущений волновой механики. Здесь мы ограничимся только разъяснением физических источников этой теоремы.

Она переносится непосредственно на трехмерный случай, если в формуле (5.41) мы заменим интегрирование по поверхности  $\sigma$  интегрированием по объему  $d\tau$ . Тогда мы видим, что коэффициенты разложения  $A_n$  и  $B_n$  в равенствах (5.28) и (5.29) для  $n = m$  обращаются в нуль. Переходя далее от непрерывного распределения  $p$  к  $\delta$ -функции, мы приходим к следующей характеристике функции Грина

---

<sup>1)</sup> Точнее:  $p$  есть давление, деленное на поверхностное натяжение  $T$ , на которое делим при составлении уравнения (5.26);  $p$  имеет не размерность давления  $\frac{\text{дина}}{\text{см}^2}$ , а размерность  $\frac{\text{дина}}{\text{см}^2} \cdot \frac{\text{дина}}{\text{см}} = \text{см}^{-1}$ .

в резонансном случае: *предписываемая функции Грина особенность должна располагаться на узловой поверхности критического собственного колебания*. Это следует из уравнения  $A_m = 0$ , откуда в силу (5.29а) также и  $u_m^*(Q) = 0$ .

При этом и только при этом положении источника  $Q$  имеется функция Грина, регулярная всюду, кроме узловой поверхности. Выражение для функции Грина в резонансном случае получается из общей формулы (5.30), если в сумме выбросить член с индексом  $m$ . Поэтому оно имеет следующий простой вид:

$$G(P, Q) = \sum_{n \neq m} \frac{u_n(P) u_n^*(Q)}{k_m^2 - k_n^2}. \quad (5.42)$$

## § 28. БЕСКОНЕЧНАЯ ОБЛАСТЬ И НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ. УСЛОВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ

При увеличении области ее собственные значения сближаются все больше; для неограниченно простирающейся области они располагаются всюду плотно; в этом случае мы приходим к *непрерывному спектру собственных значений*.

Рассмотрим, например, простейший случай, когда областью является внутренность шара радиуса  $a$ , на границе которого заданы нулевые значения. В случае чисто радиального колебания соответствующие собственные значения задаются уравнением

$$\psi_0(k_\nu a) = 0, \quad \psi_0(\rho) = \frac{\sin \rho}{\rho}. \quad (5.43)$$

Отсюда следует  $k_\nu a = \nu\pi$ , и в качестве разности соседних собственных значений имеем

$$\Delta k_\nu = \frac{\pi}{a} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad a \rightarrow \infty.$$

В соответствии с этим функцию  $\psi_0(kr)$ , всюду регулярную и равную нулю в бесконечности, можно рассматривать как *собственную функцию бесконечного пространства*.

Следовательно, если имеем некоторую акустическую или оптическую задачу с расположенными в конечной части пространства источниками (дискретно или непрерывно рас-



пределенными), которую следует решить при заданном волновом числе  $k$ , то на любое ее решение всегда можно было бы наложить  $\psi_0$ . Решение задачи колебания (в противоположность задаче потенциала) *не определяется однозначно* источниками, заданными в конечной части пространства. Это парадоксальное заключение показывает уже недостаточность условия обращения в нуль на бесконечности и необходимость замены его новым, более сильным условием, характеризующим поведение решения на бесконечности. Мы называем это условие условием излучения: источники должны быть *источниками*, а не *стоками* энергии. Излучаемая источниками энергия должна рассеиваться в бесконечности; энергия не может приходить из бесконечности в точки, в которых заданы особенности поля (плоские волны исключаются, так как для них не выполнено уже условие  $u = 0$  в бесконечности).

В нашем специальном случае, когда собственная функция имеет вид

$$\psi_0(kr) = \frac{1}{2i} \left( \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{-ikr}}{r} \right),$$

это обстоятельство легко проследить. В случае, когда зависимость от времени задается функцией  $\exp(-i\omega t)$ ,  $e^{ikr}/r$  соответствует уходящей волне,  $e^{-ikr}/r$  — приходящей волне,  $\psi_0(kr)$  — стоячей волне (узловые поверхности  $kr = \nu\pi$ ). Исключая возможность излучения энергии из бесконечности, мы делаем невозможным добавление собственной функции  $\psi_0(kr)$ . Тем самым допустимые особенности должны иметь вид

$$u = C \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (5.43a)$$

Для таких особенностей, как нетрудно проверить, выполняется условие

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0, \quad (5.44)$$

которое мы распространим в качестве общего *условия излучения* на все акустические или электродинамические колебательные задачи в бесконечном пространстве, если

только колебание вызывается источниками, лежащими в конечной части пространства.

Действительно, условие (5.44) выполняется не только для сферической волны (5.43a), уходящей из  $r=0$ , но также, как нетрудно показать, и в случае источника, действующего в точке  $x=x_0$ ,  $y=y_0$ ,  $z=z_0$ :

$$u = C \frac{e^{ikR}}{R}, \quad R^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2,$$

и поэтому, например, для непрерывно распределенных источников с объемной плотностью  $\rho = \rho(x_0, y_0, z_0)$

$$u = \int \rho \frac{e^{ikR}}{R} dx_0 dy_0 dz_0.$$

Условие (5.44) сохраняет свою силу не только для случая неограниченного пространства, но также и при наличии в конечной части пространства поверхностей  $\sigma$ , на которых заданы некоторые линейные граничные условия, либо однородные, как, например,  $u=0$ , либо неоднородные, например  $u=U$ . В первом случае имеет место отраженное или рассеянное излучение, исходящее от поверхности  $\sigma$ ; в последнем случае (см. стр. 261) излучение возбуждается самой пульсирующей поверхностью  $\sigma$ . Условие излучения (5.44) мы можем противопоставить в качестве, так сказать, «условия поглощения»

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial u}{\partial r} + iku \right) = 0. \quad (5.44a)$$

Мы докажем, что условие излучения гарантирует единственность описанного выше решения общей задачи колебаний. Наша задача формулируется следующим образом:

а) В области, внешней к поверхности  $\sigma$  (последняя может также распадаться на несколько частичных поверхностей  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ ), функция  $u$  должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\Delta u + k^2 u = \rho.$$

Функция  $\rho$  характеризует мощность источников, распределенных непрерывно или сосредоточенных в отдельных

точках;  $\rho$  задано и в бесконечности должно обращаться в нуль достаточно быстро.

б) Функция  $u$  должна удовлетворять на поверхности  $\sigma$  условию  $u = U$ . Функция  $U$  задана как функция точки на  $\sigma$  и может, в частности, обращаться в нуль, например на  $\sigma_1$ . Все  $\sigma$  лежат целиком в конечной части пространства.

в) Функция  $u$  удовлетворяет в бесконечности условию (5.44). Величина  $r$ , входящая в условие (5.44), означает расстояние от произвольно фиксированной точки  $r = 0$ , лежащей в конечной части пространства. Мы строим шар  $\Sigma$  с центром в этой точке и радиусом  $r \rightarrow \infty$  так, что он не пересекает поверхности  $\sigma$ . Обозначим элемент поверхности шара через  $d\Sigma = r^2 d\omega$ , где  $d\omega$  означает пространственный угол, с вершиной в  $r = 0$ . Область между  $\Sigma$  и  $\sigma$  обозначим через  $S$ .

г) Функция  $u$  удовлетворяет условиям непрерывности, предполагаемым уже при самом составлении дифференциального уравнения, за исключением точек, в которых заданы источники.

Мы предполагаем, что имеются два решения  $u_1$  и  $u_2$  этой задачи, и образуем, как обычно, разность

$$w = u_1 - u_2, \quad (5.45)$$

а также сопряженную к ней функцию  $w^*$ . Они удовлетворяют условиям «а» — «г» при  $\rho = 0$  и  $U = 0$ . Поэтому в формуле Грина

$$\begin{aligned} & \int_S (w \Delta w^* - w^* \Delta w) d\tau = \\ & = \left( \int_{\sigma} d\sigma + \int_{\Sigma} r^2 d\omega \right) \left( w \frac{\partial w^*}{\partial n} - w^* \frac{\partial w}{\partial n} \right) \end{aligned} \quad (5.46)$$

обращаются в нуль интеграл слева и первый интеграл справа. Следовательно, должен обращаться в нуль также интеграл, взятый по сфере.

Для более подробного рассмотрения последнего интеграла мы полагаем

$$w = \frac{e^{ikr}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(\vartheta, \varphi)}{r^n}. \quad (5.47)$$

Мы покажем, что полученное для  $w$  выражение имеет достаточно общий вид. Сначала мы разлагаем  $w$  по сферическим функциям  $Y_n(\vartheta, \varphi)$ . Коэффициенты разложения в силу § 24, п. 1, должны иметь вид

$$C_n \zeta_n^1(kr) + D_n \zeta_n^2(kr),$$

где  $\zeta$  связаны с полудельными функциями Ханкеля согласно формуле (4.96). Однако в нашем случае  $D_n = 0$  в соответствии с поведением  $\zeta_n^2$  для больших значений аргумента (см. § 21, п. 4). Из результатов § 21, п. 4, следует, что функции  $\zeta_n^1$  могут быть представлены в виде сумм конечного числа членов вида  $e^{ikr}/(kr)^m$ , где  $m < n$ . Если полученное разложение по шаровым функциям расположить по степеням  $r^{-n}$ , то мы придем к выражению (5.47), где  $j_n(\vartheta, \varphi)$  являются комбинациями из конечного числа сферических функций.

Между этими функциями  $f_n$  имеется простое *рекуррентное соотношение*. Дифференциальное уравнение  $\Delta w + k^2 w = 0$ , записанное в переменных  $r, \vartheta, \varphi$  в соответствии с (4.126), приводится к следующему виду:

$$\frac{\partial^2(rw)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} D(rw) + k^2 rw = 0, \quad (5.48)$$

где  $D$  — дифференциальный символ, введенный в (4.1756). Подставляя в (5.48) функцию  $w$  из равенства (5.47), получим после приведения двух равных по величине и противоположных по знаку членов

$$e^{ikr} \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{2ikn}{r^{n+1}} + \frac{n(n+1)}{r^{n+2}} + \frac{D}{r^{n+2}} \right) f_n = 0.$$

Если в первом члене скобки заменить индекс суммирования  $n$  на  $n+1$ , то получим

$$e^{ikr} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+2}} \{ -2ik(n+1)f_{n+1} + [n(n+1) + D]f_n \} = 0,$$

откуда следует рекуррентная формула

$$2ik(n+1)f_{n+1} = [n(n+1) + D]f_n. \quad (5.48a)$$

Как следствие имеем: если  $f_0 = 0$ , то равны нулю также и все  $f_n$ . Мы исследуем теперь оставшийся в (5.46) интеграл по  $d\omega$  и, пользуясь тем, что  $r \rightarrow \infty$ , заменяем в нем  $w$  первым членом выражения (5.47), пренебрегая при этом высшими степенями  $1/r$ . Таким образом, имеем

$$w = \frac{e^{ikr}}{r} f_0, \quad w^* = -\frac{e^{-ikr}}{r} f_0^*;$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = ik \frac{e^{ikr}}{r} f_0, \quad \frac{\partial w^*}{\partial n} = -ik \frac{e^{-ikr}}{r} f_0^*.$$

Отсюда получаем

$$\int r^2 d\omega \left( w \frac{\partial w^*}{\partial n} - w^* \frac{\partial w}{\partial n} \right) = -2ik \int f_0 f_0^* d\omega.$$

Подинтегральное выражение этого интеграла положительно, если только  $f_0 \neq 0$ . Однако из равенства (5.46) мы видим, что этот интеграл должен обращаться в нуль. Отсюда  $f_0 = 0$ , следовательно в силу (5.48а)  $f_1 = f_2 = \dots = 0$ . Тем самым

$$w = 0 \text{ и } u_2 = u_1.$$

Первоначально данное автором доказательство<sup>1)</sup> этой теоремы единственности предполагало, кроме вышенаписанных условий «а», «б», «в» для  $u$ , также существование функции Грина для внешней к поверхности  $\sigma$  области и дополнительное «условие конечности»<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> См. ссылку на стр. 256, а также книгу Франка и Мизеса, гл. XIX, § 5. Формой доказательства, данной в тексте, автор в значительной степени обязан Саутеру.

<sup>2)</sup> Доказательство единственности названной выше задачи при наличии экранов строго проведено советским математиком Купадзе.

Следует отметить, что приведенное выше условие излучения существенно зависит от формы области, если ограничивающие ее поверхности простираются до бесконечности. Таким образом, условие (5.44) не является общим принципом излучения (как его часто называют). Более общий подход к принципу излучения можно найти у Ипатьевского (1905). См. в связи с этим работу А. Н. Тихонова и А. А. Самарского, О принципе излучения, ЖЭТФ, 18, 243 (1948) и особенно А. Г. Свешникова, ДАН СССР, 73, 917 (1950). (Прим. ред.)

Рэлихом<sup>1)</sup> доказано со всей математической строгостью, что эти условия являются излишними даже в случае любого числа измерений  $h$ , когда условие излучения имеет вид

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{h-1}{2}} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0. \quad (5.49)$$

В двухмерном случае,  $h=2$ , когда вместо сферической волны  $e^{ikr}/r$  появляется цилиндрическая волна  $H_0^1(kr)$ , условие (5.49) принимает вид

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0, \quad (5.49a)$$

что в самом деле выполняется асимптотически для  $u = H_0^1(kr)$ . Аналогично в одномерном случае, когда тип излучаемой волны задается с помощью функции  $\exp(ik|x|)$ , условие (5.49) заменяется следующим условием:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial u}{\partial |x|} - iku \right) = 0. \quad (5.49b)$$

Следует подчеркнуть то обстоятельство, что в случае волнового уравнения не существует решения, которое имело бы характер уходящей волны и в бесконечности стремилось к нулю сильнее, чем  $1/r$ . В выражении (5.47), составленном для такого решения  $u$ , должно было бы тогда быть  $f_0 = 0$ , но отсюда следует, как мы видели, тождественное равенство нулю решения  $u$ . В этом состоит отличие волнового уравнения от уравнения потенциала. В последнем случае имеются решения, убывающие с возрастанием  $r$  сильнее, чем  $1/r$ , — так называемые дипольные, квадрупольные, октупольные поля (см. § 24, п. 3). Напротив, в случае волнового уравнения такая зависимость от  $r$  встречается только в так называемой «ближней зоне» ( $r < \lambda$ ,  $\lambda$  — длина волны); в «дальней зоне» ( $r > \lambda$ ) каждое решение волнового уравнения ведет себя аналогично шаровой волне  $e^{ikr}/r$ . Теория

<sup>1)</sup> F. Rellich, Jahresbericht d. D. Math. Vereinigung, 53, 57 (1943). Здесь рассматривается также случай, когда поверхность  $\sigma$  простирается в бесконечность.

потенциала может рассматриваться как предельный случай при  $\lambda \rightarrow \infty$ , так как для уравнения потенциала ближняя зона уходит, так сказать, в бесконечность.

Мы перейдем теперь к задаче построения функции Грина для непрерывного спектра. Для простоты мы исследуем ее сначала в одномерном случае ( $-\infty < x < +\infty$ ), когда единственным граничным условием является условие излучения в бесконечности. Функция Грина идентична тогда введенному на стр. 71 «главному решению» и имеет, как и последнее, в некоторой произвольно заданной точке, например  $x = x_0$ , «единичный источник» (см. также задачу II.3). Она должна удовлетворять условиям:

$$a) \frac{d^2 G}{dx^2} + k^2 G = 0 \quad \text{для } x \neq x_0;$$

$$b) \left( \frac{dG}{dx} \right)_{x_0+0} - \left( \frac{dG}{dx} \right)_{x_0-0} = 1 \quad \text{по определению единичного источника};$$

$$в) \frac{dG}{d|x|} - ikG = 0 \quad \text{для } x = \pm \infty.$$

Решение, как легко проверить, имеет вид

$$G = \begin{cases} \frac{1}{2ik} e^{ik(x-x_0)} & \text{для } x > x_0, \\ \frac{1}{2ik} e^{-ik(x-x_0)} & \text{для } x < x_0. \end{cases} \quad (5.50)$$

Сравним его с представлением (5.30) сначала для конечной области  $-l < x < +l$ , на границе которой задано теперь не обычное граничное условие, а условие излучения. Для облегчения перехода к непрерывному спектру мы обозначим собственные значения  $k_n$  этой области через  $\lambda$ ; собственная функция  $u = u_\lambda$ , соответствующая  $\lambda$ , определяется тогда из условий:

$$a) \frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda^2 u = 0 \quad \text{для } -l < x < +l;$$

$$б) \frac{du}{d|x|} - iku = 0 \quad \text{для } |x| = l.$$

Если в соответствии с «а» положить

$$u = A e^{i\lambda x} + B e^{-i\lambda x}, \quad (5.51)$$

то в силу «б» будем иметь

$$A(\pm \lambda - k) e^{\pm i\lambda l} + B(\mp \lambda - k) e^{\mp i\lambda l} = 0,$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\lambda + k}{\lambda - k} e^{-2i\lambda l} = \frac{\lambda - k}{\lambda + k} e^{+2i\lambda l}.$$

Отсюда получаем уравнение для  $\lambda$ :

$$\left(\frac{\lambda - k}{\lambda + k}\right)^2 e^{4i\lambda l} = 1.$$

Оно распадается на

$$\frac{\lambda - k}{\lambda + k} e^{2i\lambda l} = +1, \quad B = A, \quad u = 2A \cos \lambda x, \quad (5.51a)$$

$$\frac{\lambda - k}{\lambda + k} e^{2i\lambda l} = -1, \quad B = -A, \quad u = 2iA \sin \lambda x. \quad (5.51b)$$

Из (5.51a) следует в первом, соответственно втором, приближении, если  $m$  означает целое число,

$$\text{для } \lambda \gg k, \quad \lambda = \frac{\pi}{l} m,$$

$$\text{соответственно } \lambda = \frac{\pi}{l} m \left(1 - \frac{ikl}{\pi^2 m^2}\right), \quad m \rightarrow \infty \quad (5.52a)$$

$$\text{для } \lambda \ll k, \quad \lambda = \frac{\pi}{l} \left(m + \frac{1}{2}\right),$$

$$\text{соответственно } \lambda = \frac{\pi}{l} \left(m + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{i}{kl}\right), \quad m = 0, 1, 2.$$

Аналогично этому из (5.51b) получаем

$$\text{для } \lambda \gg k, \quad \lambda = \frac{\pi}{l} \left(m + \frac{1}{2}\right),$$

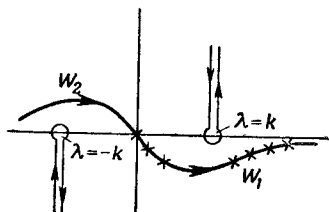
$$\text{соответственно } \lambda = \frac{\pi}{l} \left(m + \frac{1}{2}\right) \left[1 - \frac{ikl}{\pi^2 \left(m + \frac{1}{2}\right)^2}\right], \quad m \rightarrow \infty$$

$$\text{для } \lambda \ll k, \quad \lambda = \frac{\pi}{l} m, \quad (5.52b)$$

$$\text{соответственно } \lambda = \frac{\pi}{l} m \left(1 - \frac{i}{kl}\right), \quad m = 0, 1, 2 \dots$$



Отсюда видно, что значения  $\lambda$ , подсчитанные из (5.51a) и (5.51б), образуют последовательность точек (на фиг. 26 они отмечены крестиками), которая, начиная от  $\lambda = 0$ , опускается сначала прямолинейно в нижнюю полуплоскость  $\lambda^1$ ), асимптотически приближаясь для больших  $\lambda$  (больших  $m$ ) к вещественной оси  $\lambda$ . Последовательно расположенные точки соответствуют согласно (5.51a) и (5.51б) собственным функциям, являющимся попеременно косинусами или синусами. После нормировки к единице собственные функции принимают вид



Фиг. 26. Путь интегрирования  $W_1$  дополняется с помощью пути  $W_2$  до пути  $W = W_1 + W_2$ , замыкающегося в бесконечности. При положительном  $x - x_0$  путь  $W$  может быть переведен в верхнюю полуплоскость  $\lambda$ .

$$u = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{l(1+\Lambda)}} \cos \lambda x, \\ \frac{1}{\sqrt{l(1-\Lambda)}} \sin \lambda x, \end{cases} \quad \Lambda = \frac{\sin \lambda l \cos \lambda l}{\lambda l}. \quad (5.53)$$

В пределе при  $l \rightarrow \infty$  наши  $\lambda$ -точки заполняют всюду плотно правую половину кривой, обозначенную на фигуре через  $W_1$ . Разность между двумя соседними значениями последовательности (5.52a) или (5.52б) становится при этом равной всюду

$$d\lambda = \frac{\pi}{l} \rightarrow 0. \quad (5.53a)$$

После этой подготовки мы возвращаемся к нашему представлению (5.30) функции Грина. Мы подставляем вместо  $u(P)$  выражение (5.53), вместо  $u(Q)$  те же выражения,

<sup>1)</sup> Наличие комплексных собственных значений, противоречащее теореме, сформулированной на стр. 239, объясняется, очевидно, тем, что граничное условие «в» в отличие от ранее рассмотренных условий само носит комплексный характер.

но с заменой  $x$  на  $x_0$  и собираем вместе два соседних члена с косинусом и синусом. Числитель выражения (5.30) представляется после этого в виде

$$u(P)u^*(Q) = \frac{\cos \lambda x \cos \lambda x_0}{l(1+\Lambda)} + \frac{\sin \lambda x \sin \lambda x_0}{l(1-\Lambda)}.$$

При  $l \rightarrow \infty$  будем иметь в соответствии с (5.53) и (5.53а)

$$\Lambda = 0, \quad \frac{1}{l} = \frac{d\lambda}{\pi}.$$

Числитель становится, таким образом, равным

$$\cos \lambda (x - x_0) d\lambda / \pi,$$

в то время как знаменатель в наших обозначениях имеет вид  $k^2 - \lambda^2$ . Формула (5.30) записывается тогда в виде

$$G = \frac{1}{\pi} \int_{W_1} \frac{\cos \lambda (x - x_0)}{k^2 - \lambda^2} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_W \frac{e^{i\lambda(x-x_0)}}{k^2 - \lambda^2} d\lambda. \quad (5.54)$$

В последнем члене этой формулы под  $W$  подразумевается показанный на фиг. 26 путь  $W_1 + W_2$ , причем из четности числителя и знаменателя относительно  $\lambda$  в интеграле по  $W_1$  следует, что интеграл по  $W_1$  равен половине интеграла по  $W$ . Замена в последнем члене (5.54) косинуса экспоненциальной функцией возможна благодаря тому, что при интегрировании по  $\lambda$  синус, как нечетная относительно  $\lambda$  функция, выпадает. Путь  $W$  значительно удобнее пути  $W_1$ , так как он не связан с началом координат и может быть деформирован по методам комплексного интегрирования.

Характер преобразования пути легко видим из фиг. 26. При положительном  $x - x_0$  путь  $W$  может быть переведен в верхнюю полуплоскость  $\lambda$ , при отрицательном — в нижнюю полуплоскость. В первом случае он охватывает полюс  $\lambda = +k$  подинтегрального выражения (5.54), во втором случае — полюс  $\lambda = -k$ . С помощью теории вычетов получаем при этом из (5.54), объединяя оба случая,

$$G = \frac{1}{2ik} e^{ik|x-x_0|}. \quad (5.55)$$

Это в точности совпадает с (5.50).

Отсюда следует, что наше общее представление (5.30) функции Грина сохраняет свою силу также и для непрерывного спектра собственных значений, если только соответственно условию излучения мы расположим путь интегрирования в комплексной области. Если бы вместо этого мы воспользовались условием поглощения [переменив знак перед  $i$  в (5.43а) и (5.44)], то вместо пути  $W$  мы должны были бы использовать его зеркальное отражение относительно вещественной оси  $\lambda$ ; тогда получили бы формулу (5.55) с отрицательным знаком перед  $i$ .

Если мы перейдем от одномерного случая к двух- или трехмерному и в соответствии с этим вместо координаты  $x$  обратимся к полярным координатам  $r$ ,  $\varphi$ , соответственно  $r$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$ , то спектр собственных значений будет непрерывным только относительно координаты  $r$ , относительно же угловых координат он остается дискретным. С нашей точки зрения мы должны были бы, например, в случае трехмерного неограниченного пространства исходить из следующего представления функции Грина:

$$2\pi G(P, Q) = \sum_n \sum_m \Pi_n^m(\cos \vartheta) \Pi_n^m(\cos \vartheta_0) e^{im(\varphi - \varphi_0)} \int_{W_1} \frac{F d\lambda}{k^2 - \lambda^2}, \quad (5.56)$$

$$F = \Psi_n(\lambda r) \Psi_n(\lambda r_0). \quad (5.56a)$$

Здесь  $\Pi$  и  $\Psi$ , как и в предыдущем параграфе (стр. 260), являются нормированными к единице шаровыми, соответственно бесселевыми, функциями; используемые нами ниже функции  $Z^1$ ,  $Z^2$  получаются из функций Ханкеля  $\zeta^1$ ,  $\zeta^2$ . Соответствующей нормировкой множитель  $2\pi$  в левой части появляется вследствие нормировки обеих функций  $\exp(im\varphi)$  и  $\exp(-im\varphi_0)$ . Путь  $W_1$  проходит, как и на фиг. 26, в комплексной плоскости  $\lambda$  от  $\lambda=0$  до  $\lambda=\infty$ , обходя, как и там, полюс  $\lambda=k$ . Мы вкратце рассмотрим ряд (5.56), проводя аналогию с одномерным случаем, и покажем, как это разложение функции Грина ведет к известному уже представлению для шаровых и цилиндрических волн.

Для того чтобы перейти от пути  $W_1$  к пути  $W$  (фиг. 26), замыкающемуся в бесконечности, мы полагаем

$$\Psi_n(\lambda r) = \frac{1}{2} [Z_n^1(\lambda r) + Z_n^2(r\lambda)];$$

относительно трудностей сходимости, возникающих после нормировки, мы отсылаем к приложению I. Согласно формулам обхода для бесселевых функций [см. задачу IV.2, в частности формулу (5.54), указания к этой задаче и дальнейшие выкладки для уравнения (6.33)] интеграл по  $W_1$ , в котором  $F$  берется из равенства (5.56а), может быть преобразован к интегралу по  $W$ , причем функция  $F$  принимает вид

$$F_1 = \frac{1}{2} Z_n^1(\lambda r) \Psi_n(\lambda r_0), \quad r > r_0, \quad (5.56б)$$

соответственно

$$F_2 = \frac{1}{2} \Psi_n(\lambda r) Z_n^1(\lambda r_0), \quad r < r_0. \quad (5.56в)$$

Так как подинтегральное выражение  $\frac{1}{2} F_{1,2}/(k^2 - \lambda^2)$  в обоих случаях  $r \geq r_0$  при стремлении к бесконечности в верхней полуплоскости  $\lambda$  обращается в нуль, то интеграл от правой части уравнения (5.56) сводится к вычету в полюсе  $\lambda = k$ :

$$\int F_{1,2} \frac{d\lambda}{k^2 - \lambda^2} = \frac{\pi}{2ik} \begin{cases} Z_n^1(kr) \Psi_n(kr_0), & r > r_0, \\ \Psi_n(kr) Z_n^1(kr_0), & r < r_0. \end{cases} \quad (5.57)$$

Если теперь применить теорему сложения для шаровых функций в форме (4.157), пользуясь взятым отсюда значением  $\Theta$ , то получим из формулы (5.56)

$$G(P, Q) = \frac{1}{4ik} \sum_{n=0}^{\infty} \Pi_n(\cos \Theta) \Pi_n(1) \begin{cases} Z_n^1(kr) \Psi_n(kr_0), & r > r_0, \\ \Psi_n(kr) Z_n^1(kr_0), & r < r_0. \end{cases} \quad (5.58)$$

Из соображений симметрии следует, что  $G(P, Q)$  для бесконечного пространства является функцией только от расстояния между  $P$  и  $Q$

$$R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \Theta}.$$

Принимая во внимание определение единичного источника, данное на стр. 71, получаем для  $G$  выражение

$$G(P, Q) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR}}{R} = \frac{1}{4\pi i} \zeta_0^1(kR); \quad (5.58а)$$

последнее соотношение следует из выражения (4.96а) для функции  $\zeta'_0$ . Если теперь в правой части формулы (5.58) перейти от  $\Pi, \Psi, Z$  к  $P, \phi, \zeta$  [относительно  $\Psi, Z$  см. приложение I, формула (5.96а)], то получим в точности прежнюю формулу (4.188), которую также можно рассматривать как теорему сложения.

Соответствующие двумерному случаю ряды содержатся в формуле (4.84).

Более важным, чем получение этих известных формул, является для нас их обобщение на случай, когда пространство ограничено замкнутой поверхностью  $\sigma$  (соответственно в двумерном случае кривой  $s$ ), лежащей в конечной области, на которой задано некоторое граничное условие. Мы приходим тогда к задаче определения функции Грина: требуется построить функцию  $G(P, Q)$ , которая имеет в  $Q$  единичный источник, удовлетворяет в бесконечности условию излучения и на поверхности  $\sigma$  (соответственно кривой  $s$ ) — заданному граничному условию.

В качестве поверхности  $\sigma$  мы выберем сферу  $r=a$ , в качестве граничного условия — однородное условие

$$u = 0. \quad (5.59)$$

Пусть точка  $Q$  лежит на луче  $\vartheta=0$ .

Собственную функцию, соответствующую собственному значению  $\lambda$ , следует теперь представить в ненормированном виде

$$u_n(\lambda, r) = \psi_n(\lambda r) + A \zeta_n^1(\lambda r). \quad (5.60)$$

Здесь  $A$  определяется из (5.59) 1)

$$A = - \frac{\psi_n(\lambda a)}{\zeta_n^1(\lambda a)}. \quad (5.60a)$$

При составлении функции Грина мы откажемся от общего метода, с помощью которого было получено равенство (5.56), и прибегнем, в целях краткости, теряя, правда, в систе-

1) В силу зависимости  $A$  от  $\lambda$  мы должны писать не  $u(\lambda r)$ , а  $u(\lambda, r)$ .

матичности метода, к только что вновь доказанному результату (4.193) для неограниченного пространства:

$$\frac{e^{ikR}}{ikR} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \vartheta) \begin{cases} \psi_n(kr_0) \zeta_n^1(kr), & r > r_0, \\ \zeta_n^1(kr_0) \psi_n(kr), & r < r_0. \end{cases} \quad (5.61a)$$

Правая часть равенства (5.61б), разумеется, не удовлетворяет еще условию (5.59) при  $r = a$ ; чтобы удовлетворить этому условию, мы дополняем ее выражением

$$- \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \vartheta) \zeta_n^1(kr_0) \psi_n(ka) \frac{\zeta_n^1(kr)}{\zeta_n^1(ka)},$$

благодаря чему при  $r = a$  она, действительно, обращается в нуль и в силу (5.60) принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \vartheta) \zeta_n^1(kr_0) u_n(k, r). \quad (5.62)$$

Если дополним таким же образом выражение (5.61а), то непрерывный переход от (5.61а) к (5.61б) при  $r = r_0$ , а также выполнение условия излучения при  $r \rightarrow \infty$  будут обеспечены. Выражение (5.61а) принимает при этом следующий вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \vartheta) \zeta_n^1(kr) u_n(k, r_0). \quad (5.63)$$

Выражения (5.62) и (5.63) дают как раз искомую функцию Грина, если только в соответствии с условием для единичного источника мы, как и в (5.58а), присоединим множитель  $k/4\pi i$ . Тогда получаем

$$G(P, Q) = \frac{k}{4\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \vartheta) \begin{cases} \zeta_n^1(kr) u_n(k, r_0), & r > r_0, \\ \zeta_n^1(kr_0) u_n(k, r), & r < r_0. \end{cases} \quad (5.64)$$

Выбранная нами форма записи позволяет уже усмотреть связь последних формул с общим методом, приведшим нас к формуле (5.56). Действительно, функция  $F$  в (5.56а) с точностью до нормирующих постоянных представляется теперь в виде

$$F = u_n(\lambda, r) u_n(\lambda, r_0);$$

соответственно этому функции  $F_1, F_2$ , появляющиеся при преобразовании пути  $W_1$  в  $W$ , даются формулой

$$F_{1,2} = \frac{1}{2} \begin{cases} \zeta_n^1(\lambda r) u_n(\lambda, r_0), & r > r_0, \\ \zeta_n^1(\lambda r_0) u_n(\lambda, r), & r < r_0. \end{cases}$$

Беря вычет в точке  $\lambda = k$ , приходим к формуле вида (5.64).

В приложении II к этой главе мы даем новый способ построения функции Грина, который не только существенно улучшает сходимость представляющих ее рядов, но также открывает широкие перспективы на будущие возможности применения этого метода.

В приложении к гл. VI мы покажем, далее, что этот способ одновременно решает задачу беспроводной телеграфии на шарообразной земле (для идеально проводящей земли и вертикальной «дипольной антенны»), или, правильнее сказать, решил бы, если бы главную роль при этом не играла ионосфера.

Далее следует отметить: представление вида (5.56) сохраняет свою силу и тогда, когда поверхностью  $\sigma$  является не сфера, а эллипсоид, в соответствии с чем вместо наших прежних координат  $r, \vartheta, \varphi$  в основу должна быть положена координатная система из конфокальных эллипсоидов и гиперboloидов. Спектр собственных значений для внешнего пространства эллипсоида является дискретным относительно параметров семейств однополостных и двуполостных гиперboloидов и непрерывным относительно параметра семейства эллипсоидов, а после интеграции по этому последнему параметру допускает упрощение, аналогичное формуле (5.64). Даже в наиболее общем случае, когда разделение переменных невозможно, формула (5.30) может служить в качестве исходного пункта для построения функции Грина.

### § 29. СПЕКТР СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ. БАЛЬМЕРОВСКИЕ ТЕРМЫ

Волновое уравнение Шредингера в простейшем случае водородного атома имеет вид

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(W - V)\psi = 0. \quad (5.65)$$

Оно совпадает с нашим прежним уравнением (2.15) с той разницей, однако, что вместо символа  $W$  энергии движения, свободного от воздействия сил, появляется разность общей энергии  $W$  и потенциальной энергии  $V$ , т. е., говоря языком механики, кинетическая энергия. Как известно, по модели Резерфорда атом водорода состоит из ядра (протона с зарядом  $+e$ ) и электрона с зарядом  $-e$ , который движется в поле протона. Потенциальная кулоновская энергия электрона, измеренная в обычных электростатических единицах, равна

$$V = -\frac{e^2}{r}, \quad (5.66)$$

где  $r$  есть расстояние до протона, а  $V$  нормирована так, что в бесконечности  $V=0$ . При таком условии в общую энергию не включается энергия массы  $m_0c^2$  покоящегося электрона. В дальнейшем протон рассматривается как неподвижно покоящийся в точке  $r=0$ .

Уравнение (5.65) отличается от рассматривавшегося до сих пор волнового уравнения также и тем, что вместо постоянной  $k^2$  оно содержит выражение, являющееся функцией точки и имеющее особенность при  $r=0$ . В то время как до сих пор собственным значением считалось число  $k$ , теперь мы рассматриваем  $W$  как параметр, играющий роль собственного значения. Нас интересуют, следовательно, такие значения  $W$ , для которых уравнение (5.65) допускает решение, непрерывное во всем пространстве. Эти решения являются собственными функциями нашей «задачи Кеплера», в которой протон играет роль солнца, электрон — роль планеты. Так как в этой задаче допускается пребывание электрона в любой точке неограниченного пространства, то спектр собственных значений



задачи, как и в форме (5.56), должен быть непрерывным относительно координаты  $r$ . Однако более важным обстоятельством для нас является наличие в нем *дискретных* составных частей.

Спектральный аппарат дает нам представление о дискретном спектре атома посредством измерения *линейчатого спектра*, который в случае водорода представляется в видимой части серией Бальмера  $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, H_\delta, \dots$ . Его линии сгущаются к некоторой граничной линии, определяемой постоянной  $R$  Ридберга. Примыкающий к этой границе континуум лежит в ближней части ультрафиолетовой полосы. Наличие обоих спектров, дискретного и непрерывного, легко находит свое объяснение с помощью уравнения Шредингера. Оно, таким образом, сводит к простой математической формуле загадочное явление спектральных серий, имеющих в конечной части спектра точку сгущения, наличие которой представляет принципиально новое явление по сравнению с поведением всех механических систем.

Правда, известно, что Нильс Бор уже за 12 лет до Шредингера дал общее объяснение серий Бальмера и их предельных частот, видоизменив в духе квантовой теории резерфордовскую модель атома водорода, но картина траекторий, используемая при этом, приводила к некоторым противоречиям, и поэтому оказалась более предпочтительной аналитическая модель, содержащаяся в уравнении (5.65). В конечном счете уравнение (5.65) также основано на квантовой теории, что подтверждается наличием входящей в него постоянной Планка  $\hbar = h/2\pi$ .

Каков же физический смысл собственной функции  $\psi$ ? Ответ на этот вопрос делает понятным тот полный переворот, который был произведен в естествознании квантовой теорией: выражение  $|\psi|^2 dx dy dz$  означает вероятность пребывания электрона водорода внутри элементарного объема  $dx, dy, dz$  в точке  $x, y, z$  пространства.

Тем самым «нормировка собственных функций к единице», которая была введена в целях математической простоты, теперь приобретает фундаментальное значение. Действительно, равенство

$$\int |\psi|^2 d\tau = 1 \quad (5.67)$$

гарантирует полную уверенность в том, что электрон находится в каком-либо месте пространства; это условие, таким образом, является необходимым с точки зрения волновой механики. В такой форме оно справедливо только для дискретного спектра; для континуума его следует изменить согласно приложению I этой главы.

Обратимся к интегрированию уравнения (5.65) и введем полярные координаты  $r, \vartheta, \varphi$ . Из написанного по образцу (4.127) волнового уравнения и представления его решения в виде <sup>1)</sup>

$$\psi = \chi(r) P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \quad (5.68)$$

получаем, принимая во внимание дифференциальное уравнение (4.135), для  $P_l^m$

$$\frac{d^3 \chi}{dr^3} + \frac{2}{r} \frac{d\chi}{dr} + \left[ \frac{2m}{\hbar^2} \left( W + \frac{e^2}{r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \chi = 0. \quad (5.69)$$

Мы интересуемся в первую очередь случаем электрона, *связанного с ядром*. Тогда  $W$  должно быть отрицательно: энергия покоящегося в бесконечности электрона нормирована к нулю. Если электрон захвачен ядром и стабильно с ним связан, то его энергия уменьшается. Если, напротив,  $W > 0$ , то электрон также и в бесконечном удалении от ядра имеет положительную кинетическую энергию и с точки зрения классической механики описывает гиперболическую траекторию.

Асимптотическое поведение функции  $\chi$  для  $r \rightarrow \infty$  получается довольно просто из уравнения (5.69), если мы отбросим все члены с  $1/r$  и  $1/r^2$

$$\frac{d^2 \chi}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} W \chi = 0.$$

Поэтому при отрицательном  $W$  мы записываем

$$\frac{d^2 \chi}{dr^2} = \frac{1}{4} \chi, \quad \chi = e^{-\rho/2}, \quad \rho = \frac{2r}{\hbar} \sqrt{-2mW}. \quad (5.69a)$$

<sup>1)</sup> Мы выбрали здесь в качестве нижнего индекса в  $P$  не  $n$  а  $l$  в соответствии с употребляемой в квантовой механике символикой:  $l$  — азимутальное квантовое число,  $n_r$  — радиальное квантовое число,  $n = n_r + l + 1$  — главное квантовое число,  $m$  — магнитное квантовое число, причем в наших измененных обозначениях теперь имеем:  $-l \leq m \leq +l$ .

Другое решение  $\chi = \exp(+\rho/2)$  уравнения (5.69а) мы должны отбросить, так как  $\chi$  должно быть всюду конечно.

Для того чтобы получить точное решение уравнения (5.69), мы полагаем

$$\chi = e^{-\rho/2} v(\rho) \quad (5.70)$$

и после несложных вычислений получаем для  $v$  дифференциальное уравнение

$$v'' + \left(\frac{2}{\rho} - 1\right)v' + \left[\frac{n-1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right]v = 0, \quad (5.70a)$$

где сокращенно обозначено

$$n = \frac{me^2/\hbar}{\sqrt{-2mW}}. \quad (5.70b)$$

Для исследования уравнения (5.70a) лучше всего разложить  $v$  в ряд вида (4.36), полагая

$$v = \rho^\lambda w, \quad w = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \dots \quad (5.71)$$

Мы получим тогда для  $\lambda$  уравнение, соответствующее уравнению (4.37),

$$\lambda(\lambda+1) = l(l+1), \quad \text{откуда} \quad \lambda = +l. \quad (5.71a)$$

Другой корень  $\lambda = -l-1$  уравнения (5.71a) отпадает, так как  $v$  подобно  $\chi$  должно оставаться конечным при  $\rho = 0$ . С другой стороны, аналогично тому, как это делалось в уравнении (4.37a), приравнявая нулю коэффициент при  $\rho^{\lambda+k-1}$  в степенном ряде, полученном из уравнений (5.70a) и (5.71), приходим к рекуррентной формуле

$$a_{k+1}[(\lambda+k+1)(\lambda+k) + 2(\lambda+k+1) - l(l+1)] + a_k(n-1-\lambda-k) = 0. \quad (5.71b)$$

Если заставить здесь обратиться в нуль множитель при  $a_k$ , выбирая значение

$$n = k + \lambda + 1, \quad (5.72)$$

то  $a_{k+1}$  также становится равным нулю; следовательно, обращаются в нуль все последующие члены в ряде  $w$ : ряд

обрывается, и  $w$  становится полиномом  $k$ -й степени, изучением свойств которого мы вскоре займемся. Здесь мы предварительно подчеркнем лишь следующие два обстоятельства: 1) в случае, когда  $w$  является полиномом, функция  $\chi$  вследствие наличия множителя  $\exp(-\rho/2)$  в выражении (5.70) имеет при  $\rho \rightarrow \infty$  достаточно высокий порядок обращения в нуль, что позволяет произвести необходимую нам нормировку по формуле (5.67); 2) в случае, когда  $w$  является суммой бесконечного ряда, из рекуррентной формулы (5.71б) следует, что при  $\rho \rightarrow \infty$   $w$  обращается в бесконечность того же порядка, что и  $\exp(+\rho)$ . Это делает невозможной требуемую нормировку  $\psi$ . Таким образом, условие конечности числа членов в ряде для  $w$  является необходимым с точки зрения волновой механики.

Особенный интерес для нас представляет прежде всего формула (5.72). Обозначим величину  $k$  через  $n_r$  (радиальное квантовое число) и подставим в силу уравнения (5.71а) вместо  $\lambda$  значение  $l$  ( $l$  — азимутальное квантовое число). Таким образом, согласно уравнению (5.72) число  $n$  является целым числом:

$$n = n_r + l + 1, \quad (5.72a)$$

называемым «главным квантовым числом». Из этого выражения для  $n$  следует согласно (5.70б) значение  $W$ :

$$W = W_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}. \quad (5.72б)$$

Полагая  $W$  равным энергии кванта  $h\nu$ , получаем

$$\nu = \frac{me^4}{2\hbar^2 n^2} = \frac{R}{n^2}, \quad (5.73)$$

где величина

$$R = \frac{2\pi^2 me^4}{h^3} \quad (5.73a)$$

представляет собой «частоту Ридберга». Ее числовое значение определяется спектроскопически с очень большой точностью и может поэтому служить для более точного определения фундаментальных постоянных  $e$ ,  $m$  и  $h$ . Частоты колебаний  $\nu$ , определяемые равенством (5.73), называются терминами Бальмера.

Наблюдаемая для спектральной линии частота колебаний соответствует переходу от начального состояния 1 к конечному состоянию 2 и находится как разность обоих соответствующих термов  $\nu_2$  и  $\nu_1$ . Для спектра водорода имеем поэтому

$$\nu = \nu_2 - \nu_1 = R \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right). \quad (5.74)$$

Серия Бальмера соответствует переходу в конечное состояние  $n_2 = 2$ , серия Лаймана, лежащая в ультрафиолетовой области, — переходу в основное состояние водородного атома  $n_2 = 1$  в обоих случаях при произвольном начальном состоянии  $n_1 > n_2$ . Поэтому имеем

$$\nu = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, 5, \dots \text{серия Бальмера,} \quad (5.74a)$$

$$\nu = R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 2, 3, 4, \dots \text{серия Лаймана.} \quad (5.74b)$$

Серии с  $n_2 = 3, n_2 = 4, \dots$  лежат в инфракрасной области.

После того как мы познакомились с *собственными значениями* уравнения для водородного атома, исследуем подробнее аналитический характер его собственных функций. Используя уравнения (5.71), (5.71a) и (5.72a), получим из (5.70a) дифференциальное уравнение для  $w$ :

$$\rho w'' + [2(l+1) - \rho] w' + (n-l-1) w = 0. \quad (5.75)$$

Уравнение (5.75) может быть получено, если продифференцировать  $2l+1$  раз более простое дифференциальное уравнение

$$\rho L'' + (1 - \rho) L' + \mu L = 0, \quad \text{где } \mu = n + l. \quad (5.76)$$

Последнее уравнение для каждого целого  $\mu$  имеет одно и только одно полиномиальное решение степени  $\mu$ ; при соответствующей нормировке, как нетрудно показать, получаем:

$$\begin{aligned} \text{для } \mu = 0 \quad L &= 1; \\ \text{для } \mu = 1 \quad L &= -\rho + 1; \\ \text{для } \mu = 2 \quad L &= \rho^2 - 4\rho + 2; \\ \text{для } \mu = 3 \quad L &= -\rho^3 + 9\rho^2 - 18\rho + 6; \\ &\dots \end{aligned}$$

Мы снова пришли к полиномам Лагерра, вычисленным в задаче I.6; (5.76) есть дифференциальное уравнение Лагерра, на что уже указывает буква  $L$ . Оно тождественно с дифференциальным уравнением (4.207) конфлюэнтной гипергеометрической функции для значений параметра  $\alpha = -\mu = -n - l$  и  $\gamma = 1$ . Мы имеем, таким образом,

$$L = F(-n-l, 1, \rho) \text{ и } w = \frac{d^{2l+1}L}{d\rho^{2l+1}}. \quad (5.77)$$

Принимая во внимание формулы (5.68), (5.70), (5.71) и (5.71a) и добавляя в соответствии с условием (5.67) нормирующий множитель  $N$ , получаем следующее выражение для собственной функции водорода:

$$\psi = N \rho^l e^{-\rho/2} \frac{d^{2l+1}L}{d\rho^{2l+1}} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}. \quad (5.78)$$

Напишем еще согласно формулам (5.69a) и (5.72b) значение для  $\rho$ :

$$\rho = \frac{2r}{na}, \quad a = \frac{\hbar^2}{me^2} \sim \frac{1}{2} 10^{-8} \text{ см.} \quad (5.78a)$$

Здесь  $a$  означает, как это принято в атомной физике, «водородный радиус».

С целью обоснования этого обозначения и в качестве примера конкретного применения предыдущих рассуждений мы вычислим «плотность вероятности»  $|\psi|^2$  для «основного состояния»  $n=1$  водородного атома. При  $n=1$  согласно (5.72a) имеем  $l=m=0$ ,  $n_r=0$ , и из (5.78) следует

$$\psi = -N_1 e^{-\rho/2} = -N_1 e^{-r/a}, \quad |\psi|^2 = N_1^2 e^{-2r/a},$$

причем постоянная  $N_1$  легко подсчитывается из условия (5.67) и оказывается равной  $(\pi a^3)^{-1/2}$ . Таким образом, вероятность пребывания электрона выражается функцией, обладающей сферической симметрией относительно ядра. Она имеет свой максимум  $N_1^2$  для  $r=0$ , для  $r=a$  ее величина равна  $(N_1/a)^2$ , и только в бесконечности она обращается в нуль. Плотность заряда пропорциональна этой величине. С точки зрения статистической волновой механики, мы имеем не сконцентрированный в точке

электрон, а *облако заряда*, главная часть которого лежит в круге радиуса  $a$ .

Напротив, исходя из прежней точки зрения квантовых траекторий, следовало бы приписать атому водорода форму диска. Основному состоянию (круговая траектория радиуса  $a$ ) соответствовал бы круглый диск. Следовательно, в магнитном поле все диски водородных атомов должны были бы быть параллельны друг другу и перпендикулярны к магнитным силовым линиям; но в этом случае световой луч, пропущенный через водородный газ, должен был бы обнаружить «двойное магнитное преломление». Точные измерения Шютца, проведенные не только над водородным газом, но и над аналогичными парами натрия, не обнаружили никаких признаков этого явления. Это и есть одно из противоречий, объясненных волновой механикой.

Аналогичные выводы, что и для основного состояния атома водорода, можно сделать для всех атомных состояний с  $l=0$ , так называемых «термов» спектроскопии. А именно, при  $l=0$  получаем из выражения (5.78)

$$\psi = N_n e^{-\rho/2} L'_n(\rho), \quad \rho = \frac{2r}{na}, \quad n = n_r + 1,$$

т. е. снова имеем сферическую симметрию. Такими термами являются основные состояния атомов щелочных элементов Li, Na, K, ... То же самое, но в более сложной форме имеет место для заполненных оболочек, например для восьмизлектронных оболочек благородных газов. Доказательство основывается в этом случае на теореме сложения шаровых функций. Для всех химических применений эта сферическая симметрия замкнутых оболочек имеет, очевидно, большое значение.

Мы хотели бы сделать еще несколько дополнительных замечаний по поводу непрерывного спектра водорода, соответствующего состояниям  $W > 0$  (гиперболические траектории старой теории). В этом случае электрон не связан с ядром, но находится все еще в его поле.

Величины  $\rho$  и  $n$  вследствие того, что  $W > 0$ , согласно формулам (5.69a) и (5.70б) становятся *чисто мнимыми*. В асимптотическом решении (5.69a) оба знака при

являются одинаково оправданными, так как оказываются пригодными оба решения  $\exp(\pm p/2)$ . Теперь уже нет необходимости обрывать ряд (5.74) на конечном числе членов, что даже невозможно в силу мнимого характера  $p$ . Поэтому каждое значение  $W$  является допустимым. Спектр значений  $W$  становится непрерывным и простирается от  $W=0$  до  $W=\infty$ . Так как  $W=0$  согласно (5.72б) соответствует границе  $n=\infty$  дискретных спектров, то к каждому из этих спектров, как мы уже заметили выше, примыкает со стороны коротких волн сплошной спектр. Представление (5.76) сохраняет свою прежнюю аналитическую форму, но  $L$  является теперь не полиномом Лагерра, а бесконечным конфлюэнтным гипергеометрическим рядом, так как параметр  $\alpha = -n-l$  в (5.77) является не отрицательным целым, а комплексным числом общего вида.

### § 30. ФУНКЦИЯ ГРИНА. ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ В ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКЕ. ФОРМУЛА РЕЗЕРФОРДА В ЯДЕРНОЙ ФИЗИКЕ

Опыты Резерфорда по рассеянию  $\alpha$ -лучей тяжелых атомов сыграли важную роль в начальной стадии развития ядерной физики. Так как электронные оболочки атомов не играют существенной роли при прохождении  $\alpha$ -лучей, мы можем отнести возникающую проблему рассеяния к кругу формул непрерывного  $H$ -спектра. Действительно, подобно предыдущему, мы имеем задачу двух тел: ядро (здесь обладающее зарядом  $Ze$ ,  $Z$  — порядковое число атома; в случае водородного  $H$  спектра  $Z=1$ ) и взаимодействующая с ним частица (здесь  $\alpha$ -частица с массой  $m_\alpha$  и зарядом  $Z'e$ , где  $Z'=2$ , раньше — электрон с массой  $m$  и зарядом  $-e$ , соответствующим числу  $Z'=-1$ ). Нас интересует прежде всего то место непрерывного спектра, которое соответствует энергетической постоянной  $W_\alpha$  падающих  $\alpha$ -лучей. Эта постоянная равняется просто кинетической энергии  $\alpha$ -частицы при бесконечном удалении ее от ядра

$$W_\alpha = \frac{m_\alpha}{2} v^2, \text{ т. е. } 2m_\alpha W_\alpha = (m_\alpha v)^2 = p^2,$$

где  $p = m_\alpha v$  есть количество движения  $\alpha$ -частицы.



Если теперь мы перейдем от прежней корпускулярной трактовки  $\alpha$ -лучей к волновой трактовке, то  $p/\hbar$  можно рассматривать одновременно как волновое число <sup>1)</sup>  $k_\alpha$  для  $\alpha$ -лучей. Таким образом, получаем

$$k_\alpha = \frac{m_\alpha v}{\hbar} = \sqrt{\frac{2m_\alpha W_\alpha}{\hbar^2}}. \quad (5.79)$$

Переменное  $\rho$ , определенное в формуле (5.69a), может быть поэтому представлено в виде

$$\rho = 2ik_\alpha r. \quad (5.80)$$

Для любого места непрерывного спектра (т. е. для любого, отличного от  $W_\alpha$  значения  $W$ ) мы будем употреблять в соответствии с § 28 вместо  $k_\alpha$  букву  $\lambda$ . Формулы (5.79) и (5.80) обобщаются тогда следующим образом:

$$\lambda = \sqrt{\frac{2m_\alpha W}{\hbar^2}}, \quad \rho = 2i\lambda r. \quad (5.80a)$$

Если мы будем предполагать ядро неподвижным, подобно тому как это имело место раньше для протона, то волновое уравнение (5.65) примет вид

$$\Delta\psi + \frac{2m_\alpha}{\hbar^2} \left( W - \frac{ZZ'e^2}{r} \right) \psi = 0. \quad (5.81)$$

Вместо (5.81) напомним

$$\Delta\psi + K^2\psi = 0, \quad K^2 = \lambda^2 - \frac{2m_\alpha ZZ'e^2}{\hbar^2 r}, \quad (5.81a)$$

в частности для точки спектра  $\lambda = k_\alpha$  имеем

$$K_\alpha^2 = k_\alpha^2 - \frac{2m_\alpha ZZ'e^2}{\hbar^2 r}. \quad (5.81b)$$

---

<sup>1)</sup> Действительно, формула  $k_\alpha = p/\hbar$  есть не что иное, как уравнение де Бройля: «обратная величина длины волны, умноженная на  $\hbar$ , равна импульсу», которое, с своей стороны, является релятивистским дополнением к уравнению Планка: «обратная величина периода колебания, умноженная на  $\hbar$ , равна энергии».

Важно заметить, что в разности  $K^2 - K_\alpha^2$  не содержится потенциального члена  $1/r$ , так что эта разность становится независимой от координат точки  $(x, y, z)$ :

$$K^2 - K_\alpha^2 = \lambda^2 - k_\alpha^2. \quad (5.82)$$

Мы предоставляем читателю убедиться в том, что все наши прежние следствия из теоремы Грина, которые в случае постоянного  $k^2$  приводили, например в § 26, к ортогональности собственных функций или в § 27 — к построению функции Грина, остаются без изменения для нашего более общего волнового уравнения  $\Delta\psi + K^2\psi = 0$ , где  $K^2$  зависит от координат точки, в соответствии с формулами (5.81a) и (5.81b).

После этих предварительных соображений мы переходим к теории опыта Резерфорда по рассеянию. Если считать источник  $\alpha$ -лучей (препарат радия) точечным и расположенным в конечной части пространства, то получим сферическую волну корпускулярных лучей, которая деформируется вследствие присутствия ядра, в соответствии с волновым уравнением (5.81). Если, однако, мы переместим источник в бесконечность, что является более естественным и вместе с тем более простым, то мы должны рассмотреть ту же задачу для плоской волны. В обоих случаях решение дается с помощью функции Грина из § 28; в первом случае — при произвольном положении источника  $Q$ , во втором — при предельном положении  $Q \rightarrow \infty$ . Так как наша функция Грина получалась суммированием по полной системе собственных функций, то в случае конечного положения  $Q$  мы должны принять во внимание, кроме непрерывного, также и дискретный спектр собственных значений. Однако в пределе при  $Q \rightarrow \infty$   $u(Q)$  также обращается в нуль для всех собственных значений дискретного спектра; поэтому остается только интегрирование по непрерывному спектру. При этом для рассматриваемой собственной функции  $u(P)$  может быть использовано прежнее выражение (5.78) для дискретной водородной собственной функции, если только в нем согласно формуле (5.80a) будет заменено  $\rho$  через  $2i\lambda r$ ; если, кроме того, мы совместим направление  $\vartheta = 0$  с прямой, идущей от  $Q$  к точке  $O$ , в которой находится ядро, то наша задача

рассеяния становится симметричной относительно оси  $\vartheta = 0$ , т. е. не зависящей от  $\varphi$ , так что и собственная функция  $u(P)$  должна быть независимой от  $\varphi$ . Мы имеем тогда согласно (5.78)

$$u(P) = \chi_l(\rho) P_l(\cos \vartheta), \quad \chi_l = N_l^l e^{-l/2} \frac{d^{2l+1} L}{d\rho^{2l+1}}. \quad (5.83)$$

Соответствующее выражение для  $u(Q)$  получается из (5.83), если мы там заменим  $P_l(\cos \vartheta)$  через

$$P_l(\cos \vartheta_0) = P_l(-1) = (-1)^l,$$

$\chi_l(\rho)$  через  $\chi_l(\rho_0)$  и для  $\rho_0$  перейдем к пределу при  $\rho_0 \rightarrow \infty$ . Тогда из (5.56) после интегрирования по пути  $W$  (фиг. 26) и определения вычета в полюсе  $\lambda = k_a$  получаем следующее представление плоской волны в виде ряда

$$\sum C_l \chi_l(\rho) P_l(\cos \vartheta), \quad \rho = 2ik_a r, \quad (5.84)$$

в котором коэффициенты  $C_l$  довольно сложным образом определяются с помощью нормирующих множителей для  $\chi$  и  $P$  и по асимптотическому поведению  $\chi(\rho_0)$  при  $\rho_0 \rightarrow \infty$ . Это представление впервые получено Гордоном<sup>1)</sup>.

Однако гораздо проще выглядит выражение, которое получается, если перейти от полярных координат  $r, \vartheta$  к параболическим координатам  $\xi, \eta$ . В этом случае волновая функция процесса рассеяния (см. приложение III к этой главе) принимает вид

$$\psi = e^{ikx} L_n(ik\eta), \quad \eta = r - x = r(1 - \cos \vartheta). \quad (5.85)$$

Здесь  $k$  есть волновое число, определяемое с помощью формулы (5.79)

$$k = k_a = \frac{m_a v}{\hbar}; \quad (5.85a)$$

$n$  есть главное квантовое число, которое, как мы уже подчеркнули в конце § 29, в случае непрерывного спектра

<sup>1)</sup> W. Gordon, Zs. f. Phys., 48 (1928). См. также книгу Мотт и Месси, Теория атомных столкновений, гл. III, М.—Л., 1936.

является чисто мнимым; оно вычисляется по формуле (5.70б), в которой, однако, как и в уравнении (5.81), следует заменить  $e^2$  через  $-ZZ'e^2$ ,

$$n = \frac{ie^2ZZ'}{\hbar v}; \quad (5.85б)$$

$L_n$  означает определяемую формулой (5.77) конфлюэнтную гипергеометрическую функцию, в которой  $l$  положено равным 0,

$$L_n(\rho) = F(-n, 1, \rho); \quad (5.85в)$$

$\eta$  есть параболическая координата, определенная в формуле (5.85), второй координатой является  $\xi = r + x = r(1 + \cos \vartheta)$ ;  $\vartheta$  мы называем в дальнейшем углом рассеяния.

Из (5.85) при  $r \rightarrow \infty$  следует асимптотическое равенство

$$\psi = C_1 e^{ikx} + C_2 \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (5.86)$$

где сокращенно обозначено

$$C_1 = \frac{(-ik\eta)^n}{\Gamma(n+1)}, \quad C_2 = C_1^* \frac{in/k}{1 - \cos \vartheta}. \quad (5.86а)$$

Первый член правой части в равенстве (5.86) представляет падающую плоскую волну, второй член — рассеянную ядром сферическую волну.  $C_1$  и  $C_2$  не являются постоянными и зависят от  $\eta$ , но только в их фазовой составной части, так как  $n$  является чисто мнимым. Нас интересует только абсолютная величина отношения  $C_2/C_1$ , которая не зависит от  $\eta$  и поэтому также от  $r$ , а зависит лишь от угла рассеяния  $\vartheta$ . Из (5.86а), (5.85а) и (5.85б) получаем

$$\left| \frac{C_2}{C_1} \right| = \frac{|in|}{k(1 - \cos \vartheta)} = \frac{e^2 ZZ'}{m_a v^2 (1 - \cos \vartheta)} = \frac{e^2 ZZ'}{2m_a v^2 \sin^2 \vartheta/2}. \quad (5.87)$$

Квадрат этой величины согласно волномеханическому определению вероятности пребывания дает отношение числа рассеянных частиц, приходящихся на единицу пространственного угла рассеяния, к числу падающих частиц, приходящихся на единицу площади поверхности, перпендикулярной к направлению луча. Этот закон был

получен в свое время Резерфордом без привлечения квантовой теории, с помощью одного только геометрического рассмотрения гиперболических траекторий классической теории. Возможность этого связана с тем обстоятельством, что постоянная  $\hbar$  в уравнении (5.87) отсутствует. Закон Резерфорда, очевидно, справедлив не только для  $\alpha$ -лучей, но и для любых других частиц (протоны, электроны), находящихся во взаимодействии с ядром согласно закону Кулона. Мы не можем здесь остановиться на интересном «обменном эффекте», который имеет место в случае одинаковых сталкивающихся частиц. Для очень больших скоростей сталкивающихся частиц следовало бы, естественно, воспользоваться формулами теории относительности.

## Приложение I

### НОРМИРОВКА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

При переходе от ограниченной к неограниченной области условие сходимости нормирующихся интегралов приводит к затруднениям, которые могут быть устранены только путем изменения способа нормировки. Этот новый способ введен в теорию интегральных уравнений Германом Вейлем и принят в волновой механике.

Рассмотрим в качестве примера функцию  $I_\nu(kr)$ , где  $\nu$  — любое число, а  $k$  определяется как корень уравнения  $I_\nu(ka) = 0$ . Нормирующий интеграл для нее согласно формуле (4.76) имеет вид

$$N = \int_0^a [I_\nu(kr)]^2 r dr = \frac{a^2}{2} [I'_\nu(ka)]^2; \quad (5.88)$$

однако в пределе при  $a \rightarrow \infty$  вследствие асимптотического поведения  $aI'_\nu$  он становится расходящимся, принимая любые значения при  $a \rightarrow \pm \infty$ . Для того чтобы сделать  $I_\nu$  нормируемой и при  $a \rightarrow \infty$ , мы будем исходить из более общего интеграла

$$N' = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a I_\nu(kr) I_\nu(k'r) r dr, \quad (5.88a)$$

который согласно (4.90) ведет себя как функция  $\delta(k|k')$ <sup>1)</sup>, а именно обращается в нуль для  $k \neq k'$  и становится бесконечным при  $k = k'$ , так что

$$\int_{\Delta} N' k' dk' = 1, \quad (5.89)$$

где  $\Delta$  обозначает произвольный интервал, содержащий критическую точку  $k' = k$ . Так как интервал  $\Delta$  может быть, в частности, выбран как угодно малым, так что  $k$  внутри  $\Delta$  является практически постоянной, то вместо (5.89) можно записать

$$\int_{\Delta} N' dk' = \frac{1}{k} \quad (5.89a)$$

или, например, в форме, которая нам понадобится в некоторых случаях

$$\int_{\Delta} N' \sqrt{k'} dk' = \frac{1}{\sqrt{k}}. \quad (5.89b)$$

Для предельного случая  $a \rightarrow \infty$  мы изменяем нормирующий интеграл (5.88) следующим образом:

$$N = \int_0^{\infty} r dr I_{\nu}(kr) \int_{\Delta} dk' I_{\nu}(k'r), \quad (5.90)$$

т. е. заменяем одно<sup>2)</sup> из двух собственных колебаний  $I_{\nu}$  группой близких собственных колебаний

$$\int_{\Delta} dk' I_{\nu}(k'r) \quad (5.90a)$$

и достигаем тем самым того, что вышеупомянутая неопределенность раскрывается, так сказать, в силу интерферен-

<sup>1)</sup> Обозначениям  $\sigma$ ,  $r$ ,  $s$  в равенстве (4.90a) соответствуют теперь обозначения  $r$ ,  $k'$ ,  $k$ .

<sup>2)</sup> Можно было бы также (следуя Вейлю) заменить обе собственные функции  $I$  собственными дифференциалами вида (5.90a). Вместо употребляемого в тексте выражения «группа собственных колебаний» или «волновая группа» в волновой механике употреблен несколько неудачный термин «волновой пакет».

ции внутри группы волн. Мы получаем тогда согласно (5.88a) и (5.89a)

$$N = \int_{\Delta} N' dk' = \frac{1}{k}. \quad (5.91)$$

В предыдущих вычислениях для большей ясности математического процесса мы не обосновывали законности перестановки предельных переходов  $\lim a \rightarrow \infty$  и  $\lim \Delta \rightarrow 0$  (или, что то же самое,  $\lim k' \rightarrow k$ ). Поэтому будет полезно обосновать равенство (5.91) еще раз, на основании теоремы Грина. Полагая

$$\begin{aligned} u &= I_{\nu}(kr) e^{i\nu\varphi}, & v &= I_{\nu}(k'r) e^{-i\nu\varphi}, \\ d\sigma &= r dr d\varphi, & ds &= a d\varphi, \end{aligned} \quad (5.92)$$

вычислим обычным способом  $\int (u \Delta v - v \Delta u) d\sigma$ , с одной стороны, как двойной интеграл, с другой стороны, после преобразования Грина, как контурный интеграл<sup>1)</sup>.

В результате получим

$$(k^2 - k'^2) \int_0^a u v r dr = a \left( u \frac{\partial v}{\partial r} - v \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=a}. \quad (5.92a)$$

Если разделить обе части равенства на  $k^2 - k'^2$ , проинтегрировать по  $k'$  под знаком интеграла от  $k' = k - \frac{\Delta}{2}$  до  $k' = k + \frac{\Delta}{2}$  и перейти к пределу при  $a \rightarrow \infty$ , то получим слева нормирующий интеграл  $N$  [см. формулу (5.90)]. В правой части возьмем  $a$  настолько большим, чтобы  $I_{\nu}$  можно было подсчитать по асимптотическим формулам; лучше всего использовать полусумму выражений (4.55) и (4.56), причем стоящие в показателях рядом с  $\pm i\rho$  постоянные  $\mp \left( \nu + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2}$  частично взаимно уничтожаются, частично не имеют значения для дальнейшего и поэтому

<sup>1)</sup> Областью интегрирования формулы Грина в нашем случае является не круг радиуса  $a$ , а область периодичности  $u$  и  $v$ , аналогично формуле (5.5), т. е. круговой сектор с углом раствора  $\alpha = 2\pi/\nu$ . При интегрировании по  $\varphi$  в уравнении (5.92a) появился бы справа и слева множитель  $\alpha$ , на который в (5.92a) уже произведено сокращение.

могут быть сразу же опущены. Таким образом, получаем для правой части следующее выражение:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{k-\frac{\Delta}{2}}^{k+\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{\sqrt{kk'}} \frac{dk'}{k^2 - k'^2} [(e^{ika} + e^{-ika}) ik' (e^{ik'a} - e^{-ik'a}) - (e^{ik'a} + e^{-ik'a}) ik (e^{ika} - e^{-ika})]. \quad (5.92б)$$

Отсюда после умножения и соответствующей группировки членов находим

$$\frac{1}{\pi} \int_{k-\frac{\Delta}{2}}^{k+\frac{\Delta}{2}} \frac{dk'}{\sqrt{kk'}} \left[ \frac{\sin(k-k')a}{k-k'} + \frac{\sin(k+k')a}{k+k'} \right]. \quad (5.93)$$

Очевидно, при достаточно малом  $\Delta$  здесь можно  $\sqrt{kk'}$  заменить через  $k$  и вынести за знак интеграла. Если тогда положить в первом члене интеграла  $x = (k - k')a$ , то получим для него

$$-\int_{x_1}^{x_2} \sin x \frac{dx}{x}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} x_1 = a \frac{\Delta}{2}, \\ x_2 = -a \frac{\Delta}{2}, \end{cases}$$

т. е. в пределе при  $a \rightarrow \infty$  (см. задачу I.5) величину  $\pi$ . Во втором члене интеграла (5.93) после подстановки  $y = (k + k')a$  получаем для пределов интегрирования

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \left(2k - \frac{\Delta}{2}\right)a \\ y_2 &= \left(2k + \frac{\Delta}{2}\right)a \end{aligned} \right\} \rightarrow \infty \text{ в пределе при } a \rightarrow \infty.$$

Легко убедиться, что этот второй интеграл обращается в нуль. Тем самым выражение (5.93) переходит в  $1/k$  и одновременно (5.92а) в

$$N = \frac{1}{k}, \quad (5.94)$$

в соответствии с (5.91). Отсюда непосредственно следует также, что бесселевы функции  $I_\nu$ , нормированные описан-



ным способом к единице, задаются в виде

$$\frac{1}{\sqrt{N}} I_{\nu}(kr) = \sqrt{k} I_{\nu}(kr). \quad (5.94a)$$

Из соотношения (4.92)

$$I_{n+\frac{1}{2}}(kr) = \sqrt{\frac{2kr}{\pi}} \psi_n(kr) \quad (5.95)$$

закключаем далее, что нормированная к единице функция  $\psi_n$ , которую мы на стр. 275 обозначили через  $\Psi_n$ , находится в следующем соотношении с  $\psi_n$ :

$$\Psi_n(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \psi_n(kr). \quad (5.95a)$$

Согласно (5.94a) и (5.95) имеем

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{\infty} r dr \sqrt{k} I_{n+\frac{1}{2}}(kr) \int_{\Delta} dk' \sqrt{k'} I_{n+\frac{1}{2}}(k'r) = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} r^2 dr k \psi_n(kr) \int_{\Delta} dk' k' \psi_n(k'r). \end{aligned}$$

и, принимая во внимание (5.95a), получаем

$$1 = \int_0^{\infty} r^2 dr \Psi_n(kr) \int_{\Delta} dk' \Psi_n(k'r), \quad (5.96)$$

что, действительно, означает нормировку к единице в смысле (5.90).

Так как равенство (5.95) связывает не только  $I_{n+\frac{1}{2}}$  и  $\psi_n$ , но также и соответствующие функции  $H_{n+\frac{1}{2}}^{1,2}$  и  $\zeta_n^{1,2}$ , то равенство (5.95a) имеет место также и для нормированных к единице  $\zeta_n$ , которые на стр. 275 были нами обозначены через  $Z_n$ .

В случае произвольной системы собственных функций в трехмерном случае нормировка (5.90) принимает вид

$$N = \int d\tau u_n \int_{\Delta} dk' u'_n, \quad (5.97)$$

где  $u_n$  и  $u'_n$  — собственные функции, соответствующие собственным значениям  $k$  и  $k'$ . Нормированная к единице собственная функция записывается при этом в виде

$$U_n = \frac{u_n}{\sqrt{N}}. \quad (5.97a)$$

## Приложение II

### НОВЫЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ВНЕШНЕЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ, РАССМОТРЕННЫЙ НА ПРИМЕРЕ ШАРА

Рассматриваемая здесь «внешняя краевая задача» состоит в построении решения волнового уравнения  $\Delta u + k^2 u = 0$ , которое вне заданной поверхности  $\sigma$ , лежащей целиком в конечной части пространства, непрерывно, на  $\sigma$  принимает любые заданные граничные значения  $u = U$ , а в бесконечности удовлетворяет условию излучения. Это решение, как мы знаем, проще всего представляется с помощью функции Грина  $G$ , которая обращается в нуль на  $\sigma$ , удовлетворяет условию излучения в бесконечности и в произвольно заданной точке  $Q$  имеет особенность типа единичного источника.

В случае шара радиуса  $a$  и источника  $Q$  с координатами  $r = r_0$ ,  $\vartheta = 0$  мы представляем  $G$  по формуле (5.64)

$$G = \frac{k}{4\pi i} \begin{cases} \sum C_n u_n(k, r_0) \zeta_n(kr) P_n(\cos \vartheta) & \text{для } r > r_0, \\ \sum C_n \zeta_n(kr_0) u_n(k, r) P_n(\cos \vartheta) & \text{для } r < r_0 \end{cases} \quad C_n = 2n + 1. \quad (5.98)$$

Условие излучения для  $r \rightarrow \infty$  удовлетворяется в силу свойств множителя первой строки  $\zeta_n(kr)$ , точнее  $\zeta_n^1(kr)$ , граничное условие для  $r = a$  — в силу свойств множителя  $u_n(k, r)$  второй строки,

$$u_n(k, r) = \psi_n(kr) = A \zeta_n(kr), \quad A = -\frac{\psi_n(ka)}{\zeta_n(ka)}. \quad (5.98a)$$

При этом  $n$  является целым положительным числом, откуда следует, что  $P_n(\cos \vartheta)$  ведет себя непрерывно для всех значений  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ .

Теперь мы попытаемся решить задачу более экономным способом, наложив на функцию  $\zeta_n(kr)$  не только условия

излучения, но и граничное условие

$$\zeta_\nu(ka) = 0. \quad (5.99)$$

Тогда  $\nu$  не может быть целым числом, так как корни уравнения  $\zeta_\nu(\rho) = 0$  совпадают с корнями уравнения  $H_{\nu+\frac{1}{2}}^1(\rho) = 0$ , которые согласно формуле (4.121) являются комплексными величинами (большими по модулю). Мы обозначаем корни, лежащие в первой четверти комплексной плоскости  $\nu$ , через  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m, \dots$ , суммирование по полной системе этих корней — через  $\sum$  и полагаем

$$G = \sum D_\nu \zeta_\nu(kr) P_\nu(-\cos \vartheta). \quad (5.100)$$

Введенная здесь функция  $P_\nu$  является не полиномом Лежандра, а гипергеометрическим рядом из формулы (4.202а)

$$P_\nu(-\cos \vartheta) = F\left(-\nu, \nu+1, 1, \frac{1+\cos \vartheta}{2}\right). \quad (5.100a)$$

Использование в (5.100а) выражения  $P_\nu(-\cos \vartheta)$  вместо  $P_\nu(+\cos \vartheta)$  объясняется тем, что  $G$  должно быть регулярно на луче  $\vartheta = \pi$ , в то время как луч  $\vartheta = 0$  по предположению содержит особую точку  $Q$ ; этому соответствует тот факт, что  $P_\nu(-\cos \vartheta)$  при  $\vartheta = \pi$  принимает согласно (5.100а) значение  $F(-\nu, \nu+1, 1, 0) = 1$ , и, напротив, для  $\vartheta = 0$  согласно формуле (4.210), если мы там заменим  $\zeta$  через  $-\zeta = -\cos \vartheta$ , переходит в

$$F(-\nu, \nu+1, 1, 1) \rightarrow \frac{\sin \nu\pi}{\pi} \ln \vartheta^2. \quad (5.101)$$

Перейдем к определению коэффициентов  $D_\nu$  (в вычислении которых автору содействовал Саутер). Сначала сделаем одно замечание: функции  $\zeta_\nu$  ортогональны между собой,

$$\int_{ka}^{\infty} \zeta_\nu(\rho) \zeta_\mu(\rho) d\rho = 0, \quad \mu \neq \nu. \quad (5.102)$$

Это вытекает из дифференциального уравнения для  $\zeta_\nu$ , которое в соответствии с уравнением (4.92а) для  $\psi_n$  имеет вид

$$\rho \frac{d^2 \rho \zeta_\nu}{d\rho^2} + [\rho^2 - \nu(\nu+1)] \zeta_\nu = 0,$$

Если написать это дифференциальное уравнение для  $\zeta_\mu$ , умножить крест-на-крест на  $\zeta_\mu$  и соответственно на  $\zeta_\nu$ , взять разность обоих уравнений и проинтегрировать по основной области  $ka \leq \rho < \infty$ , то получим

$$\begin{aligned} & [\nu(\nu+1) - \mu(\mu+1)] \int_{ka}^{\infty} \zeta_\mu \zeta_\nu d\rho = \\ & = \rho \left( \zeta_\mu \frac{d\rho \zeta_\nu}{d\rho} - \zeta_\nu \frac{d\rho \zeta_\mu}{d\rho} \right) \Big|_{ka}^{\infty}. \end{aligned} \quad (5.102a)$$

Правая часть уравнения (5.102a) обращается в нуль, для нижнего предела — в силу условия (5.99), для верхнего предела — в силу асимптотического поведения  $\zeta$  согласно формуле (4.55). Тем самым соотношение (5.102) доказано. Одновременно из уравнения (5.102a) получаем выражение для нормирующего интеграла

$$N = \int_{ka}^{\infty} [\zeta_\nu(\rho)]^2 d\rho = \lim_{\mu \rightarrow \nu} \rho \frac{\zeta_\mu \frac{d\rho \zeta_\nu}{d\rho} - \zeta_\nu \frac{d\rho \zeta_\mu}{d\rho}}{\nu(\nu+1) - \mu(\mu+1)} \Big|_{ka}^{\infty};$$

отсюда, дифференцируя числитель и знаменатель по  $\mu$  и принимая во внимание (5.99), получаем

$$N_\nu = \frac{(ka)^2}{2\nu+1} \left( \frac{\partial \zeta_\nu}{\partial \nu} \frac{d\zeta_\nu}{d\rho} \right)_{\rho=ka}. \quad (5.103)$$

Полагая сокращенно

$$\eta_\nu(\rho) = \frac{\partial \zeta_\nu(\rho)}{\partial \nu}, \quad \zeta'_\nu(\rho) = \frac{d\zeta_\nu(\rho)}{d\rho}, \quad (5.103a)$$

вместо (5.103) можем записать короче

$$N_\nu = \frac{(ka)^2}{2\nu+1} \eta_\nu(ka) \zeta'_\nu(ka). \quad (5.103b)$$

На основании этой ортогональности и нормировки получаем теперь из равенства (5.100) после умножения на  $\zeta_{\bar{\nu}}(kr) k dr$  и интегрирования по  $r$  от  $r=a$  до  $r=\infty$  ( $\bar{\nu}$  означает какой-либо из корней  $\nu$ )

$$D_{\bar{\nu}} N_{\bar{\nu}} P_{\bar{\nu}}(-\cos \vartheta) = \int_a^{\infty} G \zeta_{\bar{\nu}}(kr) k dr. \quad (5.104)$$

Но это определение  $D$  является неудовлетворительным, так как мы не знаем еще  $G(r, \vartheta)$ . Поэтому совершим следующий предельный переход: после деления равенства (5.104) на  $\dot{P}_\nu(-\cos \vartheta)$  (черточка над  $\nu$  может теперь быть опущена) заставим  $\vartheta$  стремиться к нулю и, выделив член  $\frac{e^{ikR}}{R}$ , имеющий при  $R=0$  особенность типа источника, положим

$$-4\pi G = \frac{e^{ikR}}{R} + g, \quad R^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \vartheta. \quad (5.104a)$$

Мы переписываем, таким образом, равенство (5.104) в виде

$$-4\pi D_\nu N_\nu = \frac{1}{P_\nu(-\cos \vartheta)} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \int_a^\infty \left( \frac{e^{ikR}}{R} + g \right) \zeta_\nu(kr) k dr. \quad (5.104b)$$

Так как для всех значений  $a < r < \infty$  и произвольного  $\vartheta$  функция  $g$  остается конечной, в то время как  $P_\nu(-\cos \vartheta)$  при  $\vartheta \rightarrow 0$  обращается в бесконечность, то функцию  $g$  в правой части (5.104b) можно отбросить. На том же основании для оставшейся части  $e^{ikR}/R$  можно ограничить интервал интегрирования малой окрестностью источника  $r_0$ , полагая

$$r = r_0(1 + \eta), \quad -\varepsilon < \eta < +\varepsilon, \quad dr = r_0 d\eta,$$

$$\zeta_\nu(kr) = \zeta_\nu(kr_0), \quad e^{ikR} = 1,$$

в то время как знаменатель  $R$  следует аппроксимировать более точно:

$$R = r_0 \sqrt{(1 + \eta)^2 + 1 - 2(1 + \eta) \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2}\right)} \sim r_0 \sqrt{\eta^2 + \vartheta^2}.$$

Таким образом, из (5.104b) получаем

$$4\pi D_\nu N_\nu = \frac{1}{P_\nu(\cos \vartheta)} - k \zeta_\nu(kr_0) \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2 + \vartheta^2}}, \quad (5.104в)$$

но стоящий в правой части предел известен нам в силу формулы (4.210) и равен  $\pi/\sin \varpi$ . Если принять во внимание формулу (5.103), то из равенства (5.104в) получится

следующее вполне определенное и не содержащее  $\varepsilon$  выражение для  $D_\nu$ :

$$D_\nu = -\frac{1}{4ka^2} \frac{2\nu+1}{\sin \nu\pi} \frac{\zeta_\nu(kr_0)}{\eta_\nu(ka) \zeta'_\nu(ka)}. \quad (5.105)$$

Поэтому наш ряд (5.100) для функции Грина принимает следующий вид:

$$G = -\frac{1}{4ka^2} \sum_\nu \frac{2\nu+1}{\sin \nu\pi} \frac{\zeta_\nu(kr_0) \zeta_\nu(kr)}{\eta_\nu(ka) \zeta'_\nu(ka)} P_\nu(-\cos \vartheta). \quad (5.106)$$

Выражение для  $G$  значительно упрощается, если мы вместо  $\zeta$  введем «собственные функции, нормированные к единице»,

$$Z_\nu(kr) = \frac{\zeta_\nu(kr)}{\sqrt{N_\nu}}, \quad Z_\nu(kr_0) = \frac{\zeta_\nu(kr_0)}{\sqrt{N_\nu}}.$$

Тогда, принимая во внимание (5.103б), мы можем переписать ряд (5.106) в виде

$$G = -\frac{k}{4} \sum_\nu Z_\nu(kr_0) Z_\nu(kr) \frac{P_\nu(-\cos \vartheta)}{\sin \nu\pi}. \quad (5.106a)$$

Формула (5.106a) будет нам полезна в дальнейшем; пока же мы ограничимся формулой (5.106).

1) Ряд (5.106) дает единое аналитическое представление функции Грина как для  $r > r_0$ , так и для  $r < r_0$ , в то время как в (5.98) она определялась двумя различными формулами.

2) Требуемое всюду свойство взаимности функции Грина выражается здесь в том, что выражение (5.106) построено *симметрично* относительно  $r$  и  $r_0$ . Напротив, согласно формуле (5.98)  $G$  удовлетворяло требованию взаимности только потому, что оба выражения для  $r > r_0$  и  $r < r_0$  менялись местами при перестановке  $r$  и  $r_0$ . Симметричность  $G$  относительно углов  $\vartheta$  и  $\vartheta_0$  (последний был у нас положен равным нулю) мы можем просто выразить тем, что как в (5.106), так и в (5.98) заменим  $\cos \vartheta$  выражением  $\cos \Theta$ , симметричным относительно  $\vartheta$  и  $\vartheta_0$ .

3) Условие ортогональности (5.102) существенно отличается от нашей прежней формулировки:  $\zeta_\nu$  в (5.102)

умножается на  $\zeta_\mu$ , а не на  $\zeta_\mu^*$ , как это предполагалось в случае комплексной собственной функции в соответствии с формулой (5.11а); далее,  $\zeta_\nu \zeta_\mu$  в интеграле (5.102) умножается на одномерный бесконечно малый интервал  $dr$ , а не на  $r^2 dr$ , как это необходимо при использовании формулы Грина, например в задаче V.16.

4) Следует отметить то своеобразное обстоятельство, что наше представление (5.106) для  $\vartheta = 0$  теряет свою силу, так как тогда согласно (5.101) каждый член становится бесконечным как  $\ln \vartheta^2$ , в то время как представляемая функция для  $\vartheta = 0$  и  $r \neq r_0$  должна вести себя регулярно. Мы поэтому должны рассматривать целый луч  $\vartheta = 0$  (не только его точку  $\vartheta = 0$ ,  $r = r_0$ ) как место особенностей представления (5.106). Таким образом, наше представление становится непригодным также и в окрестности этого места, т. е. в описанном вокруг сингулярного луча более или менее узком конусе. Решение вопроса о том, как следует дополнить наше представление для внутренней этого конуса, мы откладываем до стр. 305.

5) Напротив, формула (5.106) упрощается для окрестности  $\vartheta = \pi$ , скажем для  $\vartheta = \pi - \delta$ , где оно в первоначальной форме записи (5.100) имеет вид

$$G = \sum D_\nu \zeta_\nu(kr) P_\nu(\cos \delta). \quad (5.107)$$

Если, кроме того, мы заставим в этой формуле  $r_0$  стремиться к  $\infty$ , т. е. перейдем от первоначальной сферической волны  $G$  к плоской волне  $u$ , идущей из направления  $\vartheta = 0$ , то, несмотря на комплексный индекс  $\nu$ , мы можем использовать для  $H_{\nu+1/2}(kr_0)$  приближение Ханкеля (4.55), так как при этом предельном переходе аргумент становится большим сравнительно с индексом, и можно положить согласно (4.96)

$$\zeta_\nu(kr_0) = \frac{1}{kr_0} e^{i \left[ kr_0 - (\nu+1) \frac{\pi}{2} \right]}. \quad (5.107a)$$

Если мы включим все независящие от  $\nu$  множители в величину амплитуды  $A$ , то получим из (5.105)

$$D_\nu = \frac{A \frac{2\nu+1}{\sin \nu\pi} e^{-i\nu\pi/2}}{\eta_\nu(ka) \zeta'_\nu(ka)}. \quad (5.1076)$$

Это значение, подставленное в формулу (5.107), даёт диффрагированное поле плоской волны и вне шара радиуса  $a$  с углом дифракции  $\delta$ . В качестве граничного условия при  $r=0$  требуем пока  $u=0$ ; граничные условия, соответствующие задачам электромагнитной оптики, будут рассмотрены ниже.

6) Большим преимуществом представления (5.106) по сравнению с прежним представлением (5.98) является его хорошая сходимость для больших значений  $ka$ . Чтобы доказать это, вычислим множители в знаменателе выражения (5.105) для больших  $ka$  и  $v$ .

Полагая

$$\cos \alpha = \frac{v}{\rho}, \quad (5.108)$$

[см. формулу (4.110a)], мы имеем согласно (4.119)

$$\zeta_v(\rho) = \frac{i}{\rho \sqrt{\sin \alpha}} \sin z; \quad (5.108a)$$

здесь

$$z = \rho (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) - \frac{\pi}{4}. \quad (5.108b)$$

Корни уравнения  $\zeta_v = 0$  задаются с помощью уравнения  $\sin z = 0$ ,  $z = z_m = -m\pi$ ,  $\cos z_m = (-1)^m$ ,  $\cos^2 z_m = 1$ . (5.108b)

Дифференцируя выражение (5.108a) и приближенно полагая при дифференцировании, что медленно меняющийся множитель  $\sin \alpha$  является постоянным, получим при  $z = z_m$

$$\frac{d\zeta_v}{d\alpha} = \frac{i}{\rho \sqrt{\sin \alpha}} \left( \cos z \frac{dz}{d\alpha} \right)_{z=z_m} = i\alpha \sqrt{\sin \alpha} \cos z_m,$$

т. е., принимая во внимание (5.108),

$$\eta_v = \frac{\partial \zeta_v}{\partial v} = \frac{\partial \zeta_v}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dv} = \frac{-i\alpha}{\rho \sqrt{\sin \alpha}} \cos z_m. \quad (5.108r)$$

С другой стороны, согласно (5.108a) и (5.108b) и принимая во внимание, что  $\sin z_m = 0$ , имеем при  $z = z_m$

$$\begin{aligned} \zeta'_v &= \frac{d\zeta_v}{d\rho} = \frac{\partial \zeta_v}{\partial \rho} + \frac{\partial \zeta_v}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{d\rho} = \frac{i}{\rho \sqrt{\sin \alpha}} \cos z_m \left( \frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{d\rho} \right)_{z=z_m} = \\ &= \frac{i}{\rho} \sqrt{\sin \alpha} \cos z_m. \end{aligned} \quad (5.108d)$$



Из (5.108 г) и (5.108д) следует, наконец, при  $\rho = ka$

$$\eta_\nu(ka) \zeta'_\nu(ka) = \alpha \left( \frac{\cos z_m}{ka} \right)^2 = \frac{\alpha}{(ka)^2}. \quad (5.109)$$

Если мы подставим это в (5.105), то получим

$$D_\nu = -\frac{k}{4\alpha} \frac{2\nu + 1}{\sin \nu\pi} \zeta_\nu(kr_0). \quad (5.110)$$

Согласно (4.124) значение  $\nu$  в первом приближении равно  $ka$ , но с возрастанием  $m$  возрастает до  $\infty$ , пробегая последовательность значений, лежащих в верхней полуплоскости. Отсюда следует, что  $\sin \nu\pi$  возрастает экспоненциально для последовательности значений  $\nu_1, \nu_2, \dots$  и  $D_\nu$  убывает экспоненциально вследствие присутствия  $\sin \nu\pi$  в знаменателе.

То же самое имеет место также и для множителя  $\zeta_\nu(kr_0)$  в формуле (5.110), который подсчитывается по формуле Дебая (4.112) (играет роль только более высокая седловая точка), а не по формуле (5.108а) (обе седловые точки примерно одинаковой высоты). Поэтому вспомогательный угол  $\alpha$  имеет теперь другое значение, чем в (5.108):  $\cos \alpha$  равен  $\nu/k r_0$ , а не  $\nu/ka$ , как это имело место ранее. Вследствие этого  $\zeta_\nu(kr_0)$  для нашей последовательности  $\nu$  экспоненциально уменьшается. То же самое, наконец, справедливо и для множителя  $\zeta_\nu(kr)$  в формуле (5.106).

В частном случае уравнения беспроволочной телеграфии, который будет рассмотрен в приложении к гл. VI, в ряде типа (5.98) было бы необходимо подсчитать примерно 1000 членов, тогда как вполне достаточно взять один или два члена ряда типа (5.106), как это будет там доказано. На том же примере мы увидим, как ряд второго типа получается из ряда первого типа с помощью чисто математического преобразования (в комплексной плоскости индекса  $\nu$ ).

7) Строение нашей функции Грина и ее поведение в окрестности особой точки  $\vartheta = 0$  особенно отчетливо видны в нашем представлении (5.106а). Чтобы, исходя отсюда, грубо описать поведение функции Грина для малых  $\vartheta$ , используем приближенную формулу (4.210)

$$P_\nu(-\cos \vartheta) \rightarrow \frac{\sin \nu\pi}{\pi} \ln \vartheta^2 \text{ при } \vartheta \rightarrow 0$$

и получим из (5.106а)

$$G = -\frac{k}{4\pi} \ln \vartheta^2 \sum_{\nu} Z_{\nu}(kr_0) Z_{\nu}(kr). \quad (5.111)$$

Получающаяся здесь сумма  $\sum_{\nu}$  носит « $\delta$ -образный характер».

Действительно, если разложить  $\delta$ -функцию в интервале  $0 < r < \infty$  по нормированной к единице, ортогональной, а в остальном совершенно произвольной системе функций  $Z_{\nu}(kr)$

$$\delta(r, r_0) = \begin{cases} 0 & \text{при } r \neq r_0 \\ \infty & \text{при } r = r_0 \end{cases} = \sum A_{\nu} Z_{\nu}(kr),$$

$$\text{где } \int_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} \delta(r, r_0) dr = 1,$$

то получим формально

$$\begin{aligned} A_{\nu} &= \int_0^{\infty} \delta(r, r_0) Z_{\nu}(kr) dr = \\ &= Z_{\nu}(kr_0) \int_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} \delta(r, r_0) dr = Z_{\nu}(kr_0), \end{aligned}$$

причем, правда, мы ничего не можем сказать о сходимости определенного таким образом общего  $\delta$ -ряда

$$\delta(r, r_0) = \sum Z_{\nu}(kr_0) Z_{\nu}(kr) \quad \text{при } r \neq r_0. \quad (5.111a)$$

Очевидна только расходимость ряда (5.111a) при  $r = r_0$  (все члены ряда положительны). Требуемое при  $r \neq r_0$  «представление нуля» достигается, вообще говоря, бесконечно быстрыми «осцилляциями вокруг нуля». Поэтому при  $\vartheta \rightarrow 0$  формула (5.111a) не годится для действительного подсчета  $G$ .

Такой подсчет может быть произведен, если исходить из уравнения (5.104a) для всюду конечной функции  $g$ , которая в силу (5.104a) принимает при  $r = a$  граничные

значения

$$g = g_a = -\frac{e^{ikR_a}}{R_a},$$

$$R_a^2 = a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \vartheta_a, \quad (5.111б)$$

где  $\vartheta_a$  — полярный угол на сфере  $r = a$ . Кроме того,  $g$  должно удовлетворять вне сферы  $a < r < \infty$  дифференциальному уравнению  $\Delta g + k^2 g = 0$  и в бесконечности — условию излучения. Поэтому  $g$ , как решение сформулированной на стр. 298 внешней краевой задачи, может быть получено с помощью нашей функции Грина, представленной, например, в форме (5.106), а именно следующим образом:

$$g = \int g_a \frac{\partial G}{\partial n} d\tau_a, \quad \frac{\partial G}{\partial n} = -\left(\frac{\partial G}{\partial r}\right)_{r=a}.$$

Таким образом, получаем  $g$  в виде ряда, суммируемого по  $\nu$ , который для интересующего нас луча  $\vartheta = 0$ ,  $a < r < \infty$  имеет вид

$$g(r, \vartheta = 0) = -\frac{\pi}{2} \sum \frac{2\nu + 1}{\sin \nu\pi} C_\nu \frac{\zeta_\nu(kr)}{\eta_\nu(ka)}, \quad (5.111в)$$

$$C_\nu = \int_0^\pi g_a P_\nu(-\cos \vartheta_a) \sin \vartheta_a d\vartheta_a. \quad (5.111г)$$

Так как особая точка  $\vartheta = 0$  выражения  $P_\nu(-\cos \vartheta)$  встречается теперь только под знаком интеграла в  $C_\nu$  и имеет только логарифмический порядок, то все коэффициенты  $C_\nu$  имеют конечную величину; их явное выражение получается довольно сложным путем<sup>1)</sup>.

Мы ввели в этом приложении совершенно новый вид *сингулярных собственных функций*, которые существенно отличаются от *регулярных собственных функций*. Используемые в этой главе сингулярные собственные функции

$$\zeta_\nu(kr) P_\nu(-\cos \vartheta)$$

<sup>1)</sup> См., например, в книге Ватсона вычисление «интеграла Уиттекера», который является предельным случаем рассматриваемых в тексте интегралов  $C_\nu$ .

не представляют собой свободных колебаний, а требуют некоторого возбуждения вдоль луча  $\vartheta = 0$ . Напротив, каждое из двух использованных в (5.98) частных решений

$$u_n(k, r) P_n(\cos \vartheta) \text{ и } \zeta_n(kr) P_n(\cos \vartheta)$$

является во всей физической области  $a \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \vartheta \leq \pi$  свободным от источников; их возбуждение, если только можно говорить о таковом, имеет место вне этой области, а именно в центре шара  $r = 0$  и, кроме того, для  $u_n$  — в бесконечности. В работе автора от 1912 г, цитированной на стр. 256, наши «регулярные» собственные функции назывались «несобственно» собственными, наши «сингулярные» — «собственно» собственными колебаниями. Для обоснования этого с первого взгляда парадоксального термина могут служить следующие соображения.

Мы исходим, из того, что во всех задачах о колебаниях свободных и вынужденных, периодических по времени и затухающих имеет место соотношение

$$c = \frac{\omega}{k}, \quad (5.112)$$

в котором мы рассматриваем  $c$  (скорость звука или света) как вещественное число, т. е. считаем передающую среду не поглощающей. До сих пор мы считали  $\omega$  вещественным и предполагали, что временная зависимость задана в форме  $\exp(-i\omega t)$ . В этом случае наше требование  $\zeta_\nu(ka) = 0$  в силу тождественного с (5.108) соотношения

$$a \cos \alpha = \frac{\nu}{k} \quad (5.112a)$$

дает комплексное значение для  $\nu$  с положительной мнимой частью, так что  $a \cos \alpha$  при вещественном  $k$  есть число того же типа, т. е. имеет вид

$$a \cos \alpha = A + iB, \text{ где } B > 0. \quad (5.112b)$$

Теперь же, сохраняя соотношения (5.112), (5.112a), (5.112b), мы положим  $\nu$  равным, например, *положительному целому числу*  $n$ . Тогда из этих соотношений получаем для  $k$  и  $\omega$  комплексные значения с отрицательной мнимой

частью

$$k = k_1 - ik_2 = \frac{n}{A + iB} = n \frac{A - iB}{A^2 + B^2},$$

$$\omega = \omega_1 - i\omega_2 = c(k_1 - ik_2).$$

Граничное условие  $\zeta_n(ka) = 0$  переходит при этом в условие

$$\zeta_n[(k_1 - ik_2)a] = 0, \quad (5.112в)$$

и прежняя чисто периодическая временная зависимость  $\exp(-i\omega t)$  принимает вид

$$\exp(-i\omega_1 t) e^{-\omega_2 t} = \exp(-ick_1 t) e^{-ck_2 t}.$$

После присоединения этого зависящего от времени множителя в силу регулярности  $P_n(-\cos \vartheta)$  при целом  $n$  наша сингулярная собственная функция (5.111) принимает вид *затухающего колебания*, регулярного во всей области  $r > a$ ,

$$\zeta_n[(k_1 - ik_2)r] P_n(-\cos \vartheta) \exp(-ick_1 t) e^{-ck_2 t}, \quad (5.113)$$

которое при  $t = -\infty$  начинается с бесконечной амплитудой и, имея постоянные период колебаний и декремент, затухает при  $t = +\infty$  (исключением является только сфера  $r = a$ , так как на ней все время имеем  $\zeta_n(ka) = 0$ ). Очевидно, имеется  $\infty^2$  таких колебаний зонального характера. Они определяются двумя индексами: целым числом  $n$  и порядковым номером комплексного корня  $k$  трансцендентного уравнения  $\zeta_n(ka) = 0$  (в случае тессерального характера шаровых функций число возможных колебаний увеличилось бы даже до  $\infty^3$ ). Эти затухающие колебания являются, очевидно, физически простейшими частными решениями нашей шаровой задачи для граничного условия  $u = 0$  и в качестве таковых действительно оправдывают название «собственно собственных колебаний». Так как они теснейшим образом связаны с нашими сингулярными собственными функциями (5.113), то становится понятным, почему эти последние могли дать нам простейшее решение нашей граничной задачи.

В дальнейшем мы перенесем эти собственные колебания, полученные сначала для скалярных полей, на электромагнитное — оптическое векторное поле, что, как мы увидим

в гл. VI, не составляет никаких принципиальных затруднений. При этом необходимо обратить внимание на следующие пункты:

1) Рассматриваемое до сих пор граничное условие  $u = 0$  должно быть заменено в электромагнитном случае условием

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru) = 0, \quad (5.114)$$

как это показывается в гл. VI.

2) В прежнем трансцендентном уравнении  $\zeta_n(ka) = 0$  или, как мы писали в (5.112в),  $\zeta_n(ka) = 0$  функция  $\zeta_n(\rho)$  должна быть заменена функцией

$$\xi_n(\rho) = \frac{\partial}{\partial r}[r\zeta_n(\rho)],$$

так как  $\rho = kr$ , то это равносильно замене  $\xi_n(\rho)$  выражением

$$\xi_n(\rho) = \zeta_n(\rho) + \rho\zeta'_n(\rho). \quad (5.114a)$$

Соответственно  $\eta$  в (5.103а) следует заменить через

$$\eta_n(\rho) = \frac{\partial \xi_n(\rho)}{\partial n}. \quad (5.114б)$$

3) В то время как в случае скалярного поля мы имели дело с одной функцией поля  $u$ , в случае электромагнитного поля мы должны рассмотреть совместно две такие функции,  $u$  и  $v$ ;  $v$  удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению и аналогичному граничному условию, что и функция  $u$ .

Рассматриваемые здесь затухающие электромагнитные собственные колебания были давно уже известны в литературе. В случае шара они были исследованы Томсоном<sup>1)</sup>, представляя собой простейший пример стоявшей тогда в центре внимания задачи об «осцилляторе Герца». Они были обобщены Абрагамом<sup>2)</sup> на случай удлиненного эллипсоида вращения (стержнеобразный осциллятор) и на случай

<sup>1)</sup> J. J. Thomson, Proc. London. Math. Soc., 15 (1917); учебник Recent Researches in electricity and magnetism, Oxford, 1893, так называемый «третий том Максвелла».

<sup>2)</sup> M. Abraham, Ann. d. Phys. 66, 435 (1898); 67, 834 (1898); Math. Ann., 52, 81 (1899). Дальнейшую литературу см. в Enzykl. d. Math. Wissenschaften, т. V, ч. 2, статья Абрагама, стр. 508.

параболоида вращения (проволока со свободным концом). Действительно, весь ход наших рассуждений при использовании эллиптических координат может быть без принципиальных затруднений перенесен с цилиндрических и шаровых функций представления (5.113) на область волновых функций Ламе. Кроме того, мы видим теперь, что они могут служить также для построения функций Грина внешней области эллипсоида или параболоида и для решения соответствующих граничных задач.

Мы укажем, наконец, на некоторые задачи, решению которых могут способствовать методы, развитые в этом приложении.

а) *Дисперсия от коллоидных частиц.* Ми в одной из работ, относящихся к 1908 г., установил связь хорошо заметных под ультрамикроскопом явлений окрашивания с диэлектрической постоянной и проводимостью отдельной рассеивающей частицы. Частица при этом предполагалась шарообразной, ее диаметр—*малым относительно длины волны,  $ka \ll 1$* . В этом случае ряды типа (5.98) сходились достаточно быстро. В противоположном предельном случае,  $ka \gg 1$ , приводит к цели геометрическая оптика; но промежуточная область трудна для исследования. Здесь, очевидно, уместны теперь ряды типа (5.106), построенные для случая бесконечно удаленного источника. То обстоятельство, что мы рассматриваем шар как идеальный проводник, а Ми рассматривал его как произвольную диспергирующую среду, не играет здесь существенной роли. Нужно только заменить *граничное условие* (5.114) для идеального проводника *условием перехода* между внутренним и внешним пространством. Сходимость полученных таким образом рядов тем лучше, чем ближе мы к предельному случаю геометрической оптики.

б) *Отражение плоской волны от поверхности идеально проводящего шара.* Выше, в п. 5 (см. стр. 303), мы рассмотрели поле дифракции *позади* сферы в схематизированном виде (т. е. для упрощенного граничного условия  $u=0$  и при скалярном характере поля) и представили это поле при  $ka \gg 1$  с помощью формул (5.107) и (5.107а). Как показывают опытные данные, на *передней стороне сферы*, в частности при  $\vartheta=0$ , обнаруживаются своеобразные явления интерференции, которые до сих пор, при обычном

методе исследования с помощью рядов типа (5.98), были недоступны аналитической формулировке. Если же применять ряды типа (5.106), то возникающие аналитические затруднения могут быть объяснены наличием у этих рядов особенности на луче  $\vartheta = 0$ . Эти затруднения могут быть преодолены способом, указанным на стр. 306, если только в рассматриваемой задаче отражения принять во внимание соответствующие граничные условия.

в) *Радуга*. Эта классическая проблема явилась исходным пунктом для асимптотических исследований Дебая (см. стр. 168) и всех предпринятых с их помощью попыток проникновения в область коротких волн ( $ka \gg 1$ ). Сама проблема радуги получила с практической точки зрения полное разрешение в работе Ван дер Поля и Бреммера<sup>1)</sup>. Но в методическом отношении и здесь остается известный пробел между областью применимости методов волновой оптики и областью применимости методов геометрической оптики.

Задача настоящего приложения состоит, вообще говоря, как раз в заполнении подобного рода математических пробелов.

### Приложение III

#### СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ВОЛНОВОЙ МЕХАНИКИ ДЛЯ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ В ПАРАБОЛИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Мы покажем здесь в основных чертах, каким путем можно получить выражение (5.85) для волновой функции процесса рассеяния. Более подробное доказательство можно найти в учебниках по волновой механике<sup>2)</sup>.

Параболические координаты  $\xi = r + x$ ,  $\eta = r - x$  определяют, как известно, в плоскости, проходящей через ось  $x$ ,

<sup>1)</sup> B. van der Pol and H. Bremmer, Phil. Mag., 24, 141, 825 (1937).

<sup>2)</sup> Например, A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, т. II, гл. V, § 6 и гл. II, § 9. С помощью одного комплексного интегрального представления функций  $L$  здесь выводится также асимптотическая формула (5.86), на которой мы не останавливаемся.



двойную систему софокусных парабол, которые имеют точку  $r=0$  своим общим фокусом. Вырожденные параболы  $\xi=0$ ,  $\eta=0$  совпадают с отрицательной и соответственно с положительной осью  $x$ ; параболы  $\xi=\infty$ ,  $\eta=\infty$  ограничивают плоскость со стороны больших положительных и соответственно отрицательных  $x$ .

Если вращать плоскость вокруг оси  $x$ , то координаты  $\xi$ ,  $\eta$  и угол поворота  $\varphi$  составляют ортогональную систему координат в пространстве, которая связана с декартовыми координатами следующим образом:

$$x = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \quad y = \sqrt{\xi\eta} \cos \varphi, \quad z = \sqrt{\xi\eta} \sin \varphi.$$

Отсюда получаем следующее выражение для квадрата линейного элемента:

$$ds^2 = \frac{1}{4}(\xi + \eta) \left( \frac{d\xi^2}{\xi} + \frac{d\eta^2}{\eta} \right) + \xi\eta d\varphi^2. \quad (5.115)$$

Как известно, если в ортогональной системе координат  $p_1, p_2, p_3$ ,  $ds^2 = g_1^2 dp_1^2 + g_2^2 dp_2^2 + g_3^2 dp_3^2$ , то

$$\Delta\psi = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left[ \frac{\partial}{\partial p_1} \left( \frac{g_2 g_3}{g_1} \frac{\partial \psi}{\partial p_1} \right) + \frac{\partial}{\partial p_2} \left( \frac{g_1 g_3}{g_2} \frac{\partial \psi}{\partial p_2} \right) + \frac{\partial}{\partial p_3} \left( \frac{g_1 g_2}{g_3} \frac{\partial \psi}{\partial p_3} \right) \right].$$

Следовательно,

$$\Delta\psi = \frac{4}{\xi + \eta} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\xi\eta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 \varphi}.$$

Волновое уравнение (5.65) в случае, когда энергия взаимодействия  $V$  имеет вид

$$V = \frac{ZZ'e^2}{r} = \frac{2ZZ'e^2}{\xi + \eta},$$

а  $\psi$  не зависит от  $\varphi$ , представляется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{m_\alpha}{2\hbar^2} [(\xi + \eta)W - 2ZZ'e^2] \psi = 0. \quad (5.116)$$

Полагая  $\psi = \psi_1(\xi) \psi_2(\eta)$  и разделяя в уравнении (5.116) переменные, приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{d}{d\xi} \xi \frac{d\psi_1}{d\xi} + \left( \frac{m_\alpha W}{2\hbar^2} \xi - \frac{m_\alpha ZZ'e^2}{2\hbar^2} + \beta \right) \psi_1 = 0, \quad (5.117)$$

$$\frac{d}{d\eta} \eta \frac{d\psi_2}{d\eta} + \left( \frac{m_\alpha W}{2\hbar^2} \eta - \frac{m_\alpha ZZ'e^2}{2\hbar^2} - \beta \right) \psi_2 = 0, \quad (5.118)$$

где  $\beta$  — некоторая постоянная функция.  $\psi$  для  $\xi \rightarrow \infty$  (большие положительные  $x$ ) должно удовлетворять *условию излучения* (5.44). Так как  $ds_i$  для больших  $\xi$  в силу (5.115) равно  $\frac{1}{2} d\tilde{\xi}$ , т. е.  $\frac{\partial}{\partial r}$  в формуле (5.44) становится равным  $\frac{\partial}{\partial s_i} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial s_i}\right) \frac{\partial}{\partial \xi} \equiv 2 \frac{\partial}{\partial \tilde{\xi}}$ , то условие излучения в параболических координатах записывается в следующем виде:

$$\frac{\xi}{2} \left( 2 \frac{d\psi_1}{d\tilde{\xi}} - ik\psi_1 \right) = 0, \quad (5.119)$$

где

$$k = \frac{m_a v}{h} \quad (\text{см. 5.85a}).$$

Полагая поэтому  $\psi_1 = \exp\left(\frac{ik}{2} \xi\right)$ , получаем из уравнения (5.117)

$$\left( -\frac{k^2}{4} \xi + \frac{ik}{2} + \frac{m_a W}{2\hbar^2} \xi - \frac{m_a ZZ'e^2}{2\hbar^2} + \beta \right) \psi_1 = 0. \quad (5.120)$$

Оба члена, содержащие  $\xi$ , взаимно уничтожаются в силу значений  $k$  и  $W$  [см. уравнение (5.79)]. После этого уравнению (5.120) можно удовлетворить, определив  $\beta$  следующим образом:

$$\beta = \frac{m_a ZZ'e^2}{2\hbar^2} - \frac{ik}{2}. \quad (5.121)$$

Уравнение (5.117), как нетрудно убедиться с помощью несложного подсчета, удовлетворяется функцией  $\psi_1$  не только асимптотически, при больших  $\xi$ , но и точно для всех  $\xi$ .

Уравнение (5.118) в силу (5.121) принимает вид

$$\frac{d}{d\eta} \eta \frac{d\psi_2}{d\eta} + \left( \frac{m_a W}{2\hbar^2} \eta - \frac{m_a ZZ'e^2}{\hbar^2} + \frac{ik}{2} \right) \psi_2 = 0. \quad (5.122)$$

Функция  $\psi_2$  для  $\eta \rightarrow \infty$  (большие отрицательные  $x$ ) должна удовлетворять условию (5.44a); последнее имеет вид, аналогичный (5.119):

$$\frac{\eta}{2} \left( 2 \frac{d\psi_2}{d\eta} + ik\psi_2 \right) = 0.$$

Поэтому в первом приближении для больших  $\eta$  нужно было бы положить

$$\psi_2 = \exp\left(-\frac{ik}{2}\eta\right).$$

Однако это не являлось бы точным решением уравнения (5.122). Поэтому мы пишем в более общем виде

$$\psi_2 = e^{-ik\eta/2} f(\eta).$$

Для  $f(\eta)$  получаем тогда из (5.122) после соответствующего приведения подобных членов

$$\eta \frac{d^2 f}{d\eta^2} + (1 - ik\eta) \frac{df}{d\eta} - m_a Z Z' \frac{e^2}{\hbar^2} f = 0. \quad (5.123)$$

Уравнение (5.123) переходит в дифференциальное уравнение (5.76) для функции Лагерра  $L_\mu(\rho)$ , если в нем положить

$$\rho = ik\eta, \quad \mu = -\frac{m_a Z Z' e^2}{ik\hbar^2}.$$

Последняя величина совпадает с мнимым главным квантовым числом  $n$  из (5.856). Таким образом, имеем

$$f(\eta) = L_n(ik\eta), \quad \psi_2 = e^{-ik\eta/2} L_n(ik\eta)$$

и, наконец,

$$\psi = \psi_1(\xi) \psi_2(\eta) = e^{ik(\xi-\eta)/2} L_n(ik\eta). \quad (5.124)$$

Тем самым формула (5.85) доказана кратчайшим путем.

## Приложение IV

### ПЛОСКИЕ И СФЕРИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛЮБОГО ЧИСЛА ИЗМЕРЕНИЙ

После того как мы рассмотрели плоские и сферические волны в трехмерном случае и плоские и цилиндрические волны в двухмерном, представляет интерес распространить соответствующие формулы на многомерный случай. При этом мы познакомимся с обобщениями обычных шаровых функций, полиномами Гегенбауэра и с обобщенной теоремой сложения для функций Бесселя. Теорема из § 27 о представлении функции Грина через собственные функции



образом:

$$\begin{aligned} ds_r &= dr, \\ ds_{\vartheta} &= r d\vartheta, \\ ds_{\varphi_1} &= r \sin \vartheta d\varphi_1, \\ ds_{\varphi_2} &= r \sin \vartheta \sin \varphi_1 d\varphi_2, \\ &\dots \dots \dots \\ ds_{\varphi_p} &= r \sin \vartheta \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{p-1} d\varphi_p. \end{aligned} \quad (5.126)$$

Обозначая стоящие в правых частях коэффициенты при  $dr, d\vartheta, d\varphi_1, \dots, d\varphi_p$  через  $g_1, g_2, \dots, g_{p+2}$ , получим  $g_1 = 1$ ;  $g_2 = r$ ;  $g_3 = r \sin \vartheta$ ;  $g_4 = r \sin \vartheta \sin \varphi_1, \dots$  (5.126a)

$$g_{p+2} = r \sin \vartheta \sin \varphi_1, \dots \sin \varphi_{p-1}.$$

Из формул (5.126) и (5.126a) следует, что  $(p+2)$ -мерный пространственный элемент  $d\tau$  выражается так:

$$d\tau = \bar{g} dr d\vartheta d\varphi_1 \dots d\varphi_p, \quad (5.126б)$$

где

$$\bar{g} = \prod_{i=1}^{p+2} g_i = r^{p+1} \sin^p \vartheta \sin^{p-1} \varphi_1 \sin^{p-2} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{p-1}. \quad (5.126в)$$

Элемент поверхности единичного шара в  $(p+2)$ -мерном пространстве обозначим через  $d\omega$ , а площадь всей поверхности через  $\Omega$  и положим

$$\Omega = \int d\omega = \Omega_{\vartheta} \Omega_{\varphi}, \quad (5.126г)$$

причем через  $\Omega_{\vartheta}$  и  $\Omega_{\varphi}$  обозначены множители, получающиеся при интегрировании по координате  $\vartheta$ , с одной стороны, и по совокупности координат  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$  — с другой. Для этих множителей  $\Omega_{\vartheta}$  и  $\Omega_{\varphi}$  получаются в силу уравнений (5.126) следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Omega_{\vartheta} &= \int_0^{\pi} \sin^p \vartheta d\vartheta = \frac{\pi}{2^p} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right) \Gamma\left(\frac{p}{2}+2\right)} = \\ &= \frac{\pi}{p} \frac{2^{-p+2} \Gamma(p)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}, \end{aligned} \quad (5.126д)$$

$$\begin{aligned} \Omega_\varphi = & \int_0^\pi \sin^{p-1} \varphi_1 d\varphi_1 \int_0^\pi \sin^{p-2} \varphi_2 d\varphi_2 \dots \\ & \dots \int_0^\pi \sin \varphi_{p-1} d\varphi_{p-1} \int_{-\pi}^\pi d\varphi_p = 2 \frac{\pi^{\frac{p+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (5.126e)$$

Обозначим оператор Лапласа в нашем пространстве через  $\Delta_p$  (в трехмерном случае он будет, таким образом, обозначен через  $\Delta_1$ ).

Если квадрат линейного элемента  $ds^2$  в ортогональных криволинейных координатах  $r, \vartheta, \varphi_i$  выражается формулой

$$ds^2 = g_1^2 dr^2 + g_2^2 d\vartheta^2 + g_3^2 d\varphi_1^2 + \dots + g_{p+2}^2 d\varphi_p^2, \text{ то}$$

$$\Delta_p u = \frac{1}{g} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{g}{g_1^2} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{g}{g_2^2} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \dots + \frac{\partial}{\partial \varphi_p} \left( \frac{g}{g_{p+2}^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi_p} \right) \right].$$

Если  $u$  зависит только от  $r$ , то

$$\Delta_p u = \frac{1}{g} \frac{d}{dr} \left( \frac{g}{g_1^2} \frac{du}{dr} \right) = \frac{1}{r^{p+1}} \frac{d}{dr} \left( r^{p+1} \frac{du}{dr} \right). \quad (5.127)$$

Уравнение потенциала  $\Delta_p u = 0$  принимает тогда вид

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{p+1}{r} \frac{du}{dr} = 0. \quad (5.127a)$$

Его решение с точностью до аддитивной и мультипликативной постоянных интегрирования будет иметь вид

$$u = r^{-p}. \quad (5.128)$$

Обобщая это решение, получим решения вида

$$u = R^{-p}, \quad R^2 = \sum (x_i - y_i)^2. \quad (5.128a)$$

Если расположить вторую введенную точку на оси  $\vartheta = 0$  и обозначить через  $r_0$  ее расстояние от начала 0, то согласно формулам (5.125) будем иметь

$$y_1 = r_0, \quad y_2 = y_3 = \dots = y_{p+2} = 0$$

и

$$R^2 = r^2 - 2\epsilon r_0 \cos \vartheta + r_0^2.$$

Поэтому функция

$$u = \frac{r_0^p}{R^p} = \frac{1}{\left[ 1 + \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 - 2 \frac{r}{r_0} \cos \vartheta \right]^{p/2}} \quad (5.1286)$$

является также решением уравнения  $\Delta_p u = 0$ .

Мы разлагаем выражение (5.1286), как и в формуле (4.126), по восходящим (или нисходящим) степеням  $r/r_0$  и называем коэффициенты разложения  $p$ -мерными зональными шаровыми функциями

$$P_n(\cos \vartheta | p),$$

или полиномами Гегенбауэра<sup>1)</sup>.

Полиномы Лежандра в этом обозначении имели бы тогда вид

$$P_n(\cos \vartheta | 1).$$

Мы полагаем, следовательно,<sup>2)</sup>

$$\begin{aligned} \left[ 1 + \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 - 2 \frac{r}{r_0} \cos \vartheta \right]^{-p/2} = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r}{r_0} \right)^n P_n(\cos \vartheta | p) \end{aligned} \quad (5.129)$$

и заключаем отсюда сразу же, что

$$\begin{array}{l|l} \text{при } \cos \vartheta = 1 & P_n(1 | p) = (-1)^n \left( \frac{-p}{n} \right) = \frac{(p+n-1)}{n! (p-1)!}, \\ \text{» } \cos \vartheta = -1 & P_n(-1 | p) = (-1)^n P_n(1 | p), \\ & P_{2s+1}(0 | p) = 0, \\ \text{» } \cos \vartheta = 0 & P_{2s}(0 | p) = \binom{-p/2}{s} = (-1)^s \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2} + s\right)}{\Gamma(s+1) \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}. \end{array} \quad (5.129a)$$

<sup>1)</sup> Первоначальное обозначение Гегенбауэра, см., например, Wien. Akad., 70 (1875), имело вид  $C_n^\nu(\cos \vartheta)$ , причем в нашей многомерной трактовке следует положить  $\nu = p/2$ .

<sup>2)</sup> Определяющее уравнение (5.129) не ограничивается целыми  $p$ ; при  $p=0$  формула (5.129) теряет силу, так как в этом случае степенная функция (5.1286) должна быть заменена двухмерным логарифмическим потенциалом.

Тогда из уравнения потенциала  $\Delta_p u = 0$  для частного решения, зависящего только от  $r$  и  $\vartheta$ ,

$$u = r^n P_n(\cos \vartheta | p) \quad (5.129б)$$

получаем уравнение в частных производных для  $u$ :

$$\frac{1}{\bar{g}} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\bar{g}}{g_1^2} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \frac{\bar{g}}{g_2^2} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) \right] = 0;$$

отсюда после сокращения на множитель  $r^{n+p-1} \sqrt{g}$  приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению для  $P_n(\cos \vartheta | p)$ :

$$\left[ \frac{d}{d\vartheta} \sin^p \vartheta \frac{d}{d\vartheta} + n(n+p) \sin^p \vartheta \right] P_n(\cos \vartheta | p) = 0. \quad (5.129в)$$

Эта и последующие формулы имеют связь с хорошо известными формулами из теории обычных шаровых функций. Подобно полиномам Лежандра в формуле (4.202а) полиномы Гегенбауэра выражаются с помощью гипергеометрических рядов

$$\begin{aligned} P_n(\cos \vartheta | p) = \\ = P_n(1 | p) F\left(-n, n+p, \frac{p+1}{2}, \frac{1-\cos \vartheta}{2}\right). \end{aligned} \quad (5.129г)$$

**2. Собственные функции неограниченного многомерного пространства.** От уравнения потенциала мы переходим к волновому уравнению. Для состояния, зависящего только от  $r$ , оно в соответствии с формулой (5.127) имеет вид

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{p+1}{r} \frac{du}{dr} + k^2 u = 0. \quad (5.130)$$

Если положить здесь  $u = r^{-p/2}$ , то получим для  $w$  дифференциальное уравнение Бесселя с индексом  $p/2$ . Таким образом, уравнение (5.130) имеет интеграл

$$u = r^{-p/2} I_{p/2}(kr) \quad (5.130а)$$

или также

$$u = r^{-p/2} H_{p/2}^1(kr), \quad (5.130б)$$

$$u = r^{-p/2} H_{p/2}^2(kr). \quad (5.130в)$$



Решение (5.130б) ведет себя в бесконечности как

$$\frac{C e^{ikr}}{r^{\frac{p+2}{2}}}, \quad C = \sqrt{\frac{2}{k\pi}} e^{-\frac{p+1}{2} \frac{i\pi}{2}}$$

и удовлетворяет условию излучения (5.49)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{p+1}{2}} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0;$$

аналогично решение (5.130в) удовлетворяет «условию поглощения». Формулы (5.130б, 5.130в) представляют собой поэтому уходящие или приходящие сферические волны в  $p+2$ -мерном пространстве. То же самое имеет место при произвольном положении источника

$$U = R^{-p/2} H_{p/2}(kR), \quad R^2 = r^2 - 2rr_0 \cos \vartheta + r_0^2. \quad (5.131)$$

Функцию (5.130а) мы можем рассматривать как собственную функцию, обладающую сферической симметрией. Теперь нас интересуют собственные функции, обладающие зональной симметрией. Они будут иметь вид

$$u_n(r, \vartheta) = v_n(r) P_n(\cos \vartheta | p). \quad (5.132)$$

Из уравнения (5.129в) для  $P_n$  легко найдем дифференциальное уравнение для  $v_n$ :

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{p+1}{r} \frac{d}{dr} + k^2 - \frac{n(n+p)}{r^2} \right) v_n = 0.$$

Полагая  $v_n = r^{-p/2} \omega$ , получим для  $\omega$  уравнение Бесселя с индексом  $n + \frac{p}{2}$ , и поэтому в качестве решения, конечного при  $r=0$ , найдем

$$\omega = I_{n+p/2}(kr).$$

Таким образом, в качестве собственных функций имеем

$$u_n = r^{-p/2} I_{n+p/2}(kr) P_n(\cos \vartheta | p). \quad (5.132а)$$

Любые две из этих собственных функций согласно § 26 ортогональны друг к другу как для непрерывного спектра  $0 < k < \infty$ , так и для дискретного, т. е. для числового ряда  $n=0, 1, 2, \dots$

Для двух собственных функций  $u_n, u_m$  разного индекса, соответствующих одному и тому же  $k$ , согласно (5.126б),

(5.126в) и (5.132), имеем

$$\int u_n u_m d\tau = \int_0^{\infty} I_{n+p/2}(kr) I_{m+p/2}(kr) r dr \times \\ \times \int_0^{\pi} P_n(\cos \vartheta | p) P_m(\cos \vartheta | p) \sin^p \vartheta d\vartheta \Omega_{\varphi}. \quad (5.133)$$

Здесь  $\Omega_{\varphi}$  означает интеграл (5.126е). Так как последний, подобно интегралу по  $r$ , не обращается в нуль, то в силу ортогональности должен обращаться в нуль интеграл по  $\vartheta$ ,

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos \vartheta | p) P_m(\cos \vartheta | p) \sin^p \vartheta d\vartheta = 0, \quad m \neq n. \quad (5.134)$$

Следует обратить внимание на характеристический множитель  $\sin^p \vartheta$ , который в трехмерном случае ( $p=1$ ) переходит в обычный для нас множитель  $\sin \vartheta$  при полиномах Лежандра. В то время как он кажется искусственным в трехмерном случае, в нашей многомерной трактовке он следует естественным образом из выражения для  $d\tau$ .

Отметим также соответствующий нормирующий интеграл для  $m=n$

$$N = \int_0^{\pi} [P_n(\cos \vartheta | p)]^2 \sin^p \vartheta d\vartheta = \\ = \frac{\Gamma(n+p)}{2^{p-1} \left(n + \frac{p}{2}\right) n!} \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}. \quad (5.135)$$

Выражение (5.135) является обобщением нормирующего интеграла для обычных зональных шаровых функций  $N = 1 / \left(n + \frac{1}{2}\right)$  для  $p=1$ ; доказательство соотношения (5.135) опирается на уравнение (5.129), определяющее полиномы Гегенбауэра.

Принимая во внимание формулу (5.126д), мы можем представить выражение (5.135) в виде

$$N = \frac{p}{2} \frac{\Gamma(n+p)}{\left(n + \frac{p}{2}\right) n! \Gamma(p)} \Omega_{\vartheta}. \quad (5.135a)$$

**3. Сферические волны и функция Грина в многомерном пространстве.** Сферическую волну, обладающую зональной симметрией, мы представили уже с помощью формулы (5.131). Она становится функцией Грина  $(p+2)$ -мерного неограниченного пространства с помощью добавления такого множителя  $f$ , чтобы функция  $U$  имела в  $Q$  характер единичного источника. Это означает, согласно § 10, п. 3, что

$$\begin{aligned} 1 &= \int \frac{\partial G}{\partial n} d\tau = f \int \frac{\partial U}{\partial R} d\tau = \\ &= f \int \frac{\partial}{\partial R} [R^{-p/2} H_{p/2}^1(kR)] R^{p+1} d\omega. \end{aligned} \quad (5.136)$$

Интегрирование следует распространить по сфере радиуса  $R \rightarrow 0$ ;  $d\tau$  означает элемент поверхности этой сферы,  $d\omega$ , так же как и в формуле (5.126), — элемент поверхности сферы радиуса 1. Таким образом, из (5.136) получаем

$$1 = f\Omega \lim_{R \rightarrow 0} R^{p+1} \frac{\partial}{\partial R} [R^{-p/2} H_{p/2}^1(kR)]. \quad (5.136a)$$

При нечетном  $p$  мы можем использовать для  $H$  формулу (4.31), которая дает

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 0} \dots &= \frac{-iR^{p+1}}{\sin p \frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial R} [R^{-p/2} I_{-p/2}(kR)] = \\ &= \frac{ip}{\sin p \frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{k}{2}\right)^{-p/2}}{\Gamma\left(-\frac{p}{2} + 1\right)}. \end{aligned}$$

Пользуясь известным соотношением для  $\Gamma$ -функции

$$\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{p}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin p \frac{\pi}{2}},$$

мы можем вместо предыдущего написать выражение

$$\frac{ip}{\pi} \left(\frac{k}{2}\right)^{-p/2} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right).$$

Для четного  $p$  формулы (4.26) и (4.47) дают это же зна-

чение. Таким образом, из условия (5.136а) следует

$$f = \frac{\frac{\pi}{\Omega} \left(\frac{k}{2}\right)^{p/2}}{i p \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}, \quad (5.136б)$$

и из выражения (5.131) после умножения на  $f$  получаем

$$G(P, Q) = \frac{\frac{\pi}{\Omega} \left(\frac{k}{2}\right)^{p/2} \left(\frac{kR}{2}\right)^{-p/2} H_{p/2}^1(kR)}{i p \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}. \quad (5.137)$$

С другой стороны, следуя § 28, представим  $G(P, Q)$  через собственные функции (5.132а)

$$u(P) = r^{-p/2} I_{n+p/2}(\lambda r) P_n(\cos \vartheta | p) \quad (5.137а)$$

и соответствующие функции  $u(Q)$  для точки  $Q$  с координатами  $r=r_0$ ,  $\vartheta_0=0$ :

$$u(Q) = r_0^{-p/2} I_{n+p/2}(\lambda r_0) P_n(1 | p). \quad (5.137б)$$

В обоих выражениях (5.137а, 5.137б)  $\lambda$  означает [см. также формулу (5.56)] переменную интегрирования в непрерывной части спектра собственных значений. Как и раньше в § 28, мы производим интегрирование по  $\lambda$  в комплексной плоскости  $\lambda$  и в соответствии с формулой (5.57) получаем

$$\begin{aligned} & \int u(P) u(Q) \frac{d\lambda}{k^2 - \lambda^2} = \\ & = \frac{\pi i}{2} (r r_0)^{-p/2} \sum_n P_n(\cos \vartheta | p) P_n(1 | p) \begin{cases} I_{n+p/2}(k r_0) H_{n+p/2}(k r) \\ \text{при } r > r_0, \\ I_{n+p/2}(k r) H_{n+p/2}(k r_0) \\ \text{при } r < r_0. \end{cases} \quad (5.138) \end{aligned}$$

Чтобы получить из этой формулы выражение для функции Грина, функции  $u(P)$  и  $u(Q)$  должны быть нормированы к единице. Поэтому общий член ряда (5.138) нужно разделить на следующие выражения:

1) на нормирующий множитель  $N$  из формулы (5.135а), учитывая этим зависимость общего члена ряда (5.138) от  $\vartheta$ ;

2) на выражение  $\Omega_\varphi$  из формулы (5.126e) в силу независимости общего члена ряда (5.138) от координат  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$  и, наконец,

3) на выражение  $N = 1/k$  из формулы (5.91), принимая во внимание зависимость рассматриваемой функции от  $r$ .

Это дает в итоге [см. также формулы (5.129a)] множитель

$$\frac{k}{\Omega} \frac{2n+p}{p} \frac{n! \Gamma(p)}{\Gamma(n+p)} = \frac{k}{P_n(1|p)} \frac{2n+p}{p}, \quad (5.138a)$$

который следует включить в выражение (5.138) под знак суммы. Таким путем согласно нашей общей теореме из § 28 получается функция Грина для неограниченного пространства. Сравнивая этот результат с выражением (5.137), мы получим после соответствующих сокращений и приведений подобных членов

$$\frac{H_{p/2}(kR)}{(kR)^{p/2}} = 2^{p/2} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{p}{2}\right) P_n(\cos \vartheta | p) \left\{ \right\},$$

где

$$\left\{ \right\} = \begin{cases} \frac{I_{n+p/2}(kr_0)}{(kr_0)^{p/2}} \frac{H_{n+p/2}(kr)}{(kr)^{p/2}} & \text{при } r > r_0 \\ \frac{I_{n+p/2}(kr)}{(kr)^{p/2}} \frac{H_{n+p/2}(kr_0)}{(kr_0)^{p/2}} & \text{при } r < r_0. \end{cases} \quad (5.139)$$

Формула (5.139) выражает *общую теорему сложения для функций Бесселя*, справедливую как для  $H = H^1$ , так и для  $H = H^2$ , а поэтому также для любой их комбинации, так что в формуле (5.139) функция  $H$  слева и справа может быть заменена любой цилиндрической функцией

$$Z = c_1 H^1 + c_2 H^2$$

и, в частности, функцией Бесселя

$$I = \frac{1}{2} (H^1 + H^2);$$

в последнем случае различие  $r \geq r_0$ , очевидно, отпадает. Эта теорема сложения остается справедливой и тогда,

когда  $p/2$  заменено любым числом  $\nu$  (см. второе примечание на стр. 319).

**4. Переход от сферической волны к плоской волне.** Если во второй части формулы (5.139), т. е. при  $r < r_0$ , перейти к пределу при  $r_0 \rightarrow \infty$ , то мы получим представление плоской волны в многомерном пространстве.

Пользуясь приближением Ханкеля (4.55), получаем в правой части

$$H_{n+p/2}^1(kr_0) = ae^{-in\pi/2},$$

$$a = \sqrt{\frac{2}{\pi kr_0}} \exp \left\{ i \left( kr_0 - \frac{p+1}{2} \frac{\pi}{2} \right) \right\}.$$

Соответственно в левой части

$$H_{p/2}^1(kR) = \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} \exp \left\{ i \left( kR - \frac{p+1}{2} \frac{\pi}{2} \right) \right\}.$$

Но при  $r_0 \rightarrow \infty$

$$R = r_0 \left( 1 - 2 \frac{r}{r_0} \cos \vartheta + \dots \right)^{1/2} = r_0 - r \cos \vartheta + \dots$$

Отсюда

$$H_{p/2}^1(kR) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr_0}} \exp \left\{ i \left( kr_0 - kr \cos \vartheta - \frac{p+1}{2} \frac{\pi}{2} \right) \right\} =$$

$$= a \exp \{ -ikr \cos \vartheta \},$$

благодаря чему левая часть формулы (5.139) при соответствующей аппроксимации знаменателя принимает вид

$$\frac{a}{(kr_0)^{p/2}} \exp \{ -ikr \cos \vartheta \}.$$

После сокращения на общий множитель правой и левой частей равенства получаем

$$e^{-ikr \cos \vartheta} =$$

$$= 2^{p/2} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(n + \frac{p}{2}\right) e^{-in\pi/2} P_n(\cos \vartheta|p) \frac{I_{n+p/2}(kr)}{(kr)^{p/2}}.$$

(5.140)

Формула (5.140) представляет плоскую волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси  $\vartheta = 0$ .

Плоскую волну, распространяющуюся в противоположном направлении, мы получим из выражения (5.140), если справа и слева заменим  $+i$  на  $-i$ . Нетрудно убедиться, что при  $p=1$  формула (5.140) совпадает с формулой (4.185), представляющей плоскую волну в трехмерном пространстве. В двухмерном случае, когда формула (5.1286) дает совершенно тривиальное решение  $u=1$  уравнения (5.127а), общее решение которого является в этом случае не степенной, а логарифмической функцией от  $r$  (логарифмический потенциал), формула (5.140) переходит в формулу (4.836).

Из формулы (5.140) можно получить с помощью соответствующего осреднения или же, пользуясь одной «теоремой сложения» для полиномов Гегенбауэра<sup>1)</sup>, любопытные соотношения между функциями Бесселя целого и дробного индексов<sup>2)</sup>

---

<sup>1)</sup> См. обзор результатов Гегенбауэра в книге Magnus und Oberhettinger, Formeln und Sätze über die speziellen Funktionen der Mathem. Physik, Springer, 1943, в частности стр. 77.

<sup>2)</sup> G. Bauer, Sitzungsber. bayr. Akad., стр. 242, 1875; многомерное обобщение см. A. Sommerfeld, Math. Ann., 119, 1 (1943).

## Глава VI

### ПРОБЛЕМЫ БЕСПРОВОЛОЧНОЙ ТЕЛЕГРАФИИ

Вопросы передачи сигналов с помощью электрических волн с начала XX века стоят в центре внимания техников и физиков. Можно ли объяснить удивительную дальность распространения радиосигналов, пользуясь одной только теорией Максвелла?

С одной стороны, явления радиосвязи, вообще говоря, подчиняются общим электродинамическим законам, формулируемым теорией Максвелла; но, с другой стороны, при распространении радиоволн имеют место отклонения от общих законов электродинамики, обусловленные действием ионосферы (слой Хивисайда), играющей существенную роль в преодолении кривизны земли.

За недостатком времени мы не сможем рассмотреть явления отражения волн от ионосферы и должны будем ограничиться вопросами распространения радиоволн в однородной среде, считая атмосферу и землю однородными. Кроме того, мы не коснемся здесь вопросов конструкции передатчика и приемника, столь важных для техников, поскольку эти вопросы не относятся к рассматриваемой здесь теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Более того, антенна передатчика будет нами рассматриваться чрезвычайно схематически, а именно как диполь Герца (см. § 31). В то же время вопросы распространения радиоволн целиком относятся к нашей теме и позволяют продемонстрировать всю практическую полезность изложенных выше методов, которые до сих пор были нами применены только к классическим проблемам теплопроводности и теории потенциала. Вопросы общей теории электромагнитных колебаний также могут служить ярким примером практической полезности общих методов теории дифференциальных уравнений математической физики. Эти вопросы довольно обстоятельно рассмотрены в книге



Франка и Мизеса, гл. XXIII<sup>1)</sup>), к которой мы и отсылаем читателя. Вопросы радиотелеграфии выделяются здесь и снова рассматриваются более детально, так как прежнее изложение (в третьем томе наших лекций) носило крайне схематический характер и было во избежание громоздкости формул упрощено в значительно большей степени, чем это допустимо с точки зрения практики. Антенный диполь будет теперь помещен нами не непосредственно на поверхности Земли, а на некотором расстоянии от нее. Излучение горизонтальной антенны будет исследовано более детально и будет доказано, что с возрастанием расстояния от антенны излучение становится все более сходным с излучением вертикальной антенны. Характеристика излучения будет вычислена с большей точностью, а именно с точностью до членов второго порядка относительно  $1/r$  и т. д. В заключительном параграфе будут рассмотрены вопросы энергетического характера (требуемое количество подаваемой энергии при заданной силе тока в антенне, тепловые потери в земле и т. д.). Землю мы будем почти всюду считать плоской.

Только в приложении будет рассмотрена задача с учетом кривизны земли; эта задача очень интересна с аналитической точки зрения и представляет для метода собственных функций более обширную область применения, чем задача для плоской поверхности земли. Однако даже хоть сколь-нибудь полное рассмотрение одной только задачи для плоской земли займет целиком весь находящийся в нашем распоряжении объем этой главы.

### § 31. ДИПОЛЬ ГЕРЦА В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ И НАД ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ЗЕМЛЕЙ

Мы предполагаем известными электродинамические понятия и связь между ними, выражаемую уравнениями Максвелла. Так как здесь идет речь не об атомной физике, а об электродинамической теории Максвелла, то мы будем пользоваться системой мер из четырех единиц:  $M$  (метр),

<sup>1)</sup> Эта глава книги Франка и Мизеса была переработана В. А. Фоком. Развитию радиотелеграфии посвящен сборник статей «Исследования по распространению радиоволн», изд. АН СССР, 1948. (Прим. ред.)

$K$  (килограмм-масса),  $S$  (секунда),  $Q$  (заряд, измеренный в кулонах). В этой системе мер диэлектрическая постоянная и проницаемость являются размерными величинами; их значения в вакууме обозначим, как обычно, через  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$ . Тогда имеем  $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ . При таком выборе системы единиц автоматически устраняется неудобный множитель  $4\pi$ , усложняющий обычно принятые электромагнитные уравнения и нужный только в тех случаях, когда он обусловлен шаровой симметрией задачи.

**1. Понятие диполя Герца.** В электростатическом случае потенциал диполя может быть получен из элементарного основного потенциала  $\Phi = 1/r$  дифференцированием по некоторому направлению (см. § 24); поле  $E$  диполя получается тогда из этого потенциала дальнейшим дифференцированием. В электродинамическом случае вместо  $\Phi$  появляется функция сферической волны<sup>1)</sup>

$$\Pi = \frac{1}{r} e^{ikr} \quad (6.1)$$

или в более полной записи

$$\Pi = \frac{1}{r} e^{i(kr - \omega t)}. \quad (6.1a)$$

Как показывает формула (6.1a), колебание предполагается чисто периодическим и незатухающим (это реализуется в случае лампового передатчика). В случае более краткой записи (6.1), которой мы будем пользоваться в дальнейшем, следует принимать во внимание, что

$$\dot{\Pi} = -i\omega\Pi = -ikc\Pi. \quad (6.2)$$

Здесь

$\omega$  — круговая частота,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \text{ — волновое число,} \quad (6.2a)$$

$$c = \frac{\omega}{k} \text{ — скорость света в пустоте.}$$

Как мы знаем,  $\Pi$  удовлетворяет уравнению колебаний (2.4),

<sup>1)</sup> Обозначение  $\Pi$  было введено Герцем [H. Hertz, Die Kräfte elektrischer Schwingungen, Ges. Werke, II, стр. 147]. В этой работе приведены также хорошо известные картины силовых линий колеблющегося диполя.

которое для чисто периодических процессов переходит в волновое уравнение

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = 0. \quad (6.3)$$

Однако в электродинамическом случае  $\Pi$  является не скалярной, а векторной величиной. Поэтому мы будем впредь говорить о векторе  $\Pi$ . Он связан с векторным потенциалом  $\mathbf{A}$  простым соотношением

$$\dot{\Pi} = \mathbf{A}. \quad (6.3a)$$

Аналогично тому как отдельные элементы, из которых складывается  $\mathbf{A}$ , имеют направление соответствующего элемента тока, вектор  $\Pi$  в пустом пространстве (т. е. при отсутствии земли и для одной-единственной антенны) также имеет направление тока в антенне. При этом мы предполагаем, что антенна мала по сравнению с длиной волны, емкость ее сосредоточена на концах, а ток вдоль всей антенны имеет одинаковую фазу. В формуле (6.1) векторный характер величины  $\Pi$  мог бы быть указан с помощью постоянного векторного множителя, который определял бы направление антенны и, как мы впоследствии увидим, имел бы размерность электрического момента (заряд, умноженный на длину). Однако мы пока воздержимся от этого, чтобы не усложнять последующих формул; таким образом, мы сохраняем формулу (6.1) несмотря на то, что она не содержит указания относительно векторного характера величины  $\Pi$ , ее размерности и выбранной системы единиц. Этот недостаток изложения будет устранен только в § 36. Заметим пока, что вследствие векторного характера функции  $\Pi$  оператор Лапласа  $\Delta$  в уравнении (6.3), вообще говоря, имеет векторный смысл и обозначает следующую операцию:

$$\Delta \Pi = \text{grad div } \Pi - \text{rot rot } \Pi. \quad (6.36)$$

В § 32 нам придется рассматривать оператор Лапласа в этом смысле. Только в настоящем и следующем параграфах, где рассматриваются отдельные декартовы компоненты  $\Pi_z$  или  $\Pi_x$  вектора  $\Pi$ , оператор  $\Delta$  употребляется в своем обычном смысле.

Мы утверждаем теперь, что поле  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ , вообще говоря, может быть получено из поля  $\Pi$  с помощью следующих

дифференциальных операций:

$$\mathbf{E} = k^2 \mathbf{\Pi} + \text{grad div } \mathbf{\Pi}, \quad \mathbf{H} = \frac{k^2}{\mu_0 i \omega} \text{rot } \mathbf{\Pi}. \quad (6.4)$$

Для этого достаточно показать, что вектор функции  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , определяемой формулами (6.4), удовлетворяет уравнениям Максвелла для пустоты:

$$\begin{aligned} \rho_0 \dot{\mathbf{H}} + \text{rot } \mathbf{E} &= 0, \\ \varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} - \text{rot } \mathbf{H} &= 0, \end{aligned} \quad (6.5)$$

причем согласно формуле (6.2) в уравнениях (6.5) нужно заменить

$$\dot{\mathbf{H}} \text{ на } -i\omega \mathbf{H}, \quad \dot{\mathbf{E}} \text{ на } -i\omega \mathbf{E}. \quad (6.5a)$$

В силу формул (6.4) и (6.5a) левые части уравнений (6.5) принимают вид

$$\text{rot} (-k^2 + k^2 + \text{grad div}) \mathbf{\Pi}$$

и соответственно

$$-i\omega \varepsilon_0 (k^2 + \text{grad div} - \text{rot rot}) \mathbf{\Pi}.$$

Оба выражения обращаются в нуль, первое — в силу того, что  $\text{rot grad} = 0$ , второе — вследствие уравнений (6.3) и (6.3б). Следовательно, если мы вместо  $\mathbf{\Pi}$  представим выражение (6.1) и определим имеющийся еще в нашем распоряжении постоянный множитель через силу переменного тока в антенне, то, по Максвеллу, уравнение (6.4) даст нам поле, излучаемое этой антенной, для всех расстояний, больших по сравнению с величиной  $\lambda = 2\pi/k$ ; в непосредственной же близости антенны наше представление (6.4) теряет силу, так как выбранная нами модель антенны является слишком схематичной. Эту модель можно назвать осциллирующим или пульсирующим диполем, так как концы антенны несут на себе переменные заряды противоположных знаков. Это крайнее упрощение сложно построенной реальной антенны служит нам примером того, в какой степени можно и должно схематизировать физическую реальность, чтобы сделать ее доступной плодотворному математическому исследованию.

Перейдем теперь от пустоты к некоторой среде «земля» с самыми общими электромагнитными свойствами: мы будем считать ее однородной, но имеющей произвольную

диэлектрическую постоянную  $\varepsilon$  и проводимость  $\sigma$ ; магнитную проницаемость среды вначале будем также считать совершенно произвольной, обозначив ее через  $\mu$ . При этом формулы (6.1) и (6.3) для  $\Pi$  сохраняют формально свой смысл, но волновое число  $k$  определяется уже не из формулы (6.2а), а из формулы

$$k^2 = \varepsilon\mu\omega^2 + i\mu\sigma\omega. \quad (6.6)$$

Одновременно уравнения (6.4) принимают вид

$$\mathbf{E} = k^2 \Pi + \text{grad div } \Pi, \quad \mathbf{H} = \frac{k^2}{i\mu\omega} \text{rot } \Pi. \quad (6.7)$$

Совершенно так же как и в предыдущем случае, можно убедиться, что  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  из формул (6.7) удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \mu \dot{\mathbf{H}} + \text{rot } \mathbf{E} &= 0, \\ \varepsilon \dot{\mathbf{E}} + \sigma \mathbf{E} - \text{rot } \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \quad (6.7a)$$

Уравнение колебания, из которого волновое уравнение (6.3) получается исключением временной зависимости, может быть записано по образцу уравнения (2.4) в виде

$$\Delta \Pi = \left( \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \sigma\mu \frac{\partial}{\partial t} \right) \Pi. \quad (6.7b)$$

**2. Интегральное представление первичного возбуждения.** Для облегчения последующего изложения постараемся прежде всего придать формуле (6.1) для  $\Pi$  такой вид, в котором  $\Pi$  представлялось бы как *суперпозиция собственных функций*. Переходя к цилиндрическим координатам  $r, \varphi, z$ , воспользуемся снова собственными функциями  $u$  и собственными значениями  $\lambda$  из формул (5.18) и (5.18а), считая их независимыми от координаты  $\varphi$ , причем вместо прежнего  $m\pi/h$  будем писать  $\mu$ <sup>1)</sup>. Тогда получим

$$u = I_0(\lambda r) \cos \mu z, \quad k^2 = \lambda^2 + \mu^2. \quad (6.8)$$

Однако, если раньше, в соответствии с граничным условием, заданным на боковой поверхности цилиндра конечного радиуса, значения  $\lambda$  составляли дискретный

<sup>1)</sup> Не следует смешивать значение  $\mu = m\pi/h$  с введенной выше магнитной проницаемостью  $\mu$ , которая, впрочем, вскоре полностью исчезнет из наших формул.

спектр, то теперь, в случае неограниченной среды,  $\lambda$  образует непрерывный спектр  $0 \leq \lambda < \infty$  (см. § 28). Тем самым и множество значений  $\mu$  становится непрерывным, причем для заданного  $k$  величина  $\mu$  может в силу формулы (6.8) принимать также и комплексные значения. Так как, кроме того, отпадает граничное условие для оснований цилиндра, то в формуле (6.8) можно заменить  $\cos \mu z$  через  $e^{\pm \mu z}$ . Таким образом, величина  $\Pi$  должна быть представлена в следующем виде:

$$\Pi = \int_0^{\infty} F(\lambda) I_0(\lambda r) e^{\pm \mu z} d\lambda, \quad \mu = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad (6.9)$$

причем множитель  $F(\lambda) d\lambda$  заменяет произвольный постоянный амплитудный множитель при каждой собственной функции. Так как в формулах (6.8) и (6.9)  $r$  имеет другое значение, чем в формуле (6.1) [цилиндрическая координата  $r$  вместо сферической полярной координаты  $r$  в формуле (6.1)], то выражение (6.1) для  $\Pi$  следует переписать так:

$$\Pi = \frac{e^{ikR}}{R}, \quad R^2 = r^2 + z^2. \quad (6.10)$$

Формула (6.9) при  $z = 0$  и  $\Pi = e^{ikr}/r$  принимает вид

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \int_0^{\infty} F(\lambda) I_0(\lambda r) d\lambda. \quad (6.11)$$

Чтобы удовлетворить уравнению (6.11), следует обратиться к интегральному представлению произвольной функции с помощью функций Бесселя (см. § 21). Удобнее всего использовать формулу (4.89а), из которой в случае

$$f(r) = \frac{e^{ikr}}{r}, \quad n = 0$$

следует

$$\begin{aligned} \frac{e^{ikr}}{r} &= \int_0^{\infty} \sigma \varphi(\sigma) I_0(\sigma r) d\sigma, \\ \varphi(\sigma) &= \int_0^{\infty} e^{ik\rho} I_0(\sigma \rho) d\rho. \end{aligned} \quad (6.11a)$$

Первое из этих уравнений совпадает с формулой (6.11), если изменить обозначения, положив

$$\sigma = \lambda, \quad \sigma \varphi(\sigma) = F(\lambda), \quad \text{т. е.} \quad \varphi(\sigma) = \frac{F(\lambda)}{\lambda};$$

второе уравнение после этого переходит в соотношение

$$F(\lambda) = \lambda \int_0^{\infty} e^{ik\rho} I_0(\lambda\rho) d\rho. \quad (6.116)$$

Функция  $F(\lambda)$  в формуле (6.116) представляет собой решение интегрального уравнения (6.11). Интеграл в формуле (6.116) выражается элементарным образом, если использовать для  $I_0$  формулу (4.14) с пределами  $\pm\pi$ ; изменяя порядок интегрирования, получаем

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} dw \int_0^{\infty} e^{i\rho(k+\lambda\cos w)} d\rho = \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi i} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dw}{k + \lambda \cos w}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Выражение  $1/k + \lambda \cos w$  соответствует нижнему пределу  $\rho=0$  внутреннего интеграла; обращение в нуль члена, соответствующего верхнему пределу  $\rho=\infty$ , может быть показано с помощью небольшого сдвига пути интегрирования в «заштрихованную» область плоскости  $w$  (см. фиг. 18), причем после вычисления внутреннего интеграла путь интегрирования по  $w$  вновь принимает прежнюю форму. Получающийся определенный интеграл известен, а именно равен выражению

$$\frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - \lambda^2}}. \quad (6.12a)$$

Вместо формулы (6.12) можно поэтому записать

$$F(\lambda) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} = \frac{\lambda}{\mu}, \quad (6.13)$$

и вместо формулы (6.11) получаем

$$\frac{e^{ikr}}{r} = \int_0^{\infty} I_0(\lambda r) \frac{\lambda d\lambda}{\mu}. \quad (6.13a)$$

Отсюда сразу получается соответствующее выражение для функции  $\Pi$  из формулы (6.10). Дополняя подинтегральное выражение в формуле (6.13а) до функции, зависящей от  $r$  и  $z$  и удовлетворяющей дифференциальному уравнению (6.3), можно записать

$$\Pi = \frac{e^{ikR}}{R} = \int_0^{\infty} I_0(\lambda r) e^{-\mu|z|} \frac{\lambda d\lambda}{\mu} \quad (6.14)$$

при дополнительном условии, что значение  $\mu = \sqrt{\lambda^2 - k^2}$  следует всегда брать с положительной вещественной частью. Тем самым обеспечивается сходимость интеграла и обращение его в нуль в пределе при  $z = \pm \infty$ . Совпадение этого интеграла при  $z = 0$  с выражением (6.13а) обеспечивает совпадение функции  $e^{ikR}/R$  с правой частью формулы (6.14) и при  $z \neq 0$ .

В следующем параграфе формула (6.14) будет представлена в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} H_0^1(\lambda r) e^{-\mu|z|} \frac{\lambda d\lambda}{\mu}, \quad (6.14а)$$

причем будет более точно указан путь интегрирования, проходящий в этом случае в плоскости комплексного переменного  $\lambda$ . Формула (6.14а) по сравнению с формулой (6.14) имеет то преимущество, что выполнимость условия излучения вытекает совершенно очевидным образом из асимптотического характера функции  $H_0^1$  в полном соответствии с выражением (6.1), которое благодаря наличию множителя  $e^{+ikr}$  также приспособлено к условию излучения.

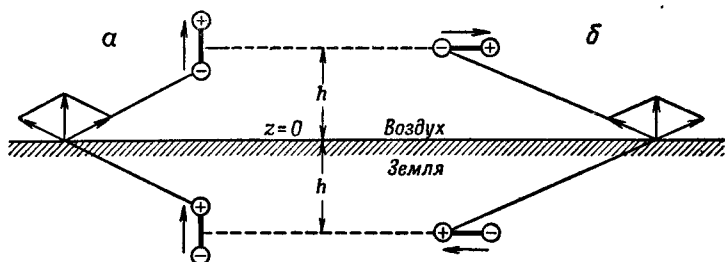
**3. Вертикальная и горизонтальная антенны над идеально проводящей землей.** До сих пор мы имели дело только с неограниченным пространством, являющимся вакуумом или однородной средой, электромагнитные свойства которой характеризуются постоянными  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$ . Перейдем теперь к полупространству  $z > 0$ , граничащему вдоль плоскости  $z = 0$  с идеально проводящей землей ( $\sigma \rightarrow \infty$ ). Для последней имеем  $E = 0$ . В силу требуемой теорией Максвелла непрерывности тангенциальных составляющих



напряженности поля из условия  $E = 0$  при  $z < 0$  следует, что  $E_{\text{танг.}} = 0$  также и на положительной стороне плоскости  $z = 0$ . Согласно формуле (6.7) это означает, что функция  $\Pi$  должна удовлетворять граничному условию

$$(k^2 \Pi + \text{grad div } \Pi)_{\text{танг.}} = 0 \text{ при } z = 0. \quad (6.15)$$

Этому условию можно удовлетворить, если дополнить оба единичных полюса диполя, расположенного в воздушном пространстве, их зеркальными отображениями, взятыми с обратными знаками. Это поясняется схемой на фиг. 27, а и б.



Фиг. 27. Отражение относительно идеально проводящей земли: а — вертикальный диполь; параллелограмм сил слева показывает, что в плоскости  $z = 0$  поля зеркально симметричных полюсов действуют на пробный заряд с силами, тангенциальные компоненты которых взаимно уничтожаются; б — горизонтальный диполь; параллелограмм сил имеет тот же смысл; в случае а стрелки «минус  $\rightarrow$  плюс» у диполя и его зеркального изображения имеют одинаковое направление, а в случае б — противоположные направления.

а) Вертикальная антенна на расстоянии  $h$  от плоскости  $z = 0$ . Обе стрелки, направленные от отрицательного к положительному заряду, имеют одно и то же направление для первоначального и отраженного диполя. Поэтому полагаем

$$\Pi = \Pi_z = \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{e^{ikR'}}{R'}, \quad \begin{cases} R^2 = r^2 + (z - h)^2, \\ R'^2 = r^2 + (z + h)^2. \end{cases} \quad (6.16)$$

Изображенный на фиг. 27, а параллелограмм сил показывает, что равноотстоящие от плоскости  $z = 0$  заряды противоположных знаков действуют на заряд, помещен-

ный в плоскости  $z=0$ , с силами, результирующая которых направлена по оси  $z$ . Но это как раз и означает, что  $E_{\text{танг.}}=0$ .

б) *Горизонтальная антенна на расстоянии  $h$  от плоскости  $z=0$ .* Направление стрелки в отраженном диполе противоположно направлению стрелки в первоначальном диполе. Поэтому, приписывая  $R$  и  $R'$  те же значения, что и раньше, получаем<sup>1)</sup>

$$\Pi = \Pi_x = \frac{e^{ikR}}{R} - \frac{e^{ikR'}}{R'}. \quad (6.17)$$

Параллелограмм сил, изображенный на фиг. 27 справа, показывает, что и в этом случае зеркально симметричные заряды диполей действуют на положительный заряд в плоскости  $z=0$  с силами, результирующая которых перпендикулярна к плоскости  $z=0$ . Таким образом, вновь имеем  $E_{\text{танг.}}=0$ .

В задаче VI.1 этот результат в обоих случаях «а» и «б» должен быть доказан с помощью векторных формул (6.15).

В одном отношении, однако, случаи «а» и «б» существенно отличаются друг от друга. Именно, если мы перейдем к пределу при  $h=0$ , то получим из формулы (6.16)  $\Pi = 2(e^{ikR}/R)$ , в то время как из формулы (6.17) следует, что  $\Pi \equiv 0$ . Итак, *вертикальная антенна, расположенная непосредственно на земле*, при достаточно хорошей проводимости земли возбуждает поле, в два раза более сильное, нежели поле, возбуждаемое этой же антенной в пространстве при отсутствии земли.

Наоборот, поле *горизонтальной антенны, лежащей непосредственно над землей*, при идеальной проводимости земли, полностью уничтожается полем, возбуждаемым зеркальным изображением этой антенны. Благодаря этому обстоятельству еще в начальной стадии радиотелеграфии оказалось возможным использовать для случая заземленной антенны формулы и картины силовых линий поля, которые были получены в первоначальной работе Герца

<sup>1)</sup> В выборе противоположных знаков в равенствах (6.16) и (6.17) сказывается векторный характер функции  $\Pi$ , который не проявлялся в равенстве (6.1).

для вакуума. Силовые линии поля колеблющегося диполя Герца можно разрезать по его средней плоскости и заменить эту плоскость поверхностью земли; силовые линии будут тогда перпендикулярны к этой плоскости, т. е. условие (6.15) будет выполнено. Обращение в нуль поля горизонтальной антенны при  $h = 0$  является очевидным фактом и непосредственно вытекает из формулы (6.17). Однако при  $h > 0$  уже при малых значениях  $h$  поле быстро становится существенно отличным от нуля (см. в связи с этим фигуры в § 36). Достаточно взять  $h$ , удовлетворяющее условию  $h < \lambda$ , чтобы сделать горизонтальную антенну эффективным средством радиосвязи, даже в случае морской воды, которую можно рассматривать как хороший проводник для обычных радиоволн, имеющих сравнительно большую длину; это тем более справедливо в случае сухой почвы, являющейся худшим проводником. Отсюда можно заключить, что в случае горизонтальной антенны строение почвы и расстояние от антенны до поверхности земли должно играть большую роль, чем в случае вертикальной антенны. Соотношение  $\Pi = \Pi_x$  в формуле (6.17) является тогда недостаточным и должно быть обобщено (см. § 33).

**4. Симметричный характер полей электрической и магнитной антенн.** В пределе при  $h \rightarrow 0$  вертикальная антенна, как мы только что видели, образует то же поле, что и диполь Герца, но с напряженностью вдвое большей, а горизонтальная антенна — поле напряженности нуль. Если, однако, в последнем случае заставить возрастать силу тока в антенне в той же мере, в какой убывает  $h$ , то получим поле *квадруполя*. Действительно, фиг. 27, б в этом предельном процессе переходит в схему квадруполя (стр. 213, квадруполь  $P_2^2$ ). Заменяя амплитудные множители 2 и 0 произвольными коэффициентами  $A$  и  $B$ , можно записать:

$$\begin{aligned} \text{вертикальная антенна: } \Pi_z &= A \frac{e^{ikR}}{R} \text{ (диполь),} \\ \text{горизонтальная антенна: } \Pi_x &= B \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{ikR}}{R} \text{ (квадруполь).} \end{aligned} \tag{6.18}$$

Последняя формула следует из рассмотрения фиг. 27, б, если единичные полюсы, лежащие на одной вертикали, сгруппировать по два в диполи с вертикальной осью и учесть относительный сдвиг этих диполей по горизонтальному направлению. Это означает в то же время, что направленная по оси  $x$  горизонтальная антенна эквивалентна двум вертикальным антеннам, сдвинутым относительно друг друга в направлении оси  $x$  и имеющим противоположные направления тока. Это изображено более подробно на фиг. 30. Формула (6.18) для горизонтальной антенны, записанная в полярных координатах  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , принимает вид

$$P_x = B \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikR}}{R} = B \cos \varphi \frac{r}{R} \frac{d}{dR} \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (6.18a)$$

В соответствии с этим функция  $P_x$  имеет максимальное значение при  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$ , т. е. направления, совпадающие с двухсторонним продолжением антенны, являются главными направлениями действия; в перпендикулярном к ней направлении, т. е. при  $\varphi = \pm \pi/2$ , функция  $P_x$  обращается в нуль. Связанная с этим характеристика направленности горизонтальной антенны представлена на фиг. 29, на которой учитывается значение постоянной  $B$  (уменьшающейся с увеличением проводимости). Поле вертикальной антенны, напротив, симметрично относительно оси  $z$ , а ее характеристика направленности является окружностью. Отсюда уже следует целесообразность применения горизонтальной антенны для направленных передач (см. § 33).

Обе стержневые антенны вертикального и горизонтального направления мы называем электрическими передатчиками. В случае катушки с протекающим в ней переменным током или произвольного (кругового, прямоугольного и т. д.) замкнутого проводника мы говорим о магнитном передатчике, так как тогда магнитное поле сконцентрировано вдоль оси катушки (нормаль к витку проволоки). Обычно такой передатчик называют также «рамочной антенной». Вдоль оси рамки (направленной перпендикулярно к плоскости рамки и проходящей через центр последней) пульсирует переменный магнитный поток, аналогично тому, как вдоль стержневой антенны пульсирует переменный электрический ток. В то время как у элек-

трического передатчика магнитные силовые линии располагаются по концентрическим окружностям вокруг оси стержня, у магнитного передатчика электрические силовые линии образуют окружности с центром на оси антенны (по крайней мере для расстояний, больших сравнительно с размерами рамки). Однако такая круговая симметрия имеет место только для вертикально поставленного электрического или магнитного диполя; при косом и горизонтальном положении круговая симметрия нарушается вследствие влияния проводящей земли. Вообще говоря, поле магнитного передатчика может быть получено из поля электрического передатчика посредством замены  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  на  $\mathbf{H}$ ,  $-\mathbf{E}$  (подробнее об этом (см. в § 35). В силу граничных условий для  $\mathbf{E}$  (но не для  $\mathbf{H}$ ) вдоль идеально проводящей земли меняются также знаки в формулах (6.16) и (6.17). Таким образом, для магнитной компоненты  $\Pi_z$  (горизонтальное положение рамочной антенны) имеем

$$\Pi_z = \frac{e^{ikR}}{R} - \frac{e^{ikR'}}{R'}, \quad \Pi_z \equiv 0 \text{ для } h \rightarrow 0, \quad (6.19)$$

в то время как для магнитной компоненты  $\Pi_x$  (вертикальное положение рамочной антенны) справедливо соотношение

$$\Pi_x = \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{e^{ikR'}}{R'}, \quad \Pi_x = 2 \frac{e^{ikR}}{R} \text{ для } h \rightarrow 0. \quad (6.20)$$

Доказательство этих формул содержится в задаче VI.1. Рамочная антенна типа (6.19) практически непригодна; антенну типа (6.20) мы рассмотрим в § 35. Как передатчик такая антенна обладает свойством направленного действия, работая преимущественно в плоскости рамки, например в плоскости  $y, z$  для компоненты  $\Pi_x$ , и имеет ту же самую характеристику, что и электрическая стержневая антенна, описанная с помощью уравнения (6.18). При использовании в качестве передатчика рамочная антенна приспособляется к вращению вокруг вертикальной оси и в соответствии со своей характеристикой направленности указывает при максимальной силе приема своей плоскостью на источник сигнала, что делает ее особенно пригодной для пеленгации (см. § 34).

### § 32. ВЕРТИКАЛЬНАЯ АНТЕННА НАД ЗЕМЛЕЙ С ЛЮБЫМИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ПОСТОЯННЫМИ

Пусть  $\varepsilon$  и  $\sigma$  — электрические постоянные почвы. В отношении магнитной характеристики почвы можно предполагать, не отступая далеко от действительности и в то же время упрощая выкладки, что  $\mu = \mu_0$ . Положим

$$n^2 = \frac{\varepsilon + i \frac{\sigma}{\omega}}{\varepsilon_0} \quad (6.21)$$

и назовем  $n$ , как и в оптике, «комплексным показателем преломления». В отличие от волнового числа в воздухе, которое будем попрежнему обозначать через  $k$ , волновое число, вычисленное по формуле (6.6), будет в дальнейшем обозначаться через  $k_3$ . Тогда на основании формул (6.6) и (6.2a) имеем

$$k_3 = nk. \quad (6.22)$$

Ниже через  $h$  будет обозначена, как и в формуле (6.16), высота дипольной антенны над поверхностью земли. Следует различать три области:

а) *Воздушное пространство*  $z > h$ . Кроме первичного возбуждения, которое имеет особенность в месте диполя  $z = h$ ,  $r = 0$ , имеем всюду конечное вторичное возбуждение, которое возникает вследствие индуцированных в почве токов. В соответствии с формулой (6.14) и по аналогии с формулой (6.9) имеем

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{перв.}} &= \int_0^{\infty} I_0(\lambda r) e^{-\mu(z-h)} \frac{\lambda d\lambda}{\mu}, \\ \Pi_{\text{втор.}} &= \int_0^{\infty} F(\lambda) I_0(\lambda r) e^{-\mu(z+h)} d\lambda. \end{aligned} \quad (6.23)$$

$F(\lambda)$  обозначает неизвестную пока функцию спектрального распределения в континууме собственных функций. Присоединенный к  $F(\lambda)$  в выражении  $\Pi_{\text{втор.}}$  множитель  $e^{-\mu h}$  удобен для дальнейшего и вполне допустим, поскольку он является функцией только от  $\lambda$  и поэтому влияет лишь на значение пока произвольной функции  $F(\lambda)$ ,

б) *Слой воздуха*  $h > z > 0$ . Здесь также имеются первичное и вторичное возбуждения. Так как  $z < h$ , то первичное возбуждение согласно установленному в формуле (6.14) правилу знаков должно быть представлено в виде (6.23) с измененным знаком в показателе, а вторичное возбуждение, являясь аналитическим продолжением  $\Pi_{\text{втор.}}$ , имеет ту же форму, как и в формуле (6.3):

$$\begin{aligned}\Pi_{\text{перв.}} &= \int_0^{\infty} I_0(\lambda r) e^{-\mu(z+h)} \frac{\lambda d\lambda}{\mu}, \\ \Pi_{\text{втор.}} &= \int_0^{\infty} F(\lambda) I_0(\lambda r) e^{-\mu(z+h)} d\lambda.\end{aligned}\quad (6.24)$$

Вдоль границы между областями «а» и «б» поле  $\Pi$  должно быть непрерывным, что гарантируется формулами (6.23) и (6.24) при произвольном выборе  $F(\lambda)$ .

в) *Земля*  $0 > z > \infty$ . Здесь не имеется первичного возбуждения; поле  $\Pi$  (обозначим его через  $\Pi_3$ ) является всюду непрерывным. Для того чтобы оно удовлетворяло дифференциальному уравнению (6.3), получающемуся для земли при замене  $h^2$  на  $k_3^2$ , представим его в виде

$$\Pi_3 = \int_0^{\infty} F_3(\lambda) I_0(\lambda r) e^{+\mu_3 z - \mu_3 h} d\lambda, \quad \mu_3^2 = \lambda^2 - k_3^2. \quad (6.25)$$

Согласно нашему общему правилу мы должны выбрать знак при  $\mu_3 z$  положительным, так как  $z < 0$ . Множитель  $e^{-\mu_3 h}$  добавлен из соображений удобства и влияет только на значение функции  $F_3(\lambda)$ , которой мы распоряжаемся по своему усмотрению. Функции  $F_3(\lambda)$  и  $F(\lambda)$  определяются из граничных условий на поверхности земли.

Следуя Максвеллу, мы должны потребовать здесь непрерывности тангенциальных компонент векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . В качестве таковых достаточно рассмотреть только

$$E_r \text{ и } H_\varphi.$$

Электрические силовые линии лежат в меридиональных плоскостях, проходящих через ось диполя, магнитные силовые линии представляют собой окружности с цент-

ром на этой оси, так что  $E_r$  и  $H_r$  обращаются в нуль. (Оба эти условия следуют из того, что  $\Pi = \Pi_z$  является функцией только от  $r$  и  $z$ .) В соответствии с формулами (6.4) и (6.7) получим:

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \Pi}{\partial z}, \quad H_r = \frac{-k^2}{\mu_0 i \omega} \frac{\partial \Pi}{\partial r} \quad \text{для } z > 0, \\ E_r &= \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \Pi_z}{\partial z}, \quad H_r = \frac{-k_z^2}{\mu_0 i \omega} \frac{\partial \Pi_z}{\partial r} \quad \text{для } z < 0, \end{aligned} \quad (6.26)$$

Отсюда следуют условия непрерывности при  $z=0$ :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial r \partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \Pi_z}{\partial z}, \quad k^2 \frac{\partial \Pi}{\partial r} = k_z^2 \frac{\partial \Pi_z}{\partial r}.$$

Они могут быть проинтегрированы по  $r$ , причем постоянную интегрирования следует положить равной нулю вследствие обращения в нуль всех выражений для  $r \rightarrow \infty$ . Если мы, кроме того, во втором из предыдущих уравнений в соответствии с формулой (6.22) заменим  $k_z^2$  на  $n^2 k^2$ , то получим

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_z}{\partial z}, \quad \Pi = n^2 \Pi_z \quad \text{для } z = 0. \quad (6.27)$$

В правую часть этих уравнений следует подставить значение  $\Pi_z$  из формулы (6.25), в левую часть — сумму  $\Pi_{\text{перв.}}$  и  $\Pi_{\text{втор.}}$  из формулы (6.24). Тем самым получаются два условия:

$$\int_0^\infty I_0(\lambda r) e^{-\mu h} (\lambda - \mu F - \mu_z F_z) d\lambda = 0, \quad (6.27a)$$

$$\int_0^\infty I_0(\lambda r) e^{-\mu h} (\lambda + \mu F - n^2 \mu F_z) \frac{d\lambda}{\mu} = 0. \quad (6.27b)$$

Они будут выполнены, если положить

$$\begin{aligned} \mu F + \mu_z F_z &= \lambda, \\ \mu F - n^2 \mu F_z &= -\lambda. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$F = \frac{\lambda}{\mu} \left( 1 - \frac{2\mu_z}{n^2 \mu + \mu_z} \right), \quad F_z = \frac{2\lambda}{n^2 \mu + \mu_z}. \quad (6.28)$$

Таким образом, доказано, что формулы (6.23), (6.24) и (6.25)



действительно дают решение нашей задачи и обеспечивают выполнение граничных условий; отсутствие каких-либо других решений гарантируется теоремой единственности решения граничных задач физики, проверенной на опыте. Упомянем еще, что, принимая во внимание значения  $n, \mu, \mu_3$ , можно записать формулу (6.28) в следующем более симметрическом виде:

$$F = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \cdot \frac{k^2 \sqrt{\lambda^2 - k^2 - k_3^2} \sqrt{\lambda^2 - k_3^2}}{k_3^2 \sqrt{\lambda^2 - k^2 + k^2} \sqrt{\lambda^2 - k_3^2}}, \quad (6.28a)$$

$$F_3 = \frac{2\lambda k^2}{k_3^2 \sqrt{\lambda^2 - k^2 + k^2} \sqrt{\lambda^2 - k_3^2}}.$$

Рассмотрим снова первичное возбуждение в его первоначальной форме  $e^{i\lambda R}/R$  при  $R^2 = r^2 + (z - h)^2$  и примем во внимание, что добавок к выражению  $\Pi_{\text{втор.}}$ , соответствующий первому члену функции  $F$  в формуле (6.28), отличается от  $\Pi_{\text{перв.}}$  только тем, что  $-h$  следует заменить через  $+h$ , т. е.  $R^2$  через  $R'^2 = r^2 + (z + h)^2$ . Тогда формулы (6.23) и (6.24) для областей «а» и «б» могут быть сведены в одну, и в качестве общего решения нашей задачи для  $z > 0$  и соответственно для  $z < 0$  получаем

$$\Pi = \frac{e^{i\lambda R}}{R} + \frac{e^{i\lambda R'}}{R'} - 2 \int_0^\infty I_0(\lambda r) e^{-\mu(z+h)} \frac{\mu_3}{n^2 r^2 + r_3^2} \cdot \frac{\lambda d\lambda}{\mu},$$

$$\Pi_3 = 2 \int_0^\infty I_0(\lambda r) e^{\mu_3 z - \mu h} \frac{\lambda d\lambda}{n^2 r^2 + r_3^2}. \quad (6.29)$$

Если, в частности, при  $h = 0$  использовать формулу (6.24) для совпадающих при этом выражений  $e^{i\lambda R}/R$  и  $e^{i\lambda R'}/R'$ , то правые части уравнений (6.29) могут быть представлены в более изящном виде. В соответствии с формулами, полученными в свое время автором, имеем

$$\Pi = \int_0^\infty I_0(\lambda r) e^{-\mu z} \frac{2n^2 \lambda d\lambda}{n^2 r^2 + \mu_3^2},$$

$$\Pi_3 = \int_0^\infty I_0(\lambda r) e^{\mu_3 z} \frac{2\lambda d\lambda}{n^2 r^2 + \mu_3^2}. \quad (6.30)$$

Если, с другой стороны, ограничиться случаем идеально проводящей земли, когда  $|n| \rightarrow \infty$ , то следует пренебречь величиной  $\mu_3$  по сравнению с  $n^2$ ; при этом в обеих формулах (6.29) подинтегральные выражения обращаются в нуль. Таким образом, подтверждается результат, полученный элементарным методом отражений в § 31 [формула (6.16)]:

$$\Pi = \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{e^{ikR'}}{R'}, \quad \Pi_3 = 0. \quad (6.30a)$$

Имеет смысл рассмотреть несколько более подробно этот предельный переход к большим  $n$ . С этой целью заменим в знаменателе подинтегрального выражения первой формулы (6.29)  $n^2\mu + \mu_3$  через  $n^2\mu$ , а в числителе для не очень больших значений  $\lambda$ , которые только и играют роль, приближенно положим

$$\mu_3 = \sqrt{\lambda^2 - k_3^2} = k_3 \sqrt{-1 + \frac{\lambda^2}{k_3^2}} \approx -ik_3, \\ \text{так что } \frac{\mu_3}{n} = -ik \quad (6.30б)$$

(относительно выбранного здесь знака  $\mu_3$  см. фиг. (28). В результате из первой формулы (6.29) найдем

$$\Pi = \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{e^{ikR'}}{R'} + \frac{2ik}{n} \int_0^\infty I_0(\lambda r) e^{-\mu(z+h)} \frac{\lambda d\lambda}{\mu^2}. \quad (6.30в)$$

Можно получить следующее наглядное толкование последнего интеграла<sup>1)</sup>.

В соответствии с равенством

$$R' = \sqrt{r^2 + (z+h)^2}, \quad \frac{e^{ikR'}}{R'} = \int_0^\infty I_0(\lambda r) e^{-\mu(z+h)} \frac{\lambda d\lambda}{\mu}$$

<sup>1)</sup> Вследствие того, что знаменатель  $\mu^2$  обращается в нуль при  $\lambda = k$ , путь интегрирования в комплексной плоскости  $\lambda$  должен обходить точку  $\lambda = k$ . Это же относится и к остальным рассматриваемым ниже интегралам, взятым по  $\lambda$ . В предшествующих интегралах, начиная с интеграла (6.14), встречался только знаменатель  $\mu$ , несущественный для сходимости.

ПОЛОЖИМ

$$R'' = \sqrt{r^2 + (z + h')^2}, \quad \frac{e^{ikR''}}{R''} = \int I_0(\lambda r) e^{-\mu(z+h')} \frac{\lambda d\lambda}{\mu}$$

и вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{ikR''}}{R''} dh' &= \int_h^\infty dh' \int_0^\infty \dots d\lambda = \\ &= \int_0^\infty I_0(\lambda r) e^{-\mu z} \frac{\lambda d\lambda}{\mu} \int_h^\infty e^{-\mu h'} dh' = \int_0^\infty I_0(\lambda r) e^{-\mu(z+h)} \frac{\lambda d\lambda}{\mu^2}. \end{aligned}$$

Интеграл, входящий в выражение (6.30в), означает действие непрерывного покрытия полупрямой  $h < h' < \infty$  диполями, которое простирается от отраженной точки  $z = -h$ ,  $r = 0$  до  $z = -\infty$ ,  $r = 0$ . Приближенная формула (6.30в) после этого может быть записана следующим образом:

$$\Pi = \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{e^{ikR'}}{R'} + \frac{2ik}{n} \int \frac{e^{ikR''}}{R''} dh'. \quad (6.30г)$$

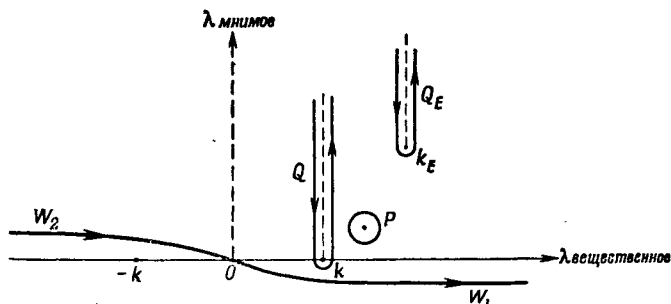
Формула (6.30г) напоминает совершенно аналогичное покрытие полупрямой источниками тепла, которое мы использовали при решении одной из задач теплопроводности (см. фиг. 15). Однако в том случае требовалось удовлетворить простому граничному условию  $\frac{\partial u}{\partial n} + hu = 0$  (входящее туда  $h$ , естественно, не имеет ничего общего с настоящим  $h$ ); теперь же следует приближенно удовлетворить сложным граничным условиям, которые возникают вследствие примыкания воздушного пространства к хорошо проводящей земле.

Поле  $E, H$  можно получить из предыдущих формул непосредственным дифференцированием. Однако мы не хотим выписывать здесь получающиеся при этом несколько сложные формулы, так как они потребуются нам только при рассмотрении энергетических вопросов в § 36.

Наши интегралы в формулах (6.29) и (6.30), вследствие встречающихся в них квадратных корней

$$\mu = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad \mu_3 = \sqrt{\lambda^2 - k_3^2}, \quad (6.34)$$

не являются однозначно определенными. В соответствии с четырьмя комбинациями знаков  $\mu$  и  $\mu_3$ , подинтегральное выражение должно было бы быть четырехзначным, его риманова поверхность — «четырёхлистной». С помощью введенного выше правила знаков в формуле (6.14), которое относилось к вещественной части  $\mu$  и переносится на  $\mu_3$ , из этих четырех листов выделяется один в качестве «допустимого листа». Чтобы быть уверенным в сходимости



Фиг. 28. Пути  $W_1$  и  $W = W_1 + W_2$  в формуле (6.33). Путь  $W$  деформируется в две петли  $Q$  и  $Q_E$ , идущие вдоль разрезов, проведенных из точек ветвления  $k$  и  $k_E$ , и замкнутый контур, окружающий полюс  $P$ .

наших интегралов, потребуем, чтобы путь интегрирования в бесконечности лежал исключительно на этом допустимом листе. Мы достигаем этого, если соединим точки разветвления

$$\lambda = k \text{ и } \lambda = k_3 \quad (6.31a)$$

с бесконечностью посредством двух (вообще говоря, проведенных произвольно) разрезов, которые не должны пересекаться с путем интегрирования. В соответствии с фиг. 28 путь интегрирования, взятый вдоль вещественной оси, не должен проходить через точку разветвления  $\lambda = k$ , а должен обходить последнюю снизу, уклоняясь в нижнюю полуплоскость  $\lambda$  и переходя оттуда в бесконечность, например параллельно вещественной оси  $\lambda$ . Этот путь интегрирования, ведущий от  $\lambda = 0$  до  $\lambda = \infty$ , обозначен на фиг. 28 через  $W_1$ . Тем самым значение интегралов,

встречающихся в формулах (6.29) и (6.30), полностью уточнено.

Однако и после этого формулы (6.29) и (6.30) не имеют вполне законченного вида: в них входят интегралы с фиксированным начальным значением  $\lambda = 0$ , а не интегралы по замкнутому пути в плоскости  $\lambda$ , которые гораздо удобнее, так как в последнем случае путь интегрирования можно деформировать. Мы исправим этот недостаток, если воспользуемся соотношением

$$I_0 = \frac{1}{2} (H_0^1 + H_0^2)$$

и формулой полуобхода (10) из указания к задаче IV.2. Если положить в последнем  $\rho = \lambda r$ , то предыдущее уравнение принимает вид

$$I_0 = \frac{1}{2} [H_0^1(\lambda r) - H_0^1(\lambda e^{i\pi} r)]. \quad (6.32)$$

Умножим уравнение (6.32) на произвольную функцию от  $\lambda$  (в последующем обозначаемую с помощью многоточия), а также на  $\lambda d\lambda$  и проинтегрируем вдоль  $W_1$ . Тогда вычитаемое в правой части формулы (6.32) при  $\lambda' = \lambda e^{i\pi}$  принимает вид

$$\int_{W'} H_0^1(\lambda' r) \dots \lambda' d\lambda'. \quad (6.32a)$$

Здесь  $W'$  есть путь, получающийся из  $W_1$  с помощью отражения относительно нулевой точки, пробегаемый в направлении  $\lambda' = 0 \rightarrow \lambda' = -\infty$  и совпадающий с точностью до знака с путем  $W_2$  (фиг. 28). Интеграл (6.32a), следовательно, совпадает с интегралом

$$\int_{W_2} H_0^1(\lambda' r) \dots \lambda' d\lambda'. \quad (6.32b)$$

Обозначая всюду переменную интегрирования через  $\lambda$  и объединяя оба пути  $W_1$  и  $W_2$  в путь  $W = W_1 + W_2$ , находим из формулы (6.32)

$$\int_{W_1} I_0(\lambda r) \dots \lambda d\lambda = \frac{1}{2} \int_W H_0^1(\lambda r) \dots \lambda d\lambda. \quad (6.33)$$

Тем самым наша цель достигнута: одностороннее и вещественное по внешнему виду интегрирование, начинающееся при  $\lambda = 0$ , в наших формулах (6.29) и (6.30) заменено интегрированием по пути, замыкающемуся в бесконечно удаленной части комплексной плоскости. Мы будем считать, что преобразование (6.33) произведено над всеми интегралами, встречающимися в формулах (6.29) и (6.30). В частности, например, мы записываем первичное возбуждение из формулы (6.14) и первую из формул (6.30) в новом виде

$$\Pi_{\text{перв.}} = \frac{1}{2} \int_W H_0^1(\lambda r) e^{-\mu |z|} \frac{\lambda d\lambda}{\mu}, \quad (6.34)$$

$$\Pi = \int_W H_0^1(\lambda r) e^{-\mu z} \frac{n^2 \lambda d\lambda}{n^2 \mu + \mu_3}. \quad (6.34a)$$

Внимательный читатель уже давно заметил, что и фиг. 28 совпадает с прежней фиг. 26 (причем совпадают даже пути  $W$ ,  $W_1$  и переменная интегрирования  $\lambda$ ) и что наша настоящая задача (определение функции  $\Pi$  в пространстве, разделенном поверхностью земли, при наперед заданной особенности в месте нахождения дипольной антенны) является частным случаем общей задачи определения функции Грина. Здесь, так же как и в общем случае, мы построили решение из собственных функций, удовлетворяющих в бесконечности *условию излучения*. Выполнение этого условия в рассматриваемом случае также следует с очевидностью из того, что в формулы (6.34) и (6.34a) входит только первая функция Ханкеля  $H_0^{(1)}$ .

Рассмотрим теперь верхнюю часть фиг. 28. Поскольку  $H_0^1(\lambda r)$ , как известно, обращается в нуль на бесконечно-

<sup>1)</sup> При этом предполагается, что временная зависимость задана в наиболее удобной для нас форме  $e^{-i\omega t}$ . В случае временной зависимости  $e^{+i\omega t}$  мы должны были бы в формуле (6.32) перейти от  $I$  к  $H^2$ , используя формулу полуобхода (10a) в задаче IV.2, и получили бы после этого представление, которое, например в формуле (6.34a), состояло бы из элементов вида

$$H_0^2(\lambda r) e^{-\mu z} e^{+i\omega t},$$

т. е. также имело бы характер уходящей волны.

сти в верхней полуплоскости, мы можем переместить путь  $W$  в эту полуплоскость. При этом  $W$  обходит разрез, принадлежащие функциям (6.34), с помощью петель  $Q$  и  $Q_3$ . Однако, кроме того, имеется еще одна особенность подинтегрального выражения интеграла (6.34) и аналогичных интегралов в точке, где знаменатель  $n^2\mu + \mu_3$  обращается в нуль. Обозначим эту точку через  $\lambda = p$ . Она соответствует полюсу подинтегрального выражения, и при интегрировании ее следует обходить по контуру  $P$ . Пути, связывающие последний с бесконечностью, не обозначены на фиг. 28, так как они взаимно уничтожаются при интегрировании.

Из трех перечисленных составных частей  $Q$ ,  $Q_3$ ,  $P$  интеграла частью  $Q_3$  при большом  $|k_3|$  следует пренебречь, так как  $H^1(\lambda r)$  на большом расстоянии от вещественной оси стремится к нулю по показательному закону. Сначала будем рассматривать  $P$  отдельно; однако вскоре убедимся в том, что  $P$  и  $Q$  практически вряд ли следует разделять.

Из уравнения, определяющего  $p$ ,

$$n^2\mu + \mu_3 = 0 \quad (6.35)$$

следует

$$\sqrt{\frac{p^2 - k^2}{p^2 - k_3^2}} = -\frac{k^2}{k_3^2}, \quad p^2 = \frac{k^2 k_3^2}{k^2 + k_3^2}, \quad (6.36)$$

вместо чего можно также записать

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k_3^2}. \quad (6.36a)$$

Учитывая, что  $|k_3| \gg k$ , получаем приближенную формулу

$$p = k \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{k^2}{k_3^2} \right), \quad k - p = \frac{k}{2} \frac{k^2}{k_3^2}. \quad (6.36b)$$

Следует особо подчеркнуть, что точное значение  $p$  из формул (6.36) или (6.36a) симметрично относительно  $k$  и  $k_3$ .

Вычислим теперь интеграл по контуру  $P$  от подинтегрального выражения формулы (6.34a) с помощью теории вычетов. При этом мы можем прямо положить  $\lambda = p$  во всех множителях подинтегрального выражения (6.34a),

кроме знаменателя, обращающегося в нуль при  $\lambda = p$ , который мы заменяем выражением

$$\frac{d}{d\lambda}(n^2_{\lambda} + \epsilon_3) = \lambda \left( \frac{n^2}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - k_3^2}} \right),$$

взятым при  $\lambda = p$ ; тогда получим

$$\frac{p}{k^2} K, \quad K = \frac{k_3^2}{\sqrt{p^2 - k^2}} + \frac{k^2}{\sqrt{p^2 - k_3^2}}; \quad (6.37)$$

введенная здесь величина  $K$  также симметрична относительно  $k$  и  $k_3$ . Отсюда находим значение интеграла по контуру  $P$ , соответствующего интегралу (6.34а)

$$\Pi = 2\pi i \frac{k_3^2}{K} H_0^1(pr) e^{-\sqrt{p^2 - k^2} z}. \quad (6.38)$$

Для  $z < 0$  (земля), заменяя  $k$  на  $k_3$  и меняя знак при  $z$ , аналогично получаем

$$\Pi_3 = 2\pi i \frac{k^2}{K} H_0^1(pr) e^{+\sqrt{p^2 - k_3^2} z}. \quad (6.38a)$$

Для всех расстояний  $|pr| \gg 1$ , т. е. всюду, кроме непосредственной окрестности передатчика, можно заменить  $H$  асимптотическим значением (4.55). Из формул (6.38) и (6.38a) тогда следует

$$\Pi = 2 \sqrt{\frac{2\pi i}{pr}} \frac{k_3^2}{K} e^{ipr} \sqrt{p^2 - k^2} z, \quad z \geq 0. \quad (6.39)$$

$$\Pi_3 = 2 \sqrt{\frac{2\pi i}{pr}} \frac{k^2}{K} e^{ipr} \sqrt{p^2 - k_3^2} z, \quad z \leq 0. \quad (6.39a)$$

Эти формулы аналогичны формулам для так называемых «поверхностных волн», с которыми мы встречались в т. II при рассмотрении сейсмических волн Рэлея и волн в воде:

1) Волны, соответствующие формулам (6.39) и (6.39a), связаны с поверхностью  $z = 0$  и затухают при удалении от нее в обе стороны: в сторону земли — быстро, в силу множителя  $(p^2 - k^2)^{1/2}$  при  $z$ , а в сторону воздуха — медленно; однако и в этом случае функция  $\Pi$  при большом  $z$  стремится к нулю по показательному закону.

2) Распространение этих волн вдоль плоскости  $z = 0$  происходит по формуле  $\frac{dr}{dt} = \frac{\omega}{p}$ , в которую характеристики



воздуха и земли входят симметрично, как это и должно быть для поверхностной волны.

3) Если пренебречь поглощением в радиальном направлении, то амплитуда выражений (6.39) и (6.39а) с увеличением расстояния от передатчика уменьшается, как  $1/\sqrt{r}$ , интенсивность — как  $1/r$ . Это также (см. стр. 145) является признаком двумерного распространения энергии по поверхности  $z = 0$ .

4) Для полноты упомянем также о поглощении, которое имеет место при распространении волны в радиальном направлении и которое подчиняется показательному закону. Показатель поглощения определяется вещественной частью  $i\rho r$ , т. е. равняется в силу формул (6.36), (6.21) и (6.22) как при  $z > 0$ , так и при  $z < 0$  следующему выражению:

$$-\frac{kr}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{i}{n^2} \right) = -\frac{\frac{kr}{2} \frac{\varepsilon_0 \sigma}{\omega}}{\varepsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}}.$$

Для достаточно больших  $r$ , когда множитель  $r^{-1/2}$  относительно мало меняется, формулы (6.39) и (6.39а) можно рассматривать как выражения для волн, которые имеют своим источником бесконечно удаленную точку, например на отрицательной полуоси  $x$ . Если обозначить через  $A$  медленно меняющийся амплитудный множитель, то эти выражения принимают следующий вид:

$$\Pi = Ak_3^2 e^{ipx - \sqrt{p^2 - k_3^2} z}, \quad (6.40)$$

$$\Pi_3 = Ak^2 e^{ipx + \sqrt{p^2 - k_3^2} z} \quad (6.40a)$$

и совпадают с так называемыми «волнами Ценнека». Действительно, Ценнек<sup>1)</sup> уже в 1907 г. графически и численно исследовал поля  $E$ ,  $H$ , полученные из выражений (6.40) и (6.40а), и рассмотрел характеристические постоянные, соответствующие различным средам (в том числе характеристики морской и пресной воды). В работе 1909 г. автор<sup>2)</sup> ставил себе главной задачей показать, что эти

<sup>1)</sup> Zenneck, Ann. d. Phys., 23, 846 (1907).

<sup>2)</sup> A. Sommerfeld, Ann. Physik, 28, 665 (1909).

волны автоматически содержатся в комплексе волн, излучаемых согласно теории дипольной антенной. Это утверждение остается в силе и в настоящее время. Однако раньше мы придавали этому факту слишком большое значение, так как в то время казалось возможным объяснить преодоление кривизны земли радиосигналом именно с помощью поверхностных волн; теперь известно, что причиной этого является наличие ионосферы (см. введение к настоящей главе). Во всяком случае нам кажется беспредметной дискуссия о «реальности волн Ценнека», которая время от времени возникает в технической литературе.

Эпштейн <sup>1)</sup> показал, что поверхностная волна  $P$ , взятая в отдельности, является решением нашей задачи, следовательно в принципе не обязана сопровождаться комплексом волн  $Q$ . Комплекс волн  $Q$ , вообще говоря, имеет характер «пространственной волны» и, в противоположность волнам, определяемым формулой (6.40), выражается формулой типа

$$\Pi = B \frac{e^{ikr}}{r}.$$

Однако в конкретных условиях радиосвязи сумму  $P + Q$  лучше всего представлять одним интегралом, взятым по контуру, охватывающему обе почти совпадающие точки  $\lambda = p$  и  $\lambda = k$ , так что в зависимости от взаимного положения этих точек интеграл  $P + Q$  можно исследовать методом седловых точек. Наиболее полным образом это проведено Оттом <sup>2)</sup>. Однако здесь мы не имеем возможности излагать его результаты, считая неуместным слишком углубляться в детали рассматриваемых вопросов. Познакомим теперь читателя с одной принципиально важной общей точкой зрения и одной особенно удобной для числовых вычислений формулой.

Эта общая точка зрения приводит к особому рода «закону подобия» для беспроволочной телеграфии путем введения так называемого «численного расстояния». Измеренный в длинах волны радиальный путь, пройден-

<sup>1)</sup> P. S. Epstein, National Academie of Sciences, Washington, июнь 1947.

<sup>2)</sup> H. Ott, Ann. d. Phys., 41, 443 (1942).

ный за время  $t$ , равен (с точностью до множителя  $2\pi$ )  $kr$ ; путь, пройденный за то же время поверхностной волной, равен вещественной части  $pr$ . Мы образуем разность обоих путей и определяем с ее помощью величину

$$\rho = i(k - p)r. \quad (6.41)$$

Абсолютную величину  $\rho$  мы и называем *численным расстоянием*;  $\rho$  есть безразмерная величина, абсолютное значение которой мало по сравнению с  $kr$ . В соответствии с уравнением (6.36а) имеем

$$|\rho| \sim \frac{kr}{2} \frac{k^2}{|k_z|^2} = \frac{kr}{2|n|^2}. \quad (6.41a)$$

При этом оказывается, что для малых значений  $\rho$  в выражении для силы приема преобладает пространственно-волновой тип, свойства почвы тогда не сказываются заметным образом, и можно (см. § 34), не совершая большой ошибки, считать почву идеально проводящей. Для больших  $\rho$ , наоборот, становится ощутительным соперничество между пространственной и поверхностной волнами, так как значение  $\rho$  в формуле (6.41) в точности равняется разности способностей распространения обеих волн. Тогда электрические постоянные почвы (причем не только  $\varepsilon$ , но и  $\varepsilon_z$ ) начинают играть существенную роль. Вообще говоря, равные  $\rho$  обуславливают одинаковый тип волны и одинаковую силу приема, а величина  $\rho$  характеризует, таким образом, закон подобия. То обстоятельство, что для морской воды вследствие большой проводимости последней в соответствии с формулой (6.41а) величина  $\rho$  оказывается гораздо меньшей при одинаковых расстояниях, чем для такой же ровной, сухой почвы или пресной воды, объясняет большую силу приема над морем (различие в силе приема днем и ночью объясняется, естественно, только состоянием ионосферы).

Применяя разложение по возрастающим степеням  $\rho$ , автор пришел (в его первой работе за 1909 г.) к удобной приближенной формуле, которая впоследствии была вновь получена несколько более простым путем рядом авторов (Ван дер Поль, Ниссен, Томас, Муррей) и которая в окончательной форме, справедливой для воздушного простран-

ства вблизи поверхности земли, гласит:

$$\Pi = 2 \frac{e^{ikr}}{r} \left( 1 + i \sqrt{\pi \rho} e^{-\rho} - 2 \sqrt{\rho} e^{-\rho} \int_0^{\sqrt{\rho}} e^{x^2} dx \right). \quad (6.42)$$

В подтверждение предыдущих замечаний сделаем из формулы (6.42) следующие выводы: первый член в правой ее части, который при достаточно малом  $\rho$  только один принимается во внимание, имеет тип пространственной волны и соответствует вследствие наличия множителя 2 случаю идеально проводящей земли; второй член имеет тип поверхностной волны и совпадает как качественно, так и в требуемом приближении количественно с выражением в формуле (6.39); третий член дает поправку, возникающую при большем  $\rho$ . Обобщая формулу (6.42) на случай средних величин возвышения над поверхностью земли, получаем

$$\Pi = 2 \frac{e^{ikR}}{R} \left( 1 + i \sqrt{\pi \tau} e^{-\tau} - 2 \sqrt{\tau} e^{-\tau} \int_0^{\sqrt{\tau}} e^{x^2} dx \right), \quad (6.43)$$

где

$$\tau = i(k - p)r \left( 1 + n \frac{z}{r} \right)^2;$$

для  $z=0$   $\tau$  переходит в  $\rho$  и формула (6.43) — в формулу (6.42).

### § 33. ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ АНТЕННА НАД ЗЕМЛЕЙ С ЛЮБЫМИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ПОСТОЯННЫМИ

В случае горизонтальной антенны, направленной по оси  $x$ , кажется уместным положить вектор  $\Pi$  равным  $\Pi_x$ . Однако уже в конце § 31, п. 3, было замечено, что это ведет к цели только в случае идеально проводящей земли.

Полагая  $\Pi = \Pi_x$ , получаем из уравнений (6.4) и (6.7)

$$\begin{aligned} E_x &= k^2 \Pi_x + \frac{\partial^2 \Pi_x}{\partial x^2}, & E_y &= \frac{\partial^2 \Pi_x}{\partial x \partial y}, & z &\geq 0, \\ E_x &= k_z^2 \Pi_{xz} + \frac{\partial^2 \Pi_{xz}}{\partial x^2}, & E_y &= \frac{\partial^2 \Pi_{xz}}{\partial x \partial y}, & z &\leq 0: \end{aligned} \quad (6.44)$$

Компоненты  $E_x$  и  $E_y$  при переходе через плоскость  $z=0$  должны меняться непрерывно. Из предыдущих формул для  $E_y$  можно заключить о непрерывности  $\Pi_x$ , откуда, очевидно, следует также непрерывность  $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}$ . Однако тогда из формул для  $E_x$  следовало бы равенство  $k^2$  и  $k_3^2$ , что содержит уже в себе противоречие.

Это противоречие разрешается, если будем считать, что вектор Герца имеет две компоненты:

$$\Pi = (\Pi_x, \Pi_z), \quad (6.45)$$

тогда вместо уравнений (6.44) имеют место соотношения

$$\begin{aligned} E_x &= k^2 \Pi_x + \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \Pi, & E_y &= \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \Pi, & z &\geq 0, \\ E_x &= k_3^2 \Pi_{x3} + \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \Pi_3, & E_y &= \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \Pi_3, & z &\leq 0. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Отсюда следует при  $z=0$

$$\operatorname{div} \Pi = \operatorname{div} \Pi_3, \quad (6.47)$$

$$k^2 \Pi_x = k_3^2 \Pi_{x3}. \quad (6.48)$$

Для магнитных компонент в соответствии с формулами (6.4) и (6.7) имеют место соотношения

$$H_x = \frac{k^2}{i\mu_0\omega} \frac{\partial \Pi_z}{\partial y}, \quad H_y = \frac{k^2}{i\mu_0\omega} \left( \frac{\partial \Pi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_z}{\partial x} \right), \quad z \geq 0.$$

$$H_x = \frac{k_3^2}{i\mu_0\omega} \frac{\partial \Pi_{z3}}{\partial y}, \quad H_y = \frac{k_3^2}{i\mu_0\omega} \left( \frac{\partial \Pi_{x3}}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_{x3}}{\partial x} \right), \quad z \leq 0.$$

В силу непрерывности  $H_x$  имеем

$$k^2 \Pi_z = k_3^2 \Pi_{z3}, \quad (6.49)$$

и из непрерывности  $H_y$  следует тогда

$$k^2 \frac{\partial \Pi_x}{\partial z} = k_3^2 \frac{\partial \Pi_{x3}}{\partial z}. \quad (6.50)$$

Таким образом, для  $\Pi_x$  мы имеем два условия, (6.48) и (6.50), которые коротко можно записать в виде

$$\Pi_x = n^2 \Pi_{x3}, \quad \frac{\partial \Pi_x}{\partial z} = n^2 \frac{\partial \Pi_{x3}}{\partial z}. \quad (6.51)$$

Подобно этому, после определения  $\Pi_x$  с помощью уравнений (6.49) и (6.47) получаем два условия для  $\Pi_z$ :

$$\Pi_z = n^2 \Pi_{z3}, \quad \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_{z3}}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \Pi_x}{\partial x}. \quad (6.52)$$

Вычисление  $\Pi_x$  происходит по схеме § 32. Так же как и там, мы различаем три области:

а)  $\infty > z > h$ , б)  $h > z > 0$ , в)  $0 > z > -\infty$ .

В областях «а» и «б»  $\Pi_x$  складывается из первичного и вторичного возбуждений, которые следует определить согласно формулам (6.23) и (6.24); в области «в» следует использовать только вторичное возбуждение согласно формуле (6.25). Условия (6.51) дают тогда вместо (6.27а) и (6.27б)

$$\int_0^{\infty} I_0(\lambda r) e^{-\mu h} (\lambda - \mu F - n^2 \mu_3 F_3) d\lambda = 0, \quad (6.53a)$$

$$\int_0^{\infty} I_0(\lambda r) e^{-\mu h} (\lambda + \mu F - n^2 \mu F_3) \frac{d\lambda}{\mu} = 0; \quad (6.53б)$$

полагая равными нулю обе скобки, получаем

$$F = \frac{\lambda}{\mu} \left( -1 + \frac{2\lambda}{\mu + \mu_3} \right), \quad F_3 = \frac{1}{n^2} \frac{2\lambda}{\mu + \mu_3}. \quad (6.54)$$

Из предыдущего выражения для  $F$  следует, что при  $n \rightarrow \infty$ , или, что то же, при  $\mu_3 \rightarrow \infty$ , второй член этого выражения обращается в нуль и остается только первый член, именно  $F = -\frac{\lambda}{\mu}$ . Подставив выражения (6.54) в формулы (6.23), (6.24) и (6.25), получим аналогично формулам (6.29) следующее общее представление поля  $\Pi_x$ :

$$\begin{aligned} \Pi_x &= \frac{e^{ikR}}{R} - \frac{e^{ikR'}}{R'} + 2 \int_0^{\infty} I_0(\lambda r) e^{-\mu(z+h)} \frac{\lambda d\lambda}{\mu + \mu_3}, \\ \Pi_{xz} &= \frac{2}{n^2} \int_0^{\infty} I_0(\lambda r) e^{+\mu_3 z - \mu h} \frac{\lambda d\lambda}{\mu + \mu}, \end{aligned} \quad (6.55)$$

где

$$R^2 = r^2 + (z - h)^2, \quad R'^2 = r^2 + (z + h)^2.$$

Если, в частности,  $h=0$ , то  $R'=R$ . Тогда формулы (6.55) принимают более простой вид:

$$\begin{aligned} \Pi_x &= 2 \int_0^\infty I_0(\lambda r) e^{-\mu z} \frac{\lambda d\lambda}{\mu + \mu_3}, \\ \Pi_{xz} &= \frac{2}{n^2} \int_0^\infty I_0(\lambda r) e^{+\mu_3 z} \frac{\lambda d\lambda}{\mu + \mu_3}. \end{aligned} \quad (6.55a)$$

С другой стороны, если перейти к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , то при этом  $|\mu_3| \rightarrow \infty$ , и оба интеграла в формулах (6.55) обращаются в нуль, так что формулы (6.55) сводятся к выражениям

$$\Pi_x = \frac{e^{ikR}}{R} - \frac{e^{ikR'}}{R'}, \quad \Pi_{xz} = 0 \quad (6.55b)$$

в соответствии с формулой (6.17).

Интегрирование в формулах (6.55) и (6.55a) следует производить вдоль линий  $W_1$  (см. фиг. 28). Вместо этого можно вновь использовать контур  $W = W_1 + W_2$ , замыкающийся в бесконечности. Если при этом заменить  $I_0$  через  $\frac{1}{2} H_0^1$ , то при  $h$ , обращающемся в нуль, и конечном  $k_3$  получим аналогично формуле (6.34a) следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Pi_x &= \int_W H_0^1(\lambda r) e^{-\mu z} \frac{\lambda d\lambda}{\mu + \mu_3}, \\ \Pi_{xz} &= \frac{1}{n^2} \int_W H_0^1(\lambda r) e^{+\mu_3 z} \frac{\lambda d\lambda}{\mu + \mu_3}. \end{aligned} \quad (6.55b)$$

Обратимся теперь к определению компоненты  $\Pi_z$  и рассмотрим сначала второе условие (6.52). Так как  $\Pi_x$  и  $\Pi_{xz}$  зависят от  $x, y$  только в силу их зависимости от  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , то

$$\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} = \frac{\partial \Pi_x}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \cos \varphi \frac{\partial \Pi_x}{\partial r}, \quad \varphi = \angle(x, r);$$

аналогично выражается  $\frac{\partial \Pi_{xz}}{\partial x}$ . Из упомянутого выше равен-

ства (6.52) следует тогда, что компонента  $\Pi_z$  также должна содержать множитель  $\cos \varphi$ . Отсюда мы видим, что выражение  $\Pi_z$  должно быть построено не из собственных функций  $I_0(\lambda r) e^{\mp \mu z}$ , как раньше, а из следующих непосредственно за ними собственных функций с индексом 1:

$$I_1(\lambda r) \cos \varphi e^{\mp \mu z}.$$

Так как компонента  $\Pi_z$  не должна содержать никакого первичного возбуждения, то нужно положить

$$\begin{aligned} \Pi_z &= \cos \varphi \int I_1(\lambda r) e^{-\mu(z+h)} \Phi(\lambda) d\lambda, \\ \Pi_{z3} &= \cos \varphi \int I_1(\lambda r) e^{+\mu_3 z - \mu h} \Phi_3(\lambda) d\lambda, \end{aligned} \quad (6.56)$$

где  $\Phi$  и  $\Phi_3$  — функции, подлежащие определению. Первое из условий (6.52) сразу дает

$$\Phi = n^2 \Phi_3. \quad (6.56a)$$

Второе же из условий (6.52) приводит к соотношению

$$\begin{aligned} -\cos \varphi \int I_1(\lambda r) e^{-\mu h} (\mu \Phi + \mu_3 \Phi_3) d\lambda &= \\ = \cos \varphi \left( \frac{1}{n^2} - 1 \right) \int I'_0(\lambda r) e^{-\mu h} \frac{2\lambda^2 d\lambda}{\mu + \mu_3}. \end{aligned} \quad (6.56b)$$

Правая часть уравнения (6.56b) получается путем дифференцирования выражений (6.55) при  $z=0$ ; при этом значений  $z$  обращаются в нуль члены, не содержащие интегралов. Если далее умножить числитель и знаменатель подинтегрального выражения в правой части на  $\mu - \mu_3$  и принять во внимание, что

$$\mu^2 - \mu_3^2 = k_3^2 - k^2 = k_3^2 \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right),$$

а также, что согласно формуле (4.52б)  $I'_0(\rho) = -I_1(\rho)$ , то формулу (6.56b) можно представить в виде

$$-\cos \varphi \int I_1(\lambda r) e^{-\mu h} \left[ \mu \Phi + \mu_3 \Phi_3 + \frac{2}{k_3^2} (\mu - \mu_3) \lambda^2 \right] d\lambda = 0. \quad (6.56в)$$



Это дает второе соотношение между  $\Phi$  и  $\Phi_3$ , а именно

$$\mu\Phi + \mu_3\Phi_3 = -\frac{2}{k_3^2}(\mu - \mu_3)\lambda^2. \quad (6.56\text{г})$$

Принимая во внимание формулы (6.56а) и (6.22), получаем

$$\Phi = -\frac{2\lambda^2}{k^2} \frac{\mu - \mu_3}{h^2 + \mu_3}, \quad \Phi_3 = \frac{\Phi}{n^2}. \quad (6.57)$$

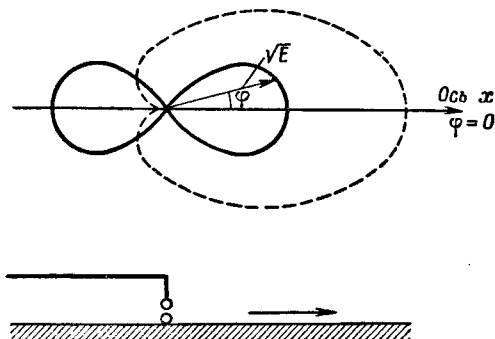
Поэтому окончательное представление  $\Pi_z$  в соответствии с формулой (6.56) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Pi_z &= -\frac{2}{k^2} \cos \varphi \int I_1(\lambda r) e^{-\mu(z+h)} \frac{\mu - \mu_3}{n^2 + \mu_3} \lambda^2 d\lambda, \\ \Pi_{z3} &= -\frac{2}{k_3^2} \cos \varphi \int I_1(\lambda r) e^{+\mu_3 z - \mu h} \frac{\mu - \mu_3}{n^2 + \mu_3} \lambda^2 d\lambda. \end{aligned} \quad (6.58)$$

В качестве пути интегрирования следует использовать путь  $W_1$ , указанный на фиг. 28, или—после замены множителя  $I_1$  множителем  $\frac{1}{2} H_1^1$ —путь  $W = W_1 + W_2$ . Так как знаменатель в формуле (6.58) совпадает со знаменателем  $\Pi_z$  в § 32, то в компоненте  $\Pi_z$  поля, индуцированного горизонтальной антенной, также имеются «поверхностные волны», соответствующие полюсу  $P$ , указанному на фиг. 28, которые накладываются на пространственные волны или же сливаются с последними. Если заставить величину  $k_3$  стремиться к бесконечности, то величины  $n$  и  $\mu_3$  также неограниченно растут, и компонента  $\Pi_z$  должна обратиться в нуль. Таким образом, индуцированная вертикальная компонента сильно зависит от свойств почвы и поэтому может остаться незамеченной, если применять прежние элементарные методы, изложенные в § 31.

Принципиальное отличие излучения горизонтальной антенны от излучения вертикальной антенны заключается в *направленности* ее действия, которая выражается множителем  $\cos \varphi$  в формуле (6.58). Этот же множитель входит в электрические и магнитные компоненты поля, определяющие излучение, и появляется в квадрате в выражении для излученной энергии. Мы увидим ниже, что компонента  $\Pi_x$ , не содержащая  $\cos \varphi$ , вообще говоря, не играет существенной роли для дальней передачи и поэтому может быть опущена при дальнейшем рассмотрении.

На фиг. 29 представлена сплошной линией «характеристика направленности» горизонтальной антенны. Для получения характеристик наносят на полярной диаграмме квадратный корень из излученной энергии  $\sqrt{E} = M \cos \varphi$ , где  $M$  — максимум  $\sqrt{E}$ , достигаемый для направления  $\varphi = 0$ . Кривая симметрична относительно направления



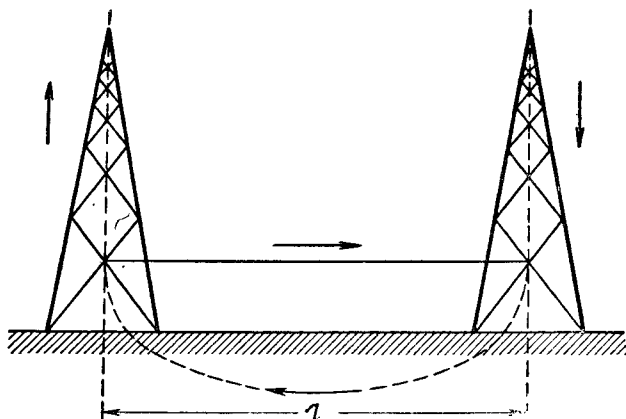
Фиг. 29. Вверху: сплошная линия — характеристика направленности горизонтальной антенны; пунктирная линия — характеристика направленности комбинации горизонтальной и вертикальной антенн. Внизу: схема такой комбинированной антенны.

$\varphi = \pm \pi/2$ , в котором не происходит никакого излучения; в направлениях  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  излучение одинаковое; если горизонтальную антенну объединить с когерентно работающей вертикальной антенной, добившись при этом того, чтобы вертикальная антенна имела то же самое излучение  $M$ , что и горизонтальная антенна для  $\varphi = 0$  (ее полярная диаграмма есть окружность радиуса  $M$ ), то в качестве суммарной характеристики обоих излучений получим кривую

$$\sqrt{E} = M (\cos \varphi) = \begin{cases} 2M & \text{при } \varphi = 0, \\ M & \text{при } \varphi = \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{при } \varphi = \pi. \end{cases}$$

Она представлена штрихованной линией и показывает односторонне направленное действие, более сильное, чем для двухсторонней вытянутой кривой.

На нижней половине фигуры схематически изображена установка, объединяющая вертикальную и горизонтальную антенны и практически осуществленная в 1906 г. для



Фиг. 30. Горизонтальная антенна и соответствующие ей точки в земле; справа и слева—пара вертикальных антенн, эквивалентная при дальних передачах горизонтальной антенне.

обслуживания трансатлантического сообщения (станция Клифден в Ирландии). Усиленное излучение в одном направлении, показанном на фиг. 29 стрелкой, вызвало всеобщее удивление и дало повод к постановке проблемы для диссертации Гершельмана<sup>1)</sup>, в которой была развита изложенная выше теория. Однако конструкция передатчика в Клифдене явилась довольно громоздкой и была заменена в дальнейшем комбинацией двух или нескольких вертикальных антенн (фиг. 30).

На фиг. 30 изображена горизонтальная антенна эффективной длины  $l$  с проходящим по ней током и соответствующую

<sup>1)</sup> Н. Hörschelmann, Диссертация, München, 1911; Jahrb. f. drahtl. Tel., 5, 14, 158 (1912).

щими токами в земле, которые эквивалентны двум когерентным, но колеблющимся в противоположных фазах вертикальным антеннам, представленным для наглядности в виде двух мачт. Их действие вдоль представлено формулой вида

$$l \cos \varphi \frac{\partial \Pi_1}{\partial r}, \quad \Pi_1 = \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (6.59)$$

где  $\Pi_1$  означает вектор Герца отдельной мачты. Покажем, что изложенная выше теория действительно приводит в грубом приближении к формуле такого вида.

Поскольку нас интересует только действие вдаль, положим в уравнениях (6.58)  $h=0$  и, так же как в уравнении (6.306), будем считать, что

$$\mu - \mu_3 \sim \mu_3 = ikn, \quad n^2\mu + \mu_3 \sim n^2\mu.$$

Если учесть соотношение  $\frac{\partial}{\partial r} I_0(\lambda r) = -\lambda I_1(\lambda r)$ , то первое из уравнений (6.58) принимает вид

$$\Pi_z = \frac{2i}{kn} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty I_0(\lambda r) e^{-\mu z} \frac{\lambda d\lambda}{\mu}, \quad (6.59a)$$

так что теперь под знаком интеграла стоит первичное возбуждение  $e^{ikR}/R$ . Таким образом, мы, действительно, пришли к выражению типа (6.59). Длина антенны  $l$  оказалась равной следующей величине:

$$|l| = \frac{2}{k|n|} = \frac{2\sqrt{\epsilon_0}}{k|\sqrt{\epsilon + i\sigma/\omega}|}. \quad (6.596)$$

Величина  $|l|$  в соответствии со значением  $k$  имеет порядок длины волны  $\lambda$ , однако в остальном сильно зависит от свойств почвы; в пределе при  $\sigma \rightarrow \infty$   $|l| = 0$ , что уже подчеркивалось неоднократно.

Тот же самый приближенный способ ведет к оценке порядка величины  $\Pi_x$ . Будем исходить из первого уравнения (6.55), полагая там  $h=0$  и  $\mu + \mu_3 \sim \mu_3 \sim -ikn$ , что

приводит к формуле

$$\begin{aligned} \Pi_x &= \frac{2i}{kn} \int_{W_1} I_0(i.r) e^{-\mu z} \lambda \, d\lambda = -\frac{2i}{kn} \frac{\partial}{\partial z} \int_{W_1} I_0(\lambda r) e^{-\mu z} \frac{\lambda \, d\lambda}{\mu} = \\ &= -\frac{2i}{kn} \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ikR}}{R}. \end{aligned} \quad (6.59\text{в})$$

Очевидно можно написать

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ikR}}{R} = \frac{z}{R} \frac{d}{dR} \frac{e^{ikR}}{R}, \quad \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikR}}{R} = \frac{r}{R} \frac{d}{dR} \frac{e^{ikR}}{R}.$$

Отношение предыдущих выражений равно  $z/r$ . Следовательно, это отношение очень мало вблизи поверхности земли при большом расстоянии от передатчика. В таком же отношении находятся, согласно формулам (6.59а) и (6.59в),  $-\Pi_x$  и  $\Pi_z$ . Поэтому справедливо неравенство

$$|\Pi_x| \ll |\Pi_z|. \quad (6.60)$$

Мы пришли к замечательному результату: *первичное возбуждение  $\Pi_x$  служит только для того, чтобы вызвать вторичное возбуждение  $\Pi_z$* . При передаче на далекое расстояние играет роль только поле  $\Pi_z$ . Только в непосредственной близости от передатчика компонента  $\Pi_x$  начинает сказываться и даже перевешивает действие  $\Pi_z$  вследствие полной особенности, которой обладает  $\Pi_x$ .

При передаче с помощью горизонтальной антенны на большом расстоянии от нее поле имеет тот же характер, что и при передаче с помощью вертикальной антенны, если не принимать, разумеется, во внимание зависимости от  $\varphi$ , которая указывает на происхождение поля от горизонтальной антенны. В обоих случаях при больших расстояниях целесообразно принимать сигналы с помощью вертикальной антенны; горизонтальная антенна была бы непригодной для приема, так как горизонтальная компонента индуцированного поля мала по сравнению с вертикальной компонентой, даже в случае средней проводимости земли. Эти результаты широко известны из практики, но вряд ли являются понятными без излагаемой здесь теории, которая принимает во внимание строение почвы.

Заметим еще, что приближения (6.59а) и (6.59в) следует рассматривать как первые члены разложения по возрастающим степеням величины  $\rho$  (так называемого численного расстояния). Аналогично тому, как в формуле (6.43) в случае вертикальной антенны член  $e^{ikR}/R$  должен быть дополнен членами, содержащими возрастающие степени  $\rho$ , формулы (6.59а) и (6.59в) также следует уточнить с помощью членов, зависящих от  $\rho$ .

### § 34. ОШИБКИ ПРИ ЦЕЛЕНГАЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ АНТЕННЫ

Под целенгацией, как обычно, понимают определение направления, по которому сигнал достигает приемника. Идеальным приемником для радиосигналов является рамочная антенна, описанная в конце § 31 и более подробно рассмотренная в § 35. Предположим, что она укреплена и вращается вокруг вертикальной оси. Будем считать, что приемник расположен близко к поверхности земли, как это, например, имеет место в морской навигации. В качестве передатчика будем рассматривать горизонтальную антенну. В соответствии с характеристикой направленности на фиг. 29 в случае передающей антенны, направленной по оси  $x$ , можно ожидать максимального приема в направлении  $x$  во всех точках оси  $x$ ; тогда, очевидно, так же как и в каждой точке  $(x, y)$  поверхности земли, можно было бы ожидать максимального приема в направлении  $r$ , по которому сигнал приходит в точку  $(x, y)$ , и нулевого приема в перпендикулярном направлении  $\varphi$ . Однако в действительности дело обстоит не так просто. Причиной этого является то обстоятельство, что излучение горизонтальной антенны, кроме главного члена порядка  $1/r$ , содержит члены, убывающие как  $1/r^2$ .

Чтобы в этом убедиться, следует продолжить аппроксимацию поля на один шаг дальше, чем это сделано в последних формулах предыдущего параграфа. Из уравнений (6.59а) и (6.59в) следовало бы уравнение  $\operatorname{div} \Pi = 0$ , а отсюда вытекало бы при  $h = 0$  и  $z = 0$  в силу условия  $\Pi_x = 0$ , что имеется только поле  $E_z$ , перпендикулярное к поверхности земли. Вычислим теперь более точно  $\operatorname{div} \Pi$ . Возьмем  $\Pi_x$  из формулы (6.55в), полагая  $h = 0$ ;  $\Pi_z$  из формулы

(6.58), в которой также полагаем  $h=0$ , и (см. там же) заменим  $I_1$  через  $\frac{1}{2} H_1^1$ . Таким образом, получим точные равенства

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} &= -\cos \varphi \int_W H_1^1(\lambda r) e^{-\mu z} \frac{\lambda^2 d\lambda}{\mu + \mu_3}, \\ \frac{\partial \Pi_z}{\partial z} &= \cos \varphi \int_W H_1^1(\lambda r) e^{-\mu z} \frac{\mu}{k^2} \frac{\mu - \mu_3}{n^2 \mu + \mu_3} \lambda^2 d\lambda, \\ \operatorname{div} \Pi &= -\cos \varphi \int_W H_1^1(\lambda r) e^{-\mu z} \left( \frac{1}{\mu + \mu_3} - \frac{\mu - \mu_3}{k^2 n^2 \mu + \mu_3} \right) \lambda^2 d\lambda;\end{aligned}$$

и после простых преобразований

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \Pi &= -\cos \varphi \int_W H_1^1(\lambda r) e^{-\mu z} \frac{\lambda^2 d\lambda}{n^2 \mu + \mu_3} = \\ &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} \int_W H_0^1(\lambda r) e^{-\mu z} \frac{\lambda d\lambda}{n^2 \mu + \mu_3}.\end{aligned}\quad (6.61)$$

Последний интеграл согласно формуле (6.34а) представляет функцию  $\Pi$  для поля вертикальной антенны, разделенную на  $n^2$ . Мы можем использовать представление (6.42) поля  $\Pi$ , так как мы предполагаем  $z=0$ . Для нас будет достаточно уже первого члена этого представления, так что можно написать

$$\operatorname{div} \Pi = \frac{2}{n^2} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (6.62)$$

Теперь выгодно перейти к полярным координатам. Пренебрегая членами, содержащими  $(kr)^3$ , получаем из формулы (6.62)

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}_r \operatorname{div} \Pi &= \frac{\partial}{\partial r} \operatorname{div} \Pi = \frac{2}{n^2} \cos \varphi \frac{\partial^2}{\partial r^2} \frac{e^{ikr}}{r} = \\ &= -\frac{2k^2}{n^2} \cos \varphi \left( 1 - \frac{2}{ikr} \right) \frac{e^{ikr}}{r}, \\ \operatorname{grad}_\varphi \operatorname{div} \Pi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{div} \Pi = -\frac{2}{n^2} \sin \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} = \\ &= +\frac{2k^2}{n^2} \frac{\sin \varphi}{ikr} \frac{e^{ikr}}{r}.\end{aligned}\quad (6.63)$$

а из формулы (6.4)

$$E_r = \cos \varphi E_x + \sin \varphi E_y = k^2 \cos \varphi \Pi_x + \text{grad}_r \text{div} \Pi, \quad (6.64)$$

$$E_\varphi = -\sin \varphi E_x + \cos \varphi E_y = -k^2 \sin \varphi \Pi_x + \text{grad}_\varphi \text{div} \Pi.$$

Оценим еще  $\Pi_x$ . При указанном в формуле (6.59в) приближении мы получили бы при  $z=0$  непосредственно  $\Pi_x=0$ . Однако более точный подсчет, при котором мы пренебрегаем членами, содержащими  $(kr)^{-3}$ , дает

$$k^2 \Pi_x = \frac{2}{n^2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} = -\frac{2k^2}{n^2} \frac{1}{ikr} \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (6.65)$$

Из формул (6.63), (6.64), (6.65) следует, таким образом,

$$E_r = -\frac{2k^2}{n^2} \cos \varphi \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \frac{e^{ikr}}{r},$$

$$E_\varphi = +\frac{4k^2}{n^2} \frac{\sin \varphi}{ikr} \frac{e^{ikr}}{r},$$

или, поскольку  $kr \gg 1$ , окончательно

$$E_r = -\frac{2k^2}{n^2} \cos \varphi \frac{e^{ikr}}{r}, \quad (6.66)$$

$$E_\varphi = +\frac{4k^2}{n^2} \frac{\sin \varphi}{ikr} \frac{e^{ikr}}{r}.$$

Отсюда следует, что  $E_\varphi=0$  при  $\varphi=0$ ; направление поля  $\mathbf{E}$  горизонтальной антенны совпадает, таким образом, с направлением  $r$ . Таким образом, рамочная антенна, свободно вращающаяся вокруг оси, параллельной антенне передатчика, обнаруживает в направлении оси вращения наибольшую силу приема, как это и следовало ожидать заранее.

Напротив, для  $\varphi = \pm \pi/2$

$$E_r = 0, \quad E_\varphi = \frac{4k^2}{n^2} \frac{e^{ikr}}{ikr^2}. \quad (6.67)$$

Приемная антенна, вращающаяся вокруг прямой, перпендикулярной к антенне передатчика, обнаруживает от-



клонение от правильного показания. При наибольшей силе приема она указывает не на место антенны передатчика, а в направлении, параллельном передающей антенне. Правда, сила приема чрезвычайно мала, имея порядок  $1/r^2$ , чем, впрочем, объясняется тот факт, что на фиг. 29, представляющей характеристику направленности, где приняты во внимание только члены порядка  $1/r$ , сила приема считается равной нулю.

Вообще мы можем определить  $E_r$  как «правильное показание»,  $E_\varphi$  — как «ошибку показания». Последняя происходит от членов, имеющих порядок  $1/r^2$  [см. формулу (6.67)].

При произвольном  $\varphi$  «относительная ошибка показания» в нашем приближении определяется согласно формулам (6.66) посредством отношения

$$\left| \frac{E_\varphi}{E_r} \right| = \frac{2}{kr} \operatorname{tg} \varphi.$$

Относительная ошибка возрастает с приближением к  $\varphi = \pi/2$ , где она становится равной бесконечности, что означает обращение в нуль «правильного показания», в соответствии с равенством  $E_r = 0$  в формуле (6.67).

Практик будет заблуждаться, если он попытается объяснить эту ошибку показания ошибками в конструкции антенны передатчика или приемника. Они являются неизбежными и объясняются наличием поправочных членов к главному полю излучения соответствующей установки, ослабевающему как  $1/r$ . Некоторые другие ошибки показания, называемые «ночными эффектами» и происходящие вследствие отражения от ионосферы, здесь не рассматриваются.

### § 35. МАГНИТНАЯ ИЛИ РАМОЧНАЯ АНТЕННА

Рамочную антенну можно применять не только для пеленгации, но и как передатчик, обладающий направленным излучением. Плоскость петли в обоих случаях перпендикулярна к поверхности земли, а нормаль к этой плоскости определяет некоторое горизонтальное направление, которое мы примем за ось  $x$ . В случае рамочной антенны прямоугольной конструкции ее петля состоит из

пары вертикальных и пары горизонтальных антенн, обтекаемых когерентными токами в двух противоположных направлениях (аналогично схема токов на фиг. 30).

Петлю, независимо от ее формы, мы называем магнитной антенной. Рамочная антенна, расположенная, например, в плоскости  $y, z$ , эквивалентна магнитному диполю, направленному параллельно оси  $x$ ; его первичное поле может быть представлено с помощью вектора Герца  $\Pi_{\text{перв.}} = \Pi_x$ . Вследствие влияния земли вектор  $\Pi_x$  следует преобразовать в вектор  $\Pi$  более общей структуры.

Чтобы получить выражение для зависимости, существующей между электромагнитным полем в пустоте и рассматриваемым здесь вектором  $\Pi$ , достаточно заменить в формуле (6.4) величины  $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \varepsilon_0, \mu_0$  на  $\mathbf{H}, -\mathbf{E}, \mu_0, \varepsilon_0$ . Действительно, при такой замене уравнения Максвелла (6.5) переходят сами в себя. Таким образом, для пустоты в противовес формулам (6.4) получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= k^2 \Pi + \text{grad div } \Pi, \\ -\mathbf{E} &= \frac{k^2}{\varepsilon_0 i\omega} \text{rot } \Pi = -\mu_0 i\omega \text{rot } \Pi,\end{aligned}\quad (6.68)$$

а для земли в противовес формулам (6.7)

$$\mathbf{H} = k_z^2 \Pi + \text{grad div } \Pi, \quad -\mathbf{E} = \frac{k_z^2}{\varepsilon i\omega} \text{rot } \Pi; \quad (6.69)$$

как и раньше, имеем

$$k_z^2 = \varepsilon \mu_0 \omega^2 + i\tau \mu_0 \omega, \quad k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad (6.69a)$$

причем  $\Pi$  попрежнему удовлетворяет дифференциальному уравнению (6.3).

Чтобы удовлетворить граничным условиям при  $z=0$ , здесь необходимо предположить, так же как и для электрической горизонтальной антенны, что вектор  $\Pi$  имеет две компоненты ( $\Pi_x, \Pi_z$ ).

Условие непрерывности тангенциальной компоненты  $E_{\text{танг.}}$  вектора  $\mathbf{E}$  при  $z=0$  приводит к условиям

$$\Pi_z = \Pi_{z3}, \quad (6.70)$$

$$\frac{\partial \Pi_x}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_{x3}}{\partial z}, \quad (6.71)$$

а из непрерывности тангенциальной компоненты  $H_{\text{танг.}}$  вектора  $\mathbf{H}$  при  $z = 0$  следует

$$\operatorname{div} \Pi = \operatorname{div} \Pi_z, \quad (6.72)$$

$$k^2 \Pi_x = k_z^2 \Pi_{xz}. \quad (6.73)$$

С помощью граничных условий (6.71) и (6.73) определяется функция  $\Pi_x$ , после чего условия (6.70) и (6.72) позволяют определить функцию  $\Pi_z$ . Условия (6.71) и (6.73) совпадают с условиями (6.27) для вертикальной антенны. Поэтому для функции  $\Pi_x$  можно использовать прежние формулы (6.29) и фиг. 28. В частности при  $h=0$  мы можем применить формулу (6.34а), в силу которой получаем

$$\begin{aligned} \Pi_x &= \int_W H_0^1(\lambda r) e^{-\mu z} \frac{n^2 \lambda d\lambda}{n^2 \mu + \mu_3}, \\ \Pi_{xz} &= \int_W H_0^1(\lambda r) e^{+\mu_3 z} \frac{\lambda d\lambda}{n^2 \mu + \mu_3}. \end{aligned} \quad (6.74)$$

Что касается компоненты  $\Pi_z$ , то из таких же соображений, как и в случае горизонтальной антенны, мы снова представляем  $\Pi_z$  с помощью формул (6.56). Однако в силу условия (6.70) обе функции  $\Psi$  и  $\Psi_3$ , входящие в формулы (6.56), равны между собой; уравнение (6.72) дает тогда возможность определить значение функции  $\Phi = \Psi_3$ , а именно

$$\Phi = \frac{\mu - \mu_3}{n^2 \mu + \mu_3} \frac{\lambda^2}{k^2}.$$

Поэтому в соответствии с формулами (6.58), в которых функция  $I_1(\lambda r)$  заменена функцией  $H_1^1(\lambda r)$ , а уравнение  $\Psi_3 = \Psi/n^2$  заменено уравнениями  $\Psi_3 = \Psi$ , получим, полагая  $h=0$ ,

$$\begin{aligned} \Pi_z &= -\frac{\cos \varphi}{k^2} \int_W H_1^1(\lambda r) e^{-\mu z} \frac{\mu - \mu_3}{n^2 \mu + \mu_3} \lambda^2 d\lambda, \\ \Pi_{z3} &= -\frac{\cos \varphi}{k^2} \int_W H_1^1(\lambda r) e^{+\mu_3 z} \frac{\mu - \mu_3}{n^2 \mu + \mu_3} \lambda^2 d\lambda. \end{aligned} \quad (6.75)$$

Однако нетрудно убедиться, что здесь в противоположность случаю электрической горизонтальной антенны можно пренебречь компонентой  $\Pi_z$  по сравнению с  $\Pi_x$ , так что при последующем рассмотрении поля и его характеристик направленности мы будем принимать во внимание только компоненту  $\Pi_x$ . Тогда согласно формулам (6.68) имеем

$$E_x = 0, \quad E_y = \mu_0 i \omega \frac{\partial \Pi_x}{\partial z}, \quad E_z = -\mu_0 i \omega \frac{\partial \Pi_x}{\partial y}. \quad (6.76)$$

Для вычисления компоненты  $\Pi_x$  заметим, что первое из выражений (6.74) получено из формулы (6.34а), которая для малых численных расстояний может быть заменена приближенной формулой (6.43).

Используя последнюю, получим

$$\Pi_x = 2 \frac{e^{ikR}}{R} (1 + \dots), \quad R = \sqrt{r^2 + z^2}. \quad (6.77)$$

Формула (6.77) согласуется с формулой (6.20) для случая идеально проводящей земли.

При  $z = 0$  из формул (6.76) и (6.77) следует

$$E_x = E_y = 0, \quad E_z = -2\mu_0 i \omega \frac{y}{r} \frac{d}{dr} \frac{e^{ikr}}{r} = 2\mu_0 \omega k \sin \varphi \frac{e^{ikr}}{r}.$$

Уравнение характеристики направленности, изображающей квадратный корень из энергии излучения  $E$  как функцию от  $\varphi$ , имеет в данном случае вид

$$\sqrt{E} = M \sin \varphi, \quad (6.78)$$

где  $M$  — максимум квадратного корня из излучения, достигаемый при  $\varphi = \pm \pi/2$ , причем величина  $M$  пропорциональна  $1/r$ .

Сравним характеристику направленности, соответствующую уравнению (6.78), с вытянутой кривой фиг. 29, представляющей характеристику направленности горизонтальной антенны. В нашем приближении эти характеристики совпадут, если только заменить  $\sin \varphi$  на  $\cos \varphi$ , в соответствии с замечанием в начале настоящего параграфа относительно направления тока в рамочной и горизонтальной антеннах. Замена  $\sin \varphi$  на  $\cos \varphi$  объясняется, очевидно, только тем, что рассматриваемая горизонтальная

антенна имела направление оси  $x$ , в то время как плоскость нашей рамочной антенны перпендикулярна к оси  $x$ .

Таким образом, рамочная антенна передает с максимальной силой в плоскости рамки ( $\varphi \pm \pi/2$ ), подобно тому как максимальное излучение горизонтальной антенны направлено по ее оси. Соответственно этому рамочная антенна обнаруживает максимальный прием, если ее плоскость находится в направлении проходящей волны. Эта плоскость, как мы предполагали в начале этого параграфа и во всем последующем изложении, является плоскостью  $y, z$ . Поэтому при максимальном приеме сигнал приходит по направлению  $y$  с преобладающей электрической компонентой, перпендикулярной к поверхности земли, т. е. направленной параллельно оси  $z$ , и магнитной компонентой, перпендикулярной к рамочной антенне. Электрическая компонента индуцирует тогда в рамке электрический ток, или, выражаясь иначе, магнитная компонента возбуждает магнитный диполь рамки. Рамка функционирует, таким образом, как магнитный приемник, в то время как раньше мы рассматривали ее в качестве магнитного передатчика.

Впрочем при пеленгации рамочная антенна устанавливается не на максимальный прием, а, как во всех нулевых методах измерительной физики, на минимальный. В этом случае рамка располагается в плоскости  $x, z$ , а не в плоскости  $y, z$ . Ее нормаль указывает тогда направление оси  $y$ , т. е. направление проходящего сигнала.

## § 36. ЭНЕРГИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ И ПОГЛОЩЕНИЕ В ЗЕМЛЕ

Оставляя в стороне вопросы, связанные с напряжениями полей  $E, H$ , к которым применим принцип суперпозиции, мы переходим теперь к рассмотрению квадратической формулы для потока энергии:

$$S = [EH].$$

Здесь уже нельзя обойтись комплексным представлением поля, опуская временной множитель  $e^{-i\omega t}$ , а следует перемножить между собой сами вещественные компоненты поля. Однако вызванные этим осложнения отпадают при

пространственно-временном *осреднении*. Эти средние значения становятся даже более простыми, чем наше прежнее представление поля, так как из них выпадают бесселевы функции в силу ортогональности собственных функций, и они могут быть заменены более или менее элементарными функциями.

В первую очередь представляет интерес полный поток энергии, проходящий в воздухе через горизонтальную плоскость:

$$S = \int S_z d\sigma = \int (E_r H_\varphi - E_\varphi H_r) d\sigma. \quad (6.79)$$

В зависимости от того, помещаем ли мы эту горизонтальную плоскость выше ( $z > h$ ) или ниже ( $z < h$ ) дипольной антенны ( $z = h$ ), мы обозначаем поток энергии, определяемый посредством формулы (6.79), через  $S_+$  или  $S_-$ . При этом величина  $S_-$ , так же как и  $S_+$ , отнесена к положительному направлению  $z$ . Поэтому энергия, эффективно входящая<sup>1)</sup> в землю в отрицательном направлении  $z$ , определяется величиной  $-S_-$ , взятой для плоскости  $z = 0$ . Легко впрочем убедиться в том, что вместо этой плоскости можно при вычислении  $S_-$  взять произвольную плоскость  $z \leq h$ , в частности плоскость  $z = h - \varepsilon$  при  $\lim \varepsilon \rightarrow 0$  (пространство между этими плоскостями свободно от поглощения, и через бесконечно удаленную часть поверхности цилиндрического слоя не может выходить какое-либо количество энергии). Так как вся энергия, которая эффективно входит в землю, превращается там в джоулево тепло, то  $-S_-$  представляет собой в то же время суммарную величину теплового поглощения в земле, отнесенную к единице времени. С другой стороны,  $S_+$  при  $z = h + \varepsilon$  и  $\lim \varepsilon \rightarrow 0$  означает суммарную величину энергии, переданной за единицу времени воздуху, находящемуся над плоскостью  $z = h$ . Мы называем ее *полезным излучением*. Поэтому разность

$$W = S_+ - S_- \quad (6.79a)$$

<sup>1)</sup> Эффективно входящая энергия означает разность между входящей и выходящей энергией. Отраженное излучение, разумеется, автоматически учтено в  $S_-$ .

представляет собой энергию, которая должна подводиться к антенне за единицу времени, поскольку можно пренебречь другими видами потери энергии антенны. Разность  $S_+ - S_-$  означает поэтому мощность, которую следует подвести к антенне. В дальнейшем мы займемся главным образом рассмотрением этой величины.

1. В случае вертикальной антенны, как нам известно,  $E_\varphi = 0$  и  $H_r = 0$ . Если входящие в формулу (6.79) вещественные компоненты поля выразить через комплексные компоненты, которые попрежнему будем обозначать через  $E_r$  и  $H_\varphi$ , и присоединить зависимость от времени, то эта формула примет вид

$$S = \frac{1}{4} \iint (E_r e^{-i\omega t} + E_r^* e^{+i\omega t}) (H_\varphi e^{-i\omega t} + H_\varphi^* e^{+i\omega t}) r dr d\varphi.$$

При осреднении по времени отпадают члены с  $e^{\pm 2i\omega t}$  и остается

$$S = \frac{1}{4} \iint (E_r H_\varphi^* + E_r^* H_\varphi) r dr d\varphi,$$

если под  $S$  будем понимать это осредненное значение. Вследствие независимости поля от координаты  $\varphi$  можно также положить

$$S = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty (E_r H_\varphi^* + E_r^* H_\varphi) r dr = \pi \operatorname{Re} \left( \int_0^\infty E_r^* H_\varphi r dr \right). \quad (6.80)$$

Чтобы вычислить  $S_+$ , компоненты  $E_r$  и  $H_\varphi$  должны быть представлены с помощью формул (6.23), а чтобы вычислить  $S_-$ , эти компоненты должны быть представлены с помощью формул (6.24), отличающихся от формул (6.23) только знаком при показателе множителя  $e^{\pm(z-h)}$  в подынтегральном выражении для  $\Pi_{\text{перв.}}$ . Таким образом, получаем

$$E_r = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r \partial z} = \int_0^\infty I_1(\lambda r) f_1(\lambda, z) \lambda d\lambda, \quad (6.81)$$

$$H_\varphi = \frac{-k^2}{\mu_0 i \omega} \frac{\partial \Pi}{\partial r} = \frac{-k^2}{\mu_0 i \omega} \int_0^\infty I_1(lr) f_2(l, z) l dl, \quad (6.82)$$

где

$$f_1(\lambda, z) = \pm \lambda e^{-\mu_l |z-h|} + \mu F(\lambda) e^{-\mu_l(z+h)}, \quad (6.83)$$

$$f_2(l, z) = -\frac{l}{\mu_l} e^{-\mu_l |z-h|} - F(l) e^{-\mu_l(z+h)}; \quad (6.84)$$

$F(\lambda)$  и  $F(l)$  определяются посредством формулы (6.28). Использование в формулах (6.82) и (6.84) отличной от  $\lambda$  переменной интегрирования и связанная с этим замена  $\mu$  на  $\mu_l = \sqrt{l^2 - k^2}$  окажутся, как сейчас будет видно, очень полезными. Вследствие формул (6.81) и (6.82) выражение (6.80) переходит в тройной интеграл, который записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_0 \omega}{\pi k^2} S_{\pm} = \\ & = \operatorname{Re} \left[ i \int_0^{\infty} f_1^*(\lambda, z) \lambda d\lambda \int_0^{\infty} f_2(l, z) l dl \int_0^{\infty} I_1(\lambda r) I_1(lr) r dr \right]. \end{aligned} \quad (6.85)$$

Для упрощения интеграла (6.85) можно воспользоваться условиями ортогональности (4.90а), которые можно записать в новых обозначениях, полагая  $n=1$ ,

$$\int_0^{\infty} I_1(\lambda r) I_1(lr) r dr = \delta(\lambda | l). \quad (6.86)$$

Отсюда видно, что последний интеграл в формуле (6.85) обращается в нуль для всех значений  $l$ , кроме  $l=\lambda$ , и что предпоследнее интегрирование дает  $f_2(l, z)$ . (см. примечание к стр. 159). Таким образом, выражение (6.85) сводится к однократному интегралу

$$\frac{\mu_0 \omega}{\pi k^2} S_{\pm} = \operatorname{Re} \left[ i \int_0^{\infty} f_1^*(\lambda, z) f_2(\lambda, z) \lambda d\lambda \right]. \quad (6.87)$$

Дальнейшее упрощение будет получено, если, как уже указывалось на стр. 374, обе плоскости  $z = h \pm z$  очень



тесно примыкают к плоскости дипольной антенны, т. е. если положим

$$|z - h| = \varepsilon \ll h, \quad z + h \approx 2h;$$

тем самым вместо формул (6.83) и (6.84) получаем

$$f_1(\lambda) = \pm \lambda e^{-\mu \varepsilon} + \mu F(\lambda) e^{-2\mu h}, \quad (6.88)$$

$$f_2(\lambda) = -\frac{\lambda}{\mu} e^{-\mu \varepsilon} - F(\lambda) e^{-2\mu h}. \quad (6.89)$$

В соответствии с этим произведение  $f_1^*(\lambda) f_2(\lambda)$  в формуле (6.87) должно было бы состояться из четырех слагаемых. Однако, если перейти к разности  $S_+ - S_-$ , то остаются только два слагаемых, именно те, которые соответствуют двойному знаку в  $f_1^*(\lambda)$ . Таким образом, принимая во внимание определение (6.79a), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0 \omega}{2\pi k^2} W = & \operatorname{Re} \left[ -i \int_0^\infty e^{-(\mu + \mu^*)\varepsilon} \frac{\lambda^3 d\lambda}{\mu} \right] + \\ & + \operatorname{Re} \left[ -i \int_0^\infty F(\lambda) e^{-2\mu h} \lambda^2 d\lambda \right], \end{aligned} \quad (6.90)$$

причем, поскольку  $\varepsilon \ll h$ , то в показателе экспоненциального множителя подинтегральной функции последнего интеграла отброшено слагаемое  $\mu^* \varepsilon$ , малое по сравнению с  $2\mu h$ . Первый интеграл легко оценить. Для  $\lambda > k$  оба выражения  $\mu$  и  $\mu + \mu^*$  являются вещественными. Поэтому вещественная часть умноженного на  $-i$  интеграла, взятого от  $k$  до  $\infty$ , равна нулю. Остается только интеграл от нуля до  $k$ , в котором, очевидно, можно перейти к пределу при  $\varepsilon = 0$ . Используя более удобную переменную интегрирования  $\mu$  вместо  $\lambda$ , получаем<sup>1)</sup>

$$\operatorname{Re} \left( -i \int_0^k \frac{\lambda^3 d\lambda}{\mu} \right) = \operatorname{Re} \left[ -i \int_{-ik}^0 (\mu^2 + k^2) d\mu \right] = \frac{2}{3} k^3. \quad (6.91)$$

<sup>1)</sup> Что касается знака  $\mu$ , то следует принять во внимание нашу договоренность о «допустимом листе римановой поверхности» фиг. 28 (стр. 348).

Что касается второго члена в формуле (6.90), то мы берем первое слагаемое выражения (6.28), не обращающееся в нуль при  $|k_3| \rightarrow \infty$ , а именно  $F(\lambda) = \lambda/\mu$ , т. е. вычисляем

$$\operatorname{Re} \left( -i \int_0^{\infty} e^{-2\mu h} \frac{\lambda^3 d\lambda}{\mu} \right). \quad (6.92)$$

В силу вещественности  $\mu$  для  $\lambda > k$  опять следует рассмотреть только интеграл от  $\lambda = 0$  до  $\lambda = k$ . Перейдя к переменной  $\mu$  и для сокращения положив  $\zeta = 2kh$ , приводим выражение (6.92) к виду

$$\operatorname{Re} \left[ -i \int_{-ik}^0 e^{-\mu \zeta / k} (k^2 + \mu^2) d\mu \right] = k^3 \operatorname{Re} \left[ \left( 1 + \frac{d^2}{d\zeta^2} \right) \frac{e^{i\zeta} - 1}{i\zeta^{\frac{1}{2}}} \right].$$

Вычисляя вещественную часть, находим отсюда

$$k^3 \left( \frac{\sin \zeta}{\zeta} + \frac{d^2}{d\zeta^2} \frac{\sin \zeta}{\zeta} \right) = 2k^3 \frac{\sin \zeta - \zeta \cos \zeta}{\zeta^3}. \quad (6.93)$$

Принимая во внимание формулы (6.90), (6.91) и (6.93), получаем

$$W = \frac{2\pi k^5}{\mu_0 \omega} \left( \frac{2}{3} + 2 \frac{\sin \zeta - \zeta \cos \zeta}{\zeta^3} + K \right), \quad \zeta = 2kh, \quad (6.94)$$

где  $K$  означает ту часть функции  $F(\lambda)$  из формулы (6.28), которая соответствует предположению  $|k_3| \neq \infty$  и которая еще не была принята во внимание в формуле (6.92), а именно

$$K = \frac{1}{k^3} \operatorname{Re} \left( i \int_0^{\infty} \frac{2\mu_3}{n^2 \mu + \mu_3} e^{-2\mu h} \frac{\lambda^3 d\lambda}{\mu} \right). \quad (6.95)$$

Относительно формулы (6.94) заметим лишь, что оба члена правой части в силу их независимости от строения почвы могут быть получены с помощью более грубого аппарата уже из аналитических представлений, изложенных в § 31. Однако вычисление поправочного члена  $K$  возможно только на основании предыдущей более полной теории. Рассмотрение этих формул отложим до п. 3.

2. В случае горизонтальной антенны в силу взаимодействия компонент  $\Pi_x$  и  $\Pi_z$  формулы становятся более сложными, однако допускают, благодаря условию ортогональности (6.86), упрощения, аналогичные случаю вертикальной антенны. Мы только бегло наметим необходимые для этого вычисления. Теперь вместо формулы (6.80) будем иметь

$$S = \frac{1}{4} \operatorname{Re} \int \int (E_r H_\varphi^* - E_\varphi H_r^*) r dr d\varphi \quad (6.80a)$$

и вместо формул (6.81) и (6.82) получим

$$\begin{cases} E_r = k^2 \cos \varphi \Pi_x + \frac{\partial}{\partial r} \operatorname{div} \Pi, \\ E_\varphi = -k^2 \sin \varphi \Pi_x + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{div} \Pi, \end{cases} \quad (6.81a)$$

$$\begin{cases} H_\varphi = \frac{-k^2}{i_{r=0}\omega} \left( -\cos \varphi \frac{\partial \Pi_x}{\partial z} + \frac{\partial \Pi_z}{\partial r} \right), \\ H_r = \frac{-k^2}{i_{r=0}\omega} \left( \sin \varphi \frac{\partial \Pi_x}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_z}{\partial \varphi} \right). \end{cases} \quad (6.82a)$$

Так как в соответствии с формулами (6.61) и (6.58)  $\operatorname{div} \Pi$  и  $\Pi_z$  пропорциональны  $\cos \varphi$ , а  $\Pi_x$  согласно формуле (6.55) не зависит от  $\varphi$ , то из выражений (6.81a) и (6.82a) следует, что  $E_r$  и  $H_\varphi$  содержат множитель  $\cos \varphi$ , а  $E_\varphi$  и  $H_r$  — множитель  $\sin \varphi$ . После этого можно произвести интегрирование по  $\varphi$ , и вместо формулы (6.85) получаем тройной интеграл по  $\lambda$ ,  $l$  и  $r$  довольно сложного вида. Однако, если образовать разность  $W = S_+ - S_-$ , то выражение значительно упрощается, так как двойной знак входит только в выражение соответствующего члена производной  $\frac{\partial \Pi_x}{\partial z}$ , взятой от первичного возбуждения компоненты  $\Pi_x$ <sup>1)</sup>. Если, кроме того, для исключения производных от  $I_0$  исполь-

<sup>1)</sup> Двойной знак, очевидно, означает следующее: некоторая величина имеет двойной знак, если в  $S_+$  она входит с одним, а в  $S_-$  — с другим знаком, так что при вычитании члены, содержащие эту величину, остаются. (Прим. перев.)

зовать дифференциальное уравнение Бесселя, то получим

$$\frac{W}{\pi k c} = \operatorname{Re} \left[ -i \int_0^{\infty} \lambda d\lambda \Delta \int_0^{\infty} l dl e^{-\varepsilon \mu * l} \int_0^{\infty} r dr I_0(\lambda r) I_0(lr) \right], \quad (6.83a)$$

$$\Delta = \frac{2k^2 - \lambda^2}{\mu} (e^{-\varepsilon \mu} - e^{-2h\mu}) + 2 \frac{\lambda^2 - 2\mu_{13}}{n^2\mu + \mu_3} e^{-2h\mu}, \quad (6.84a)$$

где  $\varepsilon$  имеет прежнее значение. Отсюда, используя условия ортогональности (6.86), приходим к однократному интегралу

$$\frac{W}{\pi k c} = \operatorname{Re} \left( -i \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon \mu *} \Delta \lambda d\lambda \right). \quad (6.85a)$$

В первом члене выражения (6.84a), не зависящем от  $k$ , интегрирование может быть произведено так же, как и в интегралах (6.91) и (6.92); так как интеграл от  $k$  до  $\infty$  является вещественным, достаточно рассмотреть только интервал  $0 < \lambda < k$ . Таким образом, вместо выражения (6.94) получаем

$$W = \frac{2\pi k^3}{\mu_0 \omega} \left( \frac{2}{3} - \frac{\sin \zeta}{\zeta} + \frac{\sin \zeta - \zeta \cos \zeta}{\zeta^3} + L \right), \quad (6.94a)$$

где  $\zeta$  имеет прежний смысл и

$$L = \frac{1}{k^3} \operatorname{Re} \left( i \int_0^{\infty} e^{-2\mu h} \frac{2\mu_{13} - \lambda^2}{n^2\mu + \mu_3} \lambda d\lambda \right). \quad (6.95a)$$

Выражение (6.94a), подобно формуле (6.94), не содержит бесселевых функций. К тем же самым выражениям (6.94) и (6.94a) приходим также с помощью другого, более практического способа, с которым мы познакомимся в задаче VI.3. Однако этот последний способ дает нам только мощность  $W = S_+ - S_-$ , а не значения  $S_+$  и  $S_-$  в отдельности, также представляющие значительный практический интерес. Таким образом, избранный нами путь является неизбежным при вычислении  $S_+$  и  $S_-$ .

3. *Анализ результатов.* В первую очередь рассмотрим главные члены формул (6.94) и (6.94а), пренебрегая пока поправочными членами  $K$  и  $L$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} + 2 \frac{\sin \zeta - \zeta \cos \zeta}{\zeta^3}, \\ \frac{2}{3} - \frac{\sin \zeta}{\zeta} + \frac{\sin \zeta - \zeta \cos \zeta}{\zeta^3}. \end{aligned} \quad (6.96)$$

Для  $\zeta \rightarrow \infty$  оба выражения принимают одно и то же значение, равное  $\frac{2}{3}$ . Так как  $\zeta = 2kh$ , то  $\zeta = \infty$  обозначает  $h = \infty$ . При  $h = \infty$  земля, конечно, не оказывает никакого влияния на излучение антенны. Следовательно, вертикальная и горизонтальная антенны должны вести себя одинаковым образом. В обоих случаях вся подведенная энергия переходит в излучение. В соответствии с этим оба выражения (6.94) и (6.94а) имеют общее предельное значение

$$W = \frac{4\pi}{3} \frac{k^5}{\mu_0 \omega} = \frac{4\pi}{3} \frac{k^4}{\mu_0 c}. \quad (6.96a)$$

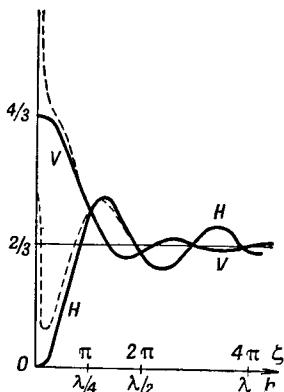
Оно совпадает с формулой, данной еще Герцом, для энергии излучения диполя, свободно колеблющегося в бесконечном пространстве. При этом следует заметить, что множитель  $k^4$  соответствует четвертой степени обратной длины волны в законе Рэлея о голубом цвете неба; голубой цвет неба, действительно, возникает вследствие интерференции падающего солнечного излучения с излучениями бесконечно многих диполей, распределенных в воздушном пространстве.

С другой стороны, переходя к пределу  $h \rightarrow 0$  в выражениях (6.96), разлагая эти выражения в степенные ряды по возрастающим степеням  $\zeta$  и обрывая ряды на  $\zeta^0$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \dots = \frac{4}{3} = 2 \cdot \frac{2}{3} \text{ для вертикальной антенны,} \\ \frac{2}{3} - 1 + \frac{1}{3} + \dots = 0 \cdot \frac{2}{3} \text{ для горизонтальной антенны.} \end{aligned} \quad (6.96b)$$

Наличие в этих выражениях множителей 2 и 0, которые должны быть присоединены при предельном переходе

$h \rightarrow 0$  к формуле (6.96а), легко объяснить с помощью фиг. 27: при отражении от идеально проводящей земли излучение вертикальной антенны удваивается при  $h=0$ , а излучение горизонтальной антенны уничтожается излучением ее зеркального изображения. При этом следует



Фиг. 31. Мощность, подводимая к дипольной антенне при различной высоте  $h$  над землей.  $V$ —вертикальная антенна,  $H$ —горизонтальная антенна; сплошные линии соответствуют идеально проводящей земле, пунктирные линии—морской воде.

принять во внимание, что в формулах (6.96) отброшены поправочные члены с  $K$  и  $L$ . Это упрощение означает, что одновременно с предельным переходом  $h \rightarrow 0$  совершается также предельный переход  $k_3 \rightarrow \infty$ .

На фиг. 31 графически изображены функции (6.96). На оси абсцисс нанесены сверху значения  $\zeta$ , а снизу — соответствующие значения  $h$ . Фигура показывает, что как у вертикальной, так и у горизонтальной антенны переход к

предельному значению  $\frac{2}{3}$  сопровождается непрерывающимися колебаниями вокруг последнего. Разность между абсциссами двух последовательных экстремальных значений для обеих кривых равна на шкале  $h$  примерно половине длины волны, что соответствует интерференции между падающим излучением и излучением, отраженным от идеально проводящей земли.

Кроме того, для обеих кривых нанесена пунктиром первая поправка, определяемая членами, содержащими множители  $K$  и  $L$ , выражающиеся формулами (6.95) и (6.95а). При этом используется значение  $\frac{k}{|k_3|} = \frac{1}{100}$ , соответствующее условиям морской воды, при длине волны в 40 м. Из фигуры видно, что ординаты пунктирных кривых в обоих случаях круто возрастают при  $h \rightarrow 0$ ; при конечном  $h$  разница в ординатах становится тем больше по сравнению с предельным случаем  $k_3 \rightarrow \infty$ , чем больше  $k_3$

отклоняется от предельного значения  $\infty$ . Здесь, очевидно, мы имеем дело с двойным переходом к пределу, в связи с которым следует напомнить о двойном предельном переходе при эффекте Гиббса в § 2: если сначала произвести предельный переход  $k_3 \rightarrow \infty$ , а затем заставить  $h$  стремиться к нулю, то в результате получим конечные предельные ординаты  $\frac{4}{3}$  и 0. Если же сначала перейти к пределу при  $h \rightarrow 0$  и при фиксированном конечном значении  $k_3$ , то в пределе получается бесконечно большая ордината; если вслед за этим заставить  $k_3$  стремиться к бесконечности, то, разумеется, предельная ордината остается бесконечно большой и в пределе.

Что физически означает обращение в бесконечность разности энергий  $W = S_+ - S_-$ ? Бесконечно большое количество энергии  $W$  идет не на увеличение полезного излучения  $S_+$ , а теряется в виде теплоты земли  $-S_-$ . Действительно, при данном токе в антенне и возрастающем  $k_3$  выделяющаяся в земле джоулева теплота, приходящаяся на единицу объема, возрастает все сильнее, в то время как полезное излучение остается конечным. Для доказательства этого мы должны были бы рассмотреть в отдельности формулы для  $S_{\pm}$  и подсчитать также поправки  $K$  и  $L$ , на чем, однако, мы не будем здесь останавливаться за недостатком места. Заметим только, что, несмотря на предыдущий результат в предельном случае при  $|k_e| \rightarrow \infty$ , потеря тепла не имеет места, так как с возрастанием  $|k_e|$  уменьшается объем, в котором выделяется джоулево тепло (скин-эффект)<sup>1)</sup>.

4. *Нормировка по заданному току в антенне.* Мы развили всю предыдущую теорию, не принимая во внимание физических размерностей введенных величин. Этот пробел будет сейчас восполнен. Множитель в выражении (6.1) для диполя Герца был положен равным единице. В действительности же этот множитель является размерным числом. Его размерность определяется из уравнения (6.4),

<sup>1)</sup> Мы отсылаем по этому поводу к работе A. Sommerfeld und F. Renner, Ann. d. Phys., 41 (1942), где можно найти также указания об употребительном в технике понятии сопротивления излучения и о понятии множителя формы в случае конечной длины антенны.

устанавливающего зависимость между  $\Pi$  и  $E$ , в силу которого  $\Pi$  имеет размерность  $E \cdot M^2$ . Так как, с другой стороны, в силу формулы (6.1)  $\Pi$  имеет размерность  $1/r$ , т. е.  $1/M$ , то в качестве размерности для множителя при  $\Pi$ , который был положен равным единице, получим  $E \cdot M^3$ . Сравним его с максвелловским диэлектрическим смещением  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ , которое имеет размерность заряда, отнесенного к единице площади, т. е.  $Q/M^2$ , где  $Q$  — размерный символ заряда (см. стр. 329). Таким образом, для частного случая вакуума получаем размерные соотношения

$$\varepsilon_0 E = \frac{Q}{M^2}, \text{ откуда } M^3 E = \frac{QM}{\varepsilon_0}. \quad (6.97)$$

Величина  $QM$  есть электрический момент. Мы полагаем его равным  $e\ell$ . В интерпретации, положенной в основу Герцем,  $e$  является зарядом частицы, которая колеблется относительно покоящегося заряда  $-e$ .

Что играет роль этого момента в случае описанной нами на стр. 331 короткой антенны, обладающей сосредоточенными емкостями на концах? Протекающий через нее ток  $j_t$  следует, по предположению, в каждый момент времени рассматривать как постоянный и имеющий одинаковую фазу вдоль всей антенны. Представим его в форме

$$j_t = j \sin \omega t = j \operatorname{Re} (ie^{-i\omega t}). \quad (6.98)$$

Соответствующий ему заряд обеих емкостей на концах будет равен  $e_t = e \cos \omega t$ , соответственно  $e_t = -e \cos \omega t$ ; при этом в силу общего соотношения

$$j_t = \frac{d}{dt} e_t$$

должны иметь  $e = j/\omega$ . В момент времени  $t = 0$ , когда сила тока равна нулю, заряды емкостей на концах равны  $\pm e$ . Так как эти заряды удалены друг от друга на расстояние  $\ell$ , равное длине антенны, то они эквивалентны электрическому моменту величины

$$e\ell = \frac{j\ell}{\omega}. \quad (6.99)$$



Это произведение  $el$  следует подставить в формулу (6.97) вместо момента  $QM$ . Кроме того, необходимо добавить в формуле (6.97) множитель  $1/4\pi$ , который получается из сравнения поля (6.4) вблизи диполя с полем антенного тока. Мы получаем тогда размерный множитель

$$\frac{jI}{4\pi\omega\epsilon_0}, \quad (6.100)$$

который следует приписать к предыдущему выражению для  $\Pi$ . На квадрат этого множителя надо умножить излучение  $S$  и мощность  $W$ . Таким образом, используя часто встречающиеся соотношения

$$\frac{\omega}{k} = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}},$$

получим вместо формулы (6.94) следующее выражение:

$$W = \frac{1}{8\pi} k^2 l^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} j^2 \left( \frac{2}{3} + 2 \frac{\sin \zeta - \zeta \cos \zeta}{\zeta^3} + K \right). \quad (6.101)$$

Эта формула дает точное в смысле размерности выражение для мощности в ваттах. Величина  $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  имеет, как было показано в т. III, § 6, размерность сопротивления и равна по величине  $120\pi = 377\Omega$ . В нашей системе мер, основанной на единице электричества  $Q$ , равной одному кулону,  $j$  должно измеряться в амперах. Так как  $kl$  является безразмерной величиной, то  $W$  прямо выражается в ваттах.

Аналогично, умножением на тот же множитель, исправляется в смысле размерности формула (6.94а) для горизонтальной антенны; таким образом, находим

$$W = \frac{1}{8\pi} k^2 l^2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} j^2 \left( \frac{2}{3} - \frac{\sin \zeta}{\zeta} + \frac{\sin \zeta - \zeta \cos \zeta}{\zeta^3} + L \right). \quad (6.101a)$$

## Приложение

### БЕСПРОВОЛОЧНАЯ ТЕЛЕГРАФИЯ НА ШАРООБРАЗНОЙ ЗЕМЛЕ

Будем предполагать, что земля представляет собой идеальный проводник (например, покрыта всюду морской водой). Рассмотрим вертикальную антенну вблизи поверх-

ности земли. Ее направление примем за ось  $\vartheta = 0$  полярной системы координат  $r, \vartheta, \varphi$ , ее расстояние до центра земли обозначим через  $r_0$ ; радиус земли пусть будет  $a < r_0$ . Тогда компонентами поля будут  $E_r, E_\vartheta, H_\varphi$ , не зависящие от  $\varphi$ . Мы хотим получить это поле, исходя из скалярного решения и волнового уравнения.

Вектор Герца  $\Pi$  непригоден для этого, так как он удовлетворяет не простому волновому уравнению

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = 0,$$

а более сложному уравнению в силу того, что в криволинейных координатах оператор Лапласа  $\Delta \Pi$  нужно представить с помощью формулы (6.36). Поэтому удобнее исходить из магнитной компоненты

$$H_\varphi = H e^{-i\omega t}.$$

Применяя второе из уравнений (6.5), представленное в силу формул (6.5a) в виде

$$-i\omega\epsilon_0 \mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{H},$$

воспользуемся следующими выражениями для компонент ротора вектора  $\mathbf{A}$  в сферических координатах:

$$\text{rot}_r \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial (A_\varphi \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \right], \quad (\text{a})$$

$$\text{rot}_\vartheta \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r}, \quad (\text{б})$$

$$\text{rot}_\varphi \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r A_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right]. \quad (\text{в})$$

Отсюда следует

$$-i\omega\epsilon_0 E_r = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (H \sin \vartheta); \quad i\omega\epsilon_0 E_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rH). \quad (6.102)$$

В силу первого из уравнений (6.5) имеем

$$-i\omega\mu_0 H_\varphi + \text{rot}_\varphi (\mathbf{E} e^{-i\omega t}) = 0,$$

откуда получаем, применяя формулу (в),

$$\begin{aligned} i\omega\mu_0 rH &= \frac{\partial}{\partial r}(rE_\vartheta) - \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} = \\ &= \frac{1}{i\omega\varepsilon_0} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rH) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}(H \sin \vartheta) \right]. \end{aligned}$$

Следовательно,  $H$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rH) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}(H \sin \vartheta) + k^2 rH = 0. \quad (6.103)$$

Его можно преобразовать в волновое уравнение  $\Delta u + k^2 u = 0$ , если положить  $H$  пропорциональным  $\frac{\partial u}{\partial \vartheta}$ ; в частности, для удобства положим

$$H = i\omega\varepsilon_0 \frac{\partial u}{\partial \vartheta}. \quad (6.103a)$$

Тогда можно вместо уравнения (6.103) написать

$$i\omega\varepsilon_0 r \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + k^2 u \right] = 0. \quad (6.104)$$

Так как

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) = \Delta u,$$

то, выбрав в качестве  $u$  решение уравнения

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (6.105)$$

можно будет полностью описать наше электромагнитное поле, в соответствии с формулами (6.102) и (6.103a), посредством следующих соотношений:

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right), \quad E_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(ru)}{\partial \vartheta \partial r}, \\ H &= i\omega\varepsilon_0 \frac{\partial u}{\partial \vartheta}. \end{aligned} \quad (6.106)$$

Граничное условие  $E_\vartheta = 0$  на идеально проводящей поверхности земли будет здесь выполнено, если положить

$$\frac{\partial(ru)}{\partial r} = 0 \quad \text{для} \quad r = a. \quad (6.106a)$$

К этому присоединяется условие: в точке  $r=r_0$ ,  $\vartheta=0$  и должно вести себя как единичный источник; для поля  $E$  это условие означает существование радиально направленного диполя.

Поставленная таким образом задача была уже решена по методу § 28 с помощью формулы (5.64) для  $G(P, Q)$  с той только разницей, что там было задано граничное условие  $u=0$  вместо нашего условия (6.106а). Однако это изменение граничного условия означает только изменение прежней постоянной  $A$ . В то время как из уравнения (5.60) и условия  $u=0$  получалось значение (5.60а) для  $A$ , теперь из условия (6.106а) мы получаем

$$A = - \left[ \frac{\frac{\partial}{\partial r} r r_n(kr)}{\frac{\partial}{\partial r} r z_n(kr)} \right]_{r=a}. \quad (6.107)$$

Здесь и в дальнейшем вместо  $\zeta_n^1$  стоит  $\zeta_n$ . Из видоизмененного таким образом решения (5.64) мы получаем сначала упрощенную формулу для предельного случая  $r_0=a$ , когда, следовательно, антенна стоит прямо на земле. Тогда согласно формулам (6.107) и (5.60) будем иметь

$$\begin{aligned} u_n(kr_0) &= u_n(ka) = \psi_n(ka) - \frac{\psi_n(ka) + ka\psi'_n(ka)}{\zeta_n(ka) + ka\zeta'_n(ka)} \zeta_n(ka) = \\ &= ka \frac{\psi_n(ka)\zeta'_n(ka) - \zeta_n(ka)\psi'_n(ka)}{\zeta_n(ka) + ka\zeta'_n(ka)}. \end{aligned}$$

Числитель этой дроби упрощается [см. задачу IV. 8, формула (11)] и сводится к выражению  $i/(ka)^2$ , знаменатель мы сокращенно обозначаем через  $\xi_n(ka)$ . Следовательно, мы имеем

$$u_n(ka) = \frac{i/ka}{\xi_n(ka)}; \quad \xi_n(ka) = \zeta_n(ka) + ka\zeta'_n(ka). \quad (6.107a)$$

Подставляя в первую из формул (5.64), получаем для прежней функции  $G$  и, следовательно, для нашего  $u$  выражение

$$u = \frac{k}{4\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \vartheta) \frac{\zeta_n(kr)}{\xi_n(ka)}. \quad (6.108)$$

справедливое для всех значений  $a < r < \infty$  и  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ; область определения второй из формул (5.64) стягивается теперь, естественно, к нулю. Результат (6.108) совпадает с исследованиями этого случая, проведенного у Франка и Мизеса<sup>1)</sup> (с точностью до множителя, который появляется вследствие применяемого здесь определения единичного источника). Так же легко получаются результаты, относящиеся к случаю конечной проводимости земли, если только соответствующим образом развить результаты, полученные в § 28 (непрерывное продолжение внутрь шара, вместо граничного условия на поверхности).

Если бы мы хотели рассмотреть для случая шарообразной земли также и горизонтальную антенну, то наряду с определенной здесь функцией  $u$  нужно было бы ввести также и функцию  $v$ , получающуюся при перестановке  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$ , и получили бы для последней представление, аналогичное ряду (6.108), хотя и несколько более сложное<sup>2)</sup>.

Однако сходимость ряда (6.108), так же как и наших общих представлений функции Грина в гл. V, является очень плохой. Для того чтобы убедиться в этом в настоящем случае, достаточно только принять во внимание, что величины  $ka$  и  $kr$  вследствие большой величины отношения земного радиуса к длине волны превосходят 1000. Следовательно, пока  $n$  имеет сравнительно небольшую величину, значения  $\zeta_n$  могут быть представлены асимптотическими значениями Ханкеля, которые показывают, что дробь  $\zeta_n/\xi_n$  в ряде (6.108) почти не зависит от  $n$ . Следовательно, нужно было бы взять больше тысячи членов ряда для того, чтобы вступили в силу асимптотические приближения Дебая (4.112), которые гарантировали бы действительную сходимость ряда.

Для того чтобы прийти к приемлемому способу вычисления функции  $u$ , мы используем метод, который сначала был успешно применен к нашей проблеме Ватсоном<sup>3)</sup> и который, как мы увидим, связан с методом, развитым

<sup>1)</sup> См. Франк и Мизес, т. II, гл. XXIII, § 4, формула (10).

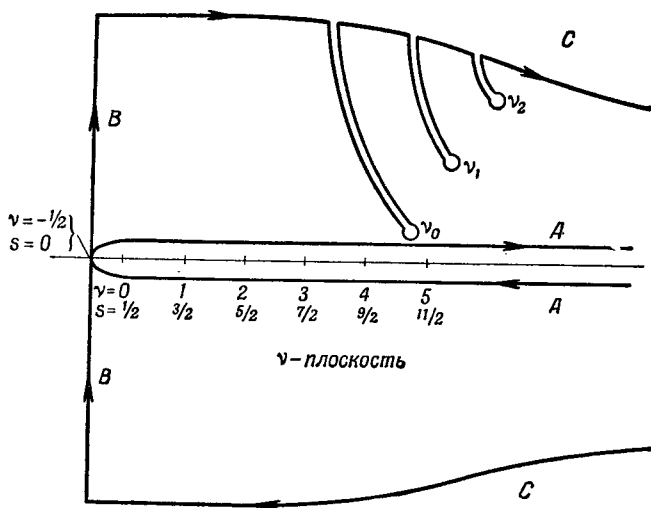
<sup>2)</sup> Так же как у Дебая [см. P. Debye, Диссертация, München, 1908; Ann. d. Phys., 30, 67 (1909)]; см. также Франк и Мизес, гл. XX, § 4.

<sup>3)</sup> G. N. Watson, Proc. Roy. Soc., 95 (1918).

в приложении II к гл. V. Для этого преобразуем сумму (6.108) в комплексный интеграл.

С этой целью мы записываем ряд (6.108) сначала в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-1)^n P_n(-\cos \vartheta) \frac{\zeta_n(kr)}{\zeta_n(ka)}, \quad (6.109)$$



Фиг. 32. Деформация петли  $A$ , окружающей вещественную ось. Путь  $B$  проходит параллельно мнимой оси плоскости  $v$ . Соединительные пути  $C$  между  $B$  и  $A$  следует представить себе расположенными в бесконечности.

что возможно на основании соотношения

$$P_n(\cos \vartheta) = (-1)^n P_n(-\cos \vartheta), \quad (6.109a)$$

справедливого для целых (и только для целых)  $n$ . Однако далее мы заменяем  $n$  комплексным переменным  $v$  и проводим в плоскости  $v$  (фиг. 32) петлю  $A$ , которая окружает совокупность точек

$$v=0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots, \quad (6.109b)$$

совершая вокруг них обход в направлении часовой стрелки. Вдоль этой петли мы берем интеграл

$$\oint \frac{2\nu+1}{2i \sin \nu\pi} P_\nu(-\cos \vartheta) \frac{\zeta_\nu(kr)}{\xi_\nu(ka)} d\nu, \quad (6.110)$$

подинтегральное выражение которого получается из общего члена ряда (6.109) заменой  $n$  на  $\nu$ , отбрасыванием множителя  $(-1)^n$  и введением знаменателя  $\sin \nu\pi$ . Здесь, как и на стр. 299, под  $P_\nu$  следует, конечно, понимать не полином Лежандра, а гипергеометрическую функцию, совпадающую с ним только при целых  $\nu$ :

$$P_\nu(x) = F\left(-\nu, \nu+1, 1, \frac{1-x}{2}\right). \quad (6.110a)$$

Подинтегральное выражение интеграла (6.110) имеет теперь во всех нулях функции  $\sin \nu\pi$  полюсы первого порядка; полюсы, находящиеся внутри петли  $A$ , совпадают с точками (6.109б), а для окрестности точки  $\nu=n$  в первом приближении будем иметь

$$\sin \nu\pi = \sin n\pi + (\nu-n)\pi \cos n\pi = (-1)^n\pi(\nu-n).$$

Вычет первой дроби в формуле (6.110) будет поэтому равен

$$\frac{2n+1}{2i\pi} (-1)^n,$$

и интеграл (6.110), подсчитанный как произведение  $-2\pi i$  на сумму всех вычетов, оказывается равным сумме

$$-\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (-1)^n P_n(-\cos \vartheta) \frac{\zeta_n(kr)}{\xi_n(ka)}, \quad (6.111)$$

которая с точностью до знака совпадает с суммой (6.109).

Следующий шаг состоит в преобразовании пути интегрирования  $A$ . Заметим сначала, что гипергеометрический ряд (6.110a) является симметрической функцией его обоих первых аргументов. Поэтому мы получаем соотношение, справедливое для любого (также комплексного) индекса  $\nu$

$$P_\nu = P_{-\nu-1}, \quad (6.112)$$

Если мы введем обозначение

$$\nu = s - \frac{1}{2}, \quad (6.112a)$$

то соотношение (6.112) принимает вид

$$P_{s-\frac{1}{2}} = P_{-s-\frac{1}{2}}. \quad (6.112б)$$

$P_{s-\frac{1}{2}}$  является, таким образом, четной функцией от  $s$ .

То же самое справедливо для последнего множителя подинтегрального выражения в интеграле (6.110). Для того чтобы это доказать, мы исходим из первоначального интегрального представления (4.22) для  $H^1$ , справедливого для любого индекса; если мы обозначим индекс через  $s$ , то это интегральное представление примет вид

$$H_s^1(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_{W_1} e^{i\rho \cos w} e^{is(w-\frac{\pi}{2})} dw.$$

Если мы заменим здесь  $w$  на  $-w$  и одновременно  $s$  на  $-s$ , то, меняя направление обхода  $W_1$ , получим

$$H_{-s}^1(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_{W_1} e^{i\rho \cos w} e^{is(w+\frac{\pi}{2})} dw = e^{is\pi} H_s^1(\rho).$$

Умножая это равенство на  $\sqrt{\pi/2\rho}$  и переходя тем самым в силу формулы (4.96) от  $H$  к  $\zeta$ , получаем

$$\zeta_{-s-\frac{1}{2}}(\rho) = e^{is\pi} \zeta_{s-\frac{1}{2}}(\rho). \quad (6.112в)$$

Однако то же самое соотношение справедливо и для величины  $\xi(ka)$ , определенной в формуле (6.107а), а именно

$$\xi_{-s-\frac{1}{2}}(ka) = e^{is\pi} \xi_{s-\frac{1}{2}}(ka). \quad (6.112г)$$

Разделив почленно уравнение (6.112в) на уравнение (6.112г), убеждаемся в том, что частное

$$\frac{\zeta_{s-\frac{1}{2}}(kr)}{\xi_{s-\frac{1}{2}}(ka)} \quad (6.113)$$

также является четной функцией от  $s$ .



Наконец, что касается первой дроби подинтегрального выражения интеграла (6.110), то, записанная в переменном  $s$ , она имеет вид

$$\frac{2s}{-2i \cos \pi} , \quad (6.114)$$

т. е. является нечетной функцией  $s$ . Мы преобразуем теперь петлю  $A$  в прямую  $B$ , параллельную мнимой оси плоскости  $\nu$ , проходящую через точку  $s=0$ , т. е.  $\nu = -\frac{1}{2}$ , и два пути  $C$ , которые, проходя на большом расстоянии от вещественной оси, соединяют, так сказать, концы линии  $B$  с концами линии  $A$ . Полюсы подинтегрального выражения, которые необходимо при этом учесть, мы рассмотрим позднее. Сначала мы покажем, что интегралы, взятые по путям  $B$  и  $C$ , равны нулю.

Для пути  $B$  в соответствии с вышеизложенным это следует непосредственно из нечетного характера подинтегрального выражения интеграла (6.110) относительно переменного  $s$ . Чтобы это доказать для соединительных путей  $C$ , исследуем множитель  $\xi_\nu/\bar{\xi}_\nu$  подинтегрального выражения при больших значениях  $\nu$ . Мы исходим из ряда (4.34)

$$I_\nu(\rho) = \frac{\left(\frac{\rho}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} (1 - \dots),$$

в котором при  $|\nu| \gg \rho$  можно пренебречь всеми невыписанными членами. По формуле Стирлинга имеем

$$\Gamma(\nu+1) = \sqrt{2\pi\nu} e^{-\nu} \nu^\nu,$$

отсюда

$$I_\nu(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \left(\frac{e\rho}{2\nu}\right)^\nu;$$

аналогично, при произвольном комплексном  $\nu$ , имеем

$$I_{-\nu}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{-2\pi\nu}} \left(\frac{e\rho}{-2\nu}\right)^{-\nu}, \quad (6.115)$$

откуда следует

$$\frac{I_\nu(\rho)}{I_{-\nu}(\rho)} = (-1)^{\nu+\frac{1}{2}} \left(\frac{e\rho}{2\nu}\right)^{2\nu}.$$

Абсолютная величина последнего выражения стремится к нулю, если  $|\nu|$  каким-либо образом (при положительной вещественной части) стремится к  $\infty$ . В представлении (4.31) для  $H^1$  мы можем тогда пренебречь  $I_\nu$  по сравнению с  $I_{-\nu}$ . Отсюда, если перейти от  $H_\nu$  к

$$\zeta_\nu = V^{\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}} H_{\nu+\frac{1}{2}}$$

и от  $\zeta_\nu(kr)$  к частному двух  $\zeta$ -функций, получаем согласно формуле (6.115)

$$Z = \frac{\zeta_\nu(kr)}{\zeta_\nu(ka)} = \left(\frac{a}{r}\right)^{\nu+1}. \quad (6.116)$$

Так как  $a/r$  есть правильная дробь, то выражение (6.116) обращается в нуль, если  $\nu+1$  при положительной вещественной части стремится к  $\infty$ , что имеет место для обоих соединительных путей  $C$ . То же самое справедливо и для частного  $\frac{\zeta_\nu(kr)}{\zeta_\nu(ka)}$ , знаменатель которого согласно (6.107a) и (6.115) может быть записан в виде

$$\xi_\nu(ka) = \zeta_\nu(ka) \left[ 1 + \rho \frac{\zeta'_\nu(\rho)}{\zeta_\nu(\rho)} \right]_{\rho=ka} = \zeta_\nu(ka) (-\nu).$$

Отсюда мы видим, что третий множитель в подинтегральном выражении интеграла (6.110) обращается в нуль; первый множитель в силу наличия знаменателя  $\sin \nu\tau$  также обращается в нуль; для второго множителя получаем то же самое из формулы (4.195), которая, как уже было замечено, сохраняет свою силу также для комплексного индекса шаровых функций. Таким образом, наш первоначальный путь  $A$  может быть перенесен в бесконечно удаленную часть правой полуплоскости  $\nu$ . Однако при этой деформации путь  $A$  не может пересечь полюсы подинтегрального выражения, являющиеся корнями уравнения

$$\xi_\nu(ka) = 0, \quad \nu = \nu_0, \quad \nu_1, \quad \nu_2, \quad \dots, \quad (6.116a)$$

положение которых мы сейчас подробнее исследуем. В окрестности  $m$ -го корня мы полагаем

$$\xi_v(ka) = (v - v_m) \eta_v(ka), \quad \eta_v = \left( \frac{\partial \xi_v}{\partial v} \right)_{v=v_m}; \quad (6.116)$$

тогда, образуя вычеты, получаем из формулы (6.110)

$$\pi \sum_{v=v_0, v_1, v_2, \dots} \frac{2v+1}{\sin v\pi} P_v(-\cos \vartheta) \frac{\zeta_v(kr)}{\eta_v(ka)}. \quad (6.117)$$

Так как интеграл (6.110) с точностью до знака совпадает с рядом (6.114), а последний с точностью до множителя совпадает с решением (6.108) нашей сферической задачи, то это решение представляется также рядом (6.117), так что, опуская не имеющий значения постоянный множитель, можно записать

$$u = \sum_v \frac{2v+1}{\sin v\pi} P_v(-\cos \vartheta) \frac{\zeta_v(kr)}{\eta_v(ka)}. \quad (6.118)$$

Переход от ряда (6.108) по целым  $n$  к ряду (6.118) по комплексным  $v$  совершается, как мы видели, посредством двухкратного образования вычетов для одного и того же комплексного интеграла.

Прежде чем перейти к исследованию формулы (6.118), вернемся к приложению II к гл. V. Там мы также имели дело с рядом по целым  $n$  и рядом по комплексным  $v$ , а именно с рядами (5.98) и (5.100). Мы покажем, что тождественное совпадение обоих рядов там также обеспечивалось двукратным взятием вычетов для одного и того же комплексного интеграла. Этот интеграл, записанный по образцу (6.100), имеет вид

$$\begin{aligned} & \int \frac{2v+1}{2i \sin v\pi} P_v(-\cos \vartheta) u_v(k, r_0) \zeta_v(kr) dv, \quad r > r_0, \\ & \int \frac{2v+1}{2i \sin v\pi} P_v(-\cos \vartheta) \zeta_v(kr_0) u_v(k, r) dv, \quad r < r_0, \end{aligned} \quad (6.119)$$

где

$$u_v(k, r) = \frac{\psi_v(kr) \zeta_v(ka) - \psi_v(ka) \zeta_v(kr)}{\zeta_v(ka)}.$$

Отсюда видно, что здесь решающую роль играют нули знаменателя

$$\zeta_\nu(ka) = 0, \quad \nu = \nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots, \nu_m, \dots, \quad (6.119a)$$

которые являются общими для обеих функций  $u_\nu(kr)$  и  $u_\nu(kr_0)$ . Соответствующие вычеты  $u_\nu(k, r)$  или  $u_\nu(k, r_0)$  равны

$$-\frac{\psi_\nu(ka) \zeta_\nu(kr)}{\eta_\nu(ka)} \quad (6.119б)$$

и соответственно

$$-\frac{\psi_\nu(ka) \zeta_\nu(kr_0)}{\eta_\nu(ka)},$$

где в отличие от формулы (6.116б)  $\eta_\nu$  выражается следующим образом:

$$\eta_\nu = \left( \frac{\partial \zeta_\nu}{\partial \nu} \right)_{\nu=\nu_m}. \quad (6.119в)$$

В качестве первоначального пути интегрирования обоих интегралов (6.119) мы здесь также используем путь  $A$  (фиг. 32). Как и в том случае, его можно преобразовать в сумму обходов вокруг точек  $\nu = \nu_1, \nu_2, \dots$ , так как пути  $B, C$  и в этом случае дают нуль при интегрировании. Таким образом, получаем для обоих интегралов (6.119) одно и то же представление в виде ряда

$$-\sum_{\nu} \frac{2\nu+1}{2i \sin \nu\pi} P_\nu(-\cos \vartheta) \frac{\psi_\nu(ka)}{\eta_\nu(ka)} \zeta_\nu(kr_0) \zeta_\nu(kr). \quad (6.120)$$

Последний совпадает в точности с рядом в формуле (5.106) приложения II к гл. V, в чем можно убедиться, если воспользоваться соотношением (41) из задачи IV.8:

$$\zeta_\nu(\rho) \psi'_\nu(\rho) - \zeta'_\nu(\rho) \psi_\nu(\rho) = \frac{i}{\rho^2},$$

согласно которому для  $\rho = ka$  и  $\zeta_\nu(ka) = 0$  имеет место обратная пропорциональность величин  $\psi_\nu(ka)$  и  $\zeta'_\nu(ka)$ . Новые методы, изложенные в приложении II к гл. V, могут быть, таким образом, получены, правда несколько более сложным путем, из прежних, давно применяемых рядов,

расположенных по целым значениям  $n$ , если пользоваться интегрированием по комплексному переменному. В частности, этот вывод дает математическое обоснование того замечательного факта, отмеченного ранее на стр. 302, что различные для  $r \geq r_0$  ряды по целым  $n$  сливаются в один и тот же ряд (6.120) по комплексным значениям  $\nu$ .

Чтобы довести до конца рассмотрение задачи беспроводной телеграфии на шарообразной земле, докажем сначала, что корни уравнения (6.116а) лежат в правой четверти плоскости  $\nu$ , подобно тому как это имеет место для корней уравнения (6.119а). В случае (6.116а) мы имеем трансцендентное уравнение

$$\xi_\nu(ka) = (\zeta_\nu + \rho \zeta'_\nu)_{\rho=ka} = 0. \quad (6.121)$$

Здесь следует снова воспользоваться тригонометрической формой представления функции  $\zeta_\nu(\cdot)$  [см. формулу (5.108а) стр. 304], показывающей, что обе седловые точки находятся на одинаковой высоте; если представлять  $\zeta_\nu$  в общей экспоненциальной форме, то, вообще говоря, можем не получить ни одного корня уравнения (6.121). Для  $\frac{d\zeta_\nu}{d\rho}$  следует поэтому взять выражение (5.108д). Таким образом, мы получаем

$$\xi_\nu(ka) = \frac{i}{\rho \sqrt{\sin \alpha}} (\sin z + \rho \sin \alpha \cos z),$$

$$z = \rho(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) - \frac{\pi}{4}. \quad (6.121a)$$

Так как здесь второй член скобки вследствие наличия множителя  $\rho = ka$  играет главную роль, корни уравнения  $\xi_\nu = 0$  (в противоположность корням уравнения  $\zeta_\nu = 0$  на стр. 304) достаточно точно определяются с помощью уравнения

$$\cos z = 0, \quad z = -\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad \sin z = (-1)^m. \quad (6.121b)$$

Отсюда аналогично уравнению (4.121) следует

$$\begin{aligned} \nu &= \rho \cos \alpha = ka \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) = \\ &= ka \left[1 + \frac{1}{2} (4m+1)^{2/3} \left(\frac{3\pi}{4ka}\right)^{2/3} e^{i\pi/3}\right], \end{aligned} \quad (6.122)$$

т. е. каждому из значений  $m=0, 1, 2, \dots$  принадлежит корень  $\nu_m$ , лежащий в первой четверти плоскости  $\nu$ .

Вследствие того, что  $ka \gg 1$ , абсолютные величины всех корней  $\nu_m$  являются большими числами. Поэтому для вычисления значений  $P_\nu(-\cos \vartheta)$  в формуле (6.118) можно использовать асимптотическую формулу (4.195), которая с большой степенью точности может быть записана в виде

$$P_\nu(-\cos \vartheta) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\nu \sin \vartheta}} e^{-i(\nu+\frac{1}{2})(\pi-\vartheta)+\frac{i\pi}{4}}.$$

С той же степенью точности имеем

$$\sin \nu\pi = \frac{e^{-i\nu\pi}}{2i}.$$

Таким образом, в формуле (6.118) можно положить

$$\frac{P_\nu(-\cos \vartheta)}{\sin \nu\pi} = \sqrt{\frac{2i}{\pi\nu \sin \vartheta}} e^{i(\nu+\frac{1}{2})\vartheta}; \quad (6.123)$$

что касается множителя  $\zeta/\eta$  в формуле (6.118), то мы его вычислим для случая близости к поверхности земли, т. е. при  $r=a$ . Тогда, согласно формуле (5.108a), получим, полагая  $\sin z = (-1)^m$ ,

$$\zeta_\nu = \frac{i}{\rho \sqrt{\sin \alpha}} (-1)^m,$$

а в силу формулы (6.116б) находим, ограничиваясь главным членом выражения (6.121),

$$\eta_\nu = \frac{-i}{\rho \sqrt{\sin \alpha}} [-\rho \sin \alpha (-1)^m] \frac{\partial z}{\partial \nu}.$$

Здесь, как и на стр. 304,  $\frac{\partial z}{\partial \nu} = -\alpha$ . Следовательно,

$$\frac{\zeta_\nu}{\eta_\nu} = \frac{1}{\rho \sin \alpha} = \frac{1}{ka \sin \alpha} \sim \frac{1}{ka \alpha^2}. \quad (6.124)$$

Подставив выражения (6.123) и (6.124) в формулу (6.118), получаем, наконец,

$$u = \frac{\sqrt{2i}}{ka} \sum_{\nu_m} \frac{2\nu+1}{\sqrt{\pi\nu \sin \vartheta}} e^{i(\nu+\frac{1}{2})\vartheta} \alpha^{-2}. \quad (6.125)$$

Множитель  $\alpha^{-2}$ , стоящий здесь на последнем месте, зависит от индекса суммирования  $m$ ; именно

$$\alpha^2 = (4m + 1)^{2/3} \left( \frac{3\pi}{4ka} \right)^{2/3} e^{-\frac{2i\pi}{3}},$$

как это отмечено уже в формуле (6.122). В первом множителе под знаком суммирования в формуле (6.125) мы можем, напротив, заменить  $\nu$  первым членом выражения (6.122)  $\nu = ka$ , не зависящим от  $m$ . Благодаря этому формула (6.125) принимает более простой вид:

$$u = \dots (\sin \vartheta)^{-1/2} \sum_{\nu m} (4m + 1)^{-2/3} e^{i(\nu m + \frac{1}{2})\vartheta}. \quad (6.126)$$

Здесь все множители, не зависящие от  $m$  и  $\vartheta$ , обозначены многоточием. В то время как в нашей первоначальной сумме (6.108), взятой по  $n$ , необходимо было подсчитать более тысячи членов, сумма (6.126) сходится чрезвычайно быстро вследствие экспоненциального характера зависимости ее членов от  $i\nu_m\vartheta$  и вследствие быстрого роста  $\nu_m$  с возрастанием  $m$ , указываемого формулой (6.122). Быстрота сходимости ряда (6.126) настолько велика, что этот ряд можно оборвать уже на первом или втором члене. Так как мнимая часть комплексного числа  $\nu_m$  положительна, то возрастание  $\nu_m$  означает экспоненциальное ослабление радиосигналов с увеличением пути вдоль поверхности земли; множитель  $(\sin \vartheta)^{-1/2}$  указывает при этом на увеличивающуюся интенсивность в точке  $\vartheta = \pi$ , диаметрально противоположной передатчику<sup>1)</sup>. Мы ограничились кратким изложением, отказавшись от всяких численных вычи-

<sup>1)</sup> Кажущееся обращение в бесконечность выражения (6.123) при  $\vartheta = \pi$  противоречит, правда, общим требованиям непрерывности, но в рассматриваемом случае является допустимым, так как использованная при выводе выражения (6.123) формула (4.195) теряет силу в точках  $\vartheta = \pi$  и  $\vartheta = 0$ . Более подробное исследование в точке  $\vartheta = \pi$  приводит к некоторому аналогу диффракционных явлений Пуассона для конечной интенсивности; см. J. Gratiatos, Диссертация, München, Ann. d. Phys., 86 (1928).

слений, так как наши формулы не имеют никакого значения для телеграфии вследствие преобладающей роли ионосферы. Правда, они представляют принципиальный интерес для общего математического метода функции Грина из приложения II к гл. V и показывают значение этого метода на частном примере <sup>1)</sup>).

---

<sup>1)</sup> Английский физик Уипл указал мне в 1945 г. на тот факт, что результаты Ватсона можно получить прямым путем, не прибегая к комплексным интегральным преобразованиям. Как мне теперь кажется, его соображения физического характера, относящиеся к этому специальному случаю, содержатся в общем методе, применяемом в приложении II к гл. V.



## У П Р А Ж Н Е Н И Я

### К Г Л А В Е I

**Задача I.1.** *Положение экстремумов приближений Фурье для функции*

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \text{при } 0 < x < \pi, \\ -1 & \text{при } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Доказать, что экстремумы приближения Фурье

$$S_{2n-1} = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots + \frac{1}{2n-1} \sin (2n-1)x$$

равноудалены друг от друга и за исключением общего для всех сумм  $S_{2n-1}$  экстремума при  $x = \pi/2$  лежат между экстремумами  $S_{2n+1}$ .

**Задача I.2.** *Суммирование некоторых арифметических рядов.* Вычислить высшие аналоги ряда Лейбница (1.21) и рядов  $\sum_2$ ,  $\sum_4$  из формулы (1.31).

**Задача I.3.** *Разложение  $\sin x$  в ряд по косинусам.* Разложить  $\sin x$  в интервале от нуля до  $\pi$  в ряд по косинусам:

а) продолжая  $\sin x$  как четную функцию в отрицательную сторону для  $-\pi < x < 0$ ;

б) полагая в формуле (1.44)

$$b = 0 \quad \text{и} \quad c = \pi.$$

**Задача I.4.** *Спектральное разложение некоторых простейших временных процессов.* а, б) Определить с помощью интеграла Фурье спектры временных процессов, представленных на фиг. 33, а, б (см., указание к этой задаче), и изобразить спектры графически; в) таким же путем найти спектр оборванной с двух сторон синусоидальной волны  $\sin 2\pi t/\tau$ , простирающейся от  $t = -T$  до  $t = +T$ , причем  $T = n\tau$  (см. фиг. 33, в, указания). Доказать с помощью полученного результата, что спектральная линия является тем более расплывчатой и покрывает тем более широкий участок спектра, чем короче продолжительность существования синусоидальной волны.

Абсолютно резкая, вполне монохроматическая спектральная линия должна соответствовать при этом бесконечно длинной недеформированной синусоидальной волне.

**Задача I.5.** *Примеры к методу комплексного интегрирования.* Обосновать результат задачи I.4, а (разрывный множитель Дирихле), пользуясь методом комплексного интегрирования; далее, разложить спектр ограниченной с обеих сторон синусоиды в сумму спектров двух одно-сторонне ограниченных (полубесконечных) волн.

**Задача I.6.** Методом, применявшимся для шаровых функций, вычислить первые полиномы Эрмита и Лагерра, исходя из их условий ортогональности и их обычной нормировки: высший член  $H_n(x)$  равен  $(2x)^n$ , низший член  $L_n(x)$  равен  $n!$ . Относительно определения этих полиномов см. таблицу на стр. 44.

## К ГЛАВЕ II

**Задача II.1.** *Упругий стержень, открытая и закрытая труба.* Вычислить поперечные собственные колебания цилиндрического стержня длины  $l$ , закрепленного в конце  $x=0$  и свободного на конце  $x=l$ , и сравнить с собственными колебаниями открытой и закрытой трубы.

**Задача II.2.** *Вторая форма теоремы Грина.* Для общего дифференциального выражения эллиптического типа  $L(u)$  найти аналог теоремы Грина из теории потенциала, полученной в т. II, равенство (3.16):

а) когда  $L(u)$  приведено к нормальному виду;

б) в общем случае;

в) исследовать, в частности, для самосопряженного дифференциального выражения  $L$ , при каких условиях решение граничной задачи будет единственным.

При этом можно ограничиться случаем двух независимых переменных, для которого указанная теорема из т. II имеет вид

$$\int u \Delta v \, d\tau + \int (\text{grad } u, \text{grad } v) \, d\tau = \int u \frac{\partial v}{\partial n} \, ds.$$

**Задача II.3.** *Одномерная теория потенциала.* Определить одномерную функцию Грина из условий:

$$а) \frac{d^2 G}{dx^2} = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} 0 \leq x < \xi, \\ \xi < x \leq l; \end{cases}$$

$$б) G = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = l;$$

$$в) \frac{dG_+}{dx} - \frac{dG_-}{dx} = 1;$$

$$г) \text{ функция } G \text{ непрерывна при } x = \xi.$$

Применить функцию Грина к решению (очевидно, тривиальной) задачи:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0; \text{ функция } u \text{ непрерывна при } 0 \leq x \leq l:$$

$$u = \begin{cases} u_0 & \text{при } x = 0, \\ u_l & \text{при } x = l. \end{cases}$$

Условие «в» означает, что источник функции  $G$ , расположенный в точке  $x = \xi$ , имеет мощность 1; при этом  $G_+$  есть ветвь функции  $G$  при  $x > \xi$ , а  $G_-$  — ветвь функции  $G$  при  $x < \xi$ .

**Задача II.4.** *Применение метода Грина, развитого для теплопроводности, к так называемому ламинарному пластинчатому потоку несжимаемой жидкости, обладающей трением.* Течение предполагается плоским и прямолинейным; это должно означать, что оно не зависит от третьей координаты  $z$  и направлено по оси  $y$ . Скорость  $v$  имеет тогда только одну компоненту  $v_y = v$ , которая вследствие предполагаемой несжимаемости не зависит также и от  $y$ , так что квадратичные конвекционные члены вида  $(v, \text{grad})v$  обращаются в нуль. Уравнение Навье—Стокса для  $v$  примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} - k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (1)$$

где  $k$  означает кинетическую вязкость [см. т. II, формула (16.1)].

Правая часть уравнения (1) не зависит от  $x$  вследствие соответствующего уравнения для  $x$ -компоненты движения, которая равна нулю, так что это уравнение принимает вид  $0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ ; следовательно, правая часть уравнения (1) является функцией только от  $t$ ; обозначим эту функцию через  $a(t)$ .

Пусть при  $x=0$  течение ограничено твердой пластинкой, которая до момента времени  $t=0$  была в покое и которая затем была приведена в движение по закону  $v=v_0(t)$ . Вследствие прилипания жидкости к пластинке при  $x=0$  будем иметь

$$v = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0, \\ v_0(t) & \text{при } t > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Для прямолинейного течения Куэтта (см. т. II, фиг. 19, в) мы должны были бы присоединить дальнейшие условия вдоль покоящейся пластинки, которая находилась бы на конечном расстоянии от  $x=0$ , однако для упрощения вычислений мы будем считать ее удаленной в бесконечность. Получающийся таким образом предельный случай называется в теории потоков *пластинчатым течением*. В этом случае в дополнение к условиям (2) имеем условие для  $x=\infty$ :

$$v=0 \quad \text{и} \quad p=p_0 \quad (\text{независимо от } y). \quad (3)$$

Отсюда следует, что  $a(t)=0$ , так что уравнение (1) прямо переходит в уравнение теплопроводности.

Таким образом, мы пришли к граничной задаче, представляющей частный случай по сравнению с фиг. 13 в том смысле, что теперь  $x_1=\infty$  и  $x_0=0$ ; кроме того, она упрощена в том отношении, что в начальном состоянии, когда пластинка и, следовательно, также жидкость были в покое, имеет место условие

$$v=0 \quad \text{для } t=0 \quad \text{и всех } x > 0. \quad (4)$$

Решение этой граничной задачи, а также решение прежней содержится в формуле (2.71), если встречающееся в последнем главное решение  $V$  заменить соответствующей функцией Грина. Исследовать получающийся профиль скоростей  $v(x)$  для возрастающих значений  $t$ .

### К ГЛАВЕ III

**Задача III.1.** *Линейный проводник с внешней теплопроводностью по Фурье.* Пусть для  $x>0$  задана начальная температура  $u(x, 0)=f(x)$ . Как следует продолжить функцию

$f(x)$  для  $x < 0$ , чтобы при  $x = 0$  выполнялось условие

$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu = 0?$$

**Задача III.2.** Получить значение нормирующего интеграла для задачи ангармонического анализа Фурье, применяя к этому частному случаю общую теорему Грина.

**Задача III.3.** Экспериментальное определение отношения внешнего и внутреннего коэффициентов теплопроводности. Пусть на концах стержня при  $x = 0$  и  $x = l$  поддерживаются постоянные температуры  $u_1$  и  $u_3$  и пусть стержень находится в стационарном состоянии, когда первоначальное произвольное распределение температуры уже перестает действовать. При условии адиабатической изоляции боковой поверхности стержня распределение температуры будет линейным. Следовательно, в середине стержня  $x = l/2$  должна иметься температура

$$u_2 = \frac{u_1 + u_3}{2}.$$

Наблюдая величину

$$q = \frac{u_1 + u_3}{2u_2},$$

можно определить отношение внешней и внутренней теплопроводности (по существу, постоянную  $h$ ). Получить соотношение между  $q$  и  $h$ , необходимое для использования наблюдения; в силу предыдущего значение  $q = 1$  соответствует значению  $h = 0$ .

**Задача III.4.** Определение отношения коэффициента теплопроводности  $\kappa$  к коэффициенту электропроводности  $\sigma$ . Металлический стержень нагревается электрическим током силы  $i$ , причем на единицу длины стержня подводится джоулево тепло  $i^2/q^2$  ( $q$  — площадь поперечного сечения стержня); боковая поверхность отсутствует. Составить дифференциальное уравнение стационарного состояния и решить его при граничных условиях:  $u = 0$ , если  $x = 0$  и  $x = l$ , которые реализуются, например, с помощью водяных ванн. При этом наблюдаются: на концах стержня — разность потенциалов  $V$ , а в центре стержня — макси-

мальная температура  $\{U$ . Вычислить, исходя из этих величин, отношение  $\chi/\sigma$ . Для чистых металлов это отношение универсально (закон Видемана—Франца).

#### К ГЛАВЕ IV

**Задача IV.1.** *Разложение функции  $I_n(\rho)$  в степенной ряд.* Исходя из интегрального представления (4.18), получить разложение функции  $I_n(\rho)$  в степенной ряд:

- а) при целом  $n$ ;
- б) при любом  $n$  с помощью общего определения  $\Gamma$ -функции.

**Задача IV.2.** Из интегрального представления (4.22) получить так называемые формулы обхода для  $H_n^1$  и  $H_n^2$ , в частности при целом  $n$ .

**Задача IV.3.** Пользуясь интегральным представлением (4.22), вычислить логарифмическую особенность  $H_0(\rho)$  в нуле.

**Задача IV.4.** *Элементарный способ для асимптотического приближения.* Проверить (математически, правда, сомнительным методом) асимптотическое предельное значение  $H_n^1(\rho)$ , пренебрегая уже в дифференциальном уравнении величиной  $1/\rho$  и ее высшими степенями.

**Задача IV.5.** *Разложение функции  $f(\vartheta, \varphi)$  на сфере.* а) Разложить  $f$  сначала тригонометрически по  $\varphi$ , затем в шаровые функции по  $\cos \vartheta$ . Схема:

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{im\varphi},$$

$$C_m = \sum_{n=m}^{\infty} A_{mn} P_n^m(\cos \vartheta);$$

объединяя оба разложения, получим

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_m \sum_n A_{mn} P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \begin{cases} -\infty < m < +\infty, \\ |m| \leq n < \infty. \end{cases} \quad (1)$$

б) Сначала разложить функцию  $f$  по общим сферическим функциям  $Y_n$ , а затем найти входящие в каждую из этих функций коэффициенты с помощью условий орто-

гональности для функций

$$Y_{nm} = P_n^m(\cos \vartheta) e^{-im\varphi}.$$

Схема:

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n,$$

$$Y_n = \sum_{m=-n}^n A_{nm} P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi};$$

объединяя оба разложения, получим

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_n \sum_m A_{nm} P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \begin{cases} 0 < n < \infty \\ -n \leq m \leq +n. \end{cases} \quad (2)$$

Уяснить себе кажущееся различие порядка суммирования в формулах (1) и (2) с помощью чертежа (числовая решетка в плоскости  $m, n$ ) и доказать, что  $A_{mn}$  и  $A_{nm}$  в формулах (1) и (2) формально (при изменении порядка суммирования и интегрирования) означают одно и то же.

**Задача IV.6.** *Отображение клина фиг. 17 на круговые мениски.* Преобразовать клин с углом раствора  $60^\circ$  на фиг. 17 с помощью преобразования обратными радиусами, выбрав соответствующим образом центр инверсии  $S$  (см. указание к этой задаче); три прямые 1, —1; 2, —2; 3, —3 переходят при этом в дуги окружностей; ограниченные ими углы — в круговые мениски. Проверить соответствие областей двух типов и показать, что функция Грина теории потенциала для каждой из этих областей (представляющих в случае пространства шаровые мениски) может быть получена с помощью пятикратного отражения.

**Задача IV.7.** а) *Отображение плоскопараллельной пластинки на две касающиеся друг друга сферы.* Исследовать область, в которую переходит посредством инверсии плоско-параллельная пластинка вместе с ее зеркальными изображениями. Сферу инверсии расположить соответственно так, чтобы она касалась обеих граничных плоскостей пластинки. Доказать, что при этом пластинка переходит во внешнюю область двух соприкасающихся сфер, а ее повторные зеркальные изображения отображаются на пространство между соответствующими попарно соприкасающимися сферами.

б) *Отображение двух concentрических сфер на плоскость и сферу.* Показать, что две concentрические сферы могут быть преобразованы с помощью инверсии в пару поверхностей: плоскость + сфера. Поэтому обратно от граничной задачи для случая сферы и плоскости можно перейти к гораздо более простой граничной задаче для двух concentрических сфер. То же самое относится и к граничной задаче потенциала для двух любых непересекающихся сфер.

**Задача IV.8.** *Вычисление двух выражений, составленные из бесселевых функций.* Определить значения выражений:

$$H_n(\rho) F_n(\rho) - H'_n(\rho) I_n(\rho), \quad (I)$$

$$\zeta_n(\rho) \psi'_n(\rho) - \zeta'_n(\rho) \psi_n(\rho). \quad (II)$$

[См. приложение I к гл. IV, формулы (4.220 и (4.236)].

## К ГЛАВЕ V

**Задача V.1.** *Вопросы нормировки.* Нормировать к единице функции  $I_n(\lambda r)$  и  $\psi_n(hr)$  из формул (5.18) и (5.17) для основного интервала  $0 < r < a$  при граничном условии  $I'_n(\lambda a) = 0$  или  $\psi'_n(ha) = 0$  по образцу формулы (4.76).

**Задача V.2.** *Теорема о среднем значении в теории потенциала.* Доказать теорему: значение гармонической функции  $u$  в каждой точке  $P$  ее области регулярности  $S$  равно среднему арифметическому ее значений на сфере  $K_a$  любого радиуса  $a$  с центром в  $P$ , если только эта сфера лежит целиком в  $S$ .

**Задача V.3.** *Формулы суммирования по корням бесселевых функций.* Показать, что постоянные коэффициенты  $A_{nm}$  одни и те же для разложения (5.38) и (5.39) и вывести из сравнения множителей при  $\prod_n^m (\cos \vartheta_0) e^{-im\varphi_0}$  интересные соотношения для функций  $\Psi_n$ , которые могут быть преобразованы в соотношения для функций  $\psi_n$ .

## К ГЛАВЕ VI

**Задача VI.1.** *Вертикальная и горизонтальная антенны на высоте  $h$  над идеально проводящей землей.* Доказать,



что в силу формул (6.16) и (6.17) для обеих электрических антенн:

$$\text{а) } \Pi = \Pi_z = \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{e^{ikR'}}{R'},$$

$$\text{б) } \Pi = \Pi_x = \frac{e^{ikR}}{R} - \frac{e^{ikR'}}{R'}$$

выполняются условия (6.15) обращения в нуль тангенциальной компоненты поля  $\mathbf{E}$  во всей плоскости  $z=0$ . Показать также, что в силу формул (6.19) и (6.20) для обеих магнитных антенн:

$$\text{в) } \Pi = \Pi_z = \frac{e^{ikR}}{R} - \frac{e^{ikR'}}{R'},$$

$$\text{г) } \Pi = \Pi_x = \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{e^{ikR'}}{R'}$$

выполняются условия обращения в нуль тангенциальных электрических компонент.

**Задача VI.2.** Картина электрических силовых линий в случае волны Ценнека вблизи поверхности земли. Показать, что силовые линии в воздушном пространстве наклонены вперед, т. е. в направлении их распространения, и что в земле они наклонены под малым углом к поверхности земли.

**Задача VI.3.** Упрощенное вычисление мощности, подводимой к вертикальной и горизонтальной антеннам. Доказать справедливость выражений (6.94) и (6.94а), определив работу  $\mathbf{E}j\mathbf{l}$ , совершаемую в единицу времени полем напряженности  $\mathbf{E}$  над током  $j$  на пути  $l$ , равном длине антенны.

### УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

**Задача I.1.** Уравнение для определения положения экстремумов имеет вид

$$\cos x + \cos 3x + \dots + \cos (2n-1)x = 0. \quad (1)$$

Если вместо этого написать

$$\operatorname{Re} [e^{ix} + e^{3ix} + \dots + e^{(2n-1)ix}] = 0, \quad (2)$$

то можно просуммировать геометрический ряд. В результате получаем

$$\frac{\sin 2nx}{2 \sin x} = 0, \quad (3)$$

следовательно,

$$x = \frac{\pi}{2n}, \frac{2\pi}{2n}, \dots, \frac{(2n-1)\pi}{2n}. \quad (4)$$

Точки  $x=0$  и  $x=\pi$  не включаются в эту последовательность вследствие наличия знаменателя в выражении (3). Ответ (4) доказывает утверждение задачи.

**Задача I.2.** Из ряда по косинусам (1.30) интегрированием от 0 до  $\pi$  получается ряд по синусам, а из последнего при  $x=\pi/2$  получается следующий за рядом (1.27) аналог ряда Лейбница (1.24). Интегрирование этого ряда по синусам дает ряд, расположенный по функциям  $1-\cos x$ ,  $1-\cos 3x, \dots$  и из последнего  $x=\pi/2$  получаем ближайший аналог для ряда (1.29), из которого легко находим значение  $\sum_6$ . Этот процесс можно продолжать неограниченно, однако трудно найти какой-либо обозримый закон для последующих аналогов.

**Задача I.3.** Оба указанных в задаче способа приводят к ряду

$$\sin x = \frac{2}{\pi} \left( 1 - \frac{2}{1 \cdot 3} \cos 2x - \frac{2}{3 \cdot 5} \cos 4x \dots \right),$$

из которого, например при  $x=0$ , получается интересное представление  $\frac{1}{2}$  с помощью последовательности обратных нечетных чисел.

**Задача I.4.** В случае «а» применяем формулу (1.47); если написать  $t$  вместо  $x$  и произвести интегрирование по  $\xi$ , то получаем

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega} \sin \frac{\omega t}{2} e^{i\omega t} = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (1)$$

Величина  $|a(\omega)|$  означает амплитуду спектра функции  $f(t)$  для частоты  $\omega$  и согласно формуле (1) может быть выражена посредством формулы

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \omega t/2}{\omega/2}. \quad (2)$$

Она имеет главный максимум с высотой  $\tau/\pi$  при  $\omega = 0$ , за которым следуют вторичные максимумы уменьшающейся высоты, причем расстояние между ними асимптотически стремится к  $\Delta\omega = 2\pi/\tau$ .

В случае «б», когда в соответствии с фигурой имеем нечетную относительно  $t$  функцию  $f$ , получаем таким же образом

$$f(t) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega} \left(1 - \cos \frac{\omega\tau}{2}\right) e^{i\omega t} = \int_0^{\infty} b(\omega) \sin \omega t d\omega, \quad (3)$$

$$b(\omega) = -\frac{1}{\pi} \frac{1 - \cos \omega\tau/2}{\omega/2} = -\frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 \omega\tau/4}{\omega/4}$$

и  $b(\omega) = 0$  для  $\omega = 0$ ; первый максимум находится при  $\omega \sim 4,7/\tau$ ; последующие вторичные максимумы монотонно убывают по высоте. В обоих случаях «а» и «б» мы имеем спектр, простирающийся в бесконечность.

На первоначальной стадии развития теории рентгеновых лучей такой характер спектра объясняли непериодическими импульсами в эфире, вида «а» или «б». Со спектральной точки зрения, которая одна только может быть оправдана физически, это не приводит ни к какому противоречию с волновой теорией, а означает только некоторое предположение относительно природы рентгеновского спектра.

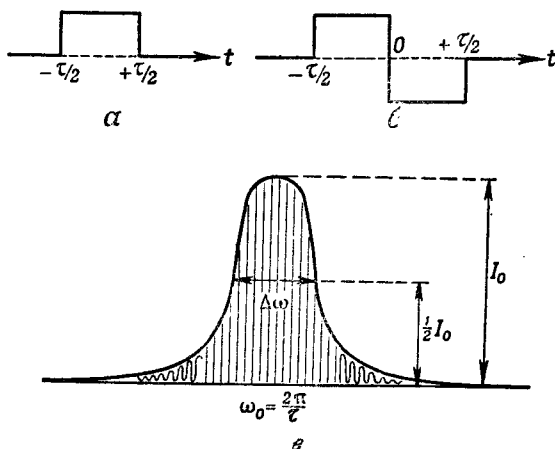
В случае оборванной с обеих сторон волны длины  $2T = 2n\tau$  (фиг. 33, в) удобнее всего исходить из формулы (1.506), после чего легко находим

$$f(t) = \int_0^{\infty} b(\omega) \sin \omega t d\omega, \quad b(\omega) = \frac{4}{\tau} \frac{\sin \omega T}{\omega^2 - \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2}. \quad (4)$$

Главный максимум  $b(\omega)$  соответствует, как следует ожидать, частоте  $\omega_0 = 2\pi/\tau$  и имеет высоту  $b_0 = n\tau/\pi$  соответственно интенсивности  $I_0 = (n\tau/\pi)^2$  и возрастает, таким образом, при возрастании длины волны. Главный максимум с двух сторон окружен вторичными максимумами последовательно уменьшающейся высоты, причем расстояние между ними асимптотически стремится к  $\pi/n\tau$ ; для всех этих максимумов имеем  $\sin \omega T \sim 1$ . Нас интересуют два максимума, которые имеют интенсивность  $I = \frac{1}{2} I_0$  и для которых, сле-

довательно, справедливо соотношение

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \pm \frac{\sqrt{2} \pi}{n \tau^2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{\pi n} \omega_0^2, \quad \omega^2 = \omega_0^2 \left( 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{\pi n} \right). \quad (5)$$



Ф и г. 33.

$$a) f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } |t| > \frac{\tau}{2}, \\ 1 & \text{при } |t| < \frac{\tau}{2}. \end{cases} \quad б) f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } |t| > \frac{\tau}{2}, \\ 1 & \text{при } -\frac{\tau}{2} < t < 0, \\ -1 & \text{при } 0 < t < \frac{\tau}{2}. \end{cases}$$

в) График интенсивности спектра обрывающейся с двух сторон волны с частотой  $\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau}$ .  $\Delta\omega$  — полуширина соответствующей спектральной линии. В средней, заштрихованной части спектра, так же как и на его флангах, имеют место колебания типа квадрата синуса.

Разность соответствующих частот определяет так называемую ширину спектра половинного значения, принадлежащего соответствующей спектральной линии. Согласно формуле (5), если предположить  $n \gg 1$ , она равна

$$\Delta\omega = \frac{\sqrt{2}}{\pi n} \omega_0 = \frac{2\sqrt{2}}{T}. \quad (6)$$

Ширина спектра половинного значения уменьшается, следовательно, с увеличением  $T$ , как указано в задаче. При  $T \rightarrow \infty$  получается абсолютно резкая спектральная линия.

**Задача I.5.** Представленная на фиг. 33, а функция  $f(t)$  называется в математической литературе, если только положить  $\pi/2$  равным 1, *разрывным множителем Дирихле*:

$$D = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \omega \cos \omega t \frac{d\omega}{\omega} = \begin{cases} 1 & |t| < 1, \\ \frac{1}{2} & |t| = 1, \\ 0 & |t| > 1. \end{cases} \quad (1)$$

Если положить здесь  $t = 0$ , то получим основной интеграл Дирихле, вычисленный уже в § 2:

$$\int_0^{\infty} \sin \omega \frac{d\omega}{\omega} = \frac{\pi}{2}, \quad (2)$$

или также

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin \omega \frac{d\omega}{\omega} = \pi. \quad (2a)$$

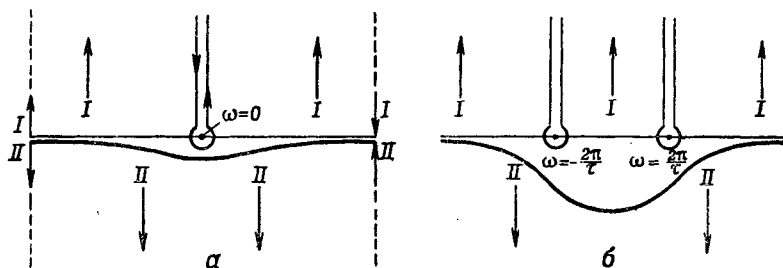
К тому же результату можно прийти с помощью комплексного интегрирования: так как  $(\sin \omega)/\omega$  на вещественной оси и в ее окрестности является аналитической функцией, то точку  $\omega = 0$  можно обойти, например как это указано на фиг. 34, а, и после этого представить интеграл (2a) в виде разности следующих двух интегралов:

$$I = \frac{1}{2i} \int e^{i\omega} \frac{d\omega}{\omega}, \quad II = \frac{1}{2i} \int e^{-i\omega} \frac{d\omega}{\omega}, \quad (3)$$

причем оба интеграла взяты по пути, указанному на фигуре жирной чертой. В интеграле II путь интегрирования может быть тотчас же перемещен в бесконечно удаленную область нижней полуплоскости, где он даст нуль. В интеграле I путь интегрирования должен быть переведен в бесконечно удаленную область верхней полуплоскости, так как  $\exp(i\omega)$  обращается в нуль только там, но этому препятствует полюс  $\omega = 0$ . Вычет в полюсе равен  $1/2i$ , так что интеграл, взятый по контуру, окружающему полюс, равен  $\frac{2\pi i}{2i} = \pi$ . Окружив полюс и удалив остальную часть в пути беско-

нечность, мы убеждаемся в справедливости формулы (2а), а следовательно, и формулы (2).

Дополнительно следует еще показать, что части пути интегрирования, расположенные поблизости от вещественной оси и указанные на фигуре короткими стрелками, а также их пунктирные продолжения не дают в пределе никакой добавки к интегралам I и II. В этом легко убедиться, мажорируя подинтегральную функцию.



Фиг. 34. *а* — разрывный множитель Дирихле. Формула (3) доказывается путем деформации пути интегрирования *II* в сторону отрицательной мнимой полуоси, а пути интегрирования *I* — в сторону положительной мнимой полуоси; *б* — ограниченная с двух сторон волна. Комплексные интегралы *I* и *II* представляют односторонне ограниченные (полубесконечные) волны.

Метод комплексного интегрирования может быть использован также для того, чтобы дополнить утверждения предыдущей задачи о двухсторонне ограниченном отрезке волны. Этот отрезок волны можно рассматривать как результат наложения двух полубесконечных волн противоположной фазы, из которых одна простирается от  $t = -T$  до  $t = \infty$ , а другая от  $t = +T$  до  $t = \infty$ . Оба эти процесса, однако, нельзя представить в отдельности способом Фурье, вследствие расходимости, имеющей место при  $t = \infty$ . Необходимо предварительно в равенстве (4) предыдущего указания переместить путь интегрирования из вещественной оси в комплексную плоскость, как показывает фиг. 34, б, и тогда только произвести разложение. Это поясняется следующими преобразованиями, которые исходят из равен-

ства (4) предыдущего указания:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{4}{\tau} \int_0^{\infty} \sin \omega t \sin \omega T \frac{d\omega}{\omega^2 - \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2} = \\
 &= \frac{2}{\tau} \int_0^{\infty} [\cos \omega(t-T) - \cos \omega(t+T)] \frac{d\omega}{\omega^2 - \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2} = \\
 &= \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{i\omega(t-T)} - e^{i\omega(t+T)}] \frac{d\omega}{\omega^2 - \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2} = \text{I} - \text{II}, \\
 \left. \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \right\} &= -\frac{1}{\tau} \int e^{i\omega(t \pm T)} \frac{d\omega}{\omega^2 - \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2},
 \end{aligned}$$

причем написанный без нижнего и верхнего пределов знак интегрирования означает интеграл по комплексному пути в фиг. 34, б.

Мы утверждаем, что интеграл I соответствует волне, начинающейся в  $t = -T$  и кончающейся при  $t = \infty$ , интеграл II соответствует волне, начинающейся в  $t = +T$  и кончающейся при  $t = \infty$ . В этом мы убедимся, если для упрощения записи положим  $T = 0$  и докажем, что функция

$$f_0(t) = -\frac{1}{\tau} \int e^{i\omega t} \frac{d\omega}{\omega^2 - \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2} \quad (4)$$

представляет начинающуюся при  $t = 0$  и кончающуюся при  $t = \infty$  синусоидальную волну. Доказательство протекает совершенно аналогично, как и для интегралов (3): для  $t < 0$  интеграл может быть перемещен в бесконечно удаленную часть нижней полуплоскости и там обращается в нуль; для  $t > 0$  он должен быть перемещен в верхнюю полуплоскость и дает вследствие наличия полюсов  $\omega = \pm 2\pi/\tau$  вычеты

$$2\pi i \frac{e^{2\pi i t/\tau}}{4\pi/\tau} \quad \text{и соответственно} \quad 2\pi i \frac{e^{-2\pi i t/\tau}}{-4\pi/\tau};$$

отсюда следует

$$f_0(t) = -\frac{i}{2} (e_{2\pi}^{it/\tau} - e^{-2\pi it/\tau}) = \sin \frac{2\pi t}{\tau}.$$

Тем самым утверждение доказано.

Если вместо формулы (4) исходить, что несколько проще, из выражения

$$f_0(t) = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int e^{i\omega t} \frac{d\omega}{\omega - 2\pi/\tau}, \quad (5)$$

то легко убедиться, что при том же выборе пути интегрирования и при той же деформации последнего получаем прежний результат:

$$f_0(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \sin \frac{2\pi t}{\tau} & t > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Эта формула представляет интерес для оптической теории рассеяния. Представим себе, что волна (6) падает перпендикулярно к плоскости  $x=0$ . Разложим волну (6), за которой следует среда, заполняющая полупространство  $x>0$  по формуле (5), на элементарные волны вида  $a(\omega) e^{i\omega t}$ . Каждая из них распространяется тогда независимо от всех остальных в сторону возрастающих значений  $x$  и представлена с помощью выражения  $a(\omega) e^{i(kx - \omega t)}$ . Волновое число  $k$  в свободной от дисперсии среде равнялось бы  $k_0 = \omega/c$ ; однако при наличии возбуждаемых волной колебаний электронов ( $N$ —число электронов в  $\text{см}^3$ ) волновое число  $k$  определяется формулой

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 - \frac{Ne^2/m}{\omega^2 - \omega_e^2} \right), \quad (7)$$

где  $\omega_e$  означает собственную частоту колебаний этих электронов (для простоты мы считаем колебание незатухающим). В силу этого в бесконечно удаленной части плоскости  $\omega$  имеем

$$k = k_0, \quad kx - \omega t = k_0 x - \omega t = \frac{\omega}{c} (x - ct).$$

Таким образом, от знака  $x - ct$  зависит, нужно ли перенести путь интегрирования в верхнюю или нижнюю полу-плоскость  $\omega$ . Этот критерий, как не зависящий от  $\omega$ , будет



общим для всех элементарных волн, так что момент времени  $t$ , определяемый равенством  $x = ct$ , означает начальный момент светового возбуждения в точке  $x$  рассеивающей среды. *Передний фронт нашего светового сигнала распространяется поэтому со скоростью  $\frac{dx}{dt} = c$ , где  $c$  — скорость света в пустоте, а не с фазовой скоростью  $V = \omega/k$ , характеризующей данную рассеивающую среду.* Этому соответствовал в т. IV тот факт, что электроны для  $t < \frac{x}{c}$  находятся в покое и только для  $t = x/c$  начинают колебаться. Однако полная амплитуда колебаний электронов, соответствующая заметному возбуждению, достигается только в позднейший момент времени, который также определяется не фазовой скоростью  $V$ , а групповой скоростью  $U = \frac{d\omega}{dk}$ . Колебательный процесс, предшествующий этому моменту, можно назвать *предвестником светового сигнала*.

**Задача 1.6.** а) *Полиномы Эрмита.* Вследствие четного характера функции  $g(x) = e^{-x^2}$  и в силу выбранного интервала  $-\infty < x < +\infty$  полиномы Эрмита, так же как в шаровые функции  $P_n$ , являются четными или нечетными функциями от  $x$ , смотря по тому, четно или нечетно  $n$ . Принимая во внимание это обстоятельство, в обычную нормировку  $H_n$  (см. условие задачи) следует положить

$$H_0 = 1, \quad H_1 = 2x, \quad H_2 = 4x^2 + a, \\ H_3 = 8x^3 + bx, \quad H_4 = 16x^4 + cx^2 + d$$

и вычислить постоянные  $a, b, c, d$ , последовательно применяя условие ортогональности (результат:  $a = -2, b = -12, c = -48, d = +12$ ).

б) *Полиномы Лагерра.* В силу выражения для их веса  $g(x) = e^{-x}$  и выбора интервала разложения  $0 < x < \infty$  они не являются четными или нечетными вместе с  $n$ . Принимая во внимание этот факт и обычную нормировку (см. условие задачи), следует положить

$$L_0 = 1, \quad L_1 = ax + 1, \quad L_2 = bx^2 + cx + 2, \\ L_3 = dx^3 + ex^2 + fx + 6$$

и вычислить  $a, b, \dots, f$  аналогично «а» (результат:

$$a = -1, \quad b = 1, \quad c = -4, \quad d = -1, \quad e = 9, \quad f = -18).$$

**Задача II.1.** Дифференциальное уравнение (2.8), соответствующее данной задаче, получается следующим образом из теории *прогиба* балки: уравнение (41.8) в т. II<sup>1)</sup>, продифференцированное дважды по  $x$ , после замены  $y$  на  $u$  принимает вид

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{1}{EI} \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Изгибающий момент  $M$  внешней статической нагрузки следует заменить моментом сил инерции

$$-\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

где  $\rho$  — масса колеблющегося стержня на единицу длины. Пусть стержень закреплен при  $x=0$ , а его свободный конец находится при  $x=l$ . Момент изгиба для поперечного сечения  $x$  составляется из моментов изгиба для всех поперечных сечений  $x < \xi < l$  с длиной плеча  $\xi - x$ . Поэтому имеем

$$M = -\rho \int_x^l (\xi - x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} d\xi, \quad \frac{\partial M}{\partial x} = \rho \int_x^l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} d\xi, \\ \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Подставляя вторую производную в уравнение (1), получаем уравнение (2.8). Постоянная  $c$  (размерность см<sup>2</sup>/сек) выражается следующим образом:

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho}}. \quad (3)$$

<sup>1)</sup> Это уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI},$$

где  $E$  — модуль Юнга,  $I$  — момент инерции сечения,  $y$  — смещение элемента. (Прим. ред.)

На свободном конце имеем согласно формуле (2)  $M = \frac{\partial M}{\partial x} = 0$ . Это означает в силу уравнений  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{M}{EI}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad \text{для } x = l. \quad (4)$$

С другой стороны, имеем условие закрепления

$$u = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{для } x = 0. \quad (5)$$

Если положить  $u = U e^{i\omega t}$ ,  $U = e^{\alpha x}$ , то уравнение (2.8) дает

$$\alpha^4 = \frac{\omega^2}{c^2}, \quad \alpha = \pm k \text{ и } \alpha = \pm ik, \quad k = \sqrt{\frac{\omega}{c}}.$$

Поэтому имеется четыре частных решения дифференциального уравнения, получающегося для  $U$ :

$$U = e^{kx}, \quad e^{-kx}, \quad e^{ikx}, \quad e^{-ikx},$$

которые можно представить в более удобном для дальнейшего виде:

$$\operatorname{sh} kx, \quad \operatorname{ch} kx, \quad \sin kx, \quad \cos kx.$$

Общее решение будет поэтому иметь вид

$$U = A \operatorname{sh} kx + B \operatorname{ch} kx + C \sin kx + D \cos kx.$$

Между постоянными  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  в силу условий (4) и (5) существует 4 соотношения, из которых путем исключения получаем трансцендентное уравнение

$$\cos kl = -\frac{1}{\operatorname{ch} kl}. \quad (6)$$

Его графическое решение по образцу фиг. 7 дает бесконечно много корней, расстояние между которыми асимптотически стремится к величине

$$k_{n+1} - k_n = \frac{\pi}{l}, \quad \omega_{n+1} - \omega_n = 2c n \frac{\pi^2}{l^2}. \quad (7)$$

Для основного колебания имеем

$$k = k_1 = \frac{1,875}{l}, \quad \omega = \omega_1 = ck_1^2. \quad (7a)$$

Дифференциальное уравнение для *трубы* совпадает с дифференциальным уравнением колеблющейся струны

(2.6), где  $u$  — скорость воздуха в направлении трубы,  $c$  — скорость звука. Для открытой с двух концов трубы, соответственно для трубы, закрытой при  $x=0$  и открытой при  $x=l$ , имеют место следующие граничные условия:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ для } x=0 \text{ и } x=l \text{ (открытая труба)} \quad (8a)$$

и соответственно

$$u = 0 \text{ для } x=0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ для } x=l \text{ (закрытая труба)} \quad (8б)$$

( $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  означает вследствие гидродинамического условия непрерывности то же самое, что и  $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ , т. е.  $p = p_0$ , где  $p_0$  — атмосферное давление). Полагая  $u = Ue^{i\omega t}$ , в силу условий (8a) и (8б), получаем для собственных колебаний

$$U = A \cos k_n x, \quad k_n = n \frac{\pi}{l}, \quad \omega_n = ck_n, \quad k_1 = \frac{3,14}{l}, \quad (9a)$$

$$U = B \sin k_n x, \quad k_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{l}, \quad \omega_n = ck_n, \quad k_1 = \frac{1,57}{l}. \quad (9б)$$

Значение  $k_1$ , взятое из формулы (7a), лежит между значениями (9a) и (9б). Последовательность  $\omega$  в случае открытой и закрытой трубы является гармонической, в случае упругого стержня она становится почти гармонической для высоких обертонов [см. формулы (7)].

**Задача II.2.** а) Используя тождества

$$v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( v \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

$$Dv \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial Dv}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (Duv),$$

получим, если  $L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu$ ,

$$vL(u) + \Lambda(u, v, \dots) = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad (1)$$

где

$$\Lambda(u, v, \dots) = (\text{grad } u, \text{ grad } v) + u \left( \frac{\partial Dv}{\partial x} + \frac{\partial Ev}{\partial y} - Fv \right), \quad (2)$$

$$X = v \frac{\partial u}{\partial x} + Duv, \quad Y = v \frac{\partial u}{\partial y} + Euv; \quad (3)$$

$\Lambda$  — билинейная форма от  $u$ ,  $v$  и их первых производных. Если  $L$  является самосопряженным выражением, то вследствие условий  $D = E = 0$  [см. уравнения (2.36)]

$$\Lambda = (\text{grad } u, \text{grad } v) - Fuv, \quad (4)$$

т. е. форма  $\Lambda$  симметрична относительно  $u$ ,  $v$ .

б) Если  $L$  имеет общий вид (2.17), то также справедливо уравнение (1), где, однако,

$$\begin{aligned} \Lambda(u, v \dots) = & A \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + B \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + C \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \\ & + u \left( \frac{\partial Dv}{\partial x} + \frac{\partial Ev}{\partial y} - Fv \right) + \\ & + v \left( \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$X = v \left( A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} + Du \right), \quad Y = v \left( B \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial y} + Eu \right). \quad (6)$$

Если  $L$  является самосопряженным выражением, то вследствие условий самосопряженности (2.36) выражение  $\Lambda(u, v, \dots)$  принимает более простой вид:

$$\Lambda = A \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + B \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + C \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial Duv}{\partial x} + \frac{\partial Euv}{\partial y} - Fuv,$$

т. е. также становится симметричной формой относительно  $u$  и  $v$ . Последнее выражение можно упростить дальше, перенося члены

$$\frac{\partial Duv}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial Euv}{\partial y}$$

с обратным знаком к  $X$ ,  $Y$  в правой части формулы (1). Таким образом, получаем

$$\Lambda = A \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + B \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + C \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} - Fuv, \quad (7)$$

$$X = v \left( A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad Y = v \left( B \frac{\partial u}{\partial x} + C \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (8)$$

Если теперь проинтегрировать равенство (1) по области  $S$  с граничной кривой  $C$ , то получаем в наиболее общем виде упоминаемую в задаче вторую форму теоремы Грина:

$$\begin{aligned} & \int vL(u) d\tau + \int \Lambda(u, v, \dots) d\tau = \\ & = \int [X \cos(n, x) + Y \cos(n, y)] ds. \end{aligned} \quad (9)$$

в) Для того чтобы проверить, является ли единственным полученное решение граничной задачи, поставленной для дифференциального уравнения  $L(u)=0$ , мы поступаем точно так же, как и в случае уравнения  $\Delta u=0$ .

Предполагая, что при заданных граничных значениях функции  $u$  на граничной кривой  $C$  имеются различные решения  $u_1, u_2$ , положим в формуле (9)

$$u = v = u_1 - u_2.$$

Тогда первый член левой части формулы (9) обращается в нуль (из уравнений  $L(u_1)=0$  и  $L(u_2)=0$  следует в силу линейности  $L$  также и  $L(u)=0$ ); аналогично обращается в нуль правая часть формулы (9) [из равенства  $u_1 = u_2$  на  $C$  следует, что для всех элементов  $ds$  кривой  $C$  имеет место равенство  $v=0$  и тем самым согласно формуле (6) также  $X=Y=0$ ]. Формула (9) принимает при этом вид

$$\int \Delta(u, u, \dots) d\sigma = 0. \quad (10)$$

Принимая во внимание указанное в условии задачи требование *самосопряженности* и введя сокращенные обозначения  $\xi = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\eta = \frac{\partial u}{\partial y}$ , получаем

$$\Delta(u, u, \dots) = \begin{cases} \xi^2 + \eta^2 - Fu^2 & \text{в случае равенства (4),} \\ A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2 - Fu^2 & \text{в случае} \end{cases} \quad (11)$$

равенства (7).

Первое из уравнений (11) ведет к противоречию с уравнением (10), если  $F(x, y)$  в  $S$  всюду *отрицательно*; аналогично второе из уравнений (11) также противоречит уравнению (10), если квадратичная форма  $A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2$  является *определенной*, а  $F(x, y)$  всюду имеет *противоположный* ей знак. И в том и в другом случае получаем из уравнения (10)

$$u = 0 \text{ и поэтому } u_1 = u_2. \quad (12)$$

*Единственность решения граничной задачи, таким образом, доказана.*

Эта единственность эквивалентна *отсутствию собственных функций* (см. гл. V). В частности, для самосопряженного дифференциального уравнения  $\Delta u + Fu = 0$ ,

приведенного к нормальному виду, в котором  $F = \pm k^2$  — постоянное число, получается следующий результат. Дифференциальное уравнение

$$\Delta u - k^2 u = 0 \quad (13)$$

не имеет собственных функций в противоположность уравнению колебаний мембраны

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (13a)$$

для которой, напротив, собственные функции представляют наибольший интерес.

То обстоятельство, что в случае самосопряженного дифференциального уравнения эллиптического типа *вопрос единственности для граничной задачи или вопрос о возможности собственных функций* может быть решен в общем виде на основании одной только теоремы Грина (во второй форме), объясняет особое положение этих дифференциальных уравнений в математической физике.

Для того чтобы подчеркнуть физическое значение уравнения (13), заметим, что это уравнение в ядерной физике играет такую же роль, какую в электронной физике играет уравнение потенциала  $\Delta u = 0$ .

**Задача II.3.** Из условий «а», «б», «в» задачи легко находим

$$\begin{cases} \text{для } 0 < x < \xi \dots G_- = -\left(1 - \frac{\xi}{l}\right)x, \\ \text{для } \xi < x < l \dots G_+ = -\left(1 - \frac{x}{l}\right)\xi. \end{cases} \quad (1)$$

С другой стороны, решением поставленной там «граничной задачи» является, очевидно,

$$u = u_0 + (u_l - u_0) \frac{x}{l}. \quad (2)$$

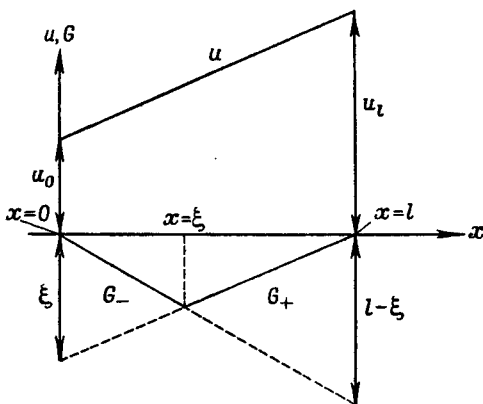
Фиг. 35 изображает кусочно-линейную функцию  $G$  и линейную функцию  $u$ . Можно убедиться, что формула Грина (2.42), перенесенная на одномерный случай, имеет вид

$$u_\xi = u_l \left( \frac{\partial G_+}{\partial x} \right)_l - u_0 \left( \frac{\partial G_-}{\partial x} \right)_0 \quad (3)$$

и совпадает с формулой (2), если использовать значения  $G_{\pm}$  из формул (1).

**Задача II.4.** Так как согласно условию задачи дана граничная функция  $v = v_0(t)$  при  $x = 0$  и при  $t > 0$ , то искомая функция  $G$  должна удовлетворять условию

$$G = 0 \text{ для } x = 0. \quad (1)$$



Фиг. 35. Поведение функции Грина  $G$  с источником в точке  $x = \xi$ , а также поведение гармонической функции  $u$  с граничными значениями  $u_0, u_l$ . На фигуре, кроме того, показан элементарный способ построения ординаты функции  $G$  в точке  $x = \xi$  (пунктиром показаны продолжения сторон графика  $G$ ).

Ее получают из главного решения  $V(x, t; \xi, \tau)$  [см. уравнение (2.69)] с помощью отражения относительно прямой  $x = 0$  (см. также § 13)

$$\begin{aligned} G &= V(x, t; \xi, \tau) - V(x, t; -\xi, \tau) = \\ &= [4\pi k(\tau - t)]^{-1/2} \left\{ \exp \left[ \frac{-(x - \xi)^2}{4k(\tau - t)} \right] - \exp \left[ \frac{-(x + \xi)^2}{4k(\tau - t)} \right] \right\}, \end{aligned}$$

откуда для  $x = 0$  получаем

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}} [k(\tau - t)]^{-3/2} \exp \left[ \frac{-\xi^2}{4k(\tau - t)} \right]. \quad (2)$$



Это значение следует подставить в формулу (2.71) вместо  $\frac{\partial V}{\partial x}$ , которая в нашем случае упрощается следующим образом. Справа нужно вычеркнуть первый член, так как согласно уравнению (4) условия задачи  $v=0$  для  $t=0$ . Во втором члене выпадает слагаемое, соответствующее значению  $x_1=\infty$ , так что остается только слагаемое, соответствующее значению  $x_0=0$ , которое, согласно формуле (2.71), следует взять со знаком минус; наконец и в этом последнем члене выпадает в силу условия (1) слагаемое, умножаемое на  $V$ . Таким образом, вследствие уравнения (2) условия задачи получаем

$$v(\xi, \tau) = \frac{\xi}{2V\pi k} \int_0^\tau v_0(t) \exp\left[\frac{-\xi^2}{4k(\tau-t)}\right] \frac{dt}{(\tau-t)^{3/2}}. \quad (3)$$

Если подставить вместо  $t$  в качестве переменной интегрирования  $p = \xi/\sqrt{4k(\tau-t)}$ , то получим формулу

$$v(\xi, \tau) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\xi/\sqrt{4k\tau}}^\infty v_0\left(\tau - \frac{\xi^2}{4kp^2}\right) e^{-p^2} dp, \quad (4)$$

которая дает окончательное решение задачи.

Для того чтобы исследовать формулу (4), произведем разложение в степенной ряд

$$v_0\left(\tau - \frac{\xi^2}{4kp^2}\right) = v_0(\tau) - \frac{v'_0(\tau)}{1!} \frac{\xi^2}{4kp^2} + \frac{v''_0(\tau)}{2!} \frac{\xi^4}{(4kp^2)^2} - \dots \quad (5)$$

Если еще обозначить  $\xi, \tau$  через  $x, t$ , то получаем из формулы (4)

$$v_0(x, t) = v_0(t) I_0(z) - \frac{x^2 v'_0(t)}{4k \cdot 1!} I_1(z) + \frac{x^4 v''_0(t)}{16k^2 \cdot 2!} I_2(z) - \dots, \quad (6)$$

где введены сокращенные обозначения

$$z = \frac{x}{\sqrt{4kt}}, \quad I_0(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-p^2} dp, \quad (7)$$

$$I_n(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-p^2} \frac{dp}{p^{2n}}.$$

Интеграл  $I_0(z)$ , по существу, совпадает с хорошо известным и часто табулируемым «интегралом ошибок». Для него справедливы соотношения

$$I_0(0) = 1, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} I_0(z) \approx \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi z}}. \quad (8)$$

Соответственно получаем для  $I_n(z)$

$$\lim_{z \rightarrow 0} I_n(z) z^{2n} \rightarrow 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} I_n(z) z^{2n} \approx \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi z}}. \quad (8a)$$

Формула (6) является разложением, пригодным для  $z < 1$ . Для  $z \gg 1$  имеем

$$v(x, t) \approx \frac{e^{-z^2}}{z} \rightarrow 0. \quad (9a)$$

Переход между этими двумя предельными законами имеет место примерно при  $z = 1$ , т. е. при

$$x \approx \sqrt{4kt}. \quad (9b)$$

Произведенное здесь исследование пластинчатого потока является полезной подготовкой к новейшим исследованиям проблемы турбулентности (см. т. II, § 32).

**Задача III.1.** Согласно формуле (3.1) положим

$$u(x, t) = \int_0^\infty [f(\xi) U(x, \xi) + f(-\xi) U(x, -\xi)] d\xi, \quad (1)$$

где  $f(\xi)$  задано,  $f(-\xi)$  следует определить. Для  $x = 0$  имеем

$$(4\pi kt)^{1/2} u(0, t) = \int_0^\infty [f(\xi) + f(-\xi) e^{-\frac{\xi^2}{4kt}}] d\xi, \quad (2)$$

$$(4\pi kt)^{1/2} \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)_{x=0} =$$

$$= - \int_0^\infty [f(\xi) - f(-\xi)] \frac{d}{d\xi} e^{-\frac{\xi^2}{4kt}} d\xi. \quad (3)$$

Преобразуем последний интеграл с помощью интегрирования по частям, предполагая, что  $f(-\xi)$  при  $\xi=0$  непрерывно переходит в  $f(+\xi)$ , т. е. считая, что

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} f(-\xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0} f(+\xi) = f_0; \quad (4)$$

получающийся при интегрировании по частям член, свободный от интеграла, обращается в нуль, и в правой части формулы (3) остается только выражение

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{d\xi} [f(\xi) - f(-\xi)] e^{-\frac{\xi^2}{4kt}} d\xi. \quad (4a)$$

Поставленное в задаче для  $x=0$  условие  $\frac{\partial u}{\partial n} + hu = 0$  выполняется, если ему удовлетворяет соответствующая линейная комбинация подинтегральных выражений в формулах (2) и (4a). Принимая во внимание, что у нас  $\frac{\partial}{\partial n}$  означает то же самое, что  $-\frac{\partial}{\partial x}$ , мы получаем поэтому для функции  $f(-\xi)$  следующее дифференциальное уравнение:

$$\left(\frac{d}{d\xi} + h\right)f(-\xi) = X, \quad (5)$$

где

$$X = \left(\frac{d}{d\xi} - h\right)f(\xi).$$

Левая часть дифференциального уравнения (5) после умножения на  $\exp(h\xi)$  становится полной производной. Интегрируя, находим после несложного преобразования

$$f(-\xi) = f(\xi) - 2he^{-h\xi} \int_0^{\xi} e^{h\eta} f(\eta) d\eta. \quad (6)$$

Это выражение для  $f(-\xi)$  следует, наконец, подставить в формулу (1). Можно убедиться, что интегральное представление функции  $G$  по формуле (3.15) получается, если в найденной таким образом формуле (1) положить функцию  $f$  равной  $\delta$ -функции.

**Задача III.2.** В данном случае нормирующий интеграл (1.69a) должен быть получен из формулы Грина

(3.42) с помощью предельного перехода  $\lambda_m \rightarrow \lambda_n$ . Так как при этом он принимает вид  $0/0$ , то следует применить правило Лопиталья, дифференцируя сначала числитель и знаменатель по  $\lambda_m$  и затем полагая  $\lambda_m = \lambda_n$ . Получаем

$$\frac{\frac{du_n}{d\lambda_n} \frac{du_n}{dx} - u_n \frac{d}{d\lambda_n} \frac{du_n}{dx} \Big|_{x=0}}{2k_n \frac{dk_n}{d\lambda_n}}.$$

Числитель достаточно подсчитать для  $x=l$ , так как для  $x=0$  он обращается в нуль уже до перехода к пределу. Таким образом, согласно формулам (3.44) и (3.44a) находим

$$\int_0^l u_n^2 dx = \frac{l}{2} \left( \cos^2 \lambda_n \pi + \sin^2 \lambda_n \pi - \frac{1}{\lambda_n \pi} \sin \lambda_n \pi \cos \lambda_n \pi \right),$$

что совпадает с формулой (4.69a), если в соответствии с проведенным там подсчетом положить наше  $l$  равным  $\pi$ .

Мы проделали это вычисление для того, чтобы оно могло быть использовано как образец в дальнейших случаях, когда нормирующий интеграл нельзя вычислить элементарно.

**Задача III.3.** В стационарном случае уравнение (3.47) переходит в уравнение

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \lambda^2 u, \quad \lambda = \sqrt{\frac{2\hbar}{b}}. \quad (1)$$

Отсюда следует, что общее решение имеет вид

$$u = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}.$$

$A$  и  $B$  подсчитываются с помощью значений

$$u = u_1 \text{ для } x=0, \quad u = u_3 \text{ для } x=l,$$

откуда

$$u = \frac{u_3 \operatorname{sh} \lambda x + u_1 \operatorname{sh} \lambda (l-x)}{\operatorname{sh} \lambda l}, \quad (2)$$

а для  $x=l/2$

$$u_2 = \frac{(u_1 + u_3) \operatorname{sh} \lambda l/2}{\operatorname{sh} \lambda l} = \frac{u_1 + u_3}{2 \operatorname{ch} \lambda l/2};$$

таким образом, для сокращенно обозначенной в задаче величины  $q$  имеем выражение

$$q = \operatorname{ch} \frac{\lambda l}{2}. \quad (3)$$

Отсюда получаем квадратное уравнение для  $\exp(\lambda l/2)$ , из которого получаем

$$\frac{\lambda l}{2} = \ln(q + \sqrt{q^2 - 1}). \quad (4)$$

В силу формул (1) и (4) величина  $h$  также выражается через  $q$ . Согласно формуле (3.5)  $h$  означает отношение внешней теплопроводности (в прежнем обозначении  $4aT_0^*$ ) и внутренней теплопроводности  $\kappa$ . Для  $q=1$  из формулы (4) получается  $h=0$ , как это и должно быть по самой постановке задачи.

**Задача III.4.** В стационарном состоянии количество энергии, отдаваемой элементом стержня (высота  $dx$ , поперечное сечение  $q$ ) в силу теплопроводности, должно равняться джоулеву теплу, выделяющемуся в этом элементе. Если выразить силу тока  $i$  через разность потенциалов  $V$ , то получим дифференциальное уравнение стационарного состояния:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -a, \quad a = \frac{V^2}{l^2} \frac{\sigma}{\kappa}.$$

Интегрирование с учетом граничных условий на концах стержня дает в качестве закона распределения параболу, симметричную относительно середины. Из ее максимума  $U$  определяется  $a$ , и тем самым отношение

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{1}{8} \frac{V^2}{U}.$$

Измерением  $V$  и  $U$  можно, таким образом, проверить закон, найденный опытным путем Видеманом и Францем, который согласно электронной теории металлов гласит:

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{k}{l} \right)^2 T,$$

где  $T$  — абсолютная температура,  $k$  — постоянная Больцмана,  $e$  — заряд электрона.

**Задача IV.1.** а) В случае целого  $n$  в равенстве (4.18)  $\exp(i\rho \cos w)$  можно прямо разложить в известный степенной ряд. В качестве коэффициентов при  $\rho^k$  получаем тогда

$$a_k = \frac{e^{i(k-n)\pi/2}}{2\pi k!2k} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{iw} + e^{-iw})^k e^{inw} dw. \quad (1)$$

Если для подинтегрального выражения применить формулу бинома, то при интегрировании останется только один член и то лишь при четном  $k - n \geq 0$ . Результат совпадает с формулой (4.34).

б) При нецелом  $n$  ( $\rho$  предполагается вещественным) в формуле (4.14) следует положить

$$t = \frac{\rho}{2} e^{-i(\omega - 3\pi/2)}, \quad d\omega = i \frac{dt}{t}. \quad (2)$$

Предположим, что путь интегрирования  $W_0$  в интеграле (4.14) представляет собой прямоугольную ломаную линию. При преобразовании (2) путь  $W_0$  преобразуется в петлю фиг. 37, а, которая идет от  $+\infty$ , обегает нулевую точку в направлении часовой стрелки и возвращается к  $+\infty$  в соответствии со схемой:

$$w = i\infty - \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2}, \quad 0, \quad +\frac{\pi}{2}, \quad \pi, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad i\infty + \frac{3\pi}{2}$$

$$t = +\infty, \quad e^{2\pi i} \frac{\rho}{2}, \quad e^{3\pi i/2} \frac{\rho}{2}, \quad e^{i\pi} \frac{\rho}{2}, \quad e^{i\pi/2} \frac{\rho}{2}, \quad \frac{\rho}{2}, \quad +\infty.$$

Формула (4.14) принимает при этом вид

$$I_n(\rho) = -\frac{e^{i\pi n}}{2\pi i} \left(\frac{\rho}{2}\right)^n \int_S e^{-t + \frac{\rho^2}{4t}} t^{-n-1} dt. \quad (3)$$

Разлагая теперь  $\exp\left(\frac{\rho^2}{4t}\right)$ , получим еще раз ряд (4.34), если использовать при этом определение  $\Gamma$ -функции,

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = \frac{e^{i\pi(x+1)}}{2\pi i} \int_S e^{-t} t^{-x-1} dt, \quad (4)$$

справедливое всюду.

В том, что формула (4) при целом  $x$  совпадает с элементарным определением  $\Gamma(x+1) = x!$ , легко убедиться,

вычисляя в этом случае интеграл (4) с помощью теории вычетов и образуя вычет при  $t = 0$ .

**Задача IV.2.** В качестве дополнения к исследованию вещественной части  $i\rho \cos w$  в § 19 (стр. 124—125) вычислим для комплексного  $\rho = |\rho| e^{i\theta}$  выражение

$$X = \operatorname{Re} (i\rho \cos w) = \frac{|\rho|}{2} [\sin(p - \Theta) e^q - \sin(p + \Theta) e^{-q}]. \quad (1)$$

Для того чтобы выражение  $X$  в бесконечно удаленной части верхней полуплоскости  $w$  ( $q \gg 1$ ) было отрицательным, должно выполняться неравенство

$$\sin(p - \Theta) < 0. \quad (2)$$

Заштрихованная на фиг. 18 и 19 полоса

$$-\pi < p < 0$$

при возрастании (или убывании) угла  $\Theta$ , начиная от значения  $\Theta = 0$ , переходит при этом в полосу

$$-\pi + \Theta < p < \Theta,$$

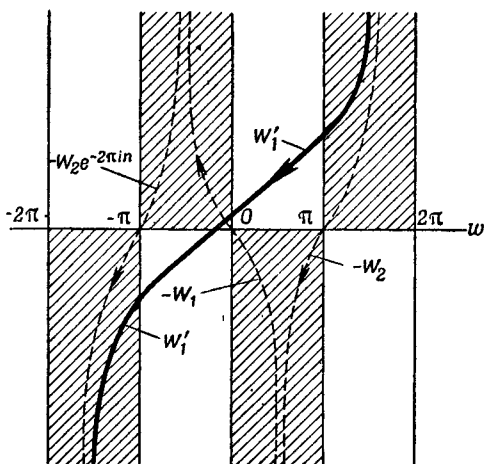
т. е. сдвигается в фиг. 18 направо (или налево). Напротив, в нижней полуплоскости согласно формуле (1) вместо условия (2) получаем следующее неравенство:

$$\sin(p + \Theta) > 0. \quad (3)$$

Для  $0 < \Theta < \pi$  (верхняя полуплоскость  $\rho$ ) заштрихованные области верхней и нижней полуплоскостей граничат друг с другом на конечном отрезке вещественной оси, так что путь  $W_1$  может быть целиком проведен в заштрихованной области. Отсюда уже следует [без помощи асимптотической формулы (4.55)], что при стремлении  $\rho$  к бесконечности в верхней полуплоскости функция  $H^1$  обращается в пределе в нуль. Вследствие этого перемещения заштрихованной области видно также, что путь  $W_1$  при  $0 > \Theta > -\pi$  (нижняя полуплоскость  $\rho$ ) обязательно идет в незаштрихованной области, так что тогда функция  $H^1$  в пределе при  $\rho \rightarrow \infty$  становится бесконечной. Обратное имеет место для  $W_2$  и  $H^2$ . Фиг. 36а поясняет действие этого смещения на путь  $W_1$  при полном обходе  $\rho$  вокруг нуля. Начало пути  $W_1$  передвинулось при этом

на  $2\pi$ , а конец на  $-2\pi$ ; путь  $W_1$  деформировался в путь  $W'_1$ . Деформированный путь  $W'_1$  можно разложить на три частичных пути, имеющих характер первоначальных путей  $W_1$  и  $W_2$ , что можно записать в виде символического равенства

$$W'_1 = -W_2 - W_1 - W_2 e^{-2\pi i n}. \quad (4)$$



Фиг. 36а. Деформация принадлежащего функции  $H_n^1$  пути интегрирования  $W_1$  в путь  $W'_1$  в результате полного обхода вокруг нуля.

Здесь  $-W_1$  обозначает среднюю из трех частей пути  $W'_1$ , указанных пунктиром на фигуре, и отличается от первоначального пути  $W_1$  только направлением обхода;  $-W_2$  обозначает часть пути  $W'_1$ , лежащую справа от  $W_1$ ; часть пути  $W'_1$ , лежащая слева от  $W_1$ , получается из  $W_2$ , если заменить  $w$  на  $w - 2\pi$ , причем интеграл умножается после такой замены на множитель  $e^{-2\pi i n}$ , обусловленный множителем  $e^{inw}$  подинтегрального выражения. Из схемы (4) вытекает следующая формула обхода:

$$H_n^1(\rho e^{2\pi i}) = -H_n^1(\rho) - H_n^2(\rho)(1 + e^{-2\pi i n}). \quad (5)$$

При целом  $n$  отсюда следует

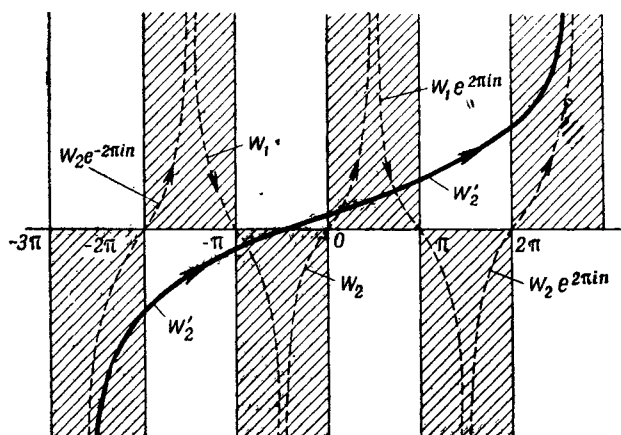
$$H_n^1(\rho e^{2\pi i}) = -H_n^1(\rho) - 2H_n^2(\rho), \quad (6)$$



Вместо чего можно также записать

$$H_n^1(\rho e^{2\pi i}) - H_n^1(\rho) = -2[H_n^1(\rho) + H_n^2(\rho)] = -4I_n(\rho). \quad (6a)$$

Это изменение значения  $H_n^1$  на величину  $-4I_n$  соответствует, если учесть соотношение  $H^1 = I + iN$ , изменению  $\ln \rho$  на  $2\pi i$  в формуле (4.47) для функции  $N$ .



Фиг. 366. Деформация принадлежащего функции  $H_n^2$  пути интегрирования  $W_2$  в путь  $W'_2$  в результате полного обхода вокруг нуля.

Фиг. 366 изображает путь  $W'_2$  для  $H^2$ , получающийся из пути  $W_2$  при полном обходе  $\rho$  в положительном направлении вокруг точки  $\rho = 0$ . Путь  $W'_2$  может быть разложен на пять частичных путей типа  $W_1$ ,  $W_2$ , что можно представить с помощью символического равенства

$$W'_2 = W_2 + W_1 + W_1 e^{2\pi i n} + W_2 e^{2\pi i n} + W_2 e^{+2\pi i n}. \quad (7)$$

$W_2$  является средней, центральной из пяти составных частей;  $W_1$  примыкает к  $W_2$  слева,  $W_1 e^{2\pi i n}$  — справа и т. д. Вместо формулы (5) теперь получаем

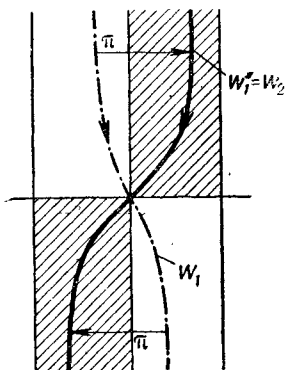
$$H_n^2(\rho e^{2\pi i}) = H_n^2(\rho) (1 + e^{-2\pi i n} + e^{+2\pi i n}) + H_n^1(\rho) (1 + e^{2\pi i n}). \quad (8)$$

Для целых  $n$  отсюда следует

$$H_n^2(\rho e^{2\pi i}) = 3H_n^2(\rho) + 2H_n^1(\rho), \quad (9)$$

$$H_n^2(\rho e^{2\pi i}) - H_n^2(\rho) = 2[H_n^1(\rho) + H_n^2(\rho)] = 4I_n(\rho). \quad (9a)$$

Изменение значения  $H_n^2(\rho)$  на величину (9a), учитывая соотношение  $H^2 = I - iN$ , также соответствует изменению  $\ln \rho$  на  $2\pi i$  в формуле (4.47). Формулы (5) и (8) являются так называемыми *формулами обхода* для функций Ханкеля при изменении угла  $\Delta\theta = 2\pi$ . Они соответствуют найденным уже Гауссом «*relationes inter contiguas*» для гипергеометрических функций (§ 24). Аналогично тому как формулы (6a), (9a) при целом  $n$  получаются из формулы (4.47), общие соотношения (5) и (8) можно получить из формул (4.31) и (4.30).



Фиг. 36в. К формуле полуобхода для  $H_0^1$ .

Формулы обхода могут быть легко обобщены от случая полных обходов  $\Delta\theta = 2\pi\nu$  ( $\nu$  — целое число) на случай полуобходов  $\Delta\theta = \pi\nu$ . Имея в виду дальнейшие применения в § 32, выведем уже здесь формулу полуобхода, получающуюся при  $\nu = 1$  и  $n = 0$ . Эта формула имеет следующий вид:

$$H_0^1(\rho e^{i\pi}) = -H_0^2(\rho). \quad (10)$$

Для доказательства достаточно обратиться к фиг. 36в. При вещественном и положительном  $\rho$  путь  $W_1$  (отмеченный на фигуре пунктиром) проходил из полосы  $-\pi < \rho < 0$  в полосу  $0 < \rho < +\pi$ , в настоящем случае при  $\rho = |\rho|e^{i\pi}$  путь  $W_1$  передвинулся в верхней части на  $+\pi$ , в нижней на  $-\pi$ , как это указано на фигуре стрелками. Но получающийся таким образом путь  $W_1'$  совпадает с путем  $W_2$  для  $H^2$ . Это как раз и утверждает формула (10).

Аналогичное формуле (10) соотношение получается, если мы заменим в нем  $\rho$  на  $\rho e^{-i\pi}$ , а именно

$$H_0^2(\rho e^{-i\pi}) = -H_0^1(\rho).$$

Принимая во внимание стоящий под знаком интеграла при произвольном  $n$  множитель  $e^{inw}$ , нетрудно обобщить формулу (10), вместо которой получаем

$$H_n^1(\rho e^{i\pi}) = -e^{-n\pi i} H_n^2(\rho) \quad (11)$$

или (заменяя  $\rho$  на  $\rho e^{-i\pi}$ )

$$H_n^2(\rho e^{-i\pi}) = -e^{+n\pi i} H_n^1(\rho). \quad (11a)$$

Эти формулы полуобхода также можно непосредственно получить из формул (4.30) и (4.31), если принять во внимание соотношения

$$I_n(\rho e^{i\pi\nu}) = e^{i\pi n\nu} I_n(\rho), \quad I_{-n}(\rho e^{i\pi\nu}) = e^{-i\pi n\nu} I_{-n}(\rho), \quad (12)$$

являющиеся следствиями из формулы (4.34).

Эти соотношения упрощаются очень сильно для  $\psi_n(\rho)$  и  $\zeta_n(\rho)$ , которые получаются из соответствующих функций Ханкеля и Бесселя с индексом  $n + \frac{1}{2}$  при целом  $n$  умножением на  $\sqrt{2\rho/\pi}$ ; для них имеем

$$\zeta_n^{1,2}(\rho e^{\pm i\pi}) = (-1)^{n+1} \zeta_n^{2,1}(\rho), \quad \psi_n(\rho e^{\pm i\pi}) = (-1)^{n+1} \psi_n(\rho). \quad (13)$$

**Задача IV.3.** Положим в формуле (4.22) для  $H_0^1(\rho)$

$$x = i\rho \cos w, \quad dw = \frac{i dx}{\sqrt{x^2 + \rho^2}}.$$

Предполагая, что путь  $W_1$  является прямоугольной ломаной линией, получим, что этот путь преобразуется в путь  $W'_1$  на плоскости  $x$  согласно следующей схеме:

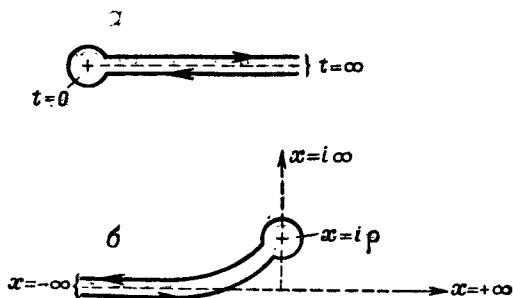
$$\begin{aligned} w &= -\frac{\pi}{2} + i\infty, & -\frac{\pi}{2}, & 0, & +\frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{2} + i\infty; \\ x &= -\infty, & 0, & i\rho, & 0, & -\infty. \end{aligned}$$

Мы получаем петлеобразный путь  $W'_1$  (фиг. 37, б), начинающийся в точке  $x = -\infty$  вещественной оси  $x$  и возвращающийся туда после обхода вокруг точки  $x = i\rho$ ; направление обхода можно определить с помощью небольшого параллельного сдвига вещественной части пути  $W_1$ . Согласно формулам (4.22) в результате этого преобразования получим

$$H_0^1(\rho) = \frac{2i}{\pi} \int_{-\infty}^{+i\rho} \frac{e^x dx}{\sqrt{x^2 + \rho^2}}. \quad (1)$$

Имеющийся здесь путь интегрирования, пробегаемый в одну сторону, возникает в результате соединения обеих ветвей пути (фиг. 37,б), причем первоначально отрицательный знак обратной ветви после полного обхода вокруг точки разветвления  $x = i\rho$  изменился на положительный<sup>1)</sup>. Интегрирование по частям по  $x$  дает

$$H_0^1(\rho) = \frac{2i}{\pi} [e^x \ln(x + \sqrt{x^2 + \rho^2})]_{x=i\rho} - \frac{2i}{\pi} \int_{-\infty}^{i\rho} e^x \ln(x + \sqrt{x^2 + \rho^2}) dx. \quad (2)$$



Фиг. 37.а—петлеобразный путь интегрирования, принадлежащий функции  $\frac{1}{\Gamma(x+1)}$ ; б—петлеобразный путь интегрирования, принадлежащий функции  $H_0^1(\rho)$  при малых  $\rho$ .

Подставляя  $x = i\rho$  в первый член и переходя в обоих членах к пределу при  $\rho \rightarrow 0$ , получаем

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} H_0^1(\rho) = \frac{2i}{\pi} \ln i\rho - \frac{2i}{\pi} \int_{-\infty}^0 e^x \ln 2x dx. \quad (3)$$

<sup>1)</sup> Автор имеет в виду, что в интеграле, взятом вдоль обратной ветви петлеобразного пути  $W_1$  от  $x = i\rho$  до  $x = -\infty$ , отрицательный знак направления интегрирования компенсируется отрицательным знаком подинтегральной функции, обусловленным полным обходом вокруг точки ветвления. (Прим. ред.)

С помощью подстановки  $x = -t$  последний интеграл принимает вид

$$\ln(-2) + \int_0^{\infty} e^{-t} \ln t \, dt = \ln(-2) - C = \ln\left(\frac{-2}{\gamma}\right). \quad (4)$$

$C$  и  $\gamma$  совпадают с величинами, определенными в формулах (4.44) и (4.44а) (подсчет на основании интеграла Лапласа для  $\Gamma$ -функции). Объединив формулы (4) и (3), получаем, наконец, из уравнения (1)

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} H_0^1(\rho) = \frac{2i}{\pi} \left( \ln \frac{\gamma \rho}{2} - \frac{i\pi}{2} \right) = \frac{2i}{\pi} \ln \frac{\gamma \rho}{2} + 1. \quad (5)$$

Вследствие соотношений

$$H_0 = I_0 + iN_0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} H_0 = 1 + i \lim_{\rho \rightarrow 0} N_0$$

формула (5) совпадает с формулой (4.48) для  $N$ .

**Задача IV.4.** а) Пренебрегая в дифференциальном уравнении (4.11) членами, содержащими множитель  $1/\rho$ , сразу же получим  $H_n^1 = Ae^{i\rho}$  ( $A$  — постоянная интегрирования; другое решение вида  $Ae^{-i\rho}$  соответствует функции  $H_n^2$ ).

б) Будем рассматривать  $A$  не как постоянную, а как медленно изменяющуюся функцию от  $\rho$ , так что можно пренебречь величинами  $A''$ ,  $\frac{A'}{\rho}$  и  $\frac{A}{\rho^2}$ . Это дает дифференциальное уравнение для функции  $A(\rho)$ , из которого следует  $A = B/\sqrt{\rho}$ . Что касается нормирующего множителя  $B$ , то его, конечно, нельзя определить этим путем.

**Задача IV.5.** а) Указанные в задаче коэффициенты  $C_{in}$  и  $A_{mn}$  в силу формул (1.12), (4.136) и (4.153) имеют вид

$$C_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\vartheta_0, \varphi_0) e^{-im\varphi_0} d\varphi_0, \quad (1)$$

$$A_{mn} = \frac{1}{N_n^m} \int_{-\pi}^{+\pi} C_m(\vartheta_0) P_n^m(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0 \, d\vartheta_0 =$$

$$= \frac{n + \frac{1}{2}}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{\pi} \sin \vartheta_0 \, d\vartheta_0 \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi_0 f(\vartheta_0, \varphi_0) P_n^m(\cos \vartheta_0) e^{-im\varphi_0}. \quad (2)$$

б) Из указанной в задаче схемы для  $f(\vartheta, \varphi)$  следует после умножения  $f(\vartheta_0, \varphi_0)$  на

$$Y_{\nu\mu} = P_{\nu}^{\mu}(\cos \vartheta_0) e^{-i\mu\varphi_0}$$

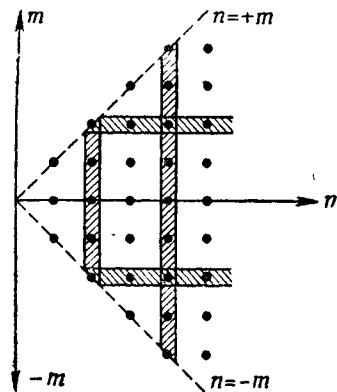
и интегрирования по  $\varphi_0$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(\vartheta_0, \varphi_0) Y_{\nu\mu} d\varphi_0 = 2\pi \sum_n A_{n\mu} P_n^{\mu}(\cos \vartheta_0);$$

отсюда, интегрируя по  $\sin \vartheta_0 d\vartheta_0$  и принимая во внимание формулы (4.136) и (4.153), имеем

$$\iint f(\vartheta_0, \varphi_0) Y_{\nu\mu} d\sigma_0 = 2\pi N_{\nu}^{\mu} A_{\nu\mu}, \quad (3)$$

что при измененном обозначении ( $\nu, \mu$  вместо  $n, m$ ) совпадает с выражением (2) для  $A_{mn}$  с точностью до порядка суммирования (фиг. 38):



Фиг. 38. Двойная сумма в числовой решетке  $n, m$ ; в случае «а» суммирование производится по горизонтальным, а в случае «б» — по вертикальным полосам.

в случае «а» горизонтальные полосы  $|m| \leq n < \infty$  суммируются в вертикальном направлении; в случае «б» вертикальные полосы  $-n < m \leq +n$  суммируются в горизонтальном направлении. В обоих случаях область, полученная суммированием, ограничена прямыми  $n \pm m$ ; разница является, следовательно, только кажущейся.

**Задача IV.6.** На фиг. 39 изображен клин с углом раствора в  $60^\circ$  из фиг. 17, симметрично расположенный относительно горизонтали, а также его пять повторных зеркальных изображений.

Центр инверсии  $C$  для удобства помещен на горизонтали, проходящей через вершину  $O$  клина, а окружность инверсии (заштрихованная на рисунке окружность  $K$ ) проходит через точку  $O$ . Так как бесконечно удаленная точка отображается на  $C$ , а точка

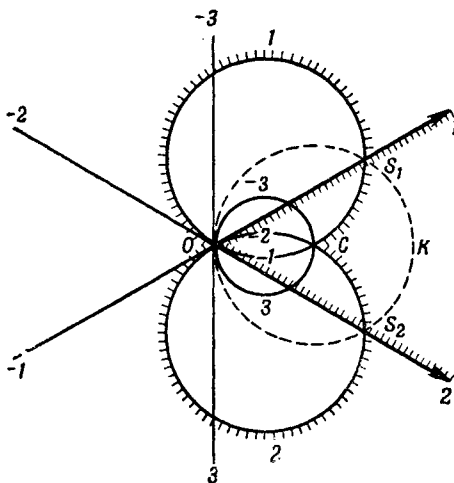
пересечения  $S_1$  окружности инверсии с прямой  $1$  переходит в себя, так же как и точка  $O$ , то положение окружности, в которую переходит прямая  $(1, -1)$ , определяется тремя точками  $O$ ,  $C$  и  $S_1$ . Обе части этой окружности, которые соответствуют полупрямым  $1$  и  $-1$ , обозначены на рисунке также через  $1$  и  $-1$ . То же самое справедливо для прямой  $(2, -2)$ , которая отображается на окружность, равную первой, но расположенную внизу и проходящую через точки  $O$ ,  $C$  и  $S_2$ . Прямая  $(3, -3)$  переходит в окружность с диаметром  $OC$ , верхняя и нижняя полуокружности которой соответствуют полупрямым  $-3$  и  $3$ .

Можно убедиться, что клин  $(1, 2)$  переходит во внешнюю область кругового двуугольника  $(CS_1IO2S_2C)$ ; последний, подобно клину на фиг. 17, выделен на рисунке штриховкой границы. Далее, на рисунке можно найти все отображения повторных зеркальных изображений клина; они все являются внутренними областями соответствующих круговых двуугольников (менисков), например клин  $(2, 3)$  отображается на мениск  $(CS_22O3C)$ , клин  $(-2, -1)$  отображается на узкую линзообразную область  $(C, -2, O, -1, C)$  расположенную в середине фиг. 39.

До сих пор мы рассматривали чертеж как *плоскую* фигуру, говоря о прямых, окружностях, круговых двуугольниках и т. д., Ничто, однако, не мешает нам толковать фигуру *трехмерно* и вместо прямых и окружностей говорить о плоскостях и сферах. Последние пересекаются пополам плоскостью чертежа. Исходный клин  $(1, 2)$  отображается тогда на внешнюю область обеих пересекающихся сфер, которые соответствуют, как указано выше, обоим окружностям  $(1, -1)$  и  $(2, -2)$ ; аналогично зеркальным изображениям клина соответствуют области между сферами  $1, 2, 3$ , взятыми попарно.

Подобно тому как функция Грина для клина получалась с помощью элементарной конструкции зеркальных отображений фиг. 17, в случае *уравнения потенциала* (и только в этом случае) мы находим функцию Грина, соответствующую круговой или шаровой области, строя «электрические отражения» заданного полюса относительно граничных окружностей или сфер  $1, 2, 3$  и снабжая их перемежающимися знаками. Ввиду симметрии нашей

задачи, которая особенно бросалась в глаза на фиг. 17, достаточно конечного числа электрических отражений (пять), чтобы удовлетворить граничному условию  $u=0$  на границе рассматриваемой области.

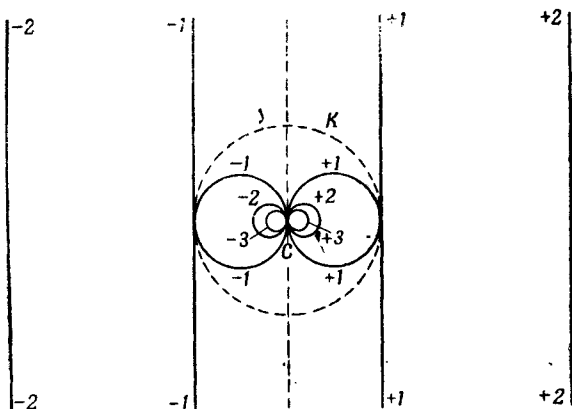


Фиг. 39. Клинь  $(1, 2)$  с углом раствора  $60^\circ$ . С помощью преобразования обратных радиусов клинь  $(1, 2)$  отображается на область  $(C, 1, 0, 2, C)$ , внешнюю по отношению к пересекающимся сферам  $1, -1$  и  $2, -2$ ; аналогично повторные зеркальные изображения  $(2, 3)$ ;  $(3, -1)$ ; ... клина  $(1, 2)$  отображаются на шаровые мениски.

**Задача IV. 7.а)** При выбранном центре инверсии  $C$ , на который отображаются бесконечно удаленные точки всех плоскостей  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ , и при сфере инверсии, отмеченной пунктиром на фиг. 40, плоскости  $\pm 1$  переходят в сферы  $+1$  и  $-1$ , касающиеся в точке  $C$ , диаметр которых равен радиусу  $a$  сферы инверсии. При этом внешняя область шаров соответствует внутренности пластинки, внутренность шаров — внешней области пластинки. Плоскости  $\pm 1$  отображаются на две сферы, которые также касаются друг друга в точке  $C$ , но диаметр которых равен  $a/3$ . Изображения плоскостей  $\pm 3$  являются двумя сферами, которые вновь лежат внутри шаров  $\pm 2$ , имеют



диаметр  $a/5$  и касаются в  $C$ . Полость между двумя смежными сферами этой бесконечной последовательности является отображением соответствующей пары зеркальных изображений пластинки.



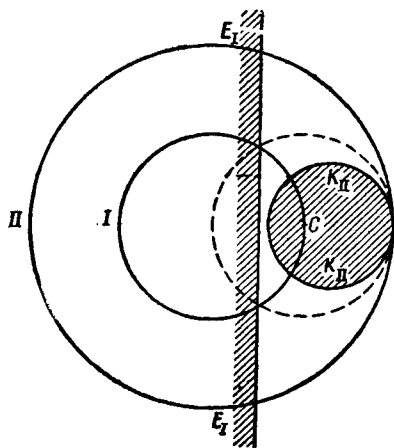
Фиг. 40. Отображение плоско-параллельной пластинки и ее повторных зеркальных изображений на систему шаров, взаимно касающихся в центре инверсии  $C$ .

Функцию Грина теории потенциала для внешности касающихся между собой сфер (например, сфер  $\pm 1$ , фиг. 40) можно получить из функции Грина плоско-параллельной пластинки с помощью инверсии. Каждое из бесконечного числа получающихся при этом изображений произвольно заданного полюса функции Грина лежит в соответствующей полости между двумя смежными сферами, предыдущей бесконечной последовательности сфер. Эта бесконечная последовательность изображений полюса сгущается в точке  $C$ .

б) Если  $a$  и  $2a$ —радиусы обеих concentрических сфер  $I$  и  $II$  (фиг. 41), то можно, например, положить радиус сферы инверсии равным  $a$  и поместить центр инверсии  $C$  на сфере  $I$ . Сфера  $I$  переходит при этом в плоскость  $E_I$ , сфера  $II$ —в сферу  $K_{II}$  радиуса  $2a/3$ , причем кратчайшее расстояние сферы  $K_{II}$  от плоскости  $E_I$  равно  $a/6$ .

Отсюда следует, что при этой инверсии плоскость  $E_I$  и сфера  $K_{II}$  отображаются на пару concentric сфер  $I$  и  $II$ .

В случае произвольного положения плоскости  $E$  относительно не пересекающей ее сферы  $K$  можно поступать следующим совершенно элементарным образом: из центра сферы  $K$  опускаем перпендикуляр  $L$  на плоскость  $E$ , проводим из его основания  $F$  касательные  $t$  к сфере  $K$  и описываем радиусом  $t$  из точки  $F$ , как из центра, вспомогательную сферу  $H$ . Если выбрать в качестве центра инверсии одну из точек пересечения  $S$  сферы  $H$  с прямой  $L$ , то после инверсии  $L$  остается прямой, а сфера  $H$  переходит в плоскость, ортогональную к прямой  $L$ , причем плоскость  $E$  и сфера  $K$  переходят в сферы, ортогональные к  $H$  и  $L$  и имеющие поэтому своим общим центром точку пересечения плоскости



Фиг. 41. Две concentric сферы  $I$  и  $II$  с помощью инверсии преобразуются в плоскость  $E_I$  и сферу  $K_{II}$  (плоскость  $E_I$  и сфера  $K_{II}$  выделены на фигуре штриховкой).

$H$  и прямой  $L$ , т. е. центр инверсии. Радиус инверсии остается при этом произвольным, он определяет только абсолютную величину радиусов обеих concentric сфер.

Вместо плоскости  $E$  и сферы  $K$  можно также рассматривать две непересекающиеся сферы  $K_1$  и  $K_2$  (см. последнее утверждение задачи). Для того чтобы преобразовать их в две concentric сферы, будем исходить из пучка сфер  $K_1 + \lambda K_2 = 0$ . Такой пучок сфер получается, например, если воспользоваться системой биполярных координат на плоскости комплексного переменного  $z$ :

$$\rho = \ln \frac{r_1}{r_2}, \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2,$$

где  $r_1 e^{i\varphi_1} = z - c$ ,  $r_2 e^{i\varphi_2} = z + c$ , причем  $c$  и  $-c$  — полюсы системы. Вращая систему окружностей  $\rho = \text{const}$  вокруг оси  $\varphi = 0$ , мы получим пучок сфер  $K_1 + \lambda K_2 = 0$ . Этот пучок содержит две сферы радиуса, равного нулю, именно оба полюса биполярной системы координат. Если сделать один из обоих полюсов центром инверсии, то все сферы пучка, в том числе  $K_1$  и  $K_2$ , отображаются на *концентрические* сферы.

**Задача IV.8.** Если  $u_1$  и  $u_2$  — два линейно независимых решения общего однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$L(u) = u'' + pu' + qu = 0$$

( $p$  и  $q$  — некоторые функции независимого переменного  $\rho$ ), то, полагая  $X = u_2 u_2' - u_2' u_1$  получаем

$$u_1 L(u_2) - u_2 L(u_1) = \frac{dX}{d\rho} + pX = 0,$$

откуда

$$X = Ce^{-\int p d\rho}, \quad C — \text{постоянная интегрирования.}$$

а) В случае дифференциального уравнения Бесселя (4.11)  $p = 1/\rho$ , откуда следует

$$X = Ce^{-\ln \rho} = \frac{C}{\rho}.$$

Если положить  $u_1 = H_n^1$ ,  $u_2 = H_n^2$ , то  $C$  определяется проще всего из асимптотических значений (4.55), (4.56). Тогда получаем

$$\frac{C}{\rho} = \frac{-4i}{\rho\pi}, \quad C = \frac{-4i}{\pi}.$$

В силу соотношения  $I_n = \frac{1}{2}(H_n^1 + H_n^2)$  выражение (I) условия задачи, если в нем под символом  $H$  понимать  $H'$ , становится равным половине  $X$ , следовательно

$$(I) = -\frac{2i}{\rho\pi}$$

или той же величине с обратным знаком, если под  $H$  понимать функцию  $H^2$ . Вычисление постоянной  $C$  было

бы несколько более сложным, если бы мы исходили из значения  $\rho = 0$  вместо  $\rho = \infty$ .

б) В дифференциальном уравнении (4.92а)  $p = 2/\rho$ , отсюда  $X = C/\rho^2$ . Если положить  $u_1 = \zeta_n^1$ ,  $u_2 = \zeta_n^2$ , то имеем согласно формуле (4.96) для  $\rho \rightarrow \infty$

$$\zeta_n^{1,2} = \frac{1}{\rho} e^{\pm i \left[ \rho - (n+1) \frac{\pi}{2} \right]} \quad X = -\frac{2i}{\rho^2}, \quad C = -2i.$$

Для выражения (II) получаем, таким образом, в зависимости от того, считаем ли мы в этом выражении  $\zeta_n(\rho) = \zeta_n^1(\rho)$  или же  $\zeta_n(\rho) = \zeta_n^2(\rho)$ ,

$$(II) = \mp \frac{i}{\rho^2}. \quad (11)$$

**Задача V.1.** а) С помощью описанного в формуле (4.66) предельного перехода получаем в случае граничного условия

$$I_n'(\lambda a) = 0$$

в качестве нормирующего интеграла вместо интеграла (4.76) следующее выражение:

$$N = -a \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I_n(\lambda a) I_n'(\lambda a + \varepsilon a)}{2\varepsilon} = -\frac{a^2}{2} I_n(\lambda a) I_n''(\lambda a);$$

отсюда, если использовать дифференциальное уравнение Бесселя, следует:

$$N = \frac{1}{2\lambda^2} (\lambda^2 a^2 - n^2) I_n^2(\lambda a).$$

Нормировкой к единице получается, таким образом, из функции  $I_n(\lambda r)$  функция вида

$$\sqrt{\frac{2\lambda^2}{\lambda^2 a^2 - n^2}} \frac{I_n(\lambda r)}{I_n(\lambda a)}.$$

б) В силу соотношения (4.92) между  $\psi_n(\rho)$  и  $I_{n+\frac{1}{2}}(\rho)$

получаем для рассматриваемого теперь нормирующего интеграла следующее выражение:

$$N = \int_0^a \psi_n^2(kr) r^2 dr = \frac{\pi}{2k} \int_0^a I_{n+\frac{1}{2}}^2(kr) r dr.$$

Граничное условие, предписанное в задаче, имеет вид

$$\psi'_n(ka) = \sqrt{\frac{\pi}{2ka}} \left[ I'_{n+\frac{1}{2}}(ka) - \frac{1}{2ka} I_{n+\frac{1}{2}}(ka) \right] = 0.$$

Аналогично случаю «а» мы получим с помощью соответствующего предельного перехода

$$N = -\frac{\pi}{2k} \frac{a^2}{2} I_{n+\frac{1}{2}}(ka) \left[ I''_{n+\frac{1}{2}}(ka) + \frac{1}{2ka} I'_{n+\frac{1}{2}}(ka) \right].$$

Учитывая дифференциальное уравнение Бесселя, мы приводим это выражение для  $N$  после некоторых простых преобразований к следующему виду:

$$N = \frac{a}{2k^2} \psi_n^2(ka) [k^2 a^2 - n(n+1)].$$

Нормируя к единице, мы получим вместо функции  $\psi_n(kr)$  функцию

$$\Psi_n = \sqrt{\frac{2k^2/a}{k^2 a^2 - n(n+1)}} \frac{\psi_n(kr)}{\psi_n(ka)}.$$

**Задача V.2.** Доказательство следует из формулы Грина:

$$\int (u \Delta v - v \Delta u) d\tau = \int \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma, \quad (1)$$

если положить  $v = 1/r$ , где  $r$  обозначает расстояние точки интегрирования от  $P$ . Вследствие сингулярности  $v$  в  $P$  следует, как это обычно делается, окружить  $P$  шаром  $K_\rho$  радиуса  $\rho \rightarrow 0$ . Интегрирование в левой части по области между  $K_a$  и  $K_\rho$  дает нуль, а правая часть становится равной сумме поверхностных интегралов по  $K_a$  и  $K_\rho$  ( $n$  означает в обоих случаях нормаль, направленную во внешнюю часть области). С помощью предельного перехода при  $\rho \rightarrow 0$  в интеграле по  $K_\rho$  получаем из формулы (1)

$$0 = 4\pi u_P - \frac{1}{a^2} \int_{K_a} u d\sigma - \frac{1}{a} \int_{K_a} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma. \quad (2)$$

Третий член справа обращается в нуль, так как  $\Delta u = 0$  всюду внутри  $S$ . Таким образом, равенство (2) содержит уже доказательство теоремы о среднем значении.

**Задача V.3.** Из равенства (5.39) и заданного на сфере  $r_0 = a$  условия  $u = U$  получаем

$$2\pi U = \sum_n \sum_m A_{nm} \Pi_n^m(\cos \vartheta_0) e^{-im\varphi_0}; \quad (1)$$

отсюда, умножая на  $e^{i\mu\varphi_0}$  и интегрируя по  $\varphi_0$  от 0 до  $2\pi$ , приходим к соотношению

$$\int_0^{2\pi} U e^{i\mu\varphi_0} d\varphi_0 = \sum_n A_{n\mu} \Pi_n^\mu(\cos \vartheta_0); \quad (2)$$

затем умножением на  $\Pi_\nu^\mu(\cos \vartheta_0) \sin \vartheta_0$  и интегрированием по  $\vartheta_0$  от 0 до  $\pi$  получаем

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} U \Pi_\nu^\mu(\cos \vartheta_0) e^{i\mu\varphi_0} \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 d\varphi_0 = A_{\nu\mu}, \quad (3)$$

что совпадает с формулой (5.38a) с точностью до обозначений.

Сравнивая формулы (5.38) и (5.39) в отношении их зависимости от  $r$ , мы получим, что для любого целого положительного  $n = 0, 1, 2, \dots$  имеет место следующее равенство:

$$-a^2 \sum_l \frac{1}{k_{nl}} \Psi_n(k_{nl} r_0) \Psi'_n(k_{nl} a) = \left(\frac{r_0}{a}\right)^n, \quad (4)$$

где суммирование производится по всем корням  $k = k_{nl}$  уравнения  $\Psi_n(ka) = 0$ , или, что то же, уравнения  $\psi_n(ka) = 0$ .

Для перехода от  $\Psi_n$  к  $\psi_n$  следует использовать формулу (4.92)

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} I_{n+\frac{1}{2}}(x) \quad (5)$$

и формулу (4.76)

$$\int_0^a [I_{n+\frac{1}{2}}(kr)]^2 r dr = \frac{a^2}{2} [I'_{n+\frac{1}{2}}(ka)]^2, \quad (5a)$$

справедливую также и для нецелых  $n$ , в которой  $k$  является корнем уравнения  $I_{n+\frac{1}{2}}(ka) = 0$ , а следовательно-

но, и уравнения  $\psi_n(ka) = 0$ . Из уравнений (5) и (5а) тогда следует

$$\int_0^a [\psi_n(kr)]^2 r^2 dr = \frac{a^3}{2} [\psi'_n(ka)]^2. \quad (6)$$

Если теперь положить  $\Psi_n = N\psi_n$  и потребовать выполнения условия

$$\int_0^a \Psi_n^2(kr) r^2 dr = 1, \quad (7)$$

то получим

$$N^2 = \frac{2}{a^3} [\psi'_n(ka)]^2.$$

Переходя в равенстве (4) от  $\Psi_n$  к  $\psi_n$  и полагая  $x = \frac{r_0}{a}$ , мы приведем его к следующему виду:

$$2 \sum_l \frac{\psi_n(ak_{nl})}{ak_{nl} \psi'_n(ak_{nl})} = -\alpha^n. \quad (8)$$

При  $n=0$ , согласно формуле (4.92),  $\psi_0(x) = \frac{\sin x}{x}$ , и следовательно, уравнение  $\psi_0(ka) = 0$  имеет корни

$$k = k_{0l} = \frac{l\pi}{a}, \text{ где } l = \pm 1, \pm 2, \dots$$

В этом особенно простом случае соотношение (8) сводится к уравнению

$$2 \sum_{l=1}^{+\infty} (-1)^l \frac{\sin l\pi x}{l} = -\pi x. \quad (9)$$

В частности, при  $\alpha = \frac{1}{2}$  получаем ряд Лейбница (1.21):

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4}. \quad (10)$$

Полагая в уравнении (9)  $x = 2\pi\alpha$  и используя уравне-

ние (10), получим представление «профиля пины»:

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & \text{если } 0 < x < +\pi, \\ -\frac{\pi + x}{2}, & \text{если } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, при  $n=0$  формула (8) сводится к разложению в ряд по синусам элементарной функции и могла бы служить простым примером для гл. I. При  $n > 0$  эта формула выражает гораздо более общее аналитическое соотношение и имеет значительно более глубокий смысл.

**Задача VI.1.** а) Из формулы (6.4) следует, что вектор  $\Pi$  имеет направление  $z$  и, кроме  $z$ , зависит от  $r^2 = x^2 + y^2$ :

$$E_x = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Pi}{\partial z} = \frac{x}{r} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r \partial z},$$

$$E_y = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Pi}{\partial z} = \frac{y}{r} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r \partial z}.$$

В силу предположения «а» задачи имеем

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} = \frac{z - h}{R} \frac{d}{dR} \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{z + h}{R'} \frac{d}{dR'} \frac{e^{ikR'}}{R'}.$$

Это выражение обращается в нуль при  $z=0$ , так как тогда  $R=R'$ . Следовательно, обращаются в нуль выражения  $E_x$  и  $E_y$ , получающиеся отсюда с помощью дифференцирования по  $x$ ,  $y$  или  $r$ .

б) Согласно формуле (6.4) имеем в этом случае

$$E_x = k^2 \Pi + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Pi}{\partial x},$$

$$E_y = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Pi}{\partial x},$$

причем по условию «б» при  $z=0$   $\Pi$  обращается в нуль. Поэтому во всех точках  $(x, y)$  поверхности земли обращаются в нуль обе компоненты  $E_x$  и  $E_y$ .

в) Из формулы (6.68) следует

$$E_x = i\mu_0 \omega \frac{\partial \Pi_z}{\partial y},$$

$$E_y = -i\mu_0 \omega \frac{\partial \Pi_z}{\partial x}.$$



Эти производные обращаются в нуль для  $z=0$ , так как  $\Pi_z$ , в соответствии с условием «в», обращается в нуль при  $z=0$ .

г) Из формулы (6.68) теперь следует

$$E_x = 0,$$

$$E_y = i\mu_0\omega \frac{\partial \Pi_x}{\partial z}.$$

В силу предположения «г» имеем

$$\frac{\partial \Pi_x}{\partial z} = \frac{z-h}{R} \frac{d}{dR} \frac{e^{ikR}}{R} + \frac{z+h}{R'} \frac{d}{dR'} \frac{e^{ikR'}}{R'}.$$

Это выражение обращается в нуль для  $z=0$ , так как  $R'=R$ .

**Задача VI.2.** Эта задача поучительна не только для понимания явления волн Ценнека, но также и для общего изучения вращающихся электромагнитных полей и их представления с помощью комплексных операторов.

Из формулы (6.40) следует в соответствии с формулой (6.4) для воздушного пространства

$$E_x = -ip \sqrt{p^2 - k^2} A k_3^2 e^{ipx - \sqrt{p^2 - k^2} z},$$

$$E_z = p^2 A k_3^2 e^{ipx - \sqrt{p^2 - k^2} z}. \quad (1)$$

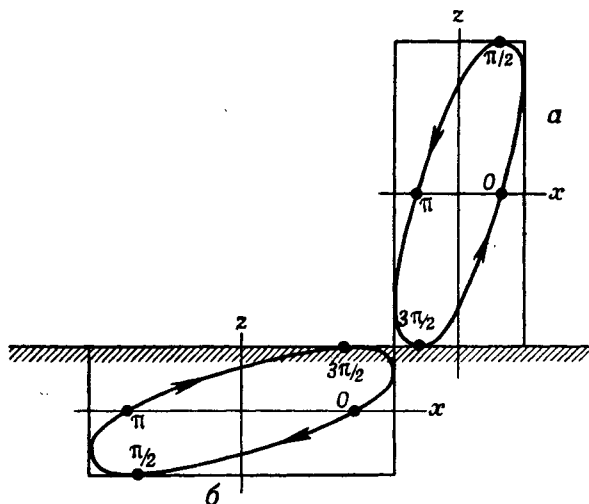
Эти выражения, умноженные на экспоненциальный временной множитель, представляют собой эллиптическое колебание, как это известно из оптики. Главные оси эллипса колебаний вследствие комплексного характера правых частей формулы (1) повернуты относительно осей  $x$  и  $z$ . Если образовать абсолютные значения  $E_x$  и  $E_y$ , то, взятые со знаками плюс и минус, они указывают пределы, в которых колеблются  $E_x$  и  $E_y$ , и тем сам определяют прямоугольник, описанный вокруг эллипса. Отношение сторон последнего равно абсолютной величине отношения

$$\frac{E_x}{E_z} = \frac{\sqrt{k^2 - p^2}}{p} = \frac{1}{n}. \quad (2)$$

Указанное здесь значение  $1/n$  следует непосредственно из определений (6.36а) и (6.22) для  $p$  и  $n$ . Вследствие того, что  $|n| \gg 1$ , прямоугольник является узким и высоким (фиг. 42,а).

С другой стороны, в земле имеем, согласно формулам (6.40а) и (6.7),

$$\begin{aligned} E_x &= +ip\sqrt{p^2 - p_3^2} Ak^2 e^{ipx} + \sqrt{p^2 - k_3^2} z, \\ E_z &= p^2 Ak^2 e^{ipx} + \sqrt{p^2 - k_3^2} z. \end{aligned} \quad (3)$$



Фиг. 42. Вращающееся поле волны Ценнека: *a* — в воздухе, узкий эллипс; *b* — в земле, плоский эллипс. Оба эллипса конгруэнтны между собой, но имеют противоположные направления обхода.

Таким образом, вновь получаем эллиптическое колебание; оно вложено в прямоугольник, отношение сторон которого определяется абсолютной величиной отношения

$$\frac{E_x}{E_z} = \frac{\sqrt{k_3^2 - p^2}}{ip} = n, \quad (4)$$

причем последнее значение, как и прежде, следует, из формул (6.36а) и (6.22). Вследствие того что  $|n| \gg 1$ , прямоугольник является широким и низким (фиг. 42, б). Второй эллипс пробегается в противоположном направлении, что следует из того, что оба значения  $n$  и  $1/n$

в формулах (4) и (2) являются обратными. Если представить себе поле распространяющимся в воздухе в положительном направлении оси  $x$  с присущей ему фазовой скоростью, то предыдущая схема наглядно показывает, как оно действует на поле в земле, заставляя его преодолевать имеющееся там сопротивление.

**Задача VI.3.** Пусть  $E' = \text{Re}(Ee^{-i\omega t})$  означает напряженность электрического поля, взятую в точке, где помещена антенна, и направленную вдоль нее. В случае антенны, короткой сравнительно с длиной волны, поле совершает за время  $dt$  работу  $E'jl dt$ . Согласно формуле (6.98) средняя мощность  $W$  выражается следующим образом:

$$W = jl \int_0^{\tau} \text{Re}(Ee^{-i\omega t}) \text{Re}(ie^{+i\omega t}) \frac{dt}{\tau}$$

(где  $\tau$  — период колебания),

или

$$W = \frac{jl}{4} \int_0^{\tau} (Ee^{-i\omega t} + E^*e^{+i\omega t})(ie^{-i\omega t} - ie^{+i\omega t}) \frac{dt}{\tau} = \\ = \frac{jl}{4} (-iE + iE^*).$$

Можно также записать

$$W = \frac{jl}{2} \text{Re}(-iE). \quad (1)$$

*а) Вертикальная антенна.* Полагая  $\Pi = \Pi_z$  и  $E = E_z$ , получим в силу формулы (6.4) и дифференциального уравнения для  $\Pi$  следующее выражение для  $E$ :

$$E = k^2\Pi + \frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial\Pi}{\partial r}. \quad (2)$$

Для  $\Pi$  следует использовать формулу (6.29) и выразить  $e^{ikR}/R$ , а также  $e^{ikR'}/R'$  с помощью формулы (6.14). Так как во всех трех членах выражения (6.29) от  $r$  зависит только множитель  $I_0(\lambda r)$  подинтегральных выражений, то применение оператора  $-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}$  дает под знаком инте-

грала общий множитель  $+\lambda^2 I_0(\lambda r)$ , т. е. в точке  $r=0$  антенны просто множитель  $\lambda^2$ . Таким образом, получаем из формулы (6.29)

$$\operatorname{Re}(-iE) = \operatorname{Re} \left\{ -i \int_0^\infty [e^{-\mu|z-h|} + e^{-\mu(z+h)}] \frac{\lambda^3 d\lambda}{\mu} + \right. \\ \left. + 2i \int_0^\infty e^{-\mu(z+h)} \frac{\mu_3}{n^2\mu + \mu_3} \frac{\lambda^3 d\lambda}{\mu} \right\}. \quad (3)$$

Так как  $\mu$  при  $\lambda > k$  является вещественным (см. стр. 377), то при образовании вещественной части в первом интеграле формулы (3) выпадает часть этого интеграла, взятая в пределах от  $\lambda=k$  до  $\lambda=\infty$ . Поэтому можно перейти к  $z=h$ , т. е. к месту антенны, не встречаясь с трудностями в отношении сходимости. Таким образом, получаем

$$\operatorname{Re}(-iE) = \operatorname{Re} \left\{ -i \int_0^k (1 + e^{-2\mu h}) \frac{\lambda^3 d\lambda}{|\mu|} \right\} + \\ + 2\operatorname{Re} \left\{ i \int_0^\infty e^{-2\mu h} \frac{\mu_3}{n^2\mu + \mu_3} \frac{\lambda^3 d\lambda}{\mu} \right\}. \quad (4)$$

Если взять значения этих интегралов из формул (6.94) — (6.95), подставить выражение (4) в уравнение (1) и, присоединив множитель (6.100), перейти к системе единиц MKSQ, то получим в точности значение  $W$  из формулы (6.101).

б) *Горизонтальная антенна.* Полагая  $\Pi = (\Pi_x, \Pi_z)$  и  $E = E_x$ , получим в силу формулы (6.4)

$$E = k^2 \Pi_x + \frac{\partial^2 \Pi_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial x \partial z}. \quad (5)$$

Так как в силу формул (6.55) и (6.58) в выражении  $\Pi_x$  от  $x$  зависит только множитель  $I_0(\lambda r)$  подинтегрального выражения, а в  $\Pi_z$  от  $x$  зависит только множитель  $\frac{x}{r} I_1(\lambda r)$  подинтегрального выражения и так как для малых значений  $x, y$  имеем

$$I_0(\lambda r) = 1 - \frac{\lambda^2}{4}(x^2 + y^2) + \dots, \quad \frac{x}{r} I_1(\lambda r) = \frac{\lambda}{2}x + \dots$$

то при  $r=0$  получаем

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) I_0 = \frac{1}{2} (2k^2 - \lambda^2), \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} I_1\right) = \frac{\lambda}{2}. \quad (6)$$

Множитель  $\frac{1}{2} (2k^2 - \lambda^2)$  и соответственно  $\lambda/2$  входят при вычислении выражения (5) под знак интеграла в формулах (6.55) и (6.58), причем для обоих первых членов в правой части формулы (6.55) следует использовать выражение (6.14), а в формуле (6.58), кроме дифференцирования по  $x$ , следует произвести еще дифференцирование по  $z$ , в результате чего появляется множитель  $-\mu$  под знаком интеграла. Таким образом, получаем вместо формулы (5) следующее выражение для  $E$ :

$$E = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{2k^2 - \lambda^2}{\mu} [e^{-\mu |z-h|} - e^{-\mu (z+h)}] \lambda^3 d\lambda + \\ + \int_0^\infty e^{-\mu (z+h)} \left[ \frac{2k^2 - \lambda^2}{\mu + \mu_3} + \frac{\lambda^2}{k^2} \frac{\mu (\mu - \mu_3)}{n^2 \mu + \mu_3} \right] \lambda d\lambda. \quad (7)$$

Первый член квадратной скобки  $[\ ]$  получается из третьего члена выражения (6.55), а второй член получается из выражения (6.58). Если привести выражение  $[\ ]$  к общему знаменателю и принять во внимание, что  $\mu^2 - \mu_3^2 = k^2 (n^2 - 1)$  (см. стр. 360), то после некоторых преобразований получаем

$$[\ ] = \frac{\lambda^2 - 2\mu\mu_3}{n^2\mu + \mu_3}.$$

Таким образом, второй интеграл формулы (7), если положить  $z=0$ , становится тождественным с интегралом в формуле (6.95а) для  $L$ . Если теперь согласно формуле (3) перейти в первом интеграле формулы (7) к выражению  $\text{Re}(-iE)$ , то можно вновь заменить верхний предел  $\infty$  верхним пределом  $k$  и произвести интегрирование по образцу формулы (6.94а). Переходя к нашей системе мер, мы получим таким путем в точности выражение (6.110а).

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
Из предисловия к первому изданию . . . . .	7
Предисловие ко второму изданию . . . . .	9
<b>Глава I. Ряды и интегралы Фурье . . . . .</b>	<b>11</b>
§ 1. Ряды Фурье . . . . .	12
§ 2. Пример разрывной функции. Эффект Гиббса и неравномерная сходимость . . . . .	19
§ 3. К вопросу о сходимости рядов Фурье . . . . .	28
§ 4. Переход к интегралу Фурье . . . . .	32
§ 5. Разложение по шаровым функциям . . . . .	37
§ 6. Обобщения: осциллирующие и оскулирующие аппроксимации, ангармонический анализ Фурье. Пример неокончательного определения коэффициентов . . . . .	43
<b>Глава II. Общие сведения об уравнениях в частных производных . . . . .</b>	<b>51</b>
§ 7. Простейшие уравнения в частных производных . . . . .	51
§ 8. Уравнения эллиптического, гиперболического и параболического типов. Теория характеристик . . . . .	56
§ 9. Различие между дифференциальными уравнениями гиперболического, эллиптического и параболического типов . . . . .	62
§ 10. Формула Грина и функция Грина для линейных дифференциальных уравнений и, в частности, для уравнений эллиптического типа . . . . .	67
§ 11. Метод Римана интегрирования дифференциального уравнения гиперболического типа . . . . .	78
§ 12. Формула Грина для уравнения теплопроводности. Главное решение уравнения теплопроводности . . . . .	82
<b>Глава III. Граничные задачи теплопроводности . . . . .</b>	<b>92</b>
§ 13. Полубесконечный линейный проводник тепла . . . . .	92
§ 14. Задача о температуре земли . . . . .	99

§ 15. Задача о кольце . . . . .	103
§ 16. Ограниченный линейный проводник тепла . . . .	108
§ 17. Отражение в плоскости и в пространстве . . . .	114
§ 18. Единственность решения в случае проводника произвольной формы . . . . .	119
<b>Глава IV. Цилиндрические и сферические задачи . . . .</b>	<b>122</b>
§ 19. Функции Бесселя и Ханкеля . . . . .	122
§ 20. Выравнивание температуры в цилиндре . . . . .	146
§ 21. Дальнейшие сведения о бесселевых функциях . .	154
§ 22. Шаровые функции и теория потенциала . . . . .	175
§ 23. Функция Грина теории потенциала для шара. Шаровые и круговые задачи для других дифференциальных уравнений . . . . .	190
§ 24. Дальнейшие сведения о шаровых функциях . . .	201
Приложение I. Отражение от круглого цилиндрического или сферического зеркала . . . .	223
Приложение II. Дополнение к задаче Римана о звуковых волнах (§ 11) . . . . .	230
<b>Глава V. Собственные функции и собственные значения . . . . .</b>	<b>233</b>
§ 25. Собственные значения и собственные функции колеблющейся мембраны . . . . .	233
§ 26. Общие сведения о граничных задачах акустики и теплопроводности . . . . .	248
§ 27. Свободные и вынужденные колебания. Функция Грина уравнения колебаний . . . . .	255
§ 28. Бесконечная область и непрерывный спектр собственных значений. Условие излучения . . . . .	264
§ 29. Спектр собственных значений волнового уравнения. Бальмеровские термы . . . . .	280
§ 30. Функция Грина. Задачи рассеяния в волновой механике. Формула Резерфорда в ядерной физике	288
Приложение I. Нормировка собственных функций для неограниченной области . . . .	293
Приложение II. Новый способ решения внешней краевой задачи волнового уравнения, рассмотренный на примере шара . .	298

Приложение III. Собственные функции волновой механики для задачи рассеяния в параболических координатах . . . . .	312
Приложение IV. Плоские и сферические волны в неограниченном пространстве любого числа измерений . . . . .	315
<b>Глава VI. Проблемы беспроводной телеграфии . . . . .</b>	<b>328</b>
§ 31. Диполь Герца в однородной среде и над идеально проводящей землей . . . . .	329
§ 32. Вертикальная антенна над землей с любыми электрическими постоянными . . . . .	342
§ 33. Горизонтальная антенна над землей с любыми электрическими постоянными . . . . .	356
§ 34. Ошибки при пеленгации электрической горизонтальной антенны . . . . .	366
§ 35. Магнитная или рамочная антенна . . . . .	369
§ 36. Энергия излучения и поглощение в земле . . . . .	373
Приложение. Беспроводная телеграфия на шарообразной земле . . . . .	385
<b>Упражнения . . . . .</b>	<b>401</b>
К главе I . . . . .	401
К главе II . . . . .	402
К главе III . . . . .	404
К главе IV . . . . .	406
К главе V . . . . .	408
К главе VI . . . . .	408
<b>Указания к решению задач . . . . .</b>	<b>409</b>



# О П Е Ч А Т К И

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
30	1 сн.	$\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$	$\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
136	2 св.	$\lim_{n \rightarrow n} \frac{p+1}{2}$	$\lim_{n \rightarrow n} \frac{p+1}{2}$
318	2 св.	$2 \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}$	$2\pi \frac{2}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}$
319	11 сн.	$(-1)^n \binom{-p}{n} = \frac{(p+n-1)!}{n! (p-1)!}$	$(-1)^n \binom{-p}{n} = \frac{(p+n-1)!}{n! (p-1)!}$
343	8 св.	$e^{-\mu(z+h)}$	$e^{+\mu(z+h)}$
405	17 сн.	$2 u_3$	$2 u_2$
408	13 св.	$F_n(\rho)$	$F'_n(\rho)$
451	14 св.	$ie^{+i\omega t}$	$ie^{-i\omega t}$

Кроме того, на стр. 269 в примечании редактора (4 строка снизу) допущена ошибка: вместо «у Ипатьевского» следует читать «у В. Ф. Игнатовского».

Зак. 576.