

## **ОСНОВЫ ФИЗИКИ. Т.1**

Введение новых программ по физике для средней школы, организация факультативных курсов физики, наличие физико-математических школ с расширенной программой вызвали потребность в пособиях, где основы классической и современной физики излагались бы значительно шире и глубже, чем это может быть сделано в стабильном учебнике.

Данная книга является первой частью двухтомника, в котором систематически излагаются основы физики на более современной основе, чем это обычно принято. Вопросы механики органически связаны с теорией относительности и соотношением неопределенностей, законы сохранения энергии, импульса и момента импульса — с принципами симметрии пространства и времени, основы термодинамики — с молекулярной статистикой и строением вещества, гидромеханика — с теорией ударных волн.

От читателя требуется лишь основательное знание физики, алгебры и начал тригонометрии в объеме восьмилетней школы. Вместе с тем это не книга для развлекательного чтения, работа над ней потребует от читателя серьезных усилий.

Книга предназначена для учащихся старших классов средней школы. Она может быть также полезна преподавателям физики школ и техникумов и студентам вузов.

### **ОГЛАВЛЕНИЕ**

Предисловие	11
Часть первая. ДВИЖЕНИЕ И СИЛЫ	
<b>Глава 1. Скорость</b>	<b>15</b>
§ 1.1. Механическое движение	15
§ 1.2. Система отсчета. Траектория	16
§ 1.3. Прямолинейное движение. Закон движения	19
§ 1.4. Равномерное движение	20
§ 1.5. Переменное движение	22
§ 1.6. Средняя скорость	23
§ 1.7. Мгновенная скорость переменного движения	26
<b>Глава 2. Инерция</b>	<b>27</b>
§ 2.1. Принцип инерции	27
§ 2.2. Инерциальные системы отсчета	30
§ 2.3. Принцип относительности	32
§ 2.4. Преобразования Галилея	33
§ 2.5. Классический закон сложения скоростей	35
<b>Глава 3. Скаляры и векторы. Вектор скорости</b>	<b>36</b>
§ 3.1. Скалярные величины	36
§ 3.2. Векторные величины	37
§ 3.3. Некоторые операции над векторами	39
§ 3.4. Разложение вектора на два слагаемых	42
§ 3.5. Скорость — вектор	43
§ 3.6. Сложение скоростей	45

<b>Глава 4. Ускорение</b>	<b>46</b>
§ 4.1. Среднее и мгновенное ускорение	46
§ 4.2. Прямолинейное переменное движение	47
§ 4.3. Прямолинейное равнопеременное движение	48
§ 4.4. График скорости при равнопеременном движении	48
§ 4.5. Графическое вычисление пройденного пути	49
§ 4.6. Пройденный путь и средняя скорость при равнопеременном движении	50
§ 4.7. Равномерное движение материальной точки по окружности	52
§ 4.8. Ускорение при равномерном движении материальной точки по окружности	53
<b>Глава 5. Сила</b>	<b>54</b>
§ 5.1. Сила — мера взаимодействия тел	54
§ 5.2. Упругие и пластические деформации	56
§ 5.3. Сила — вектор	58
§ 5.4. Сложение и разложение сил, приложенных к материальной точке	60
<b>Глава 6. Вес и масса</b>	<b>62</b>
§ 6.1. Вес	62
§ 6.2. Свободное падение	64
§ 6.3. Масса тела	66
§ 6.4. Плотность вещества	67
<b>Глава 7. Основной закон динамики</b>	<b>68</b>
§ 7.1. Сила и ускорение	68
§ 7.2. Применения основного закона динамики	72
§ 7.3. Невесомость	75
§ 7.4. Система единиц	77
§ 7.5. Международная система единиц	78
§ 7.6. Системы единиц СГС и МКТСС	79
<b>Глава 8. Закон движения материальной точки и начальные условия</b>	<b>80</b>
§ 8.1. Основная задача динамики	80
§ 8.2. Движение материальной точки под действием силы тяжести	81
§ 8.3. Численное решение основной задачи динамики	84
§ 8.4. Движение тела под действием упругой силы	85
§ 8.5. Величины, определяющие закон движения материальной точки	88
<b>Глава 9. Тяготение</b>	<b>90</b>
§ 9.1. Открытие закона тяготения	90
§ 9.2. Закон тяготения Ньютона	93
§ 9.3. Опыт Кавендиша	94
§ 9.4. Определение расстояний от Солнца до планет	95
§ 9.5. Поле тяготения	96
§ 9.6. Напряженность поля тяготения	96
§ 9.7. Поле тяготения Земли	97
§ 9.8. Влияние вращения Земли на ускорение свободного падения	99
<b>Глава 10. Электрические силы</b>	<b>101</b>

§ 10.1. Электрический заряд	101
§ 10.2. Закон Кулона	102
§ 10.3. Единицы заряда и системы единиц	105
§ 10.4. Диполь	106
§ 10.5. Электрическое поле. Напряженность	108
§ 10.6. Поле точечного заряда и диполя	109
<b>Глава 11. Трение</b>	<b>112</b>
§ 11.1. Внешнее и внутреннее трение	112
§ 11.2. Трение покоя	113
§ 11.3. Угол трения	116
§ 11.4. Трение скольжения	116
§ 11.5. Трение качения	118
§ 11.6. Движение тел под действием силы трения	119
§ 11.7. Внутреннее трение	120
§ 11.8. Движение тела в жидкости	122
§ 11.9. Падение тела в жидкости или газе	126
<b>Глава 12. Теория относительности</b>	<b>128</b>
§ 12.1. Скорость света и закон сложения скоростей	128
§ 12.2. Основные постулаты специальной теории относительности	131
§ 12.3. Одновременность событий	131
§ 12.4. Одновременность и длина	134
§ 12.5. Релятивистский закон сложения скоростей	134
§ 12.6. Предельный характер скорости света	136
§ 12.7. Преобразования Лоренца	137
§ 12.8. Длина отрезка	138
§ 12.9. Промежуток времени между двумя событиями	139
§ 12.10. Промежуток времени между причиной и следствием	141
§ 12.11. Соотношение между релятивистской и ньютоновской механикой	142
<b>Глава 13. Масса, импульс и сила в теории относительности</b>	<b>145</b>
§ 13.1. Релятивистская масса	145
§ 13.2. Основной закон динамики в теории относительности	146
§ 13.3. Соотношение между ньютоновской и релятивистской динамикой	147
<b>Глава 14. Закон движения и соотношение неопределенностей</b>	<b>150</b>
§ 14.1. Начальные условия и измерительная аппаратура	150
§ 14.2. Соотношение неопределенностей	154
§ 14.3. Соотношение неопределенностей и классическая механика	156
<b>Часть вторая. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ</b>	
<b>Глава 15. Закон сохранения импульса</b>	<b>160</b>
§ 15.1. Замкнутая система тел	160
§ 15.2. Закон сохранения импульса	162
§ 15.3. Явление отдачи	163
§ 15.4. Измерение масс	165
§ 15.5. Реактивное движение	165
§ 15.6. Расчет запаса топлива	166

§ 15.7. Центр инерции	168
§ 15.8. Движение центра инерции	168
<b>Глава 16. Полная и кинетическая энергия</b>	<b>171</b>
§ 16.1. Полная энергия тела	171
§ 16.2. Кинетическая энергия	172
§ 16.3. Энергия и импульс	174
§ 16.4. Кинетическая энергия и работа	175
§ 16.5. Мощность	178
§ 16.6. Единицы измерения энергии, работы и мощности	178
<b>Глава 17. Элементарная теория столкновений</b>	<b>180</b>
§ 17.1. Что такое столкновение?	180
§ 17.2. Абсолютно неупругий удар	181
§ 17.3. Упругий удар	183
§ 17.4. Замедление нейтронов	185
§ 17.5. Давление потока частиц на стенку	186
<b>Глава 18. Консервативные силы и потенциальная энергия</b>	<b>188</b>
§ 18.1. Работа переменной силы	188
§ 18.2. Работа упругой силы	191
§ 18.3. Работа кулоновской силы	192
§ 18.4. Работа гравитационной силы	195
§ 18.5. Консервативные силы	196
§ 18.6. Потенциальная энергия упругих, кулоновских и гравитационных взаимодействий	197
§ 18.7. Потенциал электростатического поля	199
§ 18.8. Потенциал поля точечного заряда	201
§ 18.9. Энергия электрического поля	202
<b>Глава 19. Закон сохранения энергии в ньютоновской механике</b>	<b>202</b>
§ 19.1. Механическая энергия и ее сохранение	202
§ 19.2. Механическая энергия и трение	203
§ 19.3. Космические скорости	204
§ 19.4. «Чертова петля»	205
§ 19.5. Потенциальные кривые	207
§ 19.6. Потенциальная энергия и равновесие	210
<b>Глава 20. Внутренняя энергия</b>	<b>211</b>
§ 20.1. Внутренняя энергия системы частиц	211
§ 20.2. Изменение внутренней энергии при деформации тела	213
§ 20.3. Изменение внутренней энергии тела при тепловых процессах	214
§ 20.4. Изменение внутренней энергии при химических реакциях	216
§ 20.5. Изменение внутренней энергии при ядерных реакциях	217
<b>Глава 21. Закон сохранения энергии</b>	<b>218</b>
§ 21.1. Работа как мера изменения полной и внутренней энергии	218
§ 21.2. Теплообмен	219
§ 21.3. Количество теплоты	221
§ 21.4. Первое начало термодинамики	222

§ 21.5. Адиабатически изолированная система	223
§ 21.6. Закон сохранения энергии	224
§ 21.7. Закон сохранения массы	225
<b>Глава 22. Закон сохранения момента импульса</b>	<b>227</b>
§ 22.1. Особенности вращательного движения	227
§ 22.2. Кинетическая энергия и момент инерции	228
§ 22.3. Зависимость момента инерции от положения оси вращения	230
§ 22.4. Момент силы	232
§ 22.5. Условие равновесия тела, имеющего ось вращения	233
§ 22.6. Момент импульса и основное уравнение динамики	234
§ 22.7. Закон сохранения момента импульса	236
§ 22.8. Аналогия между величинами и соотношениями между ними при поступательном и вращательном движениях	238
<b>Глава 23. Симметрия в природе и законы сохранения</b>	<b>239</b>
§ 23.1. Законы сохранения как основные законы природы	239
§ 23.2. Законы сохранения как принципы запрета	241
§ 23.3. Законы сохранения и симметрия пространства—времени	242
§ 23.4. Однородность пространства и сохранение импульса	243
§ 23.5. Изотропность пространства и сохранение момента импульса	244
§ 23.6. Однородность времени и сохранение энергии	245
<b>Глава 24. Неинерциальные системы отсчета и тяготение</b>	<b>246</b>
§ 24.1. Явления в ускоренно движущейся системе отсчета	246
§ 24.2. Силы инерции и принцип Даламбера	249
§ 24.3. Особенности сил инерции	251
§ 24.4. Пространство и время в неинерциальных системах отсчета	252
§ 24.5. Принцип эквивалентности	256
§ 24.6. Понятие о теории тяготения Эйнштейна	258
Часть третья. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ГАЗА	
<b>Глава 25. Молекулярное движение</b>	<b>263</b>
§ 25.1. Как измерили скорость движения молекул	263
§ 25.2. Распределение молекул по скоростям	265
§ 25.3. Длина свободного пробега молекулы	268
§ 25.4. Диффузия	271
§ 25.5. Закон диффузии	272
§ 25.6. Разделение газовых смесей	274
<b>Глава 26. Идеальный газ</b>	<b>276</b>
§ 26.1. Давление газа	276
§ 26.2. Единицы давления	279
§ 26.3. Идеальный газ	280
§ 26.4. Температура	283
§ 26.5. Абсолютная температура и уравнение состояния идеального газа	284
§ 26.6. Газовый термометр	285
§ 26.7. Градус. Абсолютная шкала и шкала Цельсия	287
§ 26.8. Абсолютный нуль	288

§ 26.9. Число Авогадро и постоянная Больцмана	290
§ 26.10. Распределение молекул в силовом поле	292
§ 26.11. Барометрическое распределение	293
<b>Глава 27. Идеальный газ и первое начало термодинамики</b>	<b>296</b>
§ 27.1. Внутренняя энергия одноатомного идеального газа	296
§ 27.2. Работа при расширении идеального газа	297
§ 27.3. Первое начало термодинамики и теплоемкость газа	299
§ 27.4. Изохорный процесс	300
§ 27.5. Изобарный процесс	302
§ 27.6. Изотермический процесс	303
§ 27.7. Адиабатный процесс	304
§ 27.8. Теплоемкость двухатомного газа	307
§ 27.9. Понятие о квантовой теории теплоемкости газов	311
<b>Глава 28. Второе начало термодинамики</b>	<b>315</b>
§ 28.1. Квазистатические процессы	315
§ 28.2. Обратимые процессы	317
§ 28.3. Необратимость реальных тепловых процессов	318
§ 28.4. Необратимость и статистика	320
§ 28.5. Диффузия и термодинамическая вероятность	324
§ 28.6. Термодинамическая вероятность и другие тепловые процессы	325
§ 28.7. Термодинамическая вероятность и энтропия	327
§ 28.8. Энтропия и теплообмен	328
§ 28.9. Второе начало термодинамики	331
§ 28.10. Статистический смысл второго начала термодинамики.	333
Флуктуации	
§ 28.11. Броуновское движение и флуктуации	333
<b>Глава 29. Тепловые машины</b>	<b>336</b>
§ 29.1. Тепловые машины и развитие техники	336
§ 29.2. Тепловой двигатель	337
§ 29.3. Схематическое устройство и энергетический баланс теплового двигателя	338
§ 29.4. Тепловой двигатель и второе начало термодинамики	340
§ 29.5. Цикл Карно	341
§ 29.6. К. п. д. реального двигателя	343
§ 29.7. Обратный цикл Карно	344
§ 29.8. Холодильная установка и тепловой насос	346
<b>Глава 30. Основы газовой динамики</b>	<b>348</b>
§ 30.1. Термодинамические параметры движущегося газа	348
§ 30.2. Уравнение неразрывности	349
§ 30.3. Уравнение импульсов	350
§ 30.4. Уравнение Бернулли	350
§ 30.5. Скорость распространения упругих возмущений	352
§ 30.6. Учет сжимаемости газа. Число Маха	355
§ 30.7. Конус Маха	356

§ 30.8. Ударная головная волна	358
§ 30.9. Явления на прямом скачке уплотнения	359
§ 30.10. Волновое сопротивление	361
§ 30.31. Сопло	363
§ 30.12. Аналогия между соплом и тепловой машиной	365
§ 30.13. Сопло Лаваля	366
§ 30.14. Реактивный двигатель	368
§ 30.15. Крыло самолета	369
§ 30.16. Измерение давления и скорости в потоке жидкости	371
§ 30.17. Учет вязкости. Сопротивление трубопроводов	372

Часть четвертая. МОЛЕКУЛЯРНЫЕ СИЛЫ И АГРЕГАТНЫЕ  
СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА

<b>Глава 31. Молекулярные силы</b>	<b>375</b>
§ 31.1. Плотность и сжимаемость вещества	375
§ 31.2. Молекулярные силы	377
§ 31.3. Электрическое происхождение молекулярных сил	378
§ 31.4. График молекулярных сил	381
§ 31.5. Потенциальная кривая молекулярного взаимодействия	383
§ 31.6. Тепловое расширение твердых тел и жидкостей	384
<b>Глава 32. Дальний порядок</b>	<b>386</b>
§ 32.1. Монокристалл	386
§ 32.2. Поликристалл	389
§ 32.3. Пространственная решетка. Дальний порядок	390
§ 32.4. Дефекты упаковки и блочная структура кристалла	391
§ 32.5. Движение дефектов и диффузия	394
§ 32.6. Движение дислокаций и деформация кристалла	395
<b>Глава 33. Плотная упаковка частиц</b>	<b>397</b>
§ 33.1. Типы кристаллических связей	397
§ 33.2. Плотнейшая упаковка одинаковых шаров	400
§ 33.3. Плотнейшие упаковки шаров с разными радиусами	402
§ 33.4. Решетки, которые нельзя представить как упаковку шаров	403
§ 33.5. Структура льда	406
§ 33.6. Полимеры	406
<b>Глава 34. Ближний порядок</b>	<b>409</b>
§ 34.1. Особенности жидкого состояния	409
§ 34.2. Структура жидкости и ее свойства	410
§ 34.3. Среднее время оседлой жизни	412
§ 34.4. Диффузия в жидкостях	415
§ 34.5. Вязкость жидкостей	416
§ 34.6. Аморфные тела	418
§ 34.7. Энергия поверхностного слоя и поверхностное натяжение жидкости	419
§ 34.8. Давление под искривленной поверхностью жидкости	420
§ 34.9. Капиллярные явления	422
§ 34.10. Адсорбция. Эффект Ребиндера	423

<b>Глава 35. Пары</b>	<b>426</b>
§ 35.1. Испарение	426
§ 35.2. Насыщенный пар	428
§ 35.3. Давление насыщенного пара	429
§ 35.4. Изотерма пара	432
§ 35.5. Критическое состояние вещества	433
§ 35.6. Влажность воздуха	436
<b>Глава 36. Фазовые переходы</b>	<b>438</b>
§ 36.1. Изменение агрегатного состояния	438
§ 36.2. Диаграмма перехода жидкость — газ	439
§ 36.3. Диаграмма перехода кристалл — газ	440
§ 36.4. Диаграмма перехода кристалл — жидкость	441
§ 36.5. Диаграмма перехода кристалл — кристалл	442
§ 36.6. Тройная точка	444
§ 36.7. Изменение внутренней энергии при фазовых переходах первого рода	445
§ 36.8. Мета стабильные состояния	447
§ 36.9. Конденсация. Пересыщенный пар	449
§ 36.10. Кипение. Перегретая жидкость	451
§ 36.11. Сжижение газов	453







## ПРЕДИСЛОВИЕ

На протяжении почти семидесяти лет текущего столетия физика занимает лидирующее положение среди естественных наук. Это определяется богатством и многообразием идей и методов исследования современной физики, их фундаментальным значением для гносеологии (теории познания), для развития диалектико-материалистического миропонимания. Не менее важно влияние физики и на развитие производительных сил общества. Ряд областей современной техники, таких, как электроника (включая полупроводники), ядерная техника и ракетостроение, радиотехника и др., настолько тесно переплетаются с физикой, что становятся неотъемлемыми от нее. Вместе с тем и в давно сложившихся «классических» отраслях науки и техники применение новых физических идей и методов исследования приводит зачастую к принципиально новым решениям ряда проблем.

Появились и бурно развиваются новые пограничные общенаучные и инженерные дисциплины, находящиеся на стыке нескольких наук и базирующиеся на физике (кибернетика, радиоастрономия, бионика, биофизика и др.). Существенно расширились возможности для дальнейшего взаимного проникновения различных областей знания друг в друга. Для нашего времени, кроме того, характерно резкое сокращение сроков между научными открытиями и их внедрением в народное хозяйство, повседневную жизнь и практику.

Все это не могло не привести к резкому повышению требований, предъявляемых к современному курсу физики в системе как среднего, так и высшего образования. Для средней школы комиссией под председательством академика

И. К. Кикоина разработана новая программа по физике. В старших классах средней школы введены факультативные курсы, задача которых — более глубоко ознакомить интересующихся школьников с некоторыми проблемами современной физики. В специализированных классах и физико-математических средних школах физика изучается по программам повышенного уровня. В высшей школе, в частности технической, в последние годы значительно повышен научно-теоретический уровень преподавания физики.

Повышение уровня преподавания физики выдвигает ряд новых методических проблем. Из них наиболее сложная — создание соответствующих учебников и учебных пособий. При этом необходимо решить задачу, которую мы (не претендуя на полноту и строгость) сформулируем следующим образом: без применения сложного математического аппарата изложить основные идеи современной физики, их физический смысл, методы исследования и важнейшие результаты. При этом необходимо показать органическую преемственность современной и классической физики, непреходящую ценность и важность тех результатов «классики», без усвоения которых невозможно проникнуть в круг идей современной физики, понять ее методы и осмыслить достижения.

Многолетний опыт преподавания физики в средней и высшей школе привел авторов к мысли, что книга, в которой была бы решена эта задача, может быть создана, если отказаться от традиционной последовательности изложения учебного материала. Основной методический замысел книги, предлагаемой вниманию читателя, заключается в том, чтобы *с самого начала вскрыть органическую связь классической и современной физики.*

В частности, это приводит к необходимости через весь курс механики и электродинамики пронести идеи специальной теории относительности и по возможности в полной мере использовать их при формировании основных понятий. (Методические идеи изложения основных понятий теории относительности и ее многочисленных применений в данной книге предложены А. А. Пинским.) Некоторые важнейшие идеи квантовой механики также должны использоваться на протяжении всего курса физики.

При реализации этого замысла авторы встретились с большими методическими трудностями. Главнейшая из них заключается в том, чтобы в систематическом курсе ввести с самого начала понятия и представления, смысл которых раскрывается лишь постепенно, на протяжении всего курса физики. Однако эта же трудность существует и при традиционной системе построения курса.

Более того, при традиционной системе изложения, когда понятия и представления современной физики даются в конце курса, на них, как правило, не хватает ни места в книге, ни учебного времени. Кроме того, эти понятия и представления трудно закрепить — основная часть учебного материала уже осталась позади, и возвращаться к нему «по второму кругу» не представляется возможным. Наконец, при традиционной системе изложения мы невольно вырабатываем у слушателя некий психологический барьер, мешающий восприятию идей современной физики, — они представляются противоречащими тому «здоровому смыслу», закреплению которого как раз и способствует традиционная методика.

Вот почему, отчетливо понимая, что стоявшие перед нами большие трудности не могли не привести к существенным недостаткам рукописи, мы все же решили написать эту книгу. Она рассчитана на читателей, твердо усвоивших курс физики в объеме восьмилетней школы и желающих овладеть основами классической и современной физики. Мы надеемся, что она будет полезна учащимся старших классов средней школы как при изучении основного курса физики, так и в особенности при изучении школьных факультативных курсов.

В целом ряде вузов курс физики начинается с первого семестра, когда у студентов еще нет знаний по высшей математике. Студенты этих вузов извлекут определенную пользу, работая по этой книге.

Однако не следует думать, что отсутствие высшей математики в книге по физике сразу же делает ее легкой для чтения и усвоения. Физика — это сложный и достаточно трудный предмет, изучение которого требует серьезных усилий. Поэтому всякая книга, по которой можно изучать физику, требует времени и серьезного, напряженного труда. Ее нельзя просто читать, по ней нужно работать.

Авторы хотели бы надеяться, что время и усилия, затраченные читателем на изучение основ физики по этой книге, окупятся в их дальнейшей учебе и работе.

Авторы выражают глубокую благодарность чл.-корр. АН СССР В. Г. Левичу, доктору пед. наук Н. М. Шахмаеву и М. И. Блудову, которые рецензировали эту книгу и высказали ряд ценных замечаний, учтенных при окончательной доработке рукописи.

Отзывы и замечания по этой книге авторы просят посылать по адресу: Москва В-71, Ленинский проспект 15, издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы.

*Б. М. Яворский, А. А. Пинский*

Москва — Калининград  
1965—1968 гг.

# ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

---

## ДВИЖЕНИЕ И СИЛЫ

### ГЛАВА I СКОРОСТЬ

#### § 1.1. Механическое движение

1. Все тела, окружающие нас, от звезд и планет до таких мельчайших частиц, как атомы и их составные части, находятся в состоянии непрерывного движения. Простейшей формой движения является изменение положения тел друг относительно друга — *механическое движение*.

Механическое движение лежит в основе движения большинства механизмов и машин, в основе действия всех видов транспорта. Вместе с тем оно является и составной частью более сложных, немеханических процессов. Так, тепловые явления связаны с беспорядочным движением молекул; излучение света — с движением электронов в атомах; ядерные реакции — с движением и взаимодействием элементарных частиц (протонов, нейтронов, мезонов). Число этих примеров можно было бы умножить.

2. Для описания движения тела следует указать, как движутся все его точки.

Одним из видов движения тел является *поступательное* движение, при котором все точки тела движутся совершенно одинаково; прямая, соединяющая две произвольные точки тела, переносится параллельно себе самой (рис. 1.1). Очевидно, что для описания поступательного движения тела достаточно описать движение какой-либо одной его точки.

Другим простым видом движения является *вращательное* движение, при котором все точки тела описывают окружности в параллельных плоскостях, причем центры этих окружностей лежат на одной прямой, называемой осью вращения (рис. 1.2).

3. При решении ряда задач механики целесообразно отвлечься от размеров тела и рассматривать его как материальную точку. *Материальной точкой* называется тело, размерами которого можно пренебречь в данной задаче.

Естественно, что данное понятие является абстракцией, что никаких материальных точек в природе нет. Однако постановка ряда задач механики такова, что позволяет с успехом пользоваться этой абстракцией.

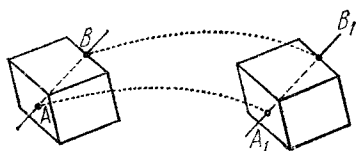


Рис. 1.1.

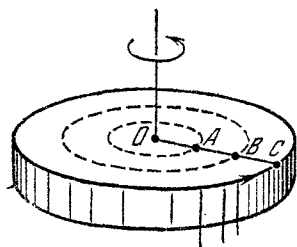


Рис. 1.2.

Действительно, если пассажира интересует, сколько времени нужно самолету, чтобы долететь из Москвы до Новосибирска, то совершенно не нужно знать характер движения отдельных частей самолета. В то же время нельзя пренебречь размерами и формой самолета, изучая такие явления, как взлет, посадка, сопротивление воздуха и т. п. Аналогично мы можем считать Землю и другие планеты точками, если нас интересует характер их движения вокруг Солнца. Однако если нужно выяснить причины смены дня и ночи или времен года, то ту же Землю уже нельзя считать точкой, а следует учесть ее размеры, вращение вокруг оси, наклон этой оси к плоскости орбиты и т. п.

Таким образом, одно и то же тело в одних задачах можно рассматривать как материальную точку, а в других задачах так поступать нельзя.

## § 1.2. Система отсчета. Траектория

1. Если рассмотреть явления, происходящие вблизи поверхности Земли, то мы убедимся в неравноценности различных направлений в пространстве. Так, тело, выпущен-



ное из рук, всегда движется по вертикальному направлению вниз (примерно к центру Земли); свободная поверхность жидкости располагается в горизонтальной плоскости; для движения тела по вертикали вверх ему нужно сообщить начальную скорость, для движения же тела по вертикали вниз начальная скорость не нужна, и т. д. Эта неравноценность различных направлений в пространстве вызвана тем, что Земля притягивает к себе тела.

На весьма значительном расстоянии как от Земли, так и от других планет и звезд мы обнаружили бы, что *в пространстве, свободном от больших тел, все направления равноценны*. Мы говорим, что *свободное пространство изотропно*, т. е. в нем нет выделенных направлений, обладающих особыми свойствами.

Точно так же равноценны все точки пространства, если вблизи этих точек нет больших тел типа планет или звезд. Вследствие этого мы говорим, что *свободное пространство однородно*, т. е. в нем нет точек, обладающих особыми свойствами.

2. Наконец, *однородным является также время*. А именно, любые явления, происходящие в одних и тех же условиях, но в разные моменты времени, протекают совершенно одинаково. Действительно, если сегодня маленький шарик падает с высоты 6 м за 1,1 сек, то в этой же лаборатории с этой же высоты он падал столько же времени и месяц назад, и год назад, и столько же времени его падение будет продолжаться 1000 лет спустя.

3. Как мы убедимся далее, из факта однородности времени, однородности и изотропности пространства вытекает ряд важных следствий (см. гл. 23). Одно из них мы можем учесть уже сейчас: раз пространство однородно (т. е. все его точки равноценны) и изотропно (т. е. все направления в нем равноценны), то невозможно определить положение материальной точки относительно пространства.

Однако вполне возможно определить положение одного тела относительно другого. Например, положение лампочки в комнате полностью задается ее расстоянием от пола и расстояниями до двух взаимно перпендикулярных стен. С помощью такой же тройки чисел можно определить положение любого другого тела, находящегося как внутри комнаты, так и вне ее.

*Системой отсчета* называется тело или группа тел, которые в данной задаче рассматриваются как неподвижные и относительно которых определяется положение всех остальных тел.

В принципе любое тело может служить системой отсчета, однако не все системы отсчета могут оказаться одинаково удобными. Так, движение автомобиля удобнее рассматривать в системе отсчета, связанной с Землей, а не с Солнцем или Луной. Наоборот, движение планет удобнее рассматривать в системе отсчета, связанной именно с Солнцем, а не с Землей или другой планетой, — законы движения планет будут описываться проще. Некоторые критерии выбора системы отсчета будут рассмотрены ниже.

С системой отсчета обычно связывают три взаимно перпендикулярные прямые — *оси координат* (рис. 1.3). Положение точки характеризуется тремя координатами: абсциссой  $x$ , ординатой  $y$  и аппликатой  $z$ .

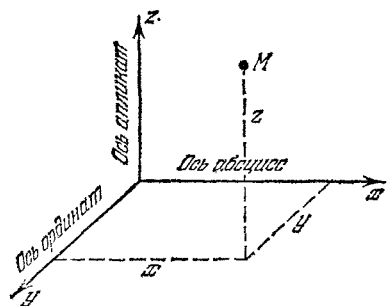


Рис. 1.3.

4. Движущаяся точка описывает в заданной системе отсчета линию, которая называется *траекторией*. Так, если зажать прутик и быстро вращать его в воздухе, особенно в темной комнате, то отчетливо будет видна траектория движения уголька на конце прутика.

*Форма траектории зависит от выбора системы отсчета.* Действительно, пусть тело падает в вагоне, который движется относительно Земли. Тогда траектория этого тела относительно вагона будет прямой линией, относительно же Земли это будет кривая (при отсутствии сопротивления воздуха — парабола). То же самое можно сказать о траектории, которую описывает какая-либо точка пропеллера движущегося самолета. В системе координат, связанной с самолетом, эта точка вращается по окружности; в системе же координат, связанной с Землей, она движется по винтовой линии.

Таким образом, понятие формы траектории имеет *относительный смысл*. Нельзя говорить о форме траектории вообще; речь может идти лишь о форме траектории в заданной системе отсчета (системе координат).

### § 1.3. Прямолинейное движение. Закон движения

1. Пусть в некоторой системе отсчета материальная точка движется по прямой. Тогда удобно направить вдоль этой траектории одну из осей координат, например ось абсцисс. В каждый момент времени движущаяся точка будет иметь вполне определенную координату. А это значит, что координата движущейся точки есть функция времени:  $x=f(t)$ . Вид этой функции и есть *закон движения*.

2. Для того чтобы экспериментально определить закон движения, необходимо, чтобы движущаяся точка каким-либо образом оставляла метки на оси координат.

Пусть, например, нас интересует закон движения эскалатора метрополитена. Для этого можно было бы вдоль стены натянуть бумажную ленту, а стоящему на лестнице экспериментатору дать в руки прибор, который через равные промежутки времени (например, через каждую секунду) наносил бы на ленту метки. Результат эксперимента можно свести в таблицу:

Момент времени $t$ , сек	1	2	3	4	5	6	7	8
Координата $x$ , м	1,75	2,50	3,25	4,00	4,75	5,50	6,25	7,00

Этот эксперимент не позволяет надежно определить положения точки в промежуточные моменты времени. Однако здесь придет на помощь следующее рассуждение. Попробуем подобрать такую функцию  $x=f(t)$ , значения которой при  $t=1; 2; 3$  и т. д. были бы точно  $x=1,75; 2,50; 3,25$  и т. д. Нетрудно убедиться, что это будет линейная функция  $x=1+0,75t$ . Предполагая, что характер движения не менялся в процессе нашего исследования, мы имеем право считать, что и для всех остальных моментов времени, лежащих в интересующих нас пределах (от первой до восьмой секунды), координата вычисляется по этому же закону.

Заметим, что чем меньше будут промежутки времени между двумя последовательными метками, тем больше оснований полагать, что наше предположение о характере закона движения близко к истине. Поэтому при экспериментальном изучении закона движения некоторого тела существенную роль играет объем информации: чем больше мы получим меток и чем меньше будут промежутки времени между двумя соседними метками, тем более точно можно определить закон движения.

3. Предположение, что характер движения не менялся в процессе исследования, имеет принципиальное значение. Действительно, пусть к концу десятой секунды человек, стоящий до этого неподвижно на ступеньке эскалатора, решил ускорить спуск и стал шагать по ступенькам вниз. Естественно, что характер его движения существенно изменился, и мы уже не вправе пользоваться найденным ранее законом движения для моментов времени после десятой секунды (от начала эксперимента).

Таким образом, экспериментально найденным законом движения можно пользоваться только в том интервале времени, в течение которого проводилось исследование. Экстраполяция (т. е. применение найденного закона для более широкого интервала времени) возможна лишь после дополнительного исследования, позволяющего установить, что характер движения не изменился.

### § 1.4. Равномерное движение

1. Движение материальной точки называется *равномерным*, если координата точки является линейной функцией времени:

$$x = vt + b, \quad (1.1)$$

где  $v$  и  $b$  — некоторые постоянные, физический смысл которых будет выяснен в дальнейшем.

Всякое неравномерное движение называется *переменным*.

2. Закон движения очень наглядно изображается с помощью *графика*. Для этой цели строим на плоскости систему координат, откладывая на оси абсцисс время  $t$ , а на оси ординат — переменную координату точки (например  $x$ ).

Откладывая по обеим осям соответствующие значения переменных, взятые из таблицы, проводим в этих точках перпендикуляры к осям координат. На их пересечении получим некоторые точки; линия, плавно соединяющая эти точки, и есть *график движения*. Поскольку в равномерном движении координата является линейной функцией времени, то графиком этого движения служит прямая (рис. 1.4).

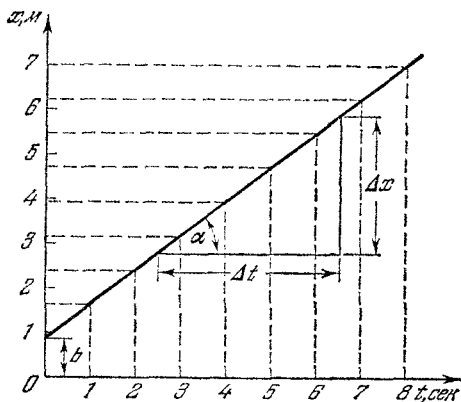


Рис. 1.4.

3. Полагая в законе движения  $t=0$ , имеем  $x_0=b$ . Это — *начальная координата*, т. е. расстояние от движущейся точки до начала координат в начальный момент времени.

Следует особо обратить внимание на смысл понятия *начальный момент времени*. Это никоим образом не начало движения, а тот момент времени, когда был пущен секундомер, т. е. *начало эксперимента по исследованию данного движения*.

Что же касается момента начала движения, то он нас не всегда интересует, а иногда и вовсе не может быть установлен. Так, астроном, исследующий закон движения метеорита, обнаруживает метеорит только тогда, когда он войдет в сравнительно плотные слои атмосферы и раскалится. Это и будет начальный момент — начало наблюдения, но отнюдь не начало движения метеорита. То же относится

к движению других небесных тел (планет, комет), к движению космических частиц через измерительную аппаратуру, к движению самолета или ракеты, когда их обнаружит радиолокатор, и т. п.

### § 1.5. Переменное движение

1. Рассмотрим переменное движение на двух примерах: тела, падающего с некоторой высоты, и тела, брошенного вертикально вверх. В обоих случаях мы имеем дело с прямолинейным движением. Однако нетрудно убедиться, что это неравномерные, т. е. переменные движения.

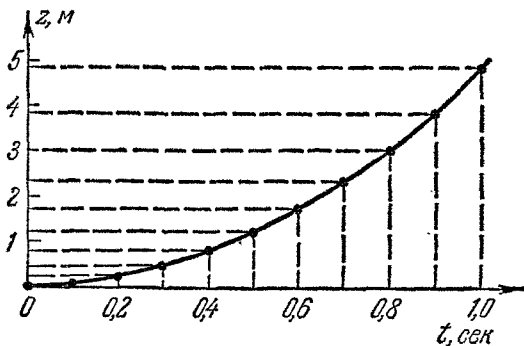


Рис. 1.5.

Пусть маленький и достаточно тяжелый шарик падает вдоль оси апикат. Метки на координатной оси можно получить, например, с помощью моментальной фотографии, открывая затвор аппарата через равные промежутки времени. Результаты эксперимента сведем в таблицу:

Момент времени $t$ , сек . .	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Координата $z$ , м	0,049	0,196	0,431	0,784	1,22	1,76	2,40	3,14	3,97	4,90

Построив график движения, мы увидим, что он является не прямой линией, а параболой; закон движения имеет вид  $z=4,9 t^2$  (рис. 1.5).

2. Если с помощью описанной методики исследовать характер движения тела, брошенного вертикально вверх, то получится следующая таблица данных:

Момент времени $t$ , сек	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
Координата $z$ , м . . . . .	0	1,74	3,14	4,12	4,70	4,90	4,70	4,12	3,14	1,74	0

Движение здесь также прямолинейное переменное. Закон движения имеет вид  $z=9,8t-4,9t^2$ . На графике закон движения изобразится параболой (рис. 1.6).

3. Следует обратить внимание на принципиальное отличие графика движения от траектории. Траектория — это кривая, по которой материальная точка движется в системе отсчета; график — это кривая на чертеже, соединяющая изображающие точки в плоскости координата — время.

Шарик, падающий с некоторой высоты, и шарик, брошенный вертикально вверх, движутся по траектории одинаковой формы — по прямой линии, а графики у них различные вследствие неодинакового характера движения.

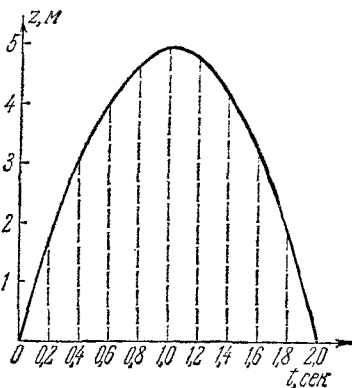


Рис. 1.6.

### § 1.6. Средняя скорость

1. Рассмотрим случай, когда материальная точка движется вдоль какой-либо оси координат все время в одном направлении.

*Перемещением* материальной точки за промежуток времени  $\Delta t = t_2 - t_1$  называется отрезок  $\Delta x = x_2 - x_1$ .

Заметим, что если точка движется все время в одном и том же направлении, то *пройденный путь* равен абсолютной

величине перемещения:  $\Delta s = |\Delta x|$ . Если же точка движется сначала в одном направлении, а затем, остановившись, начинает двигаться в обратном направлении (например, в случае колебательного движения или движения тела, брошенного вертикально вверх), то пройденный путь равен сумме абсолютных величин перемещений в том и другом направлениях:  $\Delta s = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + \dots$

Для примера обратимся опять к случаю движения тела, брошенного вертикально вверх. Выберем моменты времени  $t_1 = 0,8$  сек и  $t_2 = 1,4$  сек — им соответствуют координаты  $x_1 = 4,70$  м и  $x_2 = 4,12$  м (см. предыдущую таблицу). Перемещение

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 4,12 - 4,70 = -0,58 \text{ м.}$$

Знак минус указывает, что перемещение направлено в сторону, противоположную направлению оси координат. Пройденный же путь будет значительно больше, ибо движущаяся точка в момент времени  $t = 1,0$  сек достигла наибольшей высоты  $x_{\max} = 4,90$  м, а затем стала падать вниз. Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta s &= |x_{\max} - x_1| + |x_2 - x_{\max}| = |4,90 - 4,70| + |4,12 - 4,90| = \\ &= 0,20 + 0,78 = 0,98 \text{ м.} \end{aligned}$$

2. *Средней скоростью* движения за данный промежуток времени называется физическая величина, численно равная отношению перемещения к промежутку времени:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}. \quad (1.2)$$

Средняя скорость — вектор. Ее направление совпадает с направлением перемещения.

Единица измерения скорости определяется как скорость такого движения, при котором перемещение материальной точки за единицу времени составляет единицу длины:

$$[v] = \frac{[x]}{[t]}. \quad (1.3)$$

Здесь квадратные скобки указывают единицу измерения величины.

В Международной системе единиц (сокращенно СИ, от System International) единицей измерения перемещения



является метр (*м*), а единицей времени — секунда (*сек*). Следовательно, единицей измерения скорости будет *м/сек*.

Кроме этого, применяется и ряд внесистемных единиц:

$$1 \text{ см/сек} = 10^{-2} \text{ м/сек};$$

$$1 \text{ км/час} = \frac{1}{3,6} \text{ м/сек} = 0,273 \text{ м/сек};$$

$$1 \text{ узел} = 1 \text{ миля/час} = 1852 \text{ м/3600 сек} = \\ = 0,514 \text{ м/сек}$$

и другие.

3. В переменном движении величина средней скорости существенно зависит от выбора промежутка времени, в течение которого двигалось тело. Так, в случае свободного падения, который был рассмотрен выше, средняя скорость в промежутке от  $t_1=0,1$  сек до  $t_2=0,2$  сек (см. таблицу)

$$v_{\text{ср}} = \frac{0,196 - 0,049}{0,2 - 0,1} = \frac{0,147}{0,1} = 1,47 \text{ м/сек.}$$

В промежутке времени от  $t_1=0,7$  сек до  $t_2=0,8$  сек средняя скорость

$$v_{\text{ср}} = \frac{3,14 - 2,40}{0,8 - 0,7} = \frac{0,74}{0,1} = 7,4 \text{ м/сек.}$$

А от  $t_1=0,7$  сек до  $t_2=1,0$  сек

$$v_{\text{ср}} = \frac{4,90 - 2,40}{1,0 - 0,7} = \frac{2,50}{0,3} = 8,33 \text{ м/сек.}$$

И только при равномерном движении средняя скорость — постоянная величина, не зависящая от выбора промежутка времени. Действительно, здесь  $x_1 = vt_1 + b$ ,  $x_2 = vt_2 + b$  и средняя скорость

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{vt_2 + b - vt_1 - b}{t_2 - t_1} = v.$$

4. Для оценки численного значения средней скорости на практике иногда пользуются следующим определением: средняя скорость равна отношению пройденного пути ко времени движения. Подчеркнем, что определенная таким образом средняя скорость является скаляром, а не вектором.

### § 1.7. Мгновенная скорость переменного движения

1. Во многих случаях нас интересует не средняя скорость движения тела за определенный промежуток времени, а *скорость тела в данный момент*, или *мгновенная скорость*. Например, если тело ударяется о преграду, то сила, с которой оно в этот момент действует на преграду, определяется скоростью в момент удара, а не средней скоростью; дальность полета ракеты и форма ее траектории определяются скоростью в момент запуска, а не ее средней скоростью, и т. п.

Для определения мгновенной скорости материальной точки можно поступить следующим образом. Пусть в момент времени  $t$  координата точки равна  $x$ . В момент времени  $t_1 = t + \Delta t$  координата ее будет  $x_1 = x + \Delta x$ , где  $\Delta x$  — перемещение. Тогда средняя скорость

$$v_{\text{ср}} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (1.4)$$

Чем больше промежуток времени  $\Delta t$ , тем, вообще говоря, средняя скорость больше отличается от мгновенной. И, наоборот, чем меньше промежуток времени  $\Delta t$ , тем меньше средняя скорость отличается от интересующей нас мгновенной скорости.

Определим мгновенную скорость  $v$  как *предел, к которому стремится средняя скорость за бесконечно малый промежуток времени*:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (1.5)$$

В математике такой предел называется *производной*. Следовательно, мгновенная скорость есть производная от координаты по времени.

2. Поскольку средняя скорость равномерно движущейся материальной точки является постоянной величиной, а пределом постоянной величины является сама эта величина, то и *мгновенная скорость равномерно движущейся материальной точки является постоянной величиной*.

Итак, равномерное движение можно определить как движение с постоянной скоростью.

Таким образом, постоянная  $v$  в законе равномерного движения  $x=vt+b$  — это скорость движения, а постоянная  $b$  — начальная координата.

Как видно из графика (см. рис. 1.4), скорость равномерного движения численно равна тангенсу угла наклона графика к оси времени:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Движению с большей скоростью будет соответствовать график с более крутым наклоном.

## ГЛАВА 2

### ИНЕРЦИЯ

#### § 2.1. Принцип инерции

1. Основной задачей механики является изучение движений тел в той или иной системе отсчета и причин, определяющих характер этих движений. Необходимо выяснить, при каких условиях тело движется по прямолинейной или криволинейной траектории, равномерно или неравномерно, ускоренно или замедленно.

Опыт показывает, что при взаимодействии тел характер их движения меняется. Так, падающее тело, соприкоснувшись с Землей, либо останавливается — и тогда его движение прекращается, либо подпрыгивает вверх — и тогда направление его скорости меняется на противоположное. Далее, покоящееся относительно Земли тело само никогда не начнет двигаться и только под действием какого-либо другого тела выходит из состояния покоя и начинает перемещаться. Число этих примеров, естественно, можно было бы умножить.

2. Однако из правильного заключения о том, что взаимодействие тел приводит к изменению скорости их движения, некоторые мыслители древности, например Аристотель, сделали ложное заключение о том, что само движение тел есть результат их взаимодействия с другими телами.

Одна из причин, которая привела их к такому неверному выводу, заключалась в том, что они считали Землю абсо-

лютно неподвижным центром Вселенной. Вследствие этого они считали покой относительно Земли естественным состоянием тел, а движение — временным, вынужденным состоянием, являющимся результатом действия внешних сил. Правда, при этом возникали и определенные трудности, например при объяснении движения брошенного камня или стрелы, вылетевшей из лука: ведь здесь нет тел, которые бы все время подталкивали камень или стрелу! И вот, для объяснения этих явлений античные ученые предлагали различные произвольные гипотезы, лишь бы сохранить свое основное предположение о вынужденной природе движения.

3. В конце XVI в. две задачи выдвинули вновь проблему движения. Прежде всего, с развитием артиллерии нужно было найти законы движения снарядов. Затем, в связи с возникновением гелиоцентрической системы Коперника, стало ясно, что Земля является не центром Вселенной, а рядовой планетой, вращающейся наряду с другими планетами вокруг Солнца. Отсюда неизбежно вытекал вывод, что планеты (а значит, и другие тела) движутся сами по себе, ибо совершенно невероятно, чтобы Землю и другие планеты что-то все время подталкивало в течение миллиардов лет.

Кроме того, нужно было объяснить, почему мы не чувствуем вращения Земли, а также почему, оторвавшись от Земли, например подпрыгнув, мы опускаемся в ту же точку Земли.

Первое правильное, хотя и неполное решение проблемы движения было дано Галилеем в начале XVII в. И лишь 50 лет спустя Ньютон смог найти четкую формулировку трех основных законов движения, что явилось основой для создания классической механики.

4. Для правильного решения проблемы движения следовало прежде всего отвлечься от всяких внешних воздействий и сформулировать проблему так: что произойдет с телом, если оно перестанет взаимодействовать с другими телами? Здесь на помощь должен прийти *мысленный эксперимент*, идея которого и была выдвинута Галилеем. Действительно, во всяком реальном эксперименте на Земле мы не можем освободить тело от действия силы тяжести и силы трения. Однако можно поставить вопрос так: а что произойдет, если

мы эти силы, хотя бы и мысленно, станем постепенно уменьшать?

Допустим, что тележка движется по песку — тогда она быстро остановится. А вот на горизонтальном куске стекла она будет двигаться значительно дольше, хотя и здесь в конце концов остановится. А если стекло станет абсолютно гладким? Очевидно, тележка не остановится, а будет сама по себе двигаться неограниченно долго.

Вот эта-то идея мысленного эксперимента над телом, которое свободно от всяких внешних воздействий, и позволила Галилею прийти к идее *инерциального* движения тела. И хотя сам Галилей и ошибался, считая, что по инерции тело может не только двигаться равномерно и прямолинейно, но и равномерно двигаться по окружности (последнее неверно!), его идея позволила Ньютону правильно сформулировать *закон инерции*:

*Если данное тело не взаимодействует с окружающими телами, то скорость его движения не меняется ни по величине, ни по направлению, т. е. оно движется прямолинейно и равномерно.*

Этот закон называют также первым законом Ньютона.

Инерциальное движение есть движение по кратчайшему расстоянию, ибо в свободном пространстве кратчайшим расстоянием между двумя точками является прямая линия.

Если же мы говорим о том, что некое тело покоится, то это не абсолютный покой, а покой лишь в данной системе отсчета, которая сама движется относительно других тел.

5. Именно благодаря инерции, подпрыгнув вверх в движущемся вагоне, мы опускаемся в то же самое место. Действительно, находясь на полу равномерно движущегося вагона, мы имеем с ним одинаковую скорость. Подпрыгнув вертикально вверх, мы сохраняем горизонтальную скорость неизменной, ибо в этом направлении на нас ничто не действует. А потому, пройдя по горизонтали одинаковый с вагоном путь, мы возвращаемся в ту же точку, от которой мы отделились в момент прыжка. Буквально то же самое можно сказать и относительно нашего движения совместно с Землей.

Благодаря инерции движутся брошенные тела. Действительно, в момент броска мы сообщаем камню некоторую

скорость. И если бы камень не испытывал сопротивления воздуха и притяжения Земли, он двигался бы по инерции, сохраняя эту скорость неизменной по величине и направлению. Взаимодействие же камня с воздухом и Землей приводит к замедлению его движения и искривлению траектории и в конечном счете к его остановке.

## § 2.2. Инерциальные системы отсчета

1. Формулировка принципа инерции, предложенная в предыдущем параграфе, не может быть признана полной. Действительно, там идет речь о движении тела, но ничего не сказано о той системе отсчета, в которой совершается движение. Между тем нам известно, что говорить о форме траектории, а также о скорости можно лишь относительно некоторой системы отсчета, так как, например, траектория, прямолинейная в одной системе отсчета, может оказаться криволинейной в другой системе.

Поэтому необходимо видоизменить формулировку принципа инерции, введя явные указания на характер системы отсчета, относительно которой данное движение рассматривается. Принцип инерции более точно формулируется так:

*Существуют системы отсчета, относительно которых все тела, не взаимодействующие с другими телами, движутся прямолинейно и равномерно.* Системы отсчета, удовлетворяющие этому принципу, называются *инерциальными системами*.

2. Понятие инерциальной системы отсчета является абстракцией, реализуемой на практике лишь с некоторой степенью приближения. Действительно, всякая система отсчета связана с какими-то телами, а все тела в природе в той или иной степени взаимодействуют друг с другом. Поэтому невозможно указать строго инерциальные системы отсчета; можно лишь указать системы, которые для данного круга рассматриваемых вопросов могут считаться инерциальными. Естественно, что вопрос о том, является ли данная система отсчета инерциальной, может быть решен только экспериментально.

Практика показала, что в первом приближении можно считать систему отсчета, связанную с Землей, инерциальной системой. А именно, существует целый круг явлений, на

ход которых вращение Земли не влияет. Эта система отсчета называется геоцентрической (от греческого *gē*— Земля).

Так, вращение Земли практически не влияет на работу всевозможных механизмов и машин, на движение различных видов транспорта. Оно не влияет на ход тепловых, химических и ядерных реакций, а также на электромагнитные процессы, происходящие в генераторах, электродвигателях, трансформаторах, радиопередатчиках и приемниках; оно не влияет на распространение электромагнитных волн, на световые и звуковые явления. Следовательно, при описании всех этих физических процессов можно с большой степенью точности считать геоцентрическую систему отсчета инерциальной.

3. Вместе с тем существует и ряд явлений, вызванных вращением Земли вокруг своей оси и движением Земли вокруг Солнца. Поскольку оба эти движения не являются прямолинейными и равномерными, то они вызывают эффекты, невозможные в инерциальных системах отсчета.

Так, наблюдая ночью за небосводом, мы заметим, что вся система звезд вращается вокруг оси, проходящей через Полярную звезду и центр Земли. С точки зрения геоцентрической системы отсчета здесь следует найти какой-то механизм взаимодействия между Землей и всеми звездами, позволяющий объяснить причину искривления их траекторий. Далее, планеты совершают довольно сложные движения по небосводу. Двигаясь в некотором направлении, планета вдруг останавливается, затем перемещается назад и, описав петлю, начинает двигаться в первоначальном направлении.

Многочисленные попытки объяснить наблюдаемое движение небесных светил в геоцентрической системе отсчета, предпринятые Аристотелем, Птолемеом и другими исследователями, оказались несостоятельными. Правильную теорию движения небесных тел дали Коперник, Галилей и Кеплер, связав систему отсчета не с Землей, а с Солнцем. Эта система отсчета называется гелиоцентрической (от греческого *hēlios* — Солнце). Она является в значительной степени более инерциальной, чем геоцентрическая система отсчета.

### § 2.3. Принцип относительности

1. Инерциальных систем (с той степенью приближения, которая указана выше) имеется бесчисленное множество. *Любая система отсчета, которая движется прямолинейно и равномерно относительно некоторой инерциальной системы, тоже является инерциальной.*

Действительно, пусть в некоторой системе отсчета тело движется по инерции. Следовательно, его скорость не меняется ни по величине, ни по направлению. В другой системе отсчета, которая движется относительно первой прямолинейно и равномерно, наше тело будет иметь другую скорость, но опять-таки постоянную по величине и направлению. Следовательно, вторая система отсчета в такой же мере инерциальна, как и первая.

Так, системы отсчета, связанные с вагоном или судном, движущимся равномерно и прямолинейно относительно Земли, будут в такой же мере инерциальными, как и система отсчета, связанная с Землей.

2. Опыт показывает, что на судне, движущемся прямолинейно и равномерно относительно Земли, так же легко двигаться по любому направлению, как и на Земле. При выстреле из пистолета пуля летит столько же времени от носа к корме, сколько и от кормы к носу. Тело, выпущенное из рук, падает вертикально вниз (разумеется, относительно судна; относительно Земли оно движется по параболической траектории). Вода, налитая в какой-либо сосуд, имеет горизонтальную поверхность, как и на Земле.

Из этих и многих иных явлений следует, что никакой механический эксперимент не позволяет нам выделить из совокупности инерциальных систем какую-либо одну преимущественную систему отсчета. Отсюда вытекает, что не может быть речи об абсолютном покое или абсолютном движении тел, а можно говорить лишь об их относительном движении в какой-либо инерциальной системе отсчета.

Этот основной закон природы называется *принципом относительности Галилея*. Его можно сформулировать следующим образом:

*Во всех инерциальных системах отсчета механические процессы протекают одинаково; или короче, все инерциальные системы отсчета равноправны.*



Анализ принципа относительности, проделанный Альбертом Эйнштейном, привел его в 1905 г. к выводу, что этот принцип является одним из самых фундаментальных законов природы, который применим не только к механическим, но и к любым другим явлениям — тепловым, электромагнитным, оптическим и т. п. Это позволило ему сформулировать общий принцип относительности, называемый часто *принципом относительности Эйнштейна*:

*Во всех инерциальных системах отсчета все явления природы протекают одинаково.*

Этот принцип является одной из основ современного физического миропонимания.

## § 2.4. Преобразования Галилея

1. В ньютоновской механике мы имеем дело с относительно малыми скоростями. Действительно, самые большие скорости, с которыми движутся макроскопические тела, — это скорости планет, метеоров, космических кораблей. Они не превышают нескольких десятков километров в секунду, что много меньше скорости света  $c = 300\,000$  км/сек.

Если координаты некоторой материальной точки заданы в одной инерциальной системе отсчета, то можно вычислить координаты этой же точки в любой другой инерциальной системе, движущейся относительно первой равномерно и прямолинейно. Точная форма соответствующих преобразований координат будет выведена в § 12.7. Здесь же мы рассмотрим так называемые *преобразования Галилея*, которые позволяют связать между собой координаты некоторой материальной точки в двух разных инерциальных системах отсчета при скоростях движения, много меньших скорости света.

2. Свяжем одну систему отсчета для определенности с Землей, а вторую — с вагоном, который движется относительно Земли равномерно и прямолинейно со скоростью  $v$ . Для простоты рассуждений направим одну из осей координат (например, ось абсцисс) вдоль направления движения вагона (рис. 2.1). Из чертежа очевидно, что абсциссы и ординаты точки  $K$  в обеих системах координат совпадают:  $z' = z$  и  $y' = y$ . Абсциссы же отличаются на отрезок

$OO' = vt$ . Отсюда преобразования Галилея примут вид

$$\left. \begin{aligned} z' &= z, \\ y' &= y, \\ x' &= x - vt. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

3. Чтобы убедиться, что преобразования Галилея удовлетворяют принципу относительности, рассмотрим, каков будет их вид, если вагон считать неподвижным, а Землю —

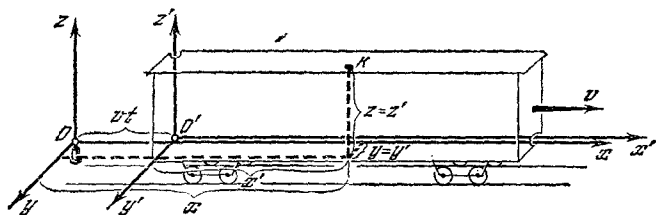


Рис. 2.1.

перемещающейся в обратном направлении со скоростью  $V$ . Абсолютные величины скоростей  $V$  и  $v$  совпадают, направления же их противоположны; следовательно,  $V = -v$ . Рассуждения, совершенно аналогичные вышеизложенным, приводят к формулам

$$\left. \begin{aligned} z &= z', \\ y &= y', \\ x &= x' + vt. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Итак, преобразования Галилея взаимны: любая из инерциальных систем отсчета может быть условно принята за неподвижную, а преобразования к любой другой инерциальной системе производятся по тем же формулам, но с учетом знака относительной скорости системы. А это и означает, что данные преобразования согласуются с принципом относительности.

4. Перемещения точки в разных системах координат различны. Действительно, пусть в момент  $t_1$  материальная точка имела координату  $x_1$ , а в момент  $t_2$  — координату  $x_2$ . Перемещение точки в системе отсчета, связанной с Землей:

$$\Delta x = x_2 - x_1.$$

Перемещение этой же точки в системе отсчета, связанной с вагоном:

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1) = \Delta x - v \cdot \Delta t. \quad (2.3)$$

Соответственно

$$\Delta x = \Delta x' + v \cdot \Delta t. \quad (2.4)$$

5. Однако длина отрезка в обеих системах отсчета сохраняется. Действительно, *длиной отрезка* (рис. 2.2) называется

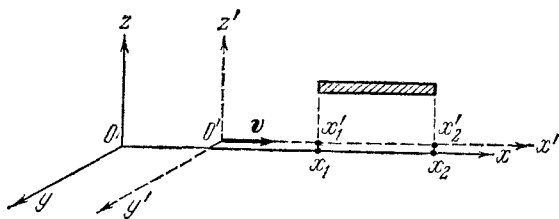


Рис. 2.2.

разность координат его конца и начала, измеренных одновременно:  $l = x_2 - x_1$  при  $t_2 = t_1$ , т. е.  $\Delta t = 0$ . Тогда из (2.3) или (2.4) следует

$$l = l'. \quad (2.5)$$

Этот результат представляется совершенно очевидным, и на первый взгляд даже неясно, зачем это нужно было вывести. Смысл вывода станет ясен ниже (§ 12.8).

## § 2.5. Классический закон сложения скоростей

1. Пусть материальная точка движется равномерно вдоль оси абсцисс со скоростью  $u = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ . Найдем скорость этой же точки в другой инерциальной системе отсчета  $u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t}$ . Для этой цели воспользуемся формулой (2.3). Разделив обе части равенства на  $\Delta t$ , получим

$$u' = u - v \quad (2.6)$$

или соответственно

$$u = u' + v. \quad (2.7)$$

Это и есть *классический закон сложения скоростей* для рассматриваемого частного случая.

2. Классический закон сложения скоростей хорошо подтверждается при скоростях движения, много меньших скорости света.

Так, если вагон движется относительно Земли со скоростью  $80 \text{ км/час}$ , а пассажир идет по вагону в том же направлении со скоростью  $6 \text{ км/час}$ , то скорость пассажира относительно Земли составит  $86 \text{ км/час}$ . Если река имеет скорость течения  $2 \text{ м/сек}$ , а скорость парохода относительно воды  $8 \text{ м/сек}$ , то при движении парохода против течения его скорость относительно Земли составит  $6 \text{ м/сек}$ , а при движении по течению —  $10 \text{ м/сек}$ .

3. Логические соображения, положенные в основу вывода преобразований Галилея, представляются самоочевидными, а следствия, получаемые из этих преобразований, такие, как неизменность длины отрезка в разных системах отсчета, закон сложения скоростей и т. п., отлично оправдывались в экспериментах при тех скоростях движений, с которыми имели дело ученые в течение примерно трех столетий после работ Галилея и Ньютона. Постепенно сложилось представление, что эти преобразования должны быть справедливы для любых физических явлений. И только в конце прошлого века было обнаружено, что применение представлений ньютоновской механики к явлениям, связанным с распространением света, приводит к ряду противоречий. В гл. 12 мы покажем, как возникли эти противоречия и как они были устранены в теории относительности.

## ГЛАВА 3

### СКАЛЯРЫ И ВЕКТОРЫ. ВЕКТОР СКОРОСТИ

#### § 3.1. Скалярные величины

1. *Скаляром* называется величина, которой в любой системе отсчета соответствует определенное число, зависящее от выбора системы единиц. При записи скаляра рядом ставят его численное значение и единицу измерения.

Например:

$$l = 3 \text{ м} = 300 \text{ см} = 3000 \text{ мм.}$$

Численное значение скаляра обратно пропорционально единице измерения. Символически это можно записать так:

$$a [A] = a' [A'] \quad (3.1)$$

или

$$\frac{a}{a'} = \frac{[A']}{[A]}, \quad (3.2)$$

где  $[A]$  и  $[A']$  — единицы измерения скаляра,  $a$  и  $a'$  — его численные значения.

2. Примерами скалярных величин могут служить: время, длина, площадь, объем, температура, масса, работа, энергия.

Сумма или произведение скаляров есть также скаляр. И вообще — любая алгебраическая операция над скалярными величинами также является скаляром.

Заметим, что если некоторое выражение, составленное из скалярных величин, находится под знаком неалгебраической (трансцендентной) функции, то оно является отвлеченным числом. К такого рода функциям относятся показательная, логарифмическая, тригонометрическая функции. Например, если координата  $x$  выражена в метрах ( $[x] = \text{м}$ ), то выражение  $y = a^{kx}$  имеет смысл только в том случае, если  $[k] = \frac{1}{\text{м}}$ . Аналогично, выражение  $x = A \cos \omega t$  имеет смысл только при  $[\omega] = \frac{1}{\text{сек}}$ .

### § 3.2. Векторные величины

1. *Вектором* называется величина, которой в любой системе отсчета соответствует *направленный отрезок*. Вектор характеризуется абсолютной величиной (модулем), направлением и точкой приложения его начала. Примерами векторных величин являются скорость, сила.

Вектор, начало которого совпадает с началом координат, а конец определяет положение некоторой материальной точки, называется *радиусом-вектором* этой точки (рис. 3.1).

Векторы принято обозначать малыми латинскими буквами с горизонтальной стрелкой вверху ( $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и т. д.) или жирными буквами ( $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ , ...). Радиус-вектор принято обозначать буквой  $\mathbf{r}$ .

2. Любой вектор может быть спроектирован на оси координат.

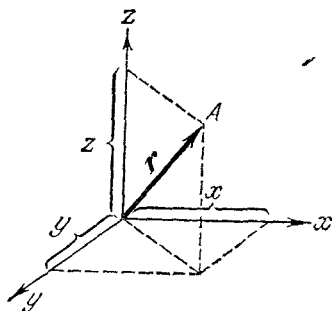


Рис. 3.1.

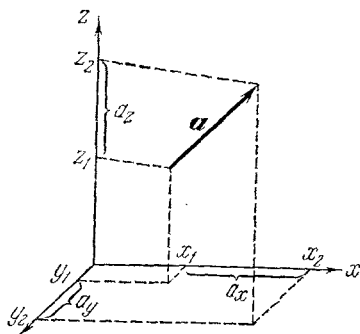


Рис. 3.2.

Проекции вектора  $\mathbf{a}$  на оси координат обозначаются соответственно  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$ , где нижний индекс характеризует ось, на которую проектируется вектор (рис. 3.2). Из чертежа видно, что

$$\left. \begin{aligned} a_x &= x_2 - x_1, \\ a_y &= y_2 - y_1, \\ a_z &= z_2 - z_1, \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

где  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$  — координаты начала вектора,  $x_2$ ,  $y_2$ ,  $z_2$  — координаты его конца.

Проекциями радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  являются координаты его конца, поскольку координаты его начала равны нулю:

$$\left. \begin{aligned} r_x &= x, \\ r_y &= y, \\ r_z &= z. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Очевидно, что проекции вектора являются скалярами.

3. *Абсолютной величиной* вектора или, короче, его *модулем* называется скаляр, равный длине отрезка, изображающего этот вектор. Обозначается  $|\mathbf{a}|$  или просто  $a$ . Пользуясь теоремой Пифагора, получим

$$|\mathbf{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (3.5)$$

Модуль радиуса-вектора

$$|\mathbf{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (3.6)$$

### § 3.3. Некоторые операции над векторами

1. *Суммой двух векторов является новый вектор, проекции которого суть суммы соответствующих проекций слагаемых.* Если проекциями слагаемых векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  являются  $(a_x, a_y, a_z)$  и  $(b_x, b_y, b_z)$ , то из определения следует:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \text{ если } \begin{cases} c_x = a_x + b_x, \\ c_y = a_y + b_y, \\ c_z = a_z + b_z. \end{cases} \quad (3.7)$$

Из этого определения вытекает ряд важных следствий.  
*Переместительный закон сложения:*

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}. \quad (3.8)$$

Действительно, для проекций, как для любых чисел, переместительный закон безусловно справедлив.

Аналогично доказывается *сочетательный закон сложения:*

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}). \quad (3.9)$$

*Правило многоугольника:* чтобы сложить несколько векторов, например  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$  и  $\mathbf{a}_5$ , нужно начало второго слагаемого совместить с концом первого, начало третьего — с концом второго и т. д. Затем строится новый вектор, начало которого совпадает с началом первого слагаемого, а конец — с концом последнего (рис. 3.3). Этот замыкающий

вектор  $\mathbf{b}$  и будет искомой суммой:

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_5.$$

Для доказательства этого следствия расположим два вектора  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$  в плоскости  $xy$ , причем начало вектора  $\mathbf{a}_2$  совместим с концом вектора  $\mathbf{a}_1$  (рис. 3.4). Соединив

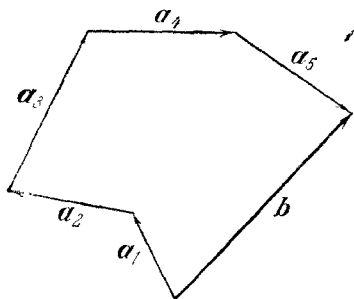


Рис. 3.3.

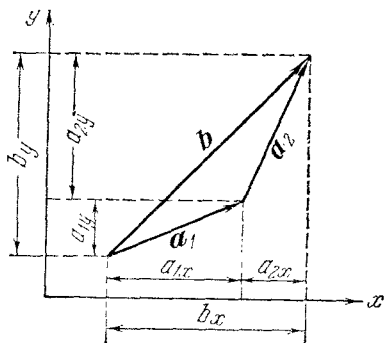


Рис. 3.4.

начало  $\mathbf{a}_1$  с концом  $\mathbf{a}_2$ , получим вектор  $\mathbf{b}$ , который по определению и является искомой суммой. Из чертежа видно, что проекции вектора  $\mathbf{b}$  на оси координат являются суммами соответствующих проекций векторов  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$  на эти же оси.

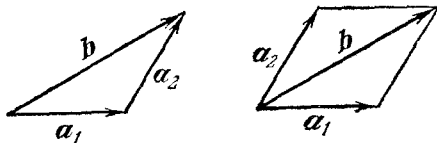


Рис. 3.5.

Для нескольких же векторов можно воспользоваться сочетательным законом сложения.

Заметим, что сумму двух векторов можно построить и по *правилу параллелограмма* (рис. 3.5). Однако при построении суммы нескольких векторов правило многоугольника более удобно.



2. *Разностью* двух векторов называется вектор, построенный следующим образом: совмещаются начала уменьшаемого  $\mathbf{b}$  и вычитаемого  $\mathbf{a}$  векторов (рис. 3.6). Тогда вектор  $\mathbf{c}$ , проведенный от конца вычитаемого вектора к концу уменьшаемого, и есть искомая разность:

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

В проекциях

$$c_x = b_x - a_x,$$

$$c_y = b_y - a_y,$$

$$c_z = b_z - a_z.$$

Доказательство непосредственно вытекает из правила многоугольника, поскольку  $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{b}$ .

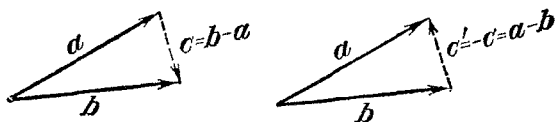


Рис. 3.6.

3. *Произведением вектора  $\mathbf{a}$  на скаляр  $k$*  является новый вектор  $\mathbf{b}$ , проекции которого в  $k$  раз больше соответствующих проекций вектора  $\mathbf{a}$ . Из этого определения следует, что

$$\mathbf{b} = k\mathbf{a}, \text{ если } \begin{cases} b_x = ka_x, \\ b_y = ka_y, \\ b_z = ka_z. \end{cases} \quad (3.10)$$

Для целого положительного  $k$  это прямо следует из закона сложения векторов.

При умножении вектора на скаляр его направление не меняется, модуль же нового вектора возрастает в  $k$  раз (рис. 3.7):

$$b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{k^2 a_x^2 + k^2 a_y^2 + k^2 a_z^2} = k \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = ka.$$

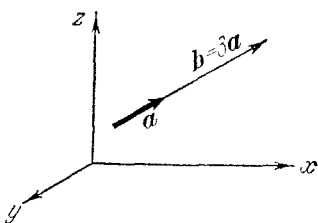


Рис. 3.7.

4. Частным от деления вектора  $\mathbf{a}$  на скаляр  $k \neq 0$  является новый вектор  $\mathbf{b}$ , проекции которого в  $k$  раз меньше соответствующих проекций вектора  $\mathbf{a}$ . Итак, из определения следует, что

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}}{k}, \text{ если } \begin{cases} b_x = \frac{a_x}{k}, \\ b_y = \frac{a_y}{k}, \\ b_z = \frac{a_z}{k}. \end{cases} \quad (3.11)$$

Предоставляем читателю самостоятельно показать, что при делении вектора на скаляр его направление не меняется, модуль же уменьшается в  $k$  раз.

### § 3.4. Разложение вектора на два слагаемых

1. Разложить вектор  $\mathbf{a}$  на два слагаемых — значит найти такие два вектора  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , чтобы  $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ . В этом случае  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{a}$  образуют *замкнутый треугольник* (правило многоугольника).

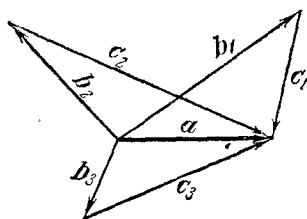


Рис. 3.8.

Эта задача является неопределенной: на отрезке длиной  $a$  можно построить бесчисленное множество треугольников, две стороны которых являются модулями искомых векторов (рис. 3.8). Задача станет определенной, если будут заданы некоторые дополнительные условия.

2. На практике часто встречается задача о разложении данного вектора  $\mathbf{a}$  на два слагаемых вектора, направления которых параллельны некоторым прямым. Эта задача является вполне определенной.

Через концы отрезка  $\mathbf{a}$  проведем две прямые линии, параллельные заданным прямым (рис. 3.9). В получившемся треугольнике строим два вектора так, что начало первого совпадает с началом вектора  $\mathbf{a}$ , а его конец — с найденной вершиной треугольника; начало же второго вектора совпадает с вершиной треугольника, а конец — с концом век-

тора  $\mathbf{a}$ . В получившемся треугольнике строим два вектора так, что начало первого совпадает с началом вектора  $\mathbf{a}$ , а его конец — с найденной вершиной треугольника; начало же второго вектора совпадает с вершиной треугольника, а конец — с концом век-

тора  $\mathbf{a}$ . Это и будут искомые векторы  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ . Действительно, они направлены параллельно заданным прямым, а их сумма,

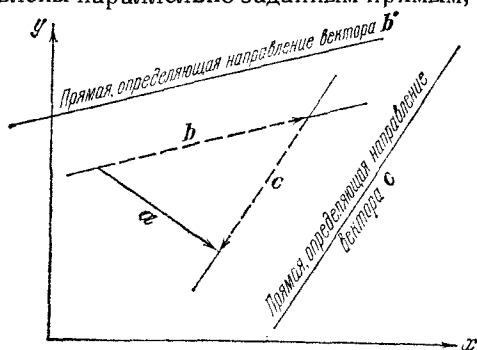


Рис. 3.9.

по правилу многоугольника, равна первоначальному вектору:  $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}$ .

### § 3.5. Скорость — вектор

1. Пусть материальная точка движется по прямолинейной траектории, не совпадающей с осями координат. В момент времени  $t_1$  положение материальной точки определяется радиусом-вектором  $\mathbf{r}_1$ , в момент  $t_2$  — радиусом-вектором  $\mathbf{r}_2$  (рис. 3.10). Определим вектор перемещения:

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \quad (3.12)$$

Тогда и средняя скорость, очевидно, является вектором:

$$\mathbf{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{t_2 - t_1}. \quad (3.13)$$

В самом деле, при делении вектора  $\Delta \mathbf{r}$  на скаляр  $\Delta t$  получается новый вектор, направление которого совпадает с направлением перемещения. Следовательно, векторы скорости и перемещения имеют одинаковые направления.

Мгновенная скорость

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (3.14)$$

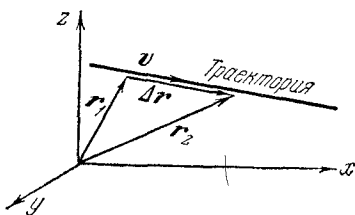


Рис. 3.10.

также является вектором, совпадающим по направлению с вектором перемещения.

Итак, *скорость прямолинейно движущейся точки есть вектор, направленный вдоль траектории.*

2. При движении материальной точки по криволинейной траектории мы сохраним определения средней и мгновенной

скорости (3.13) и (3.14).

В этом случае векторы перемещения и средней скорости направлены по хорде, соединяющей две точки траектории, соответствующие

положению материальной точки в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  (рис. 3.11). В случае, когда  $\Delta t \rightarrow 0$ , направление хорды стремится к направлению касательной.

В пределе бесконечно малый вектор перемещения и вектор мгновенной скорости совпадут с направлением касательной.

Итак, *при движении материальной точки по криволинейной траектории вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории.*

3. Проекция вектора перемещения:

$$\left. \begin{aligned} \Delta r_x &= x_2 - x_1 = \Delta x, \\ \Delta r_y &= y_2 - y_1 = \Delta y, \\ \Delta r_z &= z_2 - z_1 = \Delta z. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Отсюда соответствующие проекции вектора мгновенной скорости:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \\ v_y &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}, \\ v_z &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Модуль мгновенной скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}. \quad (3.17)$$

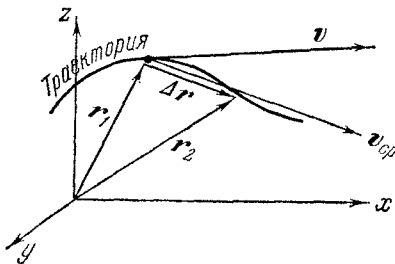


Рис. 3.11.

## § 3.6. Сложение скоростей

1. Поскольку в ньютоновской механике скорость является вектором, то операция сложения скоростей сводится к сложению соответствующих проекций скорости. Следовательно, скорости складываются по правилу многоугольника (или параллелограмма).

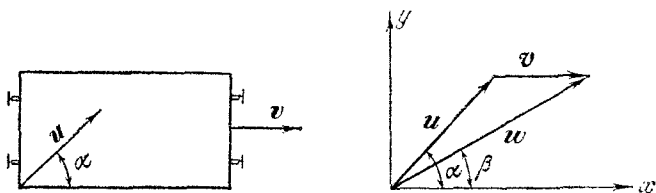


Рис. 3.12.

Так, пусть человек движется по платформе со скоростью  $u$ , составляющей угол  $\alpha$  с одной из сторон платформы. Сама же платформа движется со скоростью  $v$  относительно Земли (рис. 3.12). Найдем величину и направление скорости человека  $w$  относительно Земли.

Задачу можно решить так. Проекции вектора  $u$ :

$$u_x = u \cos \alpha, \quad u_y = u \sin \alpha;$$

соответствующие проекции вектора  $v$ :

$$v_x = v, \quad v_y = 0;$$

отсюда

$$w_x = u_x + v_x = u \cos \alpha + v,$$

$$w_y = u_y + v_y = u \sin \alpha.$$

Модуль скорости человека относительно Земли:

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{u^2 \cos^2 \alpha + 2uv \cos \alpha + v^2 + u^2 \sin^2 \alpha} = \\ &= \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv \cos \alpha}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

а ее направление определяется соотношением

$$\sin \beta = \frac{w_y}{w} = \frac{u \sin \alpha}{w}. \quad (3.19)$$

Этот же результат можно получить с помощью теоремы косинусов.

3. Движение человека относительно платформы называется *относительным*, платформы относительно Земли — *переносным*, а человека относительно Земли — *сложным* движением.

Итак, в ньютоновской механике *скорость сложного движения равна векторной сумме скоростей относительного и переносного движений*:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}. \quad (3.20)$$

Выражение (3.20) представляет собой *классический закон сложения скоростей в векторном виде*. В теории относительности, как будет показано в § 12.5, скорости складываются по более сложным правилам, и выражением (3.20) там пользоваться нельзя.

## ГЛАВА 4 УСКОРЕНИЕ

### § 4.1. Среднее и мгновенное ускорение

1. *Средним ускорением* за данный промежуток времени называется физическая величина, численно равная отношению изменения скорости к промежутку времени.

Пусть в момент времени  $t_1$  материальная точка имела мгновенную скорость  $\boldsymbol{v}_1$ , а в момент  $t_2$  — соответственно скорость  $\boldsymbol{v}_2$ . Тогда, согласно определению,

$$\boldsymbol{a}_{\text{ср}} = \frac{\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}. \quad (4.1)$$

Из определения очевидно, что ускорение является вектором. Направление вектора ускорения зависит от характера движения материальной точки. Это будет дальше рассмотрено подробнее.

*Мгновенным ускорением* называется физическая величина, численно равная пределу, к которому стремится

среднее ускорение за бесконечно малый промежуток времени:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (4.2)$$

2. Единица измерения ускорения

$$[a] = \frac{[v]}{[t]}.$$

Поскольку в Международной системе единиц (СИ) единицей скорости является  $м/сек$ , то единицей измерения ускорения в этой системе единиц служит метр на секунду в квадрате ( $м/сек^2$ ). Применяется также  $1 \text{ см}/сек^2 = 10^{-2} \text{ м}/сек^2$ .

### § 4.2. Прямолинейное переменное движение

1. Если материальная точка движется по прямолинейной траектории, то векторы скорости и ускорения направлены вдоль этой же прямой. Следовательно, в случае прямолинейного движения материальной точки меняется лишь абсолютная величина скорости. А потому здесь среднее и мгновенное ускорения вычисляются так:

$$a_{\text{ср}} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (4.3)$$

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}. \quad (4.4)$$

2. Переменное движение называется *ускоренным*, если скорость материальной точки все время возрастает по абсолютной величине, т. е. для любого  $t_2 > t_1$  справедливо условие  $v_2 > v_1$ . Примером может служить движение тяжелого шарика, свободно падающего с небольшой высоты.

Соответственно *замедленным* называется движение точки, скорость которой все время убывает по абсолютной величине: для любого  $t_2 > t_1$  справедливо условие  $v_2 < v_1$ . Примером может служить движение тяжелого шарика, брошенного вертикально вверх (до остановки).

Из определений (4.3) и (4.4) вытекает, что в случае ускоренного движения материальной точки ускорение выражается положительным числом, в случае замедленного движения — отрицательным. Это означает, что в первом

случае векторы скорости и ускорения совпадают по направлению, во втором же направлении ускорения противоположно направлению скорости.

### § 4.3. Прямолинейное равнопеременное движение

1. Движение материальной точки называется *равнопеременным*, если его мгновенная скорость является линейной функцией времени:

$$v = v_0 + at, \quad (4.5)$$

где  $v_0$  и  $a$  — постоянные величины.

Здесь  $v_0$  имеет смысл *начальной скорости*. Действительно, при  $t=0$  скорость  $v=v_0$ , где под  $t=0$  понимается момент времени, когда началось наблюдение за движением материальной точки. Этот момент, вообще говоря, не совпадает с моментом начала движения, который часто вообще неизвестен (см. § 1.4). Вместе с тем не исключен случай, когда моменты начала наблюдения и начала движения совпадут (например, если включить секундомер в тот момент, когда мы выпускаем камень из рук и он начинает падать). В этом частном случае  $v_0=0$  и  $v=at$ .

2. Выясним смысл  $a$  в выражении (4.5). По определению, среднее ускорение равнопеременного движения

$$a_{\text{ср}} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{v_0 + at_2 - (v_0 + at_1)}{t_2 - t_1} = \frac{a(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = a.$$

Пределом постоянной величины является сама эта величина, поэтому мгновенное ускорение в случае равнопеременного движения есть величина  $a$ , входящая в выражение для мгновенной скорости (4.5).

Это позволяет по-новому определить понятие равнопеременного движения. *Равнопеременным* называется движение с постоянным ускорением.

### § 4.4. График скорости при равнопеременном движении

Чтобы построить график скорости, отложим на оси абсцисс мгновенные значения времени, на оси ординат — соответствующие им значения мгновенной скорости. Линия,



соединяющая изображающие точки, и является графиком скорости.

Графиком скорости в случае равнопеременного движения является прямая, отсекающая на оси ординат значение

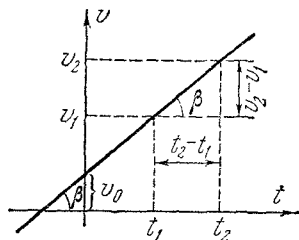


Рис. 4.1.

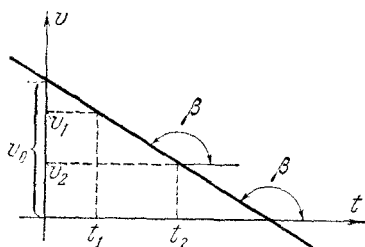


Рис. 4.2.

начальной скорости (рис. 4.1). Тангенс угла наклона графика численно равен ускорению:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = a. \quad (4.6)$$

В случае ускоренного движения график скорости образует с осью абсцисс острый угол (рис. 4.1), а в случае замедленного движения — тупой (рис. 4.2).

### § 4.5. Графическое вычисление пройденного пути

1. Соотношение между перемещением и пройденным путем было рассмотрено в § 1.6 на примере точки, движущейся вдоль оси абсцисс. Это соотношение справедливо и в том случае, когда точка движется по произвольной траектории.

На графике скорости равномерного движения (рис. 4.3) произведение  $vt$  есть площадь заштрихованного прямоугольника. Следовательно, пройденный путь  $l=vt$  численно равен площади этого прямоугольника (при соответствующем выборе масштаба).

Этот вывод можно обобщить на случай произвольного переменного движения. Действительно, пусть скорость материальной точки меняется по произвольному закону  $v=f(t)$ ; график этой функции изображен на рис. 4.4.

Разобьем промежуток времени  $t=t_2-t_1$  на несколько частей и будем считать, что в течение малого промежутка

времени  $\Delta t$  скорость не меняется, а затем скачком принимает новое значение. Это «скачкообразное» движение с какой-то степенью точности изображает истинное движение, при котором скорость изменялась не скачками, а плавно, как изображено на графике. Путь, пройденный в течение малого промежутка времени  $\Delta t$ , численно равен площади заштрихованной полочки, поскольку в те-

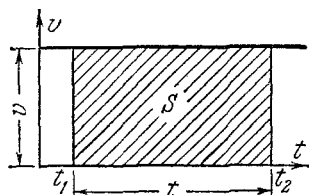


Рис. 4.3.

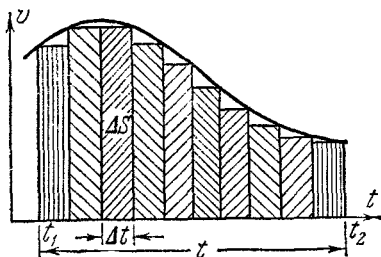


Рис. 4.4.

ние этого времени движение рассматривалось как равномерное. Путь же, пройденный за время  $t$ , *приблизженно* равен площади ступенчатой фигуры (конечно, речь идет о численном равенстве). Чем меньше будут промежутки  $\Delta t$ , тем точнее «скачкообразное» движение изображает истинное переменное движение. Точный результат получится, если мы перейдем к пределу при условии  $\Delta t \rightarrow 0$ .

2. Итак, на графике скорости *путь, пройденный при произвольном переменном движении материальной точки, численно равен площади криволинейной трапеции*, ограниченной снизу осью абсцисс, справа и слева — значением мгновенной скорости в моменты  $t_1$  и  $t_2$  и сверху — графиком скорости.

Заметим, что вычисление такого рода площадей является предметом раздела математики, который называется интегральным исчислением.

#### § 4.6. Пройденный путь и средняя скорость при равнопеременном движении

1. Пользуясь выводом предыдущего параграфа, легко вычислить путь, пройденный при равнопеременном движении материальной точки. Действительно, здесь скорость —

линейная функция времени, график скорости — прямая линия, и искомая площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту (см. рис. 4.1). Отсюда следует, что при  $t_1=0$  и  $t_2=t$  пройденный путь можно вычислить по формуле

$$l - l_0 = \frac{v_0 + v}{2} t. \quad (4.7)$$

Подставив значение  $v=v_0+at$ , получим

$$l = l_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (4.8)$$

Таким образом, координата материальной точки, совершающей равнопеременное движение, является квадратичной функцией времени. Уравнение (4.8) и есть искомый закон движения. График пройденного пути является параболой. На рис. 4.5 изображен график простейшего случая движения, когда

$$l_0=0, \quad v_0=0 \quad \text{и} \quad l = \frac{at^2}{2}.$$

Нетрудно убедиться, что рассмотренные в § 1.5 примеры переменных движений являются равнопеременными движениями.

2. Воспользовавшись определением средней скорости (3.13), легко показать, что абсолютная величина средней скорости при равнопеременном движении материальной точки есть полусумма начальной и конечной скорости:

$$v_{\text{ср}} = \frac{v_1 + v_2}{2}. \quad (4.9)$$

Действительно, по определению

$$v_{\text{ср}} = \frac{l_2 - l_1}{t_2 - t_1}. \quad (4.10)$$

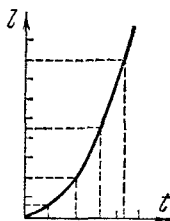


Рис. 4.5.

Подставив значения  $l_2$  и  $l_1$  и проделав несложные преобразования, имеем

$$\begin{aligned} v_{\text{ср}} &= \frac{l_0 + v_0 t_2 + \frac{at^2}{2} - \left( l_0 + v_0 t_1 + \frac{at^2}{2} \right)}{t_2 - t_1} = \\ &= \frac{v_0 (t_2 - t_1) + \frac{a}{2} (t_2 - t_1) (t_2 + t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{2v_0 + at_1 + at_2}{2} = \\ &= \frac{(v_0 + at_1) + (v_0 + at_2)}{2} = \frac{v_1 + v_2}{2}. \end{aligned}$$

Заметим, что этот вывод применим *только* для равнопеременного движения. В общем случае переменного движения он несправедлив. Так, пусть автобус трогается от остановки и тормозит на следующей остановке. Тогда  $v_1 = v_2 = 0$ , но средняя скорость, очевидно, нулю не равна.

#### § 4.7. Равномерное движение материальной точки по окружности

1. Пусть материальная точка равномерно движется по окружности радиуса  $r$ . Перемещением точки за время  $\Delta t$  является дуга  $\Delta l = r \cdot \Delta \alpha$ , где  $\Delta \alpha$  — угол поворота радиуса (рис. 4.6).

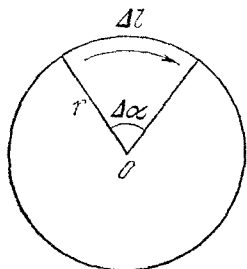


Рис. 4.6.

При равномерном движении материальной точки по окружности величина

$$\omega = \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} \quad (4.11)$$

называется *угловой скоростью точки*.

Единица измерения угловой скорости — радиан в секунду (*рад/сек*).

Размерность угловой скорости

$$[\omega] = \frac{[\alpha]}{[t]}.$$

Из определения скорости равномерного движения

$$v = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{r \cdot \Delta \alpha}{\Delta t} = r\omega. \quad (4.12)$$

2. Время  $T$ , в течение которого точка совершает полный оборот по окружности, называется *периодом*. Величина  $\nu$ , обратная периоду, показывает, сколько оборотов совершает точка в единицу времени. Она называется *частотой*:

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (4.13)$$

3. В течение промежутка времени, равного периоду, перемещение точки составит полную окружность, т. е. при  $\Delta t = T$  перемещение  $\Delta l = 2\pi r$ . Отсюда следует:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r \nu. \quad (4.14)$$

Сравнив (4.12) и (4.14), получим

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \nu. \quad (4.15)$$

### § 4.8. Ускорение при равномерном движении материальной точки по окружности

1. При равномерном движении материальной точки по окружности абсолютная величина скорости не меняется:  $|\mathbf{v}| = v = \text{const}$ . Однако это вовсе не значит, что точка движется без ускорения. Действительно, здесь непрерывно меняется *направление* скорости, как вектора, направленного по касательной к траектории. А это и означает, что точка движется с ускорением.

2. Вектор изменения скорости  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$  построим (рис. 4.7) согласно правилу, изложенному в п. 2 § 3.4. При малом  $\Delta t$  дуга  $AB$  мало отличается от хорды  $AB$ . Из подобия треугольников  $AOB$  и  $BMN$  следует

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta l}{r}.$$

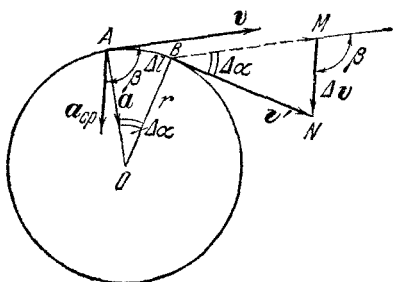


Рис. 4.7.

Отсюда абсолютная величина среднего ускорения

$$a_{\text{ср}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} \cdot \frac{\Delta l}{\Delta t}.$$

Абсолютная величина мгновенного ускорения

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{v}{r} \cdot \frac{\Delta l}{\Delta t} \right).$$

Постоянный множитель  $v/r$  выносим за знак предела; тогда

$$a = \frac{v}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{v}{r} \cdot v = \frac{v^2}{r}. \quad (4.16)$$

Однако, согласно (4.12),  $v = \omega r$ . Подставив в (4.16), получим

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r. \quad (4.17)$$

3. Нам осталось определить направление вектора мгновенного ускорения.

Вектор среднего ускорения составляет с вектором скорости угол  $\beta = \frac{\pi + \Delta\alpha}{2}$ . Но при  $\Delta t \rightarrow 0$  и угол  $\Delta\alpha \rightarrow 0$ . Следовательно, вектор мгновенного ускорения составит с вектором скорости угол

$$\varphi = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\pi + \Delta\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}. \quad (4.18)$$

Итак, *равномерно перемещающаяся по окружности материальная точка движется с ускорением, направленным перпендикулярно вектору скорости, т. е. по радиусу к центру. Поэтому это ускорение называется нормальным или центростремительным.*

## ГЛАВА 5

### СИЛА

#### § 5.1. Сила — мера взаимодействия тел

1. Опыт показывает, что все тела в природе так или иначе взаимодействуют друг с другом. Так, например, атмосферный воздух давит на поверхность Земли и все находящиеся на ней предметы; взаимодействие между молекулами воды

и поверхностью тела купальщика приводит к тому, что к телу прилипают капли жидкости; сильное взаимодействие между составными частями атомного ядра (протонами и нейтронами) является причиной того, что атомные ядра чрезвычайно трудно разрушить.

*Мерой взаимодействия тел или частиц, из которых состоят тела, является сила.*

Понятие силы первоначально возникло из оценки мышечного напряжения. Чтобы поднять камень, сдвинуть лодку, натянуть тетиву лука и т. д., требуется некоторое напряжение мышц, различное в разных случаях. Степень этого напряжения и оценивалась силой. Можно привести примеры ряда выражений, где и сейчас слово «сила» применяется в своем первоначальном смысле: «сильный человек», «сделать отчаянное усилие», «у меня силы на исходе» и т. д.

Затем люди убедились, что понятие силы может служить и для характеристики воздействия одних тел на другие. Так появились понятия «сильный ветер», «сильное течение», «сильный удар» как характеристики внешних воздействий, равносильных мышечному усилию.

В дальнейшем термин «сила» стал трактоваться весьма широко. Возникли выражения «сила воли», «сила духа», «сильнее смерти» и тому подобные. Такое расширение понятия о силе служило и служит причиной ряда недоразумений, и его следует избегать. К сожалению, до сих пор пользуются рядом терминов, таких, например, как «сила света», «электродвижущая сила», «лошадиная сила» и т. д., хотя эти понятия ничего общего с силой не имеют.

Термин «сила» мы будем в механике применять только в прямом его смысле — как меру взаимодействия тел.

2. В современной физике различают следующие типы взаимодействий:

а) гравитационное, возникающее между телами за счет всемирного тяготения;

б) электромагнитное, возникающее между неподвижными или движущимися заряженными частицами или телами;

в) ядерное, характеризующее взаимодействие элементарных частиц, например тех, которые входят в состав атомного ядра. Подробнее о ядерных взаимодействиях будет сказано во втором томе.

В механике рассматриваются силы, возникающие при непосредственном контакте тел, — силы трения и силы упругости. Кроме того, в механике изучаются силы тяготения.

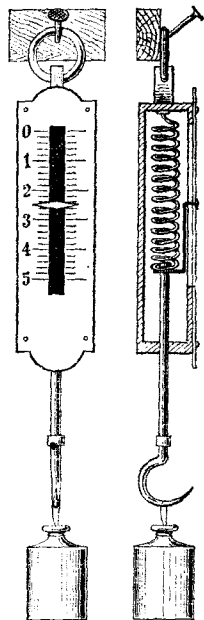


Рис. 5.1.

Ядерные силы действуют на весьма малых расстояниях, порядка  $10^{-15}$  м. Поэтому они не влияют на движение макроскопических тел, и в механике их не рассматривают. Здесь обычно не рассматривают также и электрические, и магнитные силы, действующие между заряженными телами или частицами.

3. Результатом взаимодействия тел является либо деформация (изменение размеров или формы тела), либо ускорение (изменение величины или направления скорости). Конечно, не исключено, что одновременно могут возникнуть и деформация, и ускорение.

Каждое из этих проявлений силы может быть использовано для ее измерения. Однако измерить величину деформации часто значительно проще, чем ускорение. Поэтому основной деталью прибора для измерения сил — *динамометра* (от латинского *dynamis* — сила) — является пружина, степень деформации

которой зависит от величины измеряемой силы (рис. 5.1).

## § 5.2. Упругие и пластические деформации

1. Деформация тела называется *упругой*, если после снятия нагрузки полностью восстанавливаются размеры и форма тела. *Пластической* называется деформация, в результате которой возникающие изменения размеров и формы тела не исчезают после прекращения действия силы. После пластической деформации тело сохраняет (частично или полностью) вновь приобретенную форму и измененные размеры.

Мосты, балки, стены, детали станков при действии на них сил должны работать в области упругих деформаций—



это обеспечит длительную сохранность и надежность конструкции. Наоборот, при механической обработке материала (ковка, штамповка, гнутье и т. п.) его подвергают пластической деформации с таким расчетом, чтобы деталь, полученная в результате обработки материала, получила нужные размеры и форму и сохранила их после снятия усилий.

2. Характер деформации зависит от величины и длительности действия нагрузки, а также от материала, из которого изготовлено тело, и состояния этого материала (температура, предшествовавшая обработке, и т. п.).

Так, если изогнуть стальную пластинку и тут же отпустить ее, то она примет первоначальную форму; ясно, что здесь мы имеем дело с упругой деформацией. Однако если пластинку закрепить в изогнутом состоянии на длительное время, то после снятия внешних усилий она уже полностью не выпрямится. Значительное увеличение длительности внешнего воздействия превращает упругую деформацию в пластическую.

На характер деформации очень сильно влияет температура. Стальная пластинка, нагретая до температуры желтого каления, становится пластичной при сравнительно небольших внешних усилиях, которые при комнатных температурах способны вызывать в этой пластинке лишь упругие деформации. Наоборот, свинец, весьма пластичный при комнатной температуре, становится упругим при низких температурах. Свинцовый колокольчик, охлажденный жидким воздухом, издает чистый звон, а это значит, что в нем происходят упругие деформации. Увеличение пластичности материалов с ростом температуры используется в технике при обработке металлов.

Таким образом, нет резких границ между упругими и пластическими деформациями. Однако, как показывает опыт, небольшие и кратковременные деформации могут с достаточной степенью точности рассматриваться как упругие.

3. Из практики известно, что чем бóльшую деформацию мы желаем создать, тем большее усилие нужно приложить к деформируемому телу. Следовательно, по величине деформации  $\Delta l$  можно судить о величине силы:  $\Delta l = \frac{F}{k}$ . Анализ ряда экспериментов показывает, что *абсолютная величина*

*упругой деформации пропорциональна приложенной силе.* Это утверждение составляет содержание закона Гука.

Так, при деформации удлинения (или сжатия) тела

$$F = k(l - l_0) = k \Delta l, \quad (5.1)$$

где  $F$  — абсолютная величина силы,  $l_0$  — первоначальная длина тела,  $l$  — длина деформированного тела и  $k$  — коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом упругости*. Коэффициент упругости численно равен абсолютной величине силы, вызывающей деформацию, равную единице длины.

Из закона Гука следует, что шкала динамометра должна быть равномерной (см. рис. 5.1). Это существенно облегчает градуировку динамометра.

### § 5.3. Сила — вектор

1. Всякая сила имеет определенное направление, причем результат действия силы зависит не только от ее величины, но и от направления. Например, сила трения чаще всего направлена противоположно вектору скорости. Если, например, под действием некоторой силы пружина растягивается, то при изменении направления силы пружина сожмется. Ударяя по мячу, футболист сообщает ему ускорение, направленное в ту же сторону, что и сила, с которой нога футболиста действует на мяч. Наконец, из закона Гука видно, что сила имеет векторный характер, ибо коэффициент упругости есть скалярная величина, удлинение же  $\Delta l = l_2 - l_1$  есть вектор, а при умножении вектора на скаляр получается вектор (см. § 3.3).

Итак, *сила является вектором.*

2. Закон Гука можно записать в векторной форме, учитывая направление векторов перемещения и силы. При этом следует различать внешнюю силу и силу упругости.

Пусть внешнее тело, например рука, растягивает пружину (рис. 5.2). Сила, с которой внешнее тело действует на пружину, называется *внешней силой*. Направление внешней силы совпадает с направлением перемещения, следовательно, оба вектора имеют одинаковое направление. Итак,

$$F_{\text{внешн}} = k \Delta l. \quad (5.2)$$

Опыт показывает, что деформированная пружина действует на руку с силой, равной внешней силе по величине, но противоположной по направлению. Сила, с которой

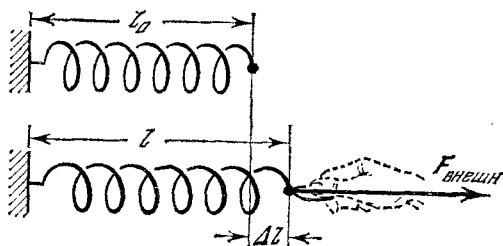


Рис. 5.2.

деформированная пружина действует на внешнее тело, называется *силой упругости* (рис. 5.3). Поскольку направление силы упругости противоположно вектору удлинения, то

$$F_{\text{упр}} = -k \Delta l. \quad (5.3)$$

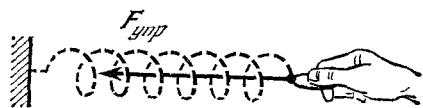


Рис. 5.3.

3. Анализируя различные виды взаимодействия тел, Ньютон пришел к выводу, что всегда два тела взаимодействуют с силами, равными по величине, но противоположными по направлению:

$$F_{12} = -F_{21}, \quad (5.4)$$

где  $F_{12}$  — сила, с которой первое тело действует на второе,

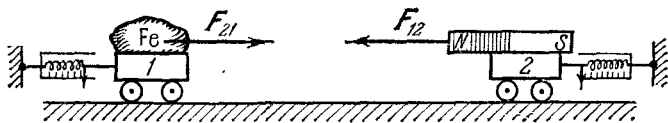


Рис. 5.4.

а  $F_{21}$  — сила, с которой второе тело действует на первое. Это утверждение называется *третьим законом Ньютона*.

В качестве примера можно рассмотреть опыт по взаимодействию магнита с куском железа. Динамометры, при-

крепленные к обоим телам, регистрируют одинаковые по величине, но противоположные по направлению силы взаимодействия (рис. 5.4).

Примеры на применение третьего закона Ньютона будут рассмотрены в последующих главах.

### § 5.4. Сложение и разложение сил, приложенных к материальной точке

1. Если к материальной точке приложено несколько сил, то их можно заменить *равнодействующей* силой. *Равнодействующая* является векторной суммой слагаемых сил, и ее

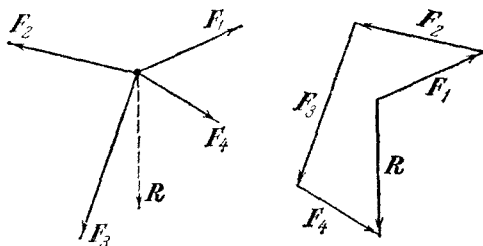


Рис. 5.5.

можно найти по правилу многоугольника (рис. 5.5). Для двух сил равнодействующую можно найти и по правилу параллелограмма (рис. 5.6), однако применение этого правила для нескольких сил менее удобно, чем использование правила многоугольника.

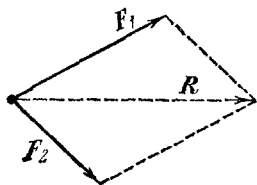


Рис. 5.6.

Если многоугольник сил окажется замкнутым, то это означает, что равнодействующая данной системы сил равна нулю. Такая система сил называется *уравновешенной*. Примером может служить система из трех равных по абсолютной величине сил,

расположенных в одной плоскости под углами  $120^\circ$  друг к другу (рис. 5.7).

Систему сил, приложенных к одной точке, можно уравновесить, приложив к ней *уравновешивающую силу*. Уравно-

вешивающая сила по абсолютной величине равна равнодействующей, но имеет противоположное направление.

2. Силу, как и любой вектор, можно разложить на две составляющие (см. § 3.4). На практике часто встречается

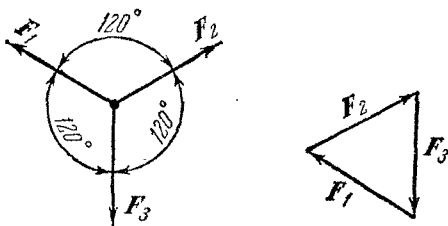


Рис. 5.7.

случай разложения силы на две составляющие с заданными направлениями.

Так, пусть на кронштейн действует некоторая сила  $P$ , например вес какого-то груза (рис. 5.8). Требуется найти

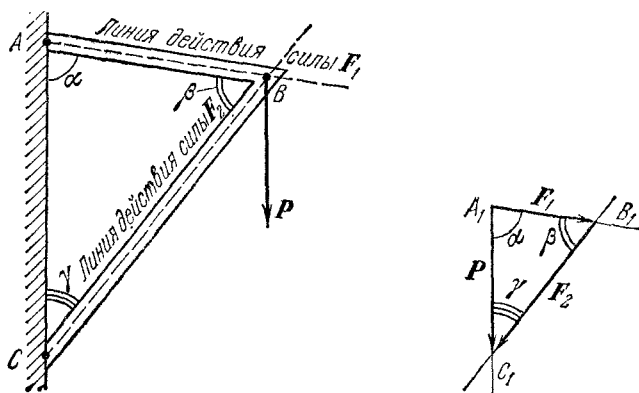


Рис. 5.8.

усилия в стержнях. В этом случае искомые силы направлены вдоль стержней. Строим треугольник  $A_1B_1C_1$  так, чтобы его стороны были параллельны силе  $P$  и стержням, а длина стороны  $A_1C_1$  равна  $P$  (в избранном масштабе). Тогда вектор  $F_1 = \overrightarrow{A_1B_1}$  является силой, растягивающей стержень

$AB$ , а вектор  $F_2 = \overrightarrow{B_1C_1}$  — силой, сжимающей стержень  $BC$ . В избранном масштабе силы  $F_1$  и  $F_2$  равны сторонам треугольника  $A_1B_1$  и  $B_1C_1$ . Впрочем, их можно вычислить из пропорции

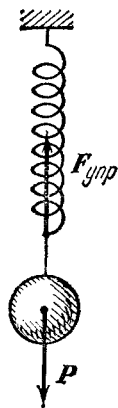
$$\frac{F_1}{AB} = \frac{F_2}{BC} = \frac{P}{AC}.$$

## ГЛАВА 6 ВЕС И МАССА

### § 6.1. Вес

1. Из повседневного опыта известно, что все тела падают на Землю, если этому движению не препятствуют другие тела. Что же является причиной падения?

Проведем такой опыт. Подвяжем ниткой гирию к пружине и отпустим ее. Гирия продвинется слегка вниз и растянет пружину, затем остановится. Деформированная пружина действует на гирию с некоторой силой  $F_{\text{упр}}$ , направленной вертикально вверх, однако гирия остается в равновесии. А это возможно лишь в том случае, если кроме силы упругости на гирию действует еще одна сила  $P$ , равная ей по абсолютной величине, но направленная вертикально вниз, к Земле (рис. 6.1).



Если пережечь нить, связывающую гирию с пружиной, то взаимодействие между ними исчезнет. Пружина вновь примет первоначальную форму и размеры. Взаимодействие же между Землей и гирией сохранится — Земля продолжает притягивать гирию с силой  $P$ . Под действием этой силы гирия выходит из состояния покоя и начинает падать на Землю.

Рис. 6.1. *Сила, с которой Земля притягивает к себе тела, называется силой тяжести.*

2. Сила тяжести действует на все тела, расположенные вблизи Земли. И если не все они падают на Землю, то это происходит оттого, что их движение ограничивается некоторыми другими телами — опорой, нитью, пружиной, стенкой и т. п.

Тела, которые ограничивают движение других тел, называются *связями*. Происхождение этого термина очевидно: эти тела связывают движение данного тела, препятствуют его свободному перемещению. Так, поверхность стола является связью для всех предметов, лежащих на нем; пол служит связью для стола и т. д.

Под действием силы тяжести связи деформируются, и реакция деформированной связи по третьему закону Ньютона уравнивает силу тяжести. Но если деформацию пружины обнаружить сравнительно легко, то для наблюдения деформации других связей нередко необходимы приборы, позволяющие регистрировать очень малые перемещения.

3. *Весом называется сила, с которой тело действует на связь (давит на горизонтальную опору или растягивает нить) вследствие притяжения этого тела к Земле.*

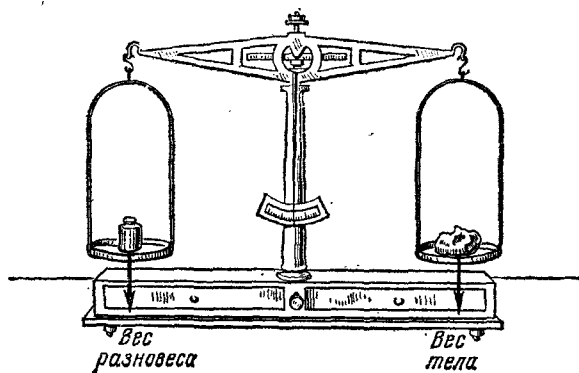


Рис. 6.2.

Реакцией деформированной связи можно воспользоваться для измерения веса. Для этой цели применяется динамометр (пружинные весы), градуированный в каких-либо единицах силы.

Впрочем, можно поступить и иначе. Подберем *эталонную гирию* — тело, вес которого равен единице силы, и изготовим гири в несколько раз больше или меньше эталона. Эта система гирь называется *разновесом*. Поместим на одну чашку равноплечих рычажных весов некоторое тело, вес

которого мы желаем определить, а на другую чашку — гири такой величины, чтобы весы уравнились (рис. 6.2). Поскольку для равновесия равноплечих рычажных весов необходимо, чтобы на обе чашки действовали равные силы, мы заключаем, что вес испытуемого тела равен весу гирь.

Итак, *вес можно определить на пружинных или рычажных весах.*

## § 6.2. Свободное падение

1. *Свободным падением* называется движение тел под действием одной только силы тяжести. Для того чтобы исследовать свободное падение тел, нужно освободить их от действия всех посторонних сил, в частности от сопротивления воздуха.

Легко убедиться, что сопротивление воздуха существенно влияет на характер падения тел. Выпустим из рук камень и кусок ваты. Камень быстро упадет на Землю, вата опускается медленнее. У нас может сложиться представление, что тяжелые тела падают быстрее легких. Однако если вату скатать в плотный шарик, то он значительно быстрее упадет на Землю. Что же изменилось в этом опыте? Уменьшился размер шарика и соответственно сопротивление воздуха. Точно так же кусок бумаги, скатанный в плотный комочек, испытывает значительно меньшее сопротивление воздуха и потому падает быстрее, чем лист одинакового с ним веса.

Естественно, возникает вопрос: а как будут падать тела в вакууме, когда сопротивление воздуха исключено? Будут ли они падать с одинаковым ускорением? В дальнейшем мы убедимся, что это действительно так, что в данной точке Земли все тела, независимо от их веса, падают с одинаковым ускорением. Здесь же мы это утверждение подтвердим, рассмотрев следующий опыт (рис. 6.3). Возьмем стеклянную трубку длиной более метра, запаянную с одной стороны, а с другой стороны закрытую крышкой с патрубком. Внутри трубки находится кусочек свинца и перышко.

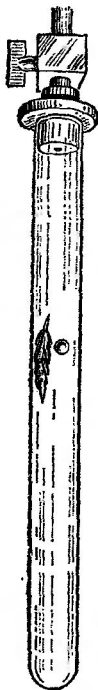


Рис. 6.3.



Если резко опрокинуть трубку, то свинец падает вниз быстро, а перышко падает очень медленно. Присоединим трубку к воздушному насосу и выкачаем из нее воздух. Вновь перевернув трубку, убедимся, что оба тела падают одинаково — перышко несколько не отстает от свинца!

Таким образом, *все тела, независимо от их веса, свободно падают совершенно одинаково.*

2. Впервые к такой мысли пришел Галилей в начале XVII в. До этого времени в науке господствовали представления Аристотеля о том, что тяжелые тела падают быстрее легких. Чтобы убедиться в правильности своей точки зрения, Галилей поставил ряд опытов, бросая разные тела с знаменитой Пизанской наклонной башни и измеряя время их падения.

Галилей показал, что свободное падение является равноускоренным движением. Для доказательства этого положения достаточно, например, убедиться, что *расстояние*, пройденное телом при свободном падении, *пропорционально квадрату времени движения* (см. § 4.6). Галилей не имел приборов, позволяющих точно измерять малые промежутки времени. Поэтому он имитировал свободное падение движением тела по наклонной плоскости.

3. В настоящее время можно с помощью электрического секундомера очень точно измерить время падения тела с любой высоты. Пусть небольшой стальной шарик удерживается на некоторой высоте с помощью электромагнита (рис. 6.4). Специальное реле позволяет разомкнуть ток в цепи электромагнита и одновременно включить электрический секундомер. Шарик, падая вдоль вертикальной линейки, проходит определенное расстояние и в конце пути размыкает цепь,

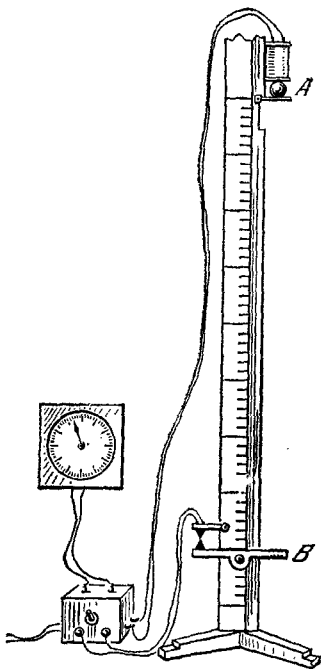


Рис. 6.4.

тем самым останавливая секундомер. Меняя это расстояние и измеряя каждый раз время падения, легко установить закон движения. Сопротивление воздуха можно исключить, поместив всю установку в трубку и выкачав из нее воздух. Впрочем, при падении маленького тяжелого шарика с малой высоты можно пренебречь сопротивлением воздуха (см. § 11.9).

Результаты экспериментов убедительно свидетельствуют о следующем:

а) *Свободное падение является равноускоренным движением.*

б) *Все тела свободно падают с одинаковым ускорением  $g$  (от латинского gravitas — тяжесть).*

в) *Ускорение свободного падения в разных точках Земли несколько различно. При не очень точных измерениях этой разницей (которая не превышает 0,6%) пренебрегают и считают  $g=9,81$  м/сек<sup>2</sup>.*

### § 6.3. Масса тела

1. Опыт показывает, что сила тяжести, действующая на данное тело в разных точках Земли, несколько различна — она меняется в зависимости от географической широты и от высоты над уровнем моря; точно так же меняется и ускорение свободного падения. Однако для любого тела отношение силы тяжести к ускорению свободного падения является постоянной величиной:

$$\frac{P_1}{g_1} = \frac{P_2}{g_2} = \frac{P_3}{g_3} = \dots = \text{const.}$$

Следовательно, отношение  $P/g$  является некоторой характеристикой данного тела. Эта величина называется *массой* тела.

*Массой тела называется отношение действующей на тело силы тяжести к ускорению свободного падения:*

$$m = \frac{P}{g}. \quad (6.1)$$

Понятие массы является одним из важнейших в физике. Оно будет неоднократно рассматриваться в дальнейших разделах курса: при изучении законов Ньютона, закона тяготения, в связи с такими важнейшими понятиями, как им-

пульс и энергия. Это позволит значительно углубить и расширить наши представления о массе.

2. Масса является скалярной величиной, а сила тяжести и ускорение свободного падения — это векторы, имеющие одинаковое направление. Соотношение (6.1) лучше записать в векторной форме:

$$P = mg. \quad (6.2)$$

3. Поскольку ускорение свободного падения для всех тел одно и то же, то из (6.1) следует:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{P_1}{P_2}, \quad (6.3)$$

т. е. *отношение масс двух тел равно отношению их весов*, поскольку здесь вес равен силе тяжести.

На этом основан метод определения масс с помощью рычажных весов. Как уже указывалось (см. рис. 6.2), рычажные весы находятся в равновесии, если вес тела равен весу гирь. *Но тогда и масса тела равна массе гирь*. Изготовив эталонную гирю и приняв ее массу за единицу, мы можем на рычажных весах сравнить с ней массу любого другого тела. Следовательно, слово «взвешивание» применяется фактически в двух смыслах: как определение веса и как определение массы.

Итак, *масса тела может быть определена на рычажных весах*.

### § 6.4. Плотность вещества

Если изготовить из одного и того же вещества тела различных объемов, то и массы их будут различными. Однако, как показывает опыт, отношение масс этих тел к их объемам будет постоянной величиной:

$$\frac{m_1}{V_1} = \frac{m_2}{V_2} = \dots = \text{const.}$$

Это отношение может служить характеристикой вещества его *плотностью*.

*Плотностью вещества называется отношение массы тела к его объему:*

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (6.4)$$

Как будет показано ниже, плотность вещества зависит от его температуры, внешнего давления и агрегатного состояния. Поэтому в справочниках всегда указываются условия, при которых справедливы табличные данные, — без этих указаний они лишены смысла.

## ГЛАВА 7

# ОСНОВНОЙ ЗАКОН ДИНАМИКИ

### § 7.1. Сила и ускорение

1. Из закона инерции следует, что тело само по себе, без взаимодействия с окружающими его телами, не может изменить своей скорости. Всякое изменение величины или направления скорости движения тела вызывается воздействием на него внешних тел. Это воздействие, как известно, характеризуется силами (см. § 5.1). *Основной закон динамики* (иначе называемый вторым законом Ньютона) *выражает соотношение между силой и изменением скорости взаимодействующих тел.*

Наиболее простой вид основной закон механики имеет в инерциальных системах отсчета. Случай неинерциальных систем будет рассмотрен ниже (гл. 24).

Вначале мы ознакомимся с основным законом механики при условии, что скорость движения материальной точки относительно выбранной инерциальной системы отсчета значительно меньше скорости света. Далее будет показано, что многие задачи механики могут быть решены в этом приближении с точностью, достаточной для практики. Более общий релятивистский случай будет рассмотрен ниже (гл. 13).

2. Смысл основного закона динамики можно выяснить на основе следующего эксперимента. В вагонетке между двумя стенами заделан твердый и гладкий стержень, по которому с ничтожным трением может перемещаться тело массой  $m$ . К телу прикреплен динамометр, который вторым концом крепится к передней стенке (рис. 7.1). Пусть вагонетка движется относительно инерциальной системы отсчета (например, Земли) с некоторым ускорением  $a$ .

Если тело неподвижно относительно вагонетки, то относительно Земли (инерциальной системы отсчета) оно движется с тем же ускорением  $a$ , что и вагонетка. Опыт покажет, что в этом случае пружина динамометра находится в деформированном состоянии. А это означает, что *пружина действует на тело с некоторой силой, которая и сообщает ему ускорение*. Действительно, если нарушить взаимодействие между пружиной и телом (скажем, пережечь соединяющую их нить), то пружина придет в недеформированное

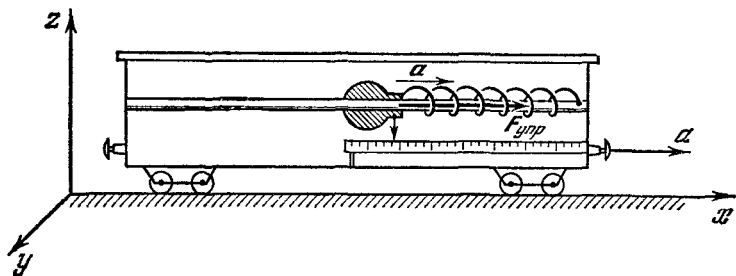


Рис. 7.1.

состояние. Тело же будет двигаться относительно Земли равномерно, сохраняя по инерции ту скорость, которую оно приобрело к моменту прекращения взаимодействия.

Проделав опыты с телами разной массы и при разных ускорениях вагонетки, мы убедимся, что степень растяжения пружины пропорциональна массе ускоряемого тела (при неизменном ускорении) и ускорению (при данной массе тела). Кроме того, растяжение пружины не зависит от скорости движения тела и вагонетки. Но по определению (см. § 5.2) сила упругости пропорциональна растяжению пружины, так что по величине растяжения пружины мы можем судить о величине действующей силы.

Результаты эксперимента можно сформулировать так:

а) *Если тело движется с ускорением относительно некоторой инерциальной системы отсчета, то на него действует сила.*

б) *Сила вызывает ускорение, которое пропорционально этой силе и совпадает с ней по направлению; при заданном ускорении сила пропорциональна массе тела, которому она сообщает ускорение.*

в) При скоростях, значительно меньших скорости света, сила не зависит от скорости движения ускоряемого тела.

3. Аналогичный результат получится при исследовании криволинейного движения материальной точки, что покажет следующий эксперимент. Стержень с грузом и пружиной

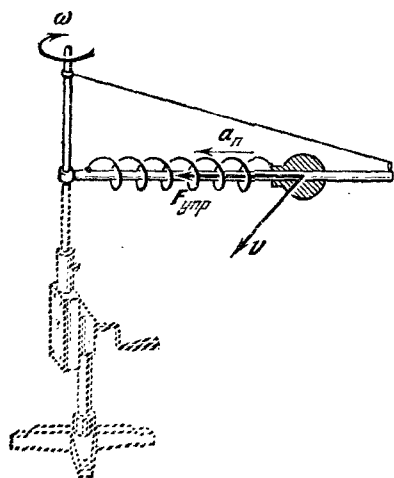


Рис. 7.2.

крепится одним концом к оси центробежной машины и приводится во вращение вокруг этой оси (рис. 7.2). Мы обнаружим, что при вращении системы пружина деформируется и действует на тело с силой, которая зависит от массы тела, расстояния от тела до оси вращения и от скорости вращения.

Этот результат легко объяснить. При равномерном движении тела по окружности абсолютная величина скорости остается постоянной, направление же вектора скорости все время меняется. А мы уже

установили (см. § 4.8), что в этом случае имеется *нормальное* или *центростремительное* ускорение:

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r.$$

Деформированная пружина и сообщает телу это ускорение.

Проделав опыты с различными телами при разных скоростях их движения и при различных расстояниях от тела до оси вращения, мы убедимся, что и в этом случае на тело действует сила, пропорциональная массе тела и центростремительному ускорению. Произведение массы тела на центростремительное ускорение называется *центростремительной силой*.

4. Обобщая результаты экспериментов, о которых говорилось выше, мы приходим к выводу: *сила равна произведе-*

нию массы тела на ускорение, которое она сообщает этому телу:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \quad (7.1)$$

Это и есть второй закон Ньютона (или основной закон динамики) для случая, когда скорость движения тела много меньше скорости света в вакууме.

5. Основной закон динамики можно записать и в несколько иной форме, которая часто бывает более удобной. По определению ускорения

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1}.$$

Подставив в выражение (7.1), имеем

$$\mathbf{F} = \frac{m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta(m\mathbf{v})}{\Delta t}. \quad (7.2)$$

*Импульсом* (или количеством движения) называется вектор, равный произведению массы тела на его скорость:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (7.3)$$

Тогда основной закон динамики (7.2) можно сформулировать следующим образом: *сила равна изменению импульса в единицу времени,*

$$\mathbf{F} = \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t}. \quad (7.4)$$

Это и есть наиболее общая формулировка основного закона динамики.

6. Наконец, если на тело действует некоторая совокупность сил, равнодействующая которых равна  $\mathbf{R}$ , то второй закон Ньютона записывается так:

$$\mathbf{R} = m\mathbf{a} = \frac{\Delta(m\mathbf{v})}{\Delta t}. \quad (7.5)$$

Заметим, что если материальная точка движется по окружности равномерно, то равнодействующая всех сил направлена к центру. Эта равнодействующая и будет центростремительной силой.

## § 7.2. Применения основного закона динамики

1. С помощью основного закона динамики можно определить силы, действующие на тело, либо характер движения тела по заданным силам. Так, если задан закон движения, то можно найти ускорение, с которым движется тело. Зная же ускорение и массу тела, легко определить действующую силу.

При составлении уравнения движения надо пользоваться следующим правилом:

вначале нужно найти *все* силы, действующие на данную материальную точку (включая силы реакции);

затем следует найти равнодействующую этих сил;

исходя из основного закона динамики, записать, что равнодействующая всех сил равна произведению массы на ускорение.

Составленное уравнение движения следует решить относительно неизвестной нам величины.

2. *Пример 1.* На полу лифта находится человек, масса которого  $m$ . Определить, с какой силой давит человек на пол лифта, если лифт движется:

- а) вертикально вверх с ускорением;
- б) вертикально вверх с замедлением;
- в) вертикально вниз с ускорением;
- г) вертикально вниз с замедлением;
- д) равномерно.

Поскольку человек покоится относительно лифта, то он движется относительно Земли с тем же ускорением, что и лифт. По третьему закону Ньютона нам известно, что пол лифта давит на человека с такой же силой, с какой человек давит на пол, но направления этих сил противоположны. Итак, на человека действуют две силы: сила тяжести  $P$  и реакция пола  $Q$ .

Направим ось  $z$  вертикально вверх. Тогда сила реакции является положительным вектором, сила тяжести — отрицательным, знак же вектора ускорения зависит от характера движения (рис. 7.3). В случае (а) вектор ускорения направлен вертикально вверх, и потому он положителен; то же относится и к случаю (г) — вектор ускорения при замедленном движении направлен против вектора скорости.



В случаях же (б) и (в) вектор ускорения направлен вертикально вниз.

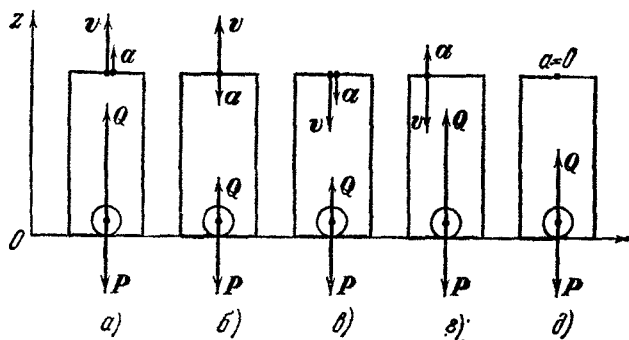


Рис. 7.3.

Уравнение движения в векторном виде запишется так:

$$P + Q = ma. \quad (7.6)$$

Чтобы перейти к скалярной записи, следует учесть знаки векторов. Для случаев (а) и (г)

$$-P + Q = ma,$$

откуда

$$Q = P + ma = m(g + a).$$

Для случаев (б) и (в):

$$-P + Q = -ma,$$

откуда

$$Q = m(g - a).$$

Наконец, для случая (д)

$$-P + Q = 0,$$

откуда

$$Q = P.$$

3. Итак, если лифт движется относительно Земли с ускорением и является, тем самым, *неинерциальной* системой

отсчета, то сила, с которой тело давит на опору (т. е. вес), не равна силе тяжести. В частности, если ускорение лифта направлено противоположно ускорению силы тяжести, то сила давления на опору *больше* силы тяжести. Когда же ускорение лифта совпадает по направлению с ускорением силы тяжести, то сила давления тела на опору *меньше* силы тяжести. Если при этом окажется, что  $a=g$ , то из (7.6) следует  $Q=0$ , т. е. тело вообще не давит на опору.

И только в том случае, когда лифт движется равномерно относительно Земли (и является, тем самым, *инерциальной* системой отсчета), сила давления тела на опору равна силе тяжести.

4. *Пример 2.* Самолет, двигаясь со скоростью  $v$ , совершает в вертикальной плоскости мертвую петлю радиуса  $r$ .

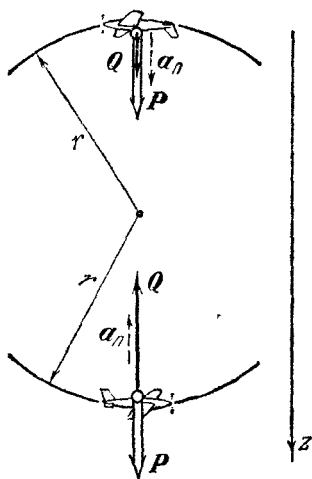


Рис. 7.4.

С какой силой летчик прижимается к сидению? При какой минимальной скорости летчик не давит на сидение? Рассмотрим верхнюю и нижнюю точки траектории.

Вместо силы, с которой летчик прижимается к сидению, мы найдем равную ей и противоположно направленную силу реакции. На летчика действуют две силы: реакция сидения и притяжение Земли. В нижней точке реакция направлена вертикально вверх, в верхней точке — вертикально вниз. Хотя самолет движется по окружности равномерно, вектор скорости все время меняется по направлению, следовательно, имеется нормальное

(центростремительное) ускорение  $a_n=v^2/r$ . В нижней точке траектории оно направлено вертикально вверх, в верхней — вниз (рис. 7.4). Направим для удобства ось  $z$  вертикально вниз, вдоль силы тяжести.

Уравнение движения в векторной форме имеет вид

$$P + Q = ma_n. \quad (7.7)$$

В проекциях на ось  $z$  получим для нижней точки

$$P - Q = -\frac{mv^2}{r}, \text{ откуда } Q = P + \frac{mv^2}{r} = m \left( \frac{v^2}{r} + g \right).$$

Следовательно, здесь летчик испытывает перегрузку. Для верхней же точки

$$P + Q = \frac{mv^2}{r}, \text{ откуда } Q = \frac{mv^2}{r} - P = m \left( \frac{v^2}{r} - g \right).$$

Поскольку  $Q$  есть абсолютная величина силы реакции, т. е. положительное число, то величина  $\frac{v^2}{r}$  не может быть меньше  $g$ . Следовательно, летчик не давит на сидение, если  $\frac{v^2}{r} \geq g$ . Минимальная скорость вращения найдется из условия

$$\frac{v_{\min}^2}{r} = g, \text{ или } v_{\min} = \sqrt{gr}. \quad (7.8)$$

### § 7.3. Невесомость

1. В § 6.1 мы определили вес как силу, с которой тело действует на связь вследствие притяжения этого тела к Земле. Мы убедились, что в случае, если тело неподвижно относительно Земли, вес равен силе тяжести.

Анализ решения примера 1 в предыдущем параграфе приводит к выводу, что вес равен силе тяжести также и в том случае, если тело находится в лифте, движущемся относительно Земли прямолинейно и равномерно, т. е. в инерциальной системе отсчета. Таким образом, *в любой инерциальной системе отсчета вес равен силе тяжести.*

Если же тело находится в лифте, движущемся ускоренно относительно Земли, или в самолете, движущемся по окружности (т. е. тоже с ускорением относительно Земли), то сила давления на опору, т. е. вес, уже не равна силе тяжести.

Система отсчета, движущаяся ускоренно относительно инерциальной системы, называется *неинерциальной* системой отсчета. Более подробно явления в неинерциальных системах отсчета будут рассмотрены в гл. 24. Здесь же

ограничимся анализом смысла двух понятий: невесомости и перегрузки.

Рассмотрим, с какой силой космонавт, находящийся в кресле космического корабля, давит на опору в случае взлета, торможения и при свободном полете на орбите.

2. При взлете космический корабль под действием ракеты-носителя движется ускоренно. Этот случай вполне аналогичен пункту (а) первого примера предыдущего параграфа. Здесь сила, с которой космонавт давит на опору, больше силы тяжести. Действительно, по третьему закону Ньютона  $|F_{\text{давл}}| = Q = m(g+a)$ , в то время как сила тяжести равна  $mg$ . Космонавт будет испытывать *перегрузку*, т. е. ему будет казаться, что он стал как бы тяжелее.

Организм тренированного человека может перенести примерно шестикратную перегрузку, т. е.  $F_{\text{давл}} \approx 6P$ . Значит, ускорение космического корабля не должно превосходить пятикратного значения ускорения силы тяжести. Действительно, из  $m(g+a) \leq 6mg$  следует, что  $a \leq 5g$ .

3. Предоставляем читателю, основываясь на результате решения пункта (г) примера 1, показать, что при торможении космического корабля возникают такие же перегрузки, как и при взлете.

4. Если космический корабль движется на орбите вокруг Земли, то ускорение корабля равно ускорению силы тяжести:  $a = g$ . Из (7.6) в этом случае следует, что  $Q = 0$ . Космонавт на опору не давит, он будет ощущать это как «потерю веса».

Итак, *состояние невесомости наступает в том случае, когда неинерциальная система (в нашем случае — космический корабль) движется относительно Земли с ускорением  $a = g$ .*

Заметим, что такая величина ускорения еще не предопределяет характера движения. Движение может быть прямолинейным, если при вертикальном взлете или вертикальном приземлении будет выключен двигатель ракеты, или криволинейным, когда космический корабль движется по орбите вокруг Земли — здесь это ускорение является центробежным. Для наступления состояния невесомости форма траектории не играет роли, важно только одно — чтобы космический корабль двигался с ускорением  $a = g$ .

## § 7.4. Система единиц

1. Как уже указывалось выше, единицы измерения какой-либо физической величины могут быть выбраны произвольно. Единственным необходимым условием является *однородность* единицы измерения и измеряемой величины: единицей измерения длины может служить длина какого-то твердого стержня, единицей измерения скорости — скорость какого-то равномерного движения и т. д. Однако такой произвол в выборе единиц измерения физических величин приводит к неудобствам: в формулах, связывающих некоторые величины функциональной зависимостью, появляются числовые коэффициенты.

Так, известно, что площадь прямоугольника пропорциональна его длине и высоте:

$$S = \alpha lh,$$

где  $S$  — площадь,  $l$  — длина,  $h$  — высота и  $\alpha$  — коэффициент, зависящий от выбора единиц. Если единицей измерения длины и высоты будет метр, а площади — гектар, то  $\alpha = 0,0001$ ; тогда  $S = 0,0001lh$ . Однако удобнее за единицу измерения площади принять площадь квадрата со стороной, равной единице измерения длины. Если длина измеряется в метрах ( $m$ ), то площадь измеряется в квадратных метрах ( $m^2$ ), и искомое выражение примет простейший вид:

$$S = lh.$$

Итак, целесообразно единицы измерения физических величин выбрать так, чтобы они были связаны между собой теми же соотношениями, что и измеряемые величины. Это позволит существенно уменьшить число коэффициентов, входящих в формулы, выражающие соотношения между физическими величинами.

Совокупность единиц измерения величин, построенная согласно указанному правилу, называется *системой единиц*.

2. Все единицы, входящие в данную систему, разбиваются на два класса:

*Основные единицы*, установленные произвольно и независимо друг от друга. Обычно основные единицы определяются с помощью эталонов.

*Производные единицы*, которые выражаются через основные с помощью соответствующих физических законов.

Например, единица измерения длины является основной, а единица измерения площади — производной.

*Размерностью* физической величины  $B$  называется соотношение, определяющее связь между единицей измерения этой величины  $[B]$  и основными единицами  $[A_1]$ ,  $[A_2]$ ,  $[A_3]$ ,  $[A_4]$  данной системы. Формулы размерности имеют вид

$$[B] = [A_1]^{n_1} \cdot [A_2]^{n_2} \cdot [A_3]^{n_3} \cdot [A_4]^{n_4}.$$

Обычно стремятся уменьшить число основных единиц, но это не всегда оказывается удобным на практике. Поэтому при построении системы единиц приходится учитывать потребности измерительной техники, а также исторические традиции.

### § 7.5. Международная система единиц

1. В 1963 г. в СССР в качестве предпочтительной по сравнению с другими возможными системами введена Международная система единиц СИ. Для измерения механических величин в ней вводятся три основные единицы:

- метр ( $m$ ) — единица длины;
- секунда ( $сек$ ) — единица времени;
- килограмм ( $кг$ ) — единица массы.

2. Производные единицы для измерения механических величин определяются следующим образом:

единица скорости — метр в секунду ( $m/сек$ ) — скорость равномерного движения материальной точки, проходящей расстояние  $1\ m$  в течение  $1\ сек$ ;

единица ускорения — метр за секунду в квадрате ( $m/сек^2$ ) — ускорение равнопеременного движения материальной точки, скорость которой изменяется на  $1\ m/сек$  за  $1\ сек$ ;

единица измерения силы — ньютон ( $н$ ) — сила, которая материальной точке с массой  $1\ кг$  сообщает ускорение  $1\ m/сек^2$ .

Единицы измерения остальных механических величин введены по мере их определения.

### § 7.6. Системы единиц СГС и МКГСС

1. Кроме Международной системы единиц используются системы СГС («физическая») и МКГСС («техническая»).

Основными единицами системы СГС являются сантиметр (*см*), секунда (*сек*) и грамм (*г*).

Производные единицы определяются аналогично соответствующим единицам системы СИ. Единицей измерения силы служит дина (*дин*) — сила, которая материальной точке с массой 1 *г* сообщает ускорение 1 *см/сек*<sup>2</sup>. Предоставляем читателю самостоятельно доказать соотношение

$$1 \text{ н} = 10^5 \text{ дин.}$$

2. Несколько иначе строится система МКГСС. Ее кинематические единицы (длина, время, скорость, ускорение) совпадают с единицами системы СИ. Третьей же основной единицей является килограмм-сила (*кгс* или *кГ*) — это *вес эталона массы при нормальном ускорении силы тяжести* \*).

Нетрудно показать, что

$$1 \text{ кгс} = 9,80665 \text{ н.}$$

Действительно, из определения массы следует, что  $P = mg$ . Подставив  $m = 1 \text{ кг}$  и  $g = 9,80665 \text{ м/сек}^2$ , получим, что при нормальном ускорении силы тяжести тело с массой 1 *кг* весит 9,80665 *н*. Но это, по определению, и есть килограмм-сила.

Масса в системе МКГСС измеряется производной единицей, называемой технической единицей массы (т. е. м.), — это масса материальной точки, которая под действием силы 1 *кгс* движется с ускорением 1 *м/сек*<sup>2</sup>. Покажем, что

$$1 \text{ т.е.м.} = 9,80665 \text{ кг.}$$

Действительно, согласно определению

$$1 \text{ т.е.м.} = \frac{1 \text{ кгс}}{1 \text{ м/сек}^2} = \frac{9,80665 \text{ н}}{1 \text{ м/сек}^2} = 9,80665 \text{ кг.}$$

При приближенных расчетах обычно полагают

$$1 \text{ кгс} = 9,81 \text{ н,}$$

$$1 \text{ т.е.м.} = 9,81 \text{ кг.}$$

\*) В немецкой литературе эта единица называется *килопонд*, что удобно, — это позволяет избежать путаницы между единицами массы и силы.

## ГЛАВА 8

ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ  
И НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

## § 8.1. Основная задача динамики

1. Очень многие задачи астрономии, транспорта, артиллерии и ряда других областей науки и техники формулируются следующим образом: имеется тело, которое можно рассматривать как материальную точку (например планета, снаряд, ракета и т. п.); известны силы, действующие на это тело. Требуется найти закон движения точки, т. е. выразить ее координаты в виде определенных функций времени.

Это и есть *основная задача динамики*, которая кратко формулируется так: *определить закон движения материальной точки, если известны действующие на нее силы.*

Для ее решения вначале с помощью основного закона динамики (второго закона Ньютона) находят ускорение, с которым движется материальная точка. Затем с помощью известных формул кинематики ищут выражения для скоростей и координат.

2. Математические трудности, возникающие при решении задачи в общем виде, могут оказаться весьма значительными. Вместе с тем частное решение любой задачи может быть получено численными методами — приближенно, но с любой наперед заданной степенью точности.

Две простейшие задачи будут рассмотрены ниже. Одну из них решим в общем виде, вторую — численными методами. На их примере мы попытаемся выяснить, что же нужно знать для того, чтобы суметь решить основную задачу динамики.

Точное решение задачи нам удастся получить только в простейшем случае — при расчете движения тела под действием *постоянной силы*. Что же касается численных методов, то они пригодны для решения любых задач, но требуют всегда очень большого числа арифметических выкладок. В настоящее время такие выкладки поручают быстродействующим электронным цифровым вычислительным машинам (ЭЦВМ), которые легко решают данные задачи при соответствующем их программировании.



### § 8.2. Движение материальной точки под действием силы тяжести

1. Пусть на материальную точку, кроме силы тяжести, никакие другие силы не действуют. Например, это могло бы быть тело на Луне, где нет атмосферы. Впрочем, с известным приближением это решение будет пригодно и на Земле, если скорость точки не превосходит нескольких метров в секунду, ибо при таких скоростях можно пренебречь сопротивлением воздуха.

Систему отсчета, связанную с Землей, будем считать инерциальной. Оси координат выберем так, как показано на рис. 8.1. Выражение для силы, действующей на материальную точку, запишется так:

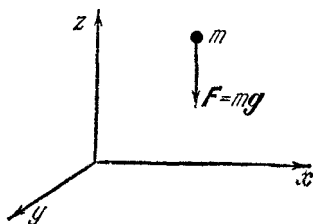


Рис. 8.1.

$$\mathbf{F} = \mathbf{P} = mg, \quad (8.1)$$

или в проекциях на оси координат

$$\left. \begin{aligned} F_x &= 0, \\ F_y &= 0, \\ F_z &= -mg. \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

Основной закон динамики примет вид

$$\left. \begin{aligned} F_x &= ma_x = 0, \\ F_y &= ma_y = 0, \\ F_z &= ma_z = -mg. \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

Следовательно, проекции ускорения

$$\left. \begin{aligned} a_x &= 0, \\ a_y &= 0, \\ a_z &= -g. \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

2. Теперь уже нетрудно найти и закон движения. Вдоль оси абсцисс точка движется без ускорения, т. е. равномерно.

В этом случае скорость точки остается постоянной, а ее координата — линейной функцией времени (см. § 1.4):

$$\left. \begin{aligned} v_x &= u_0 = \text{const}, \\ x &= x_0 + u_0 t. \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

Аналогично для оси ординат

$$\left. \begin{aligned} v_y &= \omega_0 = \text{const}, \\ y &= y_0 + \omega_0 t. \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Наконец, вдоль оси аппликат тело движется с постоянным ускорением. Тогда (см. §§ 4.3—4.6) ее скорость является линейной функцией времени, а координата — квадратичной функцией времени:

$$\left. \begin{aligned} v_z &= v_0 + a_z t = v_0 - gt, \\ z &= z_0 + v_0 t + \frac{a_z t^2}{2} = z_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

3. Итак, закон движения найден. Он имеет вид

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + u_0 t, \\ y &= y_0 + \omega_0 t, \\ z &= z_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

Мы получили в (8.8) перед ускорением знак минус, а в (4.8) был знак плюс. Это связано с направлением оси аппликат: в (4.8) ускорение направлено вдоль оси аппликат, здесь же направление вектора ускорения противоположно.

В выражение для закона движения вошло шесть произвольных постоянных: *начальные координаты*  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  и *начальные скорости*  $u_0$ ,  $\omega_0$ ,  $v_0$ . Они определяют положение и скорость движения материальной точки в момент времени  $t=0$ , принятый за начальный.

4. Система уравнений (8.5)—(8.8) описывает *все возможные случаи* движения тела под действием силы тяжести. Чтобы получить какое-либо частное решение, необходимо указать конкретные начальные условия.

Пусть тело брошено из начала координат со скоростью  $V_0$  под углом  $\alpha$  к горизонту, причем вектор начальной ско-

рости лежит в плоскости  $xz$  (рис. 8.2). Тогда начальные условия примут вид

$$w_0 = 0, \quad u_0 = V_0 \cos \alpha, \quad v_0 = V_0 \sin \alpha. \quad (8.9)$$

Закон движения выглядит так:

$$\left. \begin{aligned} y &= 0, \\ x &= V_0 t \cos \alpha, \\ z &= V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

Покажем, что тело движется по параболе, лежащей в вертикальной плоскости  $xz$ . Действительно, из (8.10) сле-

дует  $t = \frac{x}{V_0 \cos \alpha}$ . Подставив в третье уравнение, получим

$$z = \frac{V_0 x \sin \alpha}{V_0 \cos \alpha} - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}$$

или

$$z = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (8.11)$$

А это и есть уравнение параболы в общем виде. Дальность полета получим, положив в (8.11)  $z=0$ ,  $x=L$ ; тогда

$$L = \frac{2V_0^2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (8.12)$$

Наибольшая дальность полета достигается при бросании тела под углом  $\alpha=45^\circ$  к горизонту: здесь  $\sin 2\alpha = \sin 90^\circ = 1$ .

5. Рекомендуем читателю самостоятельно получить выражения для частных случаев:

а) Тело, находясь на некоторой высоте  $h$  над Землей, брошено горизонтально с начальной скоростью  $u_0$ . Найти закон движения; траекторию; дальность полета.

б) Тело брошено вертикально вверх из начала координат с начальной скоростью  $v_0$ . Найти закон движения; траекторию; максимальную высоту подъема и время подъема.

в) Тело со скоростью  $V$  брошено под углом  $\alpha$  к горизонту. Найти закон движения; траекторию.

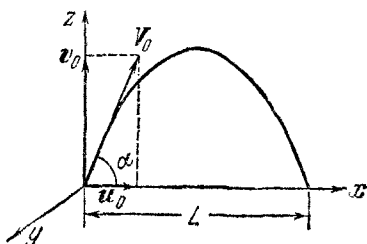


Рис. 8.2.

### § 8.3. Численное решение основной задачи динамики

1. В предыдущем параграфе нам удалось весьма просто найти общий закон движения только потому, что на точку действовала постоянная сила. Если же на точку действует переменная сила, то общий закон движения можно найти только методами высшей математики. Однако частное решение при конкретных начальных условиях может быть всегда получено с помощью численных методов. При этом все решение сводится к совершенно элементарным, хотя и довольно длинным арифметическим действиям.

2. При расчете будем исходить из следующих соображений. Среднее ускорение в течение некоторого промежутка времени  $\Delta t = t_n - t_{n-1}$  определяется из соотношения (см. § 4.1)

$$a_{\text{ср}} = \frac{v_n - v_{n-1}}{\Delta t}.$$

Полагая (при малом  $\Delta t$ ), что среднее ускорение мало отличается от мгновенного в конечный момент  $t = t_n$ , имеем приближенно

$$v_n \approx v_{n-1} + a_n \Delta t. \quad (8.13)$$

Для средней скорости  $\bar{v}_n$  получим аналогичную формулу

$$\bar{v}_n \approx \bar{v}_{n-1} + a_n \Delta t, \quad (8.14)$$

где средняя скорость

$$\bar{v}_n \approx \frac{v_n + v_{n-1}}{2}.$$

Но по определению (см. § 1.6) средняя скорость

$$\bar{v}_n = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t};$$

отсюда следует

$$x_n = x_{n-1} + \bar{v}_n \Delta t. \quad (8.15)$$

Теперь мы имеем все необходимое для численного расчета закона движения. Действительно, пусть нам известны координата и скорость точки в некоторый начальный момент; ускорение найдем с помощью основного закона динамики. По формуле (8.13) вычислим скорость спустя  $\Delta t$  секунд, а по формуле (8.15) — координату. Приняв эти новые скорости и координаты за исходные и воспользовавшись теми же формулами, мы сделаем еще один шаг, и т. д. Через

конечное число шагов получим скорость и координату в нужный момент времени.

Естественно, чем меньше  $\Delta t$ , тем точнее будет результат. Но это потребует увеличения числа выкладок.

### § 8.4. Движение тела под действием упругой силы

1. В этом параграфе мы проиллюстрируем применение численного метода решения основной задачи механики на примере движения материальной точки под действием упругой силы.

Пусть на материальную точку действует упругая сила  $F = -kx$  (рис. 8.3). Тогда основное уравнение динамики примет вид:

$$-kx = ma, \quad (8.16)$$

или в проекциях на оси координат

$$-kx = ma_x, \quad 0 = ma_y, \quad 0 = ma_z. \quad (8.17)$$

Положим, что  $y_0 = z_0 = 0$  и  $\omega_0 = v_0 = 0$ ;

следовательно, материальная точка движется только по оси абсцисс с ускорением

$$a_x = a = -\frac{k}{m}x. \quad (8.18)$$

Для численного решения задачи нужно задать какое-либо конкретное значение постоянной  $k/m$ , начальную координату  $x_0$  и начальную скорость  $u_0$ . Пусть

$$\frac{k}{m} = 2,467 = \frac{\pi^2}{4}; \quad x_0 = 1,000; \quad u_0 = 0. \quad (8.19)$$

Расчет будем вести, полагая  $\Delta t = 0,1$  сек.

Из (8.18) следует, что ускорение в течение первого промежутка времени приблизительно равно  $a_0 = -2,467 \cdot x_0 = -2,467$ .

Конечная скорость через  $\Delta t = 0,1$  сек

$$v_0^{\text{кон}} = v_0 + a_0 \Delta t = -2,467 \cdot 0,1 = -0,2467.$$

Средняя скорость за этот промежуток времени

$$\bar{v}_0 = \frac{v_0 + v_0^{\text{кон}}}{2} = \frac{0 - 0,2467}{2} = -0,1234.$$

Координата точки к концу промежутка

$$x_1 = x_0 + \bar{v}_0 \Delta t = 1,000 - 0,1234 \cdot 0,1 = 0,988.$$

Аналогично вычисления могут быть продолжены далее (табл. 8.1).

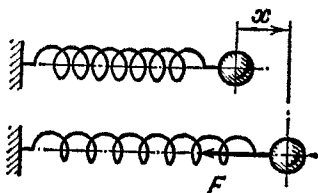


Рис. 8.3.

Таблица 8.1

$t$	$x$	$a = -2,467 x$	$\bar{v}$	Вычисления
0,0	1,000	-2,467	-0,123	$v_0 = 0$ $v_0^{\text{кон}} = v_0 + a_0 \Delta t = -0,246$
0,1	0,988	-2,437	-0,367	$x_1 = x_0 + \bar{v}_0 \Delta t = 1,000 - 0,012 = 0,988$ $\bar{v}_1 = \bar{v}_0 + a_1 \Delta t = -0,123 - 0,244 = -0,367$
0,2	0,951	-2,347	-0,602	$x_2 = x_1 + \bar{v}_1 \Delta t = 0,988 - 0,037 = 0,951$ $\bar{v}_2 = \bar{v}_1 + a_2 \Delta t = -0,367 - 0,235 = -0,602$
0,3	0,891	-2,199	-0,822	$x_3 = x_2 + \bar{v}_2 \Delta t = 0,951 - 0,060 = 0,891$ $\bar{v}_3 = \bar{v}_2 + a_3 \Delta t = -0,602 - 0,220 = -0,822$
0,4	0,809	-1,996	-1,022	$x_4 = x_3 + \bar{v}_3 \Delta t = 0,891 - 0,082 = 0,809$ $\bar{v}_4 = \bar{v}_3 + a_4 \Delta t = -0,822 - 0,200 = -1,022$
0,5	0,707	-1,743	-1,196	$x_5 = x_4 + \bar{v}_4 \Delta t = 0,809 - 0,102 = 0,707$ $\bar{v}_5 = \bar{v}_4 + a_5 \Delta t = -1,022 - 0,174 = -1,196$
0,6	0,587	-1,450	-1,341	$x_6 = x_5 + \bar{v}_5 \Delta t = 0,707 - 0,120 = 0,587$ $\bar{v}_6 = \bar{v}_5 + a_6 \Delta t = -1,196 - 0,145 = -1,341$
0,7	0,453	-1,120	-1,453	$x_7 = x_6 + \bar{v}_6 \Delta t = 0,587 - 0,134 = 0,453$ $\bar{v}_7 = \bar{v}_6 + a_7 \Delta t = -1,341 - 0,112 = -1,453$
0,8	0,308	-0,722	-1,525	$x_8 = x_7 + \bar{v}_7 \Delta t = 0,453 - 0,145 = 0,308$ $v_8 = \bar{v}_7 + a_8 \Delta t = -1,453 - 0,072 = -1,525$

$t$	$x$	$a = -2,467x$	$\bar{v}$	Вычисления
0,9	0,156	-0,380	-1,563	$x_9 = x_8 + \bar{v}_8 \Delta t = 0,308 - 0,152 = 0,156$ $\bar{v}_9 = \bar{v}_8 + a_8 \Delta t = -1,525 - 0,038 = -1,563$
1,0	0,000	-0,000	-1,563	$x_{10} = x_9 + \bar{v}_9 \Delta t = 0,156 - 0,156 = 0,000$ $\bar{v}_{10} = \bar{v}_9 + a_9 \Delta t = -1,563 - 0,000 = -1,563$
1,1	-0,156	0,380	-1,525	$x_{11} = x_{10} + \bar{v}_{10} \Delta t = 0,000 - 0,156 = -0,156$ $\bar{v}_{11} = \bar{v}_{10} + a_{10} \Delta t = -1,563 - 0,038 = -1,525$
1,2	-0,308	0,722	-1,453	$x_{12} = x_{11} + \bar{v}_{11} \Delta t = -0,156 - 0,152 = -0,308$ $\bar{v}_{12} = \bar{v}_{11} + a_{11} \Delta t = -1,525 + 0,072 = -1,453$

2. Далее  $t=1$  сек производить вычисления не имеет смысла, ибо начиная с этого момента времени значения координаты  $x$  повторяются, но с противоположным знаком. Следовательно, при  $t=2$  сек координата точки примет значение  $x=-1$ ; при  $t=3$  сек — значение  $x=0$ . Наконец, при  $t=4$  сек координата и скорость будут иметь те же значения, что и при  $t=0$ .

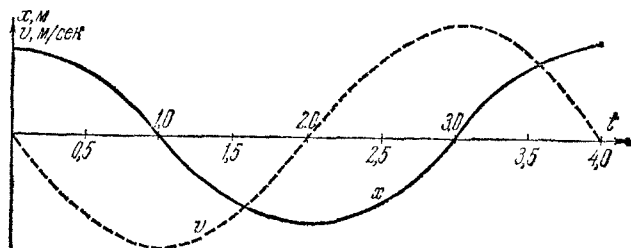


Рис. 8.4.

График зависимости координаты точки от времени (рис. 8.4) очень напоминает график функции  $x=A \cos \omega t$ . Здесь же изображен график мгновенной скорости точки, весьма похожий на график функции  $v=B \sin \omega t$ . И в самом деле, точное решение этой задачи методами высшей

математики приводит к следующему результату:

$$x = \cos \frac{\pi}{2} t, \quad v = -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t. \quad (8.20)$$

Выразив переменный угол  $\alpha = (\pi/2)t$  не в радианах, а в градусах, найдем по таблицам тригонометрических функций значения выражений (8.20) и сопоставим их с результатами наших вычислений (табл. 8.2). При этом следует учесть, что формула (8.20) дает *мгновенные* значения скорости к началу каждого промежутка времени, мы же вычислили *приближенное значение средней скорости* в течение этого промежутка.

Таблица 8.2

$t, \text{сек}$	$\alpha = \frac{\pi}{2} t = 90^\circ t$	Теоретические данные		Расчетные данные	
		$x = \cos \frac{\pi}{2} t$	$v = -\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} t$	$x$	$\bar{v}$
0	0	1,0000	0,0000	1,000	-0,123
0,1	9°	0,9877	-0,2457	0,988	-0,367
0,2	18°	0,9511	-0,4854	0,951	-0,602
0,3	27°	0,8910	-0,7131	0,891	-0,822
0,4	36°	0,8090	-0,9233	0,809	-1,022
0,5	45°	0,7071	-1,1107	0,707	-1,196
0,6	54°	0,5878	-1,2708	0,587	-1,341
0,7	63°	0,4540	-1,3996	0,453	-1,453
0,8	72°	0,3090	-1,4938	0,308	-1,525
0,9	81°	0,1564	-1,5515	0,156	-1,563
1,0	90°	0,0000	-1,5708	0,000	-1,563
1,1	99°	-0,1564	-1,5515	-0,156	-1,525

Заметим, что фактически расчетные данные были получены путем деления промежутка времени на 100, а не на 10 частей, и в таблицу внесены округленные значения. Мы видим очень хорошее совпадение теоретических и расчетных данных для координат.

3. Движение, совершаемое материальной точкой под действием упругой силы, называется *гармоническим колебанием*. Подробно этот вид движения будет рассмотрен во втором томе.

### § 8.5. Величины, определяющие закон движения материальной точки

1. На примере задач, рассмотренных в предыдущих параграфах, мы убедились, что для определения закона движения материальной точки необходимы следующие данные:

а) должна быть известна *сила*, действующая на тело; силу можно задать как функцию времени или координат;



б) должны быть известны *начальные условия*: координаты и скорость точки в некоторый момент времени. (Вместо начальной скорости может быть задан начальный импульс  $p_0 = mv_0$ .)

Если эти величины известны, то всегда можно найти закон движения точки, т. е. выразить ее координаты в виде функций времени. А это в свою очередь позволяет предсказать поведение частицы в любой предшествующий или последующий момент времени.

Так, зная силы взаимодействия между Солнцем и планетами, а также координаты и скорости планет в некоторый момент времени (т. е. начальные условия), можно предсказать состояние их движения как в давно прошедшие времена, так и на будущее. В частности, можно предсказать такие явления, как солнечные или лунные затмения, великие противостояния Земли и Марса (т. е. моменты времени, когда расстояние между этими планетами становится минимальным) и т. п.

Зная скорость запуска космической ракеты и ее координаты в некоторый момент времени, а также силы, действующие на нее, можно рассчитать ее траекторию; определить, где она будет находиться в любой момент времени; предсказать время и координаты точки приземления.

2. Если окажется, что истинное движение материальной точки не совпадает с расчетным, то это означает, что либо неверно определены начальные условия, либо неверно задана сила. По степени расхождения расчетной и истинной траекторий обычно удается определить и величину допущенной ошибки. В качестве примера рассмотрим историю открытия планет Нептун и Плутон.

В 1781 г. английский астроном В. Гершель сконструировал огромный по тому времени телескоп и с его помощью обнаружил новую, седьмую планету, которую назвали Ураном. Учитывая действие на Уран Солнца и остальных планет солнечной системы, известных к тому времени (Меркурия, Венеры, Земли, Марса, Юпитера и Сатурна), нашли закон его движения и определили его траекторию на небосводе. Расчетная траектория оказалась неверной — Уран двигался по другой кривой. Поскольку начальные условия были заданы верно, то единственно разумным являлось

предположение, что учтены не все силы, действующие на Уран.

Французский ученый Лавуазье и английский ученый Адамс независимо друг от друга выдвинули предположение, что за Ураном должна находиться еще одна планета, которую никто еще не наблюдал. По отклонению расчетной траектории Урана от истинной они смогли определить закон движения этой неизвестной планеты и предсказать, в какой точке небосвода ее можно найти в тот или иной момент времени. Опыт блестяще подтвердил их расчет: вправив в эту точку небосвода телескоп, немецкий астроном Галле в 1846 г. действительно обнаружил там планету, названную впоследствии Нептуном.

В начале XX в. американский астроном Лоуэлл, учитывая результаты более точных наблюдений, пришел к выводу, что расхождения между расчетной траекторией Урана и истинным характером его движения нельзя объяснить только действием Нептуна, что за Нептуном есть еще одна, девятая планета. В 1930 г., уже после смерти Лоуэлла, в основанной им обсерватории астроном Томбо обнаружил эту планету, названную Плутоном.

Итак, на примере ряда задач ньютоновской механики мы убедились, что *сила и начальные условия полностью определяют закон движения материальной точки.*

Дальнейшее развитие науки показало, что в микромире невозможно такое задание начальных условий, какое применяется в ньютоновской механике (см. гл. 14).

## ГЛАВА 9

### ТЯГОТЕНИЕ

#### § 9.1. Открытие закона тяготения

1. К началу XVII столетия большинство ученых окончательно убедилось в справедливости гелиоцентрической системы мира. Согласно этой системе, предложенной Николаем Коперником, Земля и все остальные планеты движутся вокруг Солнца, которое является центром нашей планетной системы. Однако ученым того времени не были ясны ни за-

коны движения планет, ни причины, определяющие характер их движения.

Иоганн Кеплер, обработав результаты многочисленных наблюдений, проведенных Тихо Браге и им самим, получил законы движения планет вокруг Солнца. Ему было ясно, что для объяснения этих законов нужно найти силы, которые действуют на планеты. Однако ни ему, ни его современникам это не удалось сделать. Задача была решена гениальным английским ученым Исааком Ньютоном и изложена в его книге «Математические начала натуральной философии» (натуральной философией в то время называли физику), вышедшей в 1686 г.

2. В первом приближении можно считать, что планеты движутся почти равномерно по орбитам, которые мало отличаются от окружностей. Но при движении материальной точки по окружности имеется нормальное (центростремительное) ускорение, направленное к центру орбиты, где находится Солнце. Из основного закона динамики следует, что это ускорение вызывается некоторой силой. Итак, Солнце действует на каждую планету с некоторой силой, направленной к его центру (рис. 9.1). Из третьего закона Ньютона следует, что и планета действует на Солнце с такой же силой, но направленной в противоположную сторону.

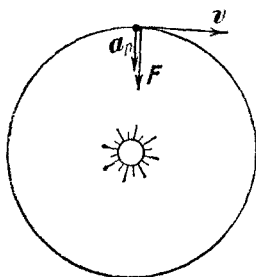


Рис. 9.1.

3. Известно, что Луна вращается вокруг Земли. Очевидно, что силы притяжения действуют также и между ними: Луна притягивается к Земле, а Земля — к Луне.

Ньютон выдвинул решающее предположение, что сила тяжести, действующая на тела вблизи поверхности Земли, и сила, с которой Земля притягивает Луну, имеют совершенно одинаковое происхождение. Для этой цели он сравнил ускорение свободного падения и нормальное ускорение, с которым Луна движется на своей орбите.

Это ускорение можно рассчитать из следующих соображений. Расстояние от Земли до Луны  $r = 384\,403 \text{ км} = 3,84 \cdot 10^8 \text{ м}$ ; период обращения  $T = 27,322 \text{ суток} =$

$\approx 27,3 \cdot 24 \cdot 3600$  сек. Орбитальная скорость  $v = 2\pi r/T$ , а нормальное ускорение

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 3,84 \cdot 10^8}{(2,73 \cdot 24 \cdot 3600)^2} = 2,72 \cdot 10^{-3} \text{ м/сек}^2. \quad (9.1)$$

Как мы видим, нормальное ускорение Луны и ускорение свободного падения резко отличаются друг от друга по величине. Однако Ньютон объяснил расхождение между этими величинами, выдвинув предположение, что сила тяготения убывает с увеличением расстояния между взаимодействующими телами по некоторому закону, который мы сейчас найдем. Действительно, ускорение свободного падения равно  $9,81 \text{ м/сек}^2$  вблизи поверхности Земли, т. е. когда расстояние от притягиваемого тела до центра Земли равно ее среднему радиусу ( $R = 6371 \text{ км} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ м}$ ); нормальное же ускорение Луны получено для точки на ее орбите (рис. 9.2),

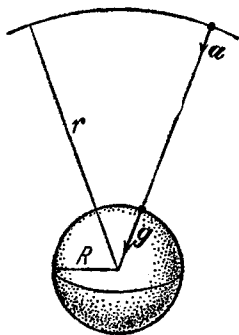


Рис. 9.2.

когда расстояние между взаимодействующими телами равно радиусу лунной орбиты ( $r = 3,84 \cdot 10^8 \text{ м}$ ). Составив пропорцию

$$\frac{g}{a_n} = \left( \frac{r}{R} \right)^n, \quad (9.2)$$

можно определить неизвестный показатель степени. Подставив значения расстояний и ускорений, получим

$$\frac{9,81}{2,72 \cdot 10^{-3}} = \left( \frac{3,84 \cdot 10^8}{6,37 \cdot 10^6} \right)^n$$

или  $3600 = 60^n$ , откуда  $n = 2$ .

Итак, ускорение, вызванное силой тяготения, убывает обратно пропорционально квадрату расстояния: из (9.2) при  $n = 2$  следует, что

$$a_n = \frac{gR^2}{r^2} = \frac{K}{r^2}, \quad (9.3)$$

где  $K$  — некоторая постоянная величина.

## § 9.2. Закон тяготения Ньютона

1. Результаты, полученные Ньютоном при анализе нормального ускорения, возникающего при движении Луны вокруг Земли, привели его к выводу, что все тела в природе притягиваются друг к другу с некоторой силой, называемой *силой тяготения*, причем ускорение, вызванное этой силой, убывает обратно пропорционально квадрату расстояния между взаимодействующими телами.

Пусть два тела с массами  $m_1$  и  $m_2$  расположены на расстоянии  $r$  друг от друга. Они взаимодействуют с силами  $F_1 = m_1 a_1$  и  $F_2 = m_2 a_2$ , причем по третьему закону Ньютона  $F_1 = -F_2$ . Учитывая (9.3), имеем

$$\frac{m_1 K_1}{r^2} = \frac{m_2 K_2}{r^2}. \quad (9.4)$$

Это равенство будет справедливо, если положить  $K_1 = \gamma m_2$  и  $K_2 = \gamma m_1$ , где  $\gamma$  — некоторая постоянная величина. Тогда

$$F = m_1 a_1 = \frac{m_1 K_1}{r^2} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Итак,

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (9.5)$$

Закон тяготения формулируется следующим образом:

*Сила тяготения между двумя точечными массами (материальными точками) пропорциональна массам этих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.*

2. Изложенные выше соображения никоим образом нельзя рассматривать как вывод закона тяготения. Они могут служить лишь иллюстрацией к рассуждениям Ньютона.

Для опытной проверки этого закона необходимо уметь находить силу тяготения не только между материальными точками, но и между телами конечных размеров. В общем случае эта задача представляет огромные математические трудности, и решить ее элементарными методами невозможно. Точный расчет показывает, что формулой (9.5) можно пользоваться и для расчета силы взаимодействия

между однородными шарами с массами  $m_1$  и  $m_2$ , понимая под  $r$  расстояние между центрами шаров.

3. Коэффициент  $\gamma$ , входящий в закон тяготения, называется *гравитационной постоянной*. Она численно равна силе, с которой взаимодействуют частицы с единичной массой, расположенные на единичном расстоянии друг от друга.

В Международной системе единиц гравитационная постоянная численно равна силе, с которой взаимодействуют две частицы с массами  $m_1 = m_2 = 1$  кг, расположенные друг от друга на расстоянии  $r = 1$  м. Эта величина может быть определена только опытным путем.

### § 9.3. Опыт Кавендиша

В 1798 г. Кавендиш поставил опыт, позволивший измерить силу тяготения в лабораторных условиях и тем самым определить гравитационную постоянную. В качестве экспериментальной установки

использовались крутильные весы, принцип устройства которых ясен из рис. 9.3.

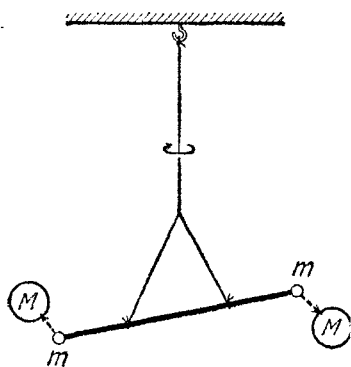


Рис. 9.3.

На тонкой кварцевой нити подвешен легкий стержень, а на нити жестко закреплено небольшое зеркальце. Луч света, падая на зеркальце, отражается от него и попадает на шкалу. При повороте стержня отраженный луч перемещается по шкале, регистрируя тем самым угол закручивания нити. На концах стержня укреплены два свинцовых шарика с массами  $m$  каждый.

К ним подносят два симметрично расположенных свинцовых шара с массами  $M$ . При этом нить закручивается на некоторый угол до тех пор, пока сила упругости деформированной нити не уравновесит силу гравитационного взаимодействия между шарами. Измерив силу взаимодействия по углу закручивания нити, зная массы шаров и расстояние между их центрами, можно определить гравитационную постоянную.

Наиболее точные измерения, проведенные по усовершенствованной методике, дали следующий результат:

$$\gamma = (6,670 \pm 0,006) \cdot 10^{-11} \text{ н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2.$$

### § 9.4. Определение расстояний от Солнца до планет

1. Применим закон тяготения для вычисления расстояний от Солнца до планет. При этом для простоты рассуждений положим, что планеты движутся по круговым орбитам. Это мало скажется на точности результатов расчета, ибо истинные траектории планет мало отличаются от окружностей.

Сила тяготения, действующая со стороны Солнца на планеты, сообщает им нормальное ускорение:  $a_n = F/m = \gamma M/r^2$ . А так как  $a_n = v^2/r = 4\pi^2 r/T^2$ , то

$$\frac{\gamma M}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}, \quad (9.6)$$

где  $M$  — масса Солнца,  $r$  — радиус орбиты,  $T$  — период обращения планеты вокруг Солнца. Отсюда

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2} = \text{const.} \quad (9.7)$$

Итак, кубы средних расстояний от планет до Солнца пропорциональны квадратам периодов обращений планет вокруг Солнца (третий закон Кеплера).

Поскольку периоды обращения планет могут быть измерены весьма точно, то для определения расстояний до всех планет достаточно измерить расстояние от Солнца до одной какой-либо планеты. В качестве такого эталона принято расстояние от Солнца до Земли, которое называется *астрономической единицей* длины. Оно равно  $149,5 \cdot 10^9$  м.

В 1960—1962 гг. советские ученые с помощью мощного радиолокатора измерили расстояние от Земли до Венеры, что позволило уточнить величину астрономической единицы и тем самым — расстояния до всех планет солнечной системы. Отличное совпадение результатов астрономических и радиолокационных измерений является хорошим доказательством справедливости закона тяготения Ньютона.

## § 9.5. Поле тяготения

1. В современной физике механизм гравитационного взаимодействия представляется следующим образом. Каждое тело массой  $M$  создает вокруг себя поле; если же в некоторую точку этого поля поместить пробное тело массой  $m$ , то поле действует на пробную массу с некоторой силой  $F$ , зависящей от свойств поля в этой точке и от величины массы пробного тела. Естественно, что пробное тело создает вокруг себя свое поле, которое в свою очередь действует на тело с массой  $M$ .

Свободное от вещества пространство обладает рядом геометрических и физических свойств. Так, кратчайшим расстоянием между двумя точками является прямая линия; ход времени во всех точках пространства один и тот же; лучи света представляют собой прямые линии и т. п.

Согласно Эйнштейну, тело массой  $M$ , внесенное в некоторую область пространства, изменяет свойства последнего. В частности, кратчайшим расстоянием между двумя точками будет уже не прямая, а некоторая кривая, форма которой зависит от массы тела и от расстояния между телом и исследуемыми точками пространства. Свет по-прежнему распространяется по кратчайшему расстоянию между двумя точками, но теперь уже световые лучи искривляются. Соответственно и время вблизи массивных тел замедляется.

Таким образом, гравитационное поле характеризует изменение физических и геометрических свойств пространства вблизи массивных тел (см. §§ 24.5 и 24.6).

Гравитационное поле материально. Оно существует независимо от нашего сознания и может быть обнаружено по его воздействию на физические объекты, например на измерительные приборы. Гравитационное поле является одним из видов материи.

## § 9.6. Напряженность поля тяготения

1. Для количественной характеристики поля тяготения вводится физическая величина, называемая *напряженностью* гравитационного поля  $G$ . Напряженность поля численно равна отношению силы тяготения, действующей на



пробное тело, к массе этого тела:

$$G = \frac{F}{m}. \quad (9.8)$$

Воспользовавшись законом тяготения (9.5) и положив в нем  $m_1 = M$ ,  $m_2 = m$ , имеем

$$G = \frac{\gamma M}{r^2}. \quad (9.9)$$

2. Мы видим, что напряженность поля тяготения определяется массой тела, создающего поле (источником поля), и расстоянием от этого тела до интересующей нас точки поля. Она не зависит от массы пробного тела, помещаемого в эту точку.

Очевидно, что по своему физическому смыслу напряженность гравитационного поля совпадает с ускорением пробного тела. Поскольку напряженность поля не зависит от массы пробного тела, то все тела, независимо от их массы, движутся в данной точке гравитационного поля с одинаковым ускорением. В частности, именно поэтому все тела падают в поле силы тяжести с одинаковым ускорением  $g$  (см. § 6.2).

3. Напряженность поля является вектором, направленным в ту же сторону, что и сила тяготения. Если радиус-вектор  $r$  направить от источника поля  $M$  к исследуемой точке поля, то вектор напряженности направлен всегда противоположно радиусу-вектору. Чтобы показать это, формулу (9.9) следует писать со знаком минус:

$$G = -\gamma \frac{M}{r^2}. \quad (9.10)$$

## § 9.7. Поле тяготения Земли

1. Если бы Земля не вращалась вокруг своей оси, то сила тяжести совпала бы по величине и направлению с силой тяготения. При этом ускорение свободного падения совпало бы с напряженностью поля тяготения Земли.

По мере удаления тела от поверхности Земли сила тяжести и ускорение свободного падения уменьшаются. Тело,

расположенное на уровне моря, притягивается к Земле с силой

$$P_0 = mg_0 = \gamma \frac{Mm}{R^2}, \quad (9.11)$$

где  $M$  и  $R$  — масса и радиус Земли,  $m$  — масса тела,  $g_0$  — ускорение свободного падения на уровне моря. Тело же, поднятое на высоту  $h$  над уровнем моря, притягивается к Земле с силой

$$P = mg = \gamma \frac{Mm}{(R+h)^2}. \quad (9.12)$$

Отсюда следует, что сила тяжести и ускорение свободного падения меняются с высотой в одинаковой степени.

На небольших высотах, много меньших радиуса Земли, можно этими изменениями пренебречь и считать силу тяжести и ускорение свободного падения постоянными величинами. Действительно, поскольку средний радиус Земли  $R=6371$  км, то даже на высоте в несколько сот километров над уровнем моря только очень чувствительные приборы могут обнаружить изменение величин силы тяжести и ускорения. Пусть  $h=300$  км, тогда

$$\frac{R^2}{(R+h)^2} = \left(\frac{6371}{6671}\right)^2 = 0,955,$$

что отличается от единицы на 4,5%. А при  $h=30$  км

$$\frac{R^2}{(R+h)^2} = \left(\frac{6371}{6401}\right)^2 = 0,9957,$$

что отличается от единицы на 0,43%.

2. Зная ускорение силы тяжести и гравитационную постоянную, можно определить массу Земли. Действительно, из (9.11)

$$g_0 = \frac{\gamma M}{R^2},$$

откуда масса Земли

$$M = \frac{g_0 R^2}{\gamma} = \frac{9,8 \cdot 6,37^2 \cdot 10^{12}}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ кг}. \quad (9.13)$$

Аналогично можно рассчитать и массу Солнца. Зная, что радиус земной орбиты  $R_3=149,5 \cdot 10^9$  м, а период обра-

щения Земли вокруг Солнца  $T=1$  год  $=31,56 \cdot 10^6$  сек, можно найти нормальное ускорение Земли:

$$a_3 = \frac{4\pi^2 R_3}{T^2} = 5,9 \cdot 10^{-3} \text{ м/сек}^2.$$

По аналогии с (9.13) имеем

$$M_c = \frac{a_3 R_3^2}{\gamma} = \frac{5,9 \cdot 10^{-3} \cdot 149,5^2 \cdot 10^{18}}{6,67 \cdot 10^{-11}} = 1,98 \cdot 10^{30} \text{ кг}.$$

Итак, масса Солнца в 330 000 раз больше массы Земли.

3. Зная массу Земли и ее радиус, можно определить ее среднюю плотность:

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{5,97 \cdot 10^{24} \cdot 3}{4\pi \cdot 6,37^3 \cdot 10^{18}} = 5,5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Поскольку каменные породы, из которых состоит поверхностный слой Земли, имеют примерно вдвое меньшую плотность, то очевидно, что внутри Земли имеется ядро, плотность которого примерно вдвое больше ее средней плотности. А это значит, что ядро Земли состоит в основном из металлов типа железа, меди и т. п.

По гипотезе академика О. Ю. Шмидта Земля образовалась из метеорного облака. Метеориты, сталкиваясь друг с другом, разогревались; кроме того, разогрев вызывался теплотой, которая выделялась при распаде радиоактивных веществ. В результате земной шар приобрел пластичные свойства. Более плотные вещества, как металлы, притянулись к центру Земли и образовали ее ядро; менее плотные вещества всплыли на поверхность и образовали каменную оболочку Земли — литосферу.

Однако в литосфере нередко встречаются массивные залежи более плотных веществ — металлических руд. Вблизи этих залежей ускорение силы тяжести больше, чем в областях, состоящих только из каменных пород. Таким образом, точные измерения ускорения силы тяжести помогают геологам обнаружить рудные залежи. Этот метод, называемый *гравиметрической разведкой*, широко применяется на практике.

## § 9.8. Влияние вращения Земли на ускорение свободного падения

1. В предыдущем параграфе выведена зависимость ускорения свободного падения от высоты поднятия тела над уровнем моря. Однако при этом мы не учли, что на эту величину влияет еще и суточное вращение Земли.

Пусть тело с массой  $m$  расположено в точке  $A$  на географической широте  $\varphi$  (рис. 9.4). Поскольку это тело участвует в суточном вращении Земли, то оно движется по окружности радиуса  $AK=r=R\cos\varphi$ , где  $R$  — радиус Земли. Во всяком криволинейном движении есть нормальное ускорение

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 R \cos \varphi}{T^2},$$

где  $T$  — период вращения Земли.

Чтобы найти силу, вызывающую нормальное ускорение, разложим силу тяготения  $F_{\text{тяг}}$  на две компоненты: центробежную силу  $F_n$  и силу тяжести  $P$ . Из рис. 9.4 видно, что сила тяжести повсюду, кроме полюсов, меньше

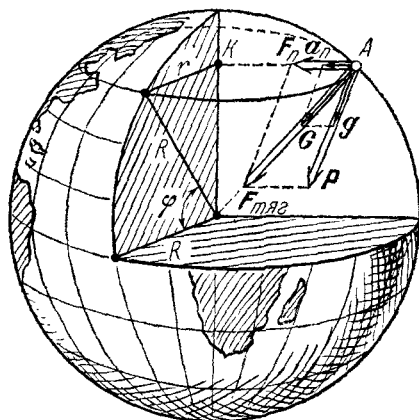


Рис. 9.4.

силы тяготения. Кроме того, повсюду, кроме экватора и полюсов, сила тяжести направлена не к центру Земли, а несколько в сторону.

За счет того, что сила тяжести на полюсах несколько больше, чем на экваторе, земной шар немного сплюснут: его полярный радиус равен 6356,9 км, а экваториальный — 6378,4 км.

2. Ускорение свободного падения на полюсе имеет максимальное значение. Действительно, здесь нормальное ускорение равно нулю, а полярный радиус имеет минимальные размеры. Следовательно,

$$g_{\text{пол}} = G_{\text{пол}} = \frac{\gamma M}{R_{\text{пол}}^2}.$$

Ускорение свободного падения тела на экваторе есть разность между напряженностью поля тяготения и нормальным ускорением:

$$g_{\text{экр}} = G_{\text{экр}} - a_n^{\text{экр}} = \frac{\gamma M}{R_{\text{экр}}^2} - \frac{4\pi^2 R_{\text{экр}}}{T^2}.$$

Точные измерения дают

$$g_{\text{пол}} = 9,83210 \text{ м/сек}^2, \quad g_{\text{эkv}} = 9,78038 \text{ м/сек}^2.$$

На широте  $45^\circ$  ускорение свободного падения тела  $g = 9,80620 \text{ м/сек}^2$ .

При приближенных расчетах полагают  $g = 9,81 \text{ м/сек}^2$ .

## Г Л А В А 10

### ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СИЛЫ

#### § 10.1. Электрический заряд

1. Помимо гравитации, в природе существует особый класс *электромагнитных* взаимодействий. Простейшим примером электрического взаимодействия является притяжение или отталкивание наэлектризованных тел.

С явлением электризации тел позволяет ознакомиться следующий эксперимент. Два стержня из пластмассы установлены на иглах и могут свободно поворачиваться (рис. 10.1). На одном стержне укреплена хорошо отшлифованная металлическая пластинка, на другом — пластинка из плексигласа, также хорошо отшлифованная. Снимем стержни с игл и приведем пластинки в соприкосновение. Если вновь поставить стержни на иглы и отпустить, то пластинки притянутся друг к другу. Эта сила, естественно, не является гравитационной, ибо масса тел до и после контакта остается неизменной, а гравитационные силы зависят только от масс тел и расстояния между ними. Следовательно, в данном эксперименте мы встречаемся с новым классом сил, которые называются *электрическими*.

2. Физическая величина, характеризующая свойство тел вступать при определенных условиях в электрические взаимодействия и определяющая величину электрических сил,

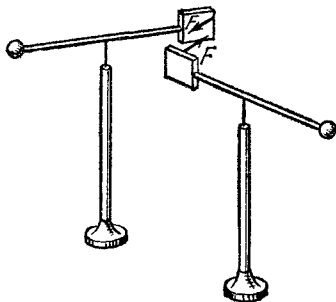


Рис. 10.1.

называется *электрическим зарядом*. Явление, сопровождающееся перераспределением зарядов на телах, называется *электризацией*.

Электризация тел при соприкосновении иногда называется еще электризацией вследствие трения, что по существу неверно. Трение здесь не играет принципиальной роли, оно лишь улучшает контакт между соприкасающимися телами и тем самым способствует их электризации.

## § 10.2. Закон Кулона

1. Опыт показывает, что сила электрического взаимодействия довольно сложным образом зависит от формы наэлектризованных тел и характера распределения заряда на этих телах. Следовательно, не существует единой простой формулы, описывающей электрическое взаимодействие для любого произвольного случая. И только для *точечных зарядов* закон взаимодействия записывается в достаточно простой форме.

Заметим, что понятие точечного заряда является удобной абстракцией, аналогично понятию материальной точки (см. § 1.1). Точечным называется заряд, распределенный на теле, размеры которого значительно меньше, чем любые расстояния, встречающиеся в данной задаче.

2. Воспользовавшись крутильными весами (см. § 9.3), Кулон в 1785 г. смог опытным путем найти закон взаимодействия точечных зарядов. Крутильные весы Кулона (рис. 10.2) имели легкое стеклянное коромысло, которое заканчивалось с одной стороны металлическим шариком. До

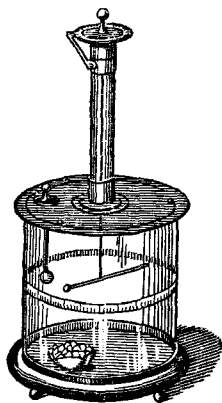


Рис. 10.2.

этого шарика Кулон дотрагивался наэлектризованным стержнем, тоже с шариком на конце. При этом заряд распределялся между шариками и они отталкивались друг от друга. Коромысло закручивало нить до тех пор, пока сила упругости не уравновешивала силу электрического взаимодействия. Поворачивая рукоятку, можно было изменять

угол закручивания нити, изменяя тем самым силу упругости и за счет этого расстояние между зарядами. Из ряда экспериментов Кулон нашел, что сила электрического взаимодействия между зарядами изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния между ними.

В отличие от опыта Кавендиша, где массы взаимодействующих тел были известны, у Кулона не было метода для измерения величины заряда на шариках. Однако здесь оказалось возможным применить следующий прием. К наэлектризованному шарiku прикоснулись незаряженным шариком одинакового с ним размера, который потом уносили далеко от прибора. Поскольку при этом заряд распределялся поровну между обоими соприкоснувшимися телами, заряд пробного шарика уменьшался вдвое. Оказалось, что ровно во столько же раз уменьшалась и сила электрического взаимодействия.

Повторяя эту операцию несколько раз, Кулон пришел к выводу, что сила электрического взаимодействия пропорциональна произведению зарядов взаимодействующих тел.

3. Опыты Кулона были не очень точны, поскольку шарики были слишком велики и сила измерялась с значительной погрешностью. Наконец, опыты производились в воздухе, что хотя и незначительно, но все же влияло на результаты эксперимента. Тем не менее Кулону удалось сформулировать закон, который в дальнейшем блестяще подтвердился всей совокупностью электрических явлений: *сила взаимодействия между двумя точечными зарядами в вакууме прямо пропорциональна произведению этих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними,*

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (10.1)$$

Здесь  $F$  — сила взаимодействия,  $q_1$  и  $q_2$  — заряды,  $r$  — расстояние между ними,  $k$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от системы единиц, которой пользуются при расчетах.

4. Кулоновская сила, как и любая другая сила (например, гравитационная), подчиняется третьему закону Ньютона: *силы взаимодействия между зарядами равны по величине*

и направлены противоположно друг другу вдоль прямой, соединяющей эти заряды.

Опыт показывает, что одноименные электрические заряды отталкиваются друг от друга, а разноименные — притягиваются. Этим кулоновские силы принципиально отличаются от гравитационных, которые всегда являются силами притяжения.

Сила отталкивания, действующая на данный заряд, направлена в ту же сторону, что и радиус-вектор, проведенный к этому заряду; сила притяжения имеет противоположное направление (рис. 10.3). Поэтому целесообразно

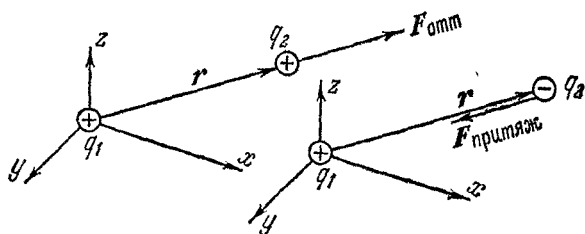


Рис. 10.3.

приписать этим силам соответствующие знаки: силам отталкивания — положительный, силам притяжения — отрицательный.

Закон Кулона учитывает знак сил автоматически: если заряды одноименные, то их произведение является положительным числом и сила отталкивания имеет тот же знак. Если же заряды имеют разные знаки, то их произведение является отрицательным числом, что соответствует знаку силы притяжения.

Заметим, что, согласно условию о знаке сил, выражение для закона тяготения следует писать со знаком минус:

$$F = -\gamma \frac{mM}{r^2}, \quad (10.2)$$

так как массы всегда имеют положительный знак, а между ними действует отрицательная сила — сила притяжения.



### § 10.3. Единицы заряда и системы единиц

1. Наиболее простой вид закон Кулона примет, если положить коэффициент пропорциональности равным единице; в этом случае (при  $q_1 = q_2 = q$ )

$$F = \frac{q^2}{r^2}. \quad (10.3)$$

Но положив  $k=1$ , мы тем самым уже определили и единицу измерения электрического заряда, ибо единицы измерения силы и расстояния заданы. Так определяется единица измерения заряда в абсолютной электростатической системе единиц (системе СГС):

*Абсолютной электростатической единицей заряда* является точечный заряд, который взаимодействует в вакууме с равным ему зарядом, расположенным на расстоянии 1 см, с силой в 1 дину.

В Международной системе (СИ) единицей заряда служит кулон:

$$1 \text{ к} = 3 \cdot 10^9 \text{ абс. электростат. единиц.}$$

2. Два точечных заряда по 1 кулону, расположенные на расстоянии 1 м друг от друга, взаимодействуют в вакууме с силой

$$F = \frac{(3 \cdot 10^9)^2}{(10^2)^2} = 9 \cdot 10^{14} \text{ дин} = 9 \cdot 10^9 \text{ н.}$$

Поскольку коэффициент  $k$  в законе Кулона (аналогично гравитационной постоянной в законе тяготения) численно равен силе, с которой два единичных заряда взаимодействуют на единичном расстоянии, то

$$k = 9 \cdot 10^9 \text{ н} \cdot \text{м}^2 / \text{к}^2.$$

В системе СИ закон Кулона принято писать в виде

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2}. \quad (10.4)$$

Величина  $\epsilon_0$  называется *электрической постоянной*. Сравнивая (10.1) и (10.4), получим

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}.$$

Отсюда следует, что электрическая постоянная

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \kappa^2 / \text{н} \cdot \text{м}^2 = 8,85 \cdot 10^{-12} \kappa^2 / \text{н} \cdot \text{м}^2.$$

3. За единицу измерения электрического заряда естественно было бы выбрать заряд электрона. В этом случае заряд любого другого тела выражался бы целым числом, показывающим, сколько электронов это тело приобрело (или потеряло) при электризации. Однако, поскольку единица заряда уже выбрана, заряд электрона был определен опытным путем. Оказалось, что заряд электрона (элементарный заряд  $e$ ) равен

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \kappa = 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ абс. электростат. единиц.}$$

Отсюда

$$1 \kappa = 6,25 \cdot 10^{18} e.$$

Сравним силу гравитационного и электрического взаимодействия между двумя электронами. Имеем

$$F_{\text{кул}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad F_{\text{грав}} = \frac{\gamma m^2}{r^2},$$

где  $m = 9 \cdot 10^{-31}$  кг — масса покоя электрона;

$$\frac{F_{\text{кул}}}{F_{\text{грав}}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \gamma m^2} = \frac{1,6^2 \cdot 10^{-38} \cdot 36 \cdot 10^9}{4\pi \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 9^2 \cdot 10^{-62}} = 4,26 \cdot 10^{42}.$$

Таким образом, при рассмотрении явлений, протекающих в электрически заряженных системах, и в частности в мире молекул, атомов и атомных ядер, можно полностью пренебречь гравитационными силами по сравнению с электрическими. И только для космических тел (планет, звезд), обладающих огромными массами, гравитационные силы начинают играть преобладающую роль.

## § 10.4. Диполь

1. Диполем называется электрическая система, состоящая из двух зарядов  $q$ , равных по абсолютной величине, но противоположных по знаку (рис. 10.4). Электрической характеристикой диполя является вектор

$$\mathbf{p}_e = q\mathbf{l}. \quad (10.5)$$

Он называется электрическим моментом диполя. Вектор  $\mathbf{l}$  считается направленным от отрицательного к положительному заряду. Модуль  $|\mathbf{l}|=l$  называется плечом диполя. Вектор  $\mathbf{p}_e$  направлен в ту же сторону, что и вектор  $\mathbf{l}$ .

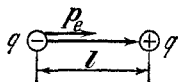


Рис. 10.4.

Поскольку диполь представляет собой электрически нейтральную систему, то на первый взгляд может показаться, что диполи неспособны к электрическому взаимодействию. Однако такой вывод является слишком поспешным. *Диполи взаимодействуют*, и это вызвано тем фактом, что заряды, образующие диполь, расположены в разных точках пространства.

2. Рассмотрим случай взаимодействия двух одинаковых диполей, расположенных вдоль одной оси. Расстояние между центрами диполей обозначим  $r$ ; пусть это расстояние много больше плеча диполя:  $r \gg l$  (рис. 10.5).

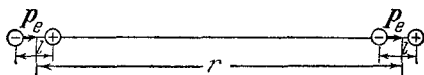


Рис. 10.5.

Сила взаимодействия складывается из четырех компонент — двух сил отталкивания между одноименными зарядами и двух сил притяжения между разноименными зарядами:

$$F = \frac{(-q) \cdot (-q)}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{(+q) \cdot (+q)}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{(-q) \cdot (+q)}{4\pi\epsilon_0 (r-l)^2} + \frac{(-q) \cdot (+q)}{4\pi\epsilon_0 (r+l)^2} =$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{2}{r^2} - \frac{1}{(r-l)^2} - \frac{1}{(r+l)^2} \right].$$

После несложных преобразований получим

$$F = -\frac{6q^2 l^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r^2 - l^2}{r^2 (r^2 - l^2)^2}.$$

Обозначив  $ql = p_e$  и отбрасывая  $l^2$ , как очень малую величину по сравнению с  $r^2$ , имеем

$$F = -\frac{6p_e^2}{4\pi\epsilon_0 r^4}. \quad (10.6)$$

Нетрудно обобщить это выражение для случая взаимодействия диполей с разными электрическими дипольными моментами  $p_{1e}$  и  $p_{2e}$ :

$$F = -\frac{6p_{1e}p_{2e}}{4\pi\epsilon_0 r^4}. \quad (10.7)$$

Итак, диполи притягиваются, причем сила притяжения пропорциональна произведению электрических моментов диполей и обратно пропорциональна четвертой степени расстояния между ними. Следовательно, дипольное взаимодействие убывает с расстоянием значительно быстрее, чем взаимодействие между точечными зарядами.

Предоставляем читателю самостоятельно убедиться в том, что диполи, изображенные на рис. 10.6, отталкиваются друг от друга, и рекомендуем вычислить силу отталкивания.

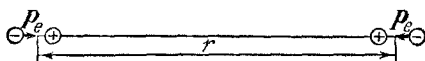


Рис. 10.6.

3. Дипольное взаимодействие играет исключительно важную роль в физике. Оказывается, что всякая система, состоящая из асимметрично расположенных зарядов, алгебраическая сумма которых равна нулю, может в первом приближении рассматриваться как диполь. Это позволяет объяснить один из видов молекулярного взаимодействия — так называемые силы Ван-дер-Ваальса (см. § 31.3).

## § 10.5. Электрическое поле. Напряженность

1. Аналогично тому, как было введено понятие о поле тяготения (см. § 9.5), введем понятие об электрическом поле. А именно, будем считать, что электрическое взаимодействие осуществляется по схеме «заряд — поле — заряд»: каждый заряд создает вокруг себя электрическое поле, которое действует на все остальные заряженные частицы.

*Электрическое поле является одним из видов материи.* Оно существует независимо от нашего сознания и может быть обнаружено по его воздействию на физические объекты, например на измерительные приборы.

2. Силовой количественной характеристикой электрического поля является векторная величина, называемая *напряженностью* электрического поля  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}. \quad (10.8)$$

Напряженность поля численно равна отношению силы, действующей в данной точке поля на пробный положительный точечный заряд  $q$ , к величине этого заряда. Пробный заряд должен быть столь малым, чтобы его поле не искажало исследуемого поля.

### § 10.6. Поле точечного заряда и диполя

1. Выражение для напряженности поля точечного заряда можно получить из закона Кулона. Обозначив заряд, создающий поле, буквой  $Q$ , а пробный заряд через  $q$ , имеем

$$F = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

откуда

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}. \quad (10.9)$$

Заряд, создающий поле, мы поместим в начало координат. Проведем радиус-вектор в интересующую нас точку

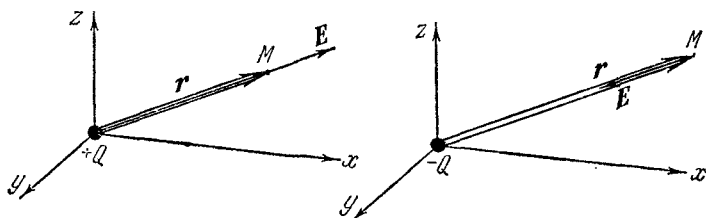


Рис. 10.7.

поля  $M$ . Тогда при положительном знаке источника поля вектор напряженности направлен в ту же сторону, что и радиус-вектор, а при отрицательном — в противоположную (рис. 10.7).

Заметим, что напряженность определяется источником поля  $Q$  и точкой поля — радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ , но не

зависит от пробного заряда  $q$ . Это позволяет говорить о поле в данной точке пространства независимо от того, находится ли в этой точке пробный заряд или нет.

2. Поле любого заряженного тела, вообще говоря, можно рассчитать, исходя из того, что напряженность — вектор, а закон сложения векторов нам известен. Метод принципиально не сложен: нужно разбить тело на столь малые участки, чтобы заряд этих участков можно было считать точечным, вычислить напряженность поля, создаваемого каждым точечным источником, а затем найти *векторную сумму* по правилу многоугольника.

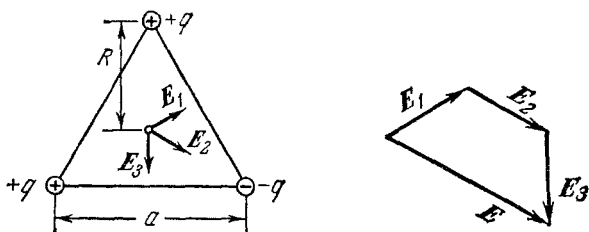


Рис. 10.8.

Вычислим, например, напряженность поля в центре правильного треугольника, если в его вершинах расположены равные по абсолютной величине заряды — два положительных и один отрицательный (рис. 10.8). Векторы  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  равны по абсолютной величине; по формуле (10.9) имеем

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 a^2},$$

поскольку  $R = a/\sqrt{3}$ . Складывая все три вектора по правилу многоугольника, получим равнобокую трапецию, большее основание которой и есть искомый вектор  $E$ . Из рисунка видно, что

$$E = E_2 + E_1 \sin 30^\circ + E_3 \sin 30^\circ = 2E_1 = \frac{6q}{4\pi\epsilon_0 a^2}.$$

Кроме того, видно, что вектор  $E$  направлен в ту же сторону, что и вектор  $E_2$ .

3. Вычислим напряженность поля на оси диполя  $E_{\parallel}$  и в точке на нормали к середине оси диполя  $E_{\perp}$  (рис. 10.9). При этом, как и в § 10.4, расстояние от точки поля до оси диполя значительно больше плеча диполя:  $r \gg l$ . Напряженность поля в точке  $A$  равна векторной сумме напряженностей полей, созданных положительным и отрицательным

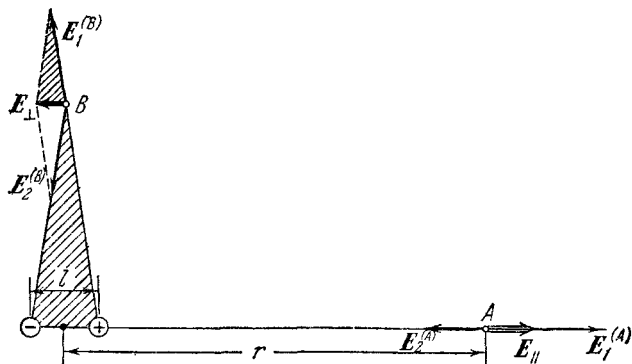


Рис. 10.9.

зарядами. Так как  $E_1$  и  $E_2$  направлены по одной прямой, то

$$E_{\parallel} = E_1^{(A)} + E_2^{(A)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \left(r - \frac{l}{2}\right)^2} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 \left(r + \frac{l}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2lr}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2}.$$

Отбрасывая малую величину  $l^2 \ll r^2$  и полагая  $ql = p_e$ , имеем

$$E_{\parallel} = \frac{2p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (10.10)$$

Напряженность поля в точке  $B$  равна векторной сумме напряженностей  $E_1^{(B)}$  и  $E_2^{(B)}$ . Из подобия треугольника напряженностей и треугольника расстояний (на рисунке заштрихованы) имеем

$$\frac{E_{\perp}}{E_1^{(B)}} = \frac{l}{R}.$$

Из (10.9)  $E_1^{(B)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ ; следовательно,

$$E_{\perp} = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 R^3}.$$

При  $r \gg l$  можно без особой погрешности положить, что  $R \approx r$ . Тогда

$$E_{\perp} = \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad (10.11)$$

Итак, напряженность поля, создаваемого диполем, пропорциональна моменту диполя и обратно пропорциональна кубу расстояния от точки поля до центра диполя.

## ГЛАВА 11

### ТРЕНИЕ

#### § 11.1. Внешнее и внутреннее трение

1. *Силой трения*  $T$  называется сила, возникающая при соприкосновении поверхностей двух тел и препятствующая их взаимному перемещению. Она приложена к телам вдоль поверхности их соприкосновения и направлена всегда противоположно *относительной скорости* перемещения.

Различают *внешнее* (сухое) и *внутреннее* (жидкое или вязкое) трение.

*Внешним трением* называется взаимодействие между поверхностями двух соприкасающихся твердых тел. Если эти тела неподвижны друг относительно друга, то говорят о *трении покоя*; при относительном перемещении говорят о *трении скольжения*, или кинематическом трении.

В случае, когда одно из тел катится по поверхности другого без проскальзывания, возникает особый вид сопротивления, называемый *трением качения*.

*Внутренним трением* называется взаимодействие, возникающее между слоями жидкости или газа, движущимися друг относительно друга. В отличие от внешнего трения, здесь отсутствует трение покоя.



## § 11.2. Трение покоя

1. Особенности внешнего трения могут быть изучены с помощью установки, изображенной на рис. 11.1. Брусок, лежащий на гладкой горизонтальной доске, с помощью динамометра крепится к нитке, которая наматывается на барабан, насаженный на ось электродвигателя. Динамометр

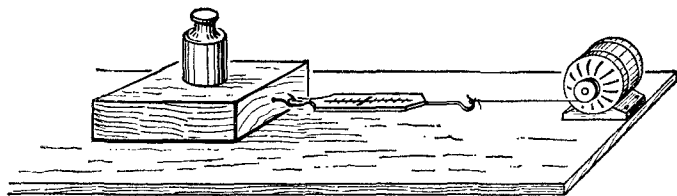


Рис. 11.1.

служит для измерения силы тяги. Регулируя скорость вращения двигателя, можно менять силу тяги в нужных пределах. Опыт показывает, что до тех пор, пока сила тяги меньше некоторой величины  $F_{\min}$ , брусок с места не сдвигается. При большей же силе тяги он скачком срывается с места и затем, в зависимости от условий опыта, движется равномерно или ускоренно.

2. Отсутствие ускорения у бруска при наличии силы тяги можно объяснить только тем, что *сила тяги уравновешивается силой трения*.

Основной закон динамики имеет вид

$$F - T = ma, \quad (11.1)$$

где  $F$  — сила тяги,  $T$  — сила трения,  $m$  — масса бруска и  $a$  — его ускорение.

При  $a=0$  брусок либо покоится, либо движется равномерно. Следовательно, здесь  $|F| = |T|$ , откуда следует, что для измерения силы трения покоя или силы трения скольжения достаточно измерить соответствующую этому состоянию силу тяги.

*Сила трения покоя не является однозначно определенной величиной.* В зависимости от приложенной силы тяги величина силы трения покоя меняется от нуля до  $F_{\min}$  — того

значения силы, когда брусок скачком начинает двигаться. Поэтому

$$T_{\text{пок}} \leq T_{\text{пок}}^{\text{max}} = F_{\text{min}}. \quad (11.2)$$

Обычно силой трения покоя и называют *максимальную силу трения*.

3. Теория явления сухого трения еще недостаточно разработана, но в общих чертах механизм возникновения трения покоя выглядит так.

Поверхность твердого тела, даже хорошо отшлифованного, далеко не ровная. На ней имеются микровыступы, впадины, трещины; часто эта поверхность покрыта окислами, прилипшими слоями газа или жидкости, посторонними включениями. При соприкосновении поверхностей двух тел микровыступы частично попадают в соответствующие



Рис. 11.2.

впадины (при большом увеличении соприкасающиеся поверхности будут выглядеть, например, как нарисовано на рис. 11.2). Естественно, что зацепление этих выступов будет препятствовать перемещению соприкасающихся тел друг относительно друга.

На ряде участков расстояние между соприкасающимися телами может оказаться порядка радиуса действия молекулярных сил. Это приведет к *слипанию* тел на данных участках, что также препятствует их относительному перемещению.

Внедрению микровыступов и частичному слипанию поверхностей способствует внешняя *сила нормального давления*  $P_n$ , прижимающая твердые тела друг к другу. Этой силой может служить сила тяжести или ее нормальная компонента (если тело лежит на наклонной плоскости), а также любая другая сила, перпендикулярная поверхности соприкосновения тел.

Сила тяги, меньшая максимальной силы трения покоя, вызывает в основном упругие деформации микровыступов и областей, где действуют силы молекулярного сцепления. Возникшая сила упругости и есть, по существу, сила трения покоя.

4. Изложенные соображения позволяют лишь качественно объяснить происхождение трения покоя, но они недостаточны для расчета величины силы трения. Для получения соответствующего закона обратимся к эксперименту.

Нагружая разными гирями брусок в установке, изображенной на рис. 11.1, будем менять силу нормального давления  $P_n$  (соответственно и равную ей силу реакции  $N=P_n$ ). Измеряя каждый раз силу тяги, мы убедимся, что *сила трения покоя пропорциональна силе нормального давления*:

$$T_{\text{пок}}^{\text{max}} = \mu_{\text{пок}} N. \quad (11.3)$$

Величина  $\mu_{\text{пок}}$  называется *коэффициентом трения покоя*.

Меняя площадь бруска, например поворачивая его с основания на бок, мы заметим, что *сила трения покоя не зависит от площади бруска*. Разделим обе части равенства (11.3) на площадь бруска и обозначим через  $\tau = T/S$  величину, называемую *касательным напряжением*; поскольку  $p = P_n/S$  есть давление, то полученный закон трения можно записать так:

$$\tau_{\text{пок}}^{\text{max}} = \mu_{\text{пок}} p. \quad (11.4)$$

5. Коэффициент трения покоя зависит от качества обработки поверхностей. У шлифованных поверхностей трение обычно меньше, чем у грубо обработанных поверхностей. Но это справедливо лишь до известных пределов. Именно, опыт показывает, что при очень тщательной шлифовке тела прилипают друг к другу, что вызывает резкое возрастание коэффициента трения. По-видимому, у грубо обработанных поверхностей основную роль в возникновении силы трения играют зацепления выступов, а при тщательной шлифовке — молекулярное сцепление.

Сила трения покоя также зависит от того, сколько времени тела находятся в контакте друг с другом. При длительном контакте тел и значительной силе нормального давления происходят пластические деформации соприкасающихся поверхностей. Это способствует слипанию тел и приводит к росту силы трения покоя.

### § 11.3. Угол трения

Для определения коэффициента трения удобно использовать установку, изображенную на рис. 11.3. Приподнятая осторожно наклонную плоскость, заметим, что при некотором угле  $\varphi_0$  брусок скачком сдвигается с места и начинает скользить по плоскости.

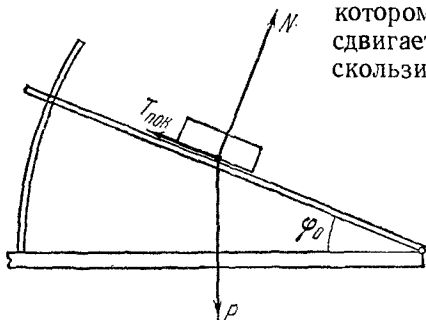


Рис. 11.3.



Рис. 11.4.

В данном случае на брусок действуют три силы: сила тяжести  $P$ , сила реакции  $N$  и сила трения  $T_{\text{пок}}$ . При отсутствии ускорений равнодействующая всех трех сил равна нулю, т. е. они образуют замкнутый треугольник (рис. 11.4). Поскольку сила тяжести направлена по вертикали, сила трения — вдоль наклонной плоскости, а сила реакции перпендикулярна ей, то треугольник сил  $NPT_{\text{пок}}$  является прямоугольным, а угол при его вершине равен  $\varphi_0$ . Отсюда следует, что  $T_{\text{пок}} = N \operatorname{tg} \varphi_0$ . Поскольку  $T_{\text{пок}} = \mu_{\text{пок}} N$ , то

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \mu_{\text{пок}}. \quad (11.5)$$

Измерения для разных материалов при различном качестве их обработки показывают, что коэффициент трения покоя меняется в весьма широких пределах — от нескольких сотых до единицы. При значительном же молекулярном сцеплении коэффициент трения может достичь значения 2—3.

### § 11.4. Трение скольжения

1. Опыт показывает, что при *равномерном* движении бруска в установке, изображенной на рис. 11.1, к нему должна быть все время приложена сила тяги. Но равномерное

движение является инерциальным; оно происходит само по себе, без воздействия внешних сил. Очевидно, что отсутствие ускорения у бруска при наличии силы тяги можно объяснить только тем, что *сила тяги уравновешивается силой трения скольжения* (кинематическим трением).

Исследовав величину силы трения скольжения при различных условиях, мы увидим, что она, как и сила трения покоя, зависит от нормального давления и качества обработки трущихся поверхностей. Она зависит от площади их соприкосновения и мало зависит от скорости относительного движения трущихся тел. Это позволяет силу трения скольжения вычислять по формуле

$$T_{\text{ск}} = \mu N, \quad (11.6)$$

где  $\mu$  — коэффициент трения скольжения; он несколько меньше коэффициента трения покоя.

2. Если трение покоя вызывается в основном упругими деформациями микровыступов на поверхностях трущихся тел, то трение скольжения возникает в результате пластических деформаций микровыступов и их частичного разрушения. Действительно, различные микровыступы в состоянии покоя находятся под действием неодинаковых сил, да и прочность разных выступов различна. Под действием силы тяги некоторые из них сразу же разрушаются. При этом сила тяги сосредоточится на еще не разрушенных участках, которые уже не смогут выдержать возросшую нагрузку. В результате происходит лавинообразное разрушение микровыступов, и тело скачком срывается с места. Сила трения при этом убывает, ибо уменьшение зацепления и прилипания поверхностей содействует их взаимному проскальзыванию, в результате чего коэффициент трения скольжения  $\mu$  меньше коэффициента трения покоя

$\mu_{\text{пок}}$ .

3. Качественный анализ механизма трения скольжения показывает, что оно возникает в результате *износа и нагрева* трущихся поверхностей. Характер износа определяется состоянием трущихся поверхностей — степенью их шероховатости, твердости и т. п. Благодаря износу возможны некоторые виды обработки материалов — шлифовка и полировка.

Износ и нагрев трущихся деталей механизмов и машин безусловно вреден; поэтому в технике принимают ряд мер для уменьшения трения. Для этой цели часто применяется смазка (см. § 11.7). Трение скольжения заменяют также трением качения, устанавливая шариковые или роликовые подшипники (рис. 11.5).

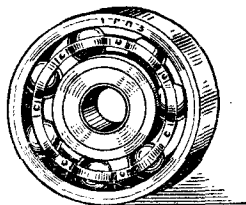


Рис. 11.5.

### § 11.5. Трение качения

1. Заменим в нашей экспериментальной установке скользящий брусок цилиндром, который может вращаться на оси (рис. 11.6). Если зажать скобки на оси так, чтобы цилиндр не вращался, то он будет скользить на поверхности доски. При этом сила трения заметно не отличается от силы трения у бруска, ибо она практически не зависит от площади соприкосновения трущихся тел. Если же скобки на оси отпустить, то диск станет катиться и сила трения резко уменьшится. Итак, *сила трения качения значительно меньше силы трения скольжения.*

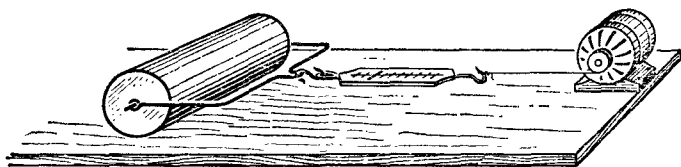


Рис. 11.6.

2. Опыты показывают, что сила трения качения пропорциональна силе нормального давления и обратно пропорциональна радиусу цилиндра (или колеса):

$$T_{\text{кач}} = k \frac{N}{r}. \quad (11.7)$$

Здесь  $k$  — коэффициент трения качения; он имеет размерность длины и в Международной системе единиц измеряется в метрах. Выражением (11.7) можно пользоваться только в том случае, когда диск не проскальзывает по поверхности.

## § 11.6. Движение тел под действием силы трения

1. До сих пор мы рассматривали силу трения как некое препятствие для движения тела. Однако это далеко не всегда так. На самом деле именно наличие трения покоя дает возможность двигаться, скажем, человеку или автомобилю по поверхности Земли, поезду или трамваю — по рельсам и т. д. Действительно, при движении человека между подошвой его обуви и поверхностью Земли возникает сила трения покоя. Эта сила и вызывает его перемещение. Всем известно, как трудно ходить по льду, где сила трения покоя слишком мала.

2. Выясним роль силы трения при повороте велосипедиста на горизонтальном участке пути. Из опыта известно, что для поворота необходимо наклониться в соответствующую сторону, что вызовет автоматический поворот руля.

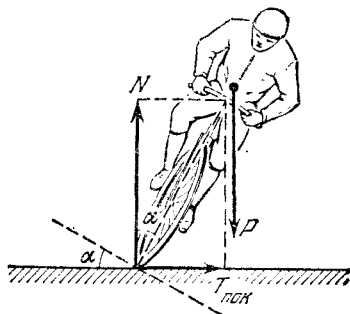


Рис. 11.7.

Рассмотрим силы, действующие на велосипедиста при наклоне влево (рис. 11.7). Сила тяжести  $P$  и сила реакции  $N$  действуют уже не по одной прямой. Под действием этих сил велосипедист начинает вращаться в вертикальной плоскости, что должно было бы вызвать проскальзывание колеса вправо. При этом возникает сила трения покоя  $T_{\text{пок}}$ , направленная в ту сторону, куда наклонился велосипедист.

Поскольку сила трения перпендикулярна скорости, она сообщает велосипедисту нормальное ускорение  $a_n = v^2/r$ . Из основного закона динамики следует, что центростремительная сила равна силе трения покоя:

$$\frac{mv^2}{r} = T_{\text{пок}} \leq \mu_{\text{пок}} \cdot mg$$

или

$$\frac{v^2}{r} \leq g\mu_{\text{пок}}.$$

Угол наклона велосипедиста (считая от вертикали) можно найти из условия, что равнодействующая силы реакции и

силы трения должна быть направлена вдоль движущегося тела:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{T_{\text{пок}}}{N} = \frac{mv^2}{r \cdot mg} = \frac{v^2}{rg} \leq \mu_{\text{пок}}.$$

Велосипедист не должен отклоняться от вертикали больше чем на угол трения  $\varphi_0 = \operatorname{arctg} \mu_{\text{пок}}$ . Для того чтобы создать возможность крутого поворота на больших скоростях, велосипедную дорожку (трек) профилируют, наклоняя ее на угол, соответствующий условию  $\operatorname{tg} \alpha \approx v^2/rg$ .

### § 11.7. Внутреннее трение

1. Опыт показывает, что в движущихся жидкостях или газах возникают силы внутреннего трения. Наличие этих сил можно обнаружить с помощью установки, изображенной на рис. 11.8. На тонкой проволоке висит тяжелый цилиндр. В наружный цилиндрический сосуд, ось которого совпадает с подвесом, наливается некоторая жидкость. Если наружный цилиндр привести во вращение, то внутренний цилиндр повернется на некоторый угол. Следовательно, вращающаяся жидкость действует на поверхность внутреннего цилиндра с силой, которая уравнивается упругостью закрученной нити. Эта сила зависит от расстояния между наружным и внутренним цилиндрами, скорости вращения наружного цилиндра, рода жидкости и ее температуры.

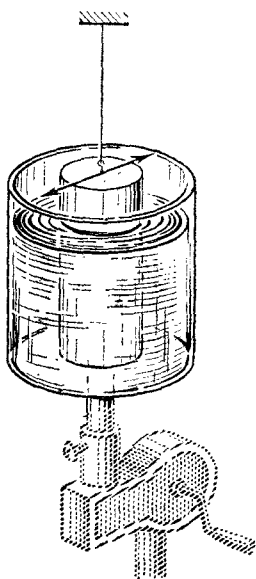


Рис. 11.8.

2. Явление внутреннего трения описывается следующим образом. Пусть между двумя плоскостями находится слой жидкости; верхняя плоскость движется относительно нижней со скоростью  $v$  (рис. 11.9). Мысленно разобьем жидкость на очень тонкие слои параллельными плоскостями, отстоящими на расстоянии  $\Delta l$  друг от друга. Слои жидко-



сти, касающиеся твердых тел, прилипают к ним. Промежуточные слои имеют распределение скоростей, изображенное на рис. 11.9. Это распределение характеризуется *градиентом скорости* — величиной  $\frac{\Delta v}{\Delta n}$ , показывающей, как быстро меняется абсолютная величина скорости при перемещении на единицу длины в направлении, перпендикулярном вектору скорости (соответственно — слоям жидкости).

Между соприкасающимися слоями жидкости при наличии градиента скорости возникают силы, направленные вдоль плоскости соприкосновения и препятствующие их относительному перемещению — силы внутреннего трения. Согласно Ньютону, *касательное напряжение* сил внутреннего трения пропорционально градиенту скорости:

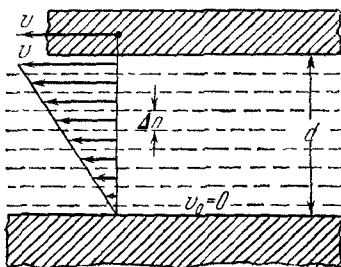


Рис. 11.9.

$$\tau = \frac{T_{\text{внутр}}}{S} = \eta \frac{\Delta v}{\Delta n}, \quad (11.8)$$

где  $\eta$  — коэффициент внутреннего трения, или *вязкость* жидкости.

Единицей измерения вязкости в системе СИ является  $\text{н} \cdot \text{сек} / \text{м}^2$ ; ее размерность  $[\eta] = \text{кг} / \text{м} \cdot \text{сек}$ . В системе СГС единица вязкости называется *пуаз*:

$$1 \text{ пуаз} = 1 \text{ дин} \cdot \text{сек} / \text{см}^2 = 0,1 \text{ н} \cdot \text{сек} / \text{м}^2.$$

3. Силы внутреннего трения проявляются не только в жидкостях, но и в газах. В этом можно убедиться, приводя в быстрое вращение установку, изображенную на рис. 11.8, когда между телами находится воздух (или какой-либо другой газ). Вязкость газов весьма мала — примерно в  $10^5$  раз меньше, чем вязкость жидкостей.

Силы внутреннего трения значительно меньше сил трения скольжения. Поэтому для уменьшения трения между движущимися частями механизмов и машин используется *смазка* — слой вязкой жидкости, заполняющий простран-

ство между трущимися поверхностями и оттесняющий их друг от друга. Это приводит к существенному уменьшению сил трения, что связано с уменьшением нагрева и износа деталей. Вместе с тем следует избегать попадания жидкости между фрикционными муфтами, между ремнем и шкивом в ременной передаче, между ведущими колесами локомотива и рельсом и т. д., ибо во всех этих случаях именно сила трения служит для передачи движения. Уменьшение трения в этих случаях безусловно вредно.

### § 11.8. Движение тела в жидкости

1. Опыт показывает, что тело, движущееся в жидкости или газе, испытывает сопротивление. Это сопротивление зависит от размеров и формы тела, от скорости его движения и свойств жидкости или газа.

Рассмотрим поток жидкости, движущийся со скоростью  $u$  в некоторой системе координат, связанной с неподвижным телом. Из принципа относительности следует, что сила, с которой движущийся поток действует на тело, в точности равна силе сопротивления, которую испытывало бы это тело, двигаясь с той же скоростью в неподвижной жидкости.

2. Поток жидкости, набегаая на тело, деформируется и обтекает его. При этом слои жидкости, прилегающие непосредственно к телу, прилипают к нему. При определенных условиях образуется так называемый *пограничный слой* — область жидкости, в которой скорость очень быстро возрастает от нуля примерно до скорости невозмущенного потока, т. е. имеется большой градиент скорости. При отрыве пограничного слоя от тела за ним возникают вихри (рис. 11.10). Сопротивление жидкости или газа в значительной мере определяется явлениями, происходящими в пограничном слое, и характером вихрей. Однако детальный анализ явлений в пограничном слое и вычисление сил сопротивления является исключительно сложной задачей. Мы можем попытаться оценить лишь *порядок* этих сил и основные параметры, от которых они зависят.

Можно считать, что сила сопротивления состоит из двух слагаемых: сопротивления давления и сопротивления трения. Первое определяется *разностью давлений* на передней и задней кромках обтекаемого тела, второе — *силами внут-*

ренного трения, возникающими за счет большого градиента скорости в пограничном слое.

Для оценки влияния каждой из этих компонент применим метод размерностей.

3. Сила сопротивления, возникающая вследствие разности давлений на передней и задней кромках обтекаемого

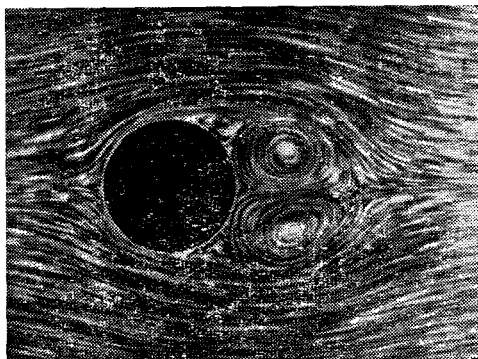


Рис. 11.10.

тела, зависит от плотности жидкости, скорости потока и площади «мидделя» \*) — максимального поперечного сечения, перпендикулярного потоку:

$$R = A \rho^\alpha v^\beta S^\gamma, \quad (11.9)$$

где  $A$  — безразмерный коэффициент.

В любом равенстве размерности левой и правой частей одинаковы, т. е.  $[R] = [\rho^\alpha v^\beta S^\gamma]$ . Подставив  $[R] = \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{сек}^{-2}$ ,  $[\rho] = \text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$ ,  $[v] = \text{м} \cdot \text{сек}^{-1}$  и  $[S] = \text{м}^2$ , определим неизвестные показатели  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Имеем

$$\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{сек}^{-2} = \text{кг}^\alpha \cdot \text{м}^{-3\alpha} \cdot \text{м}^\beta \cdot \text{сек}^{-\beta} \cdot \text{м}^{2\gamma},$$

откуда следует

$$\alpha = 1; \quad -3\alpha + \beta + 2\gamma = 1; \quad -\beta = -2$$

\*) От английского middle — средний.

или

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 1.$$

Обозначим, как это принято,  $A = C/2$ .

Выражение для сопротивления давления имеет вид

$$R = CS \frac{\rho v^2}{2}. \quad (11.10)$$

Коэффициент  $C$ , входящий в это выражение, очень сильно зависит от формы тела, или, как говорят, от его удобообтекаемости. Так, если для круглого диска  $C = 1,1-1,2$ , то для шара  $C = 0,4-0,2$ , а для каплеобразного обтекаемого тела  $C \approx 0,04$ , т. е. примерно в 10 раз меньше, чем у шара, и в 30 раз меньше, чем у диска (рис. 11.11).

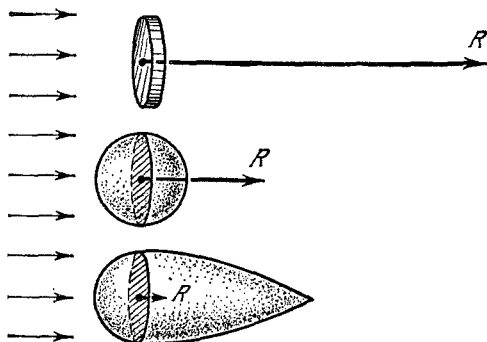


Рис. 11.11.

4. Сила вязкого трения, как это следует из (11.8), должна зависеть от вязкости, скорости и размеров тела:

$$T = B \eta^m v^n L^k, \quad (11.11)$$

где  $B$  — безразмерный коэффициент, а  $L$  — характерный размер тела. Анализ размерностей левой и правой частей дает

$$\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{сек}^{-2} = \text{кг}^m \cdot \text{м}^{-m} \cdot \text{сек}^{-m} \cdot \text{м}^n \cdot \text{сек}^{-n} \cdot \text{м}^k,$$

откуда

$$m = 1; \quad -m + n + k = 1; \quad -m - n = -2;$$

следовательно,

$$m = n = k = 1.$$

Выражение для сопротивления трения имеет вид

$$T = B\eta vL. \quad (11.12)$$

Коэффициент  $B$ , как и  $C$ , чаще всего определяется экспериментально. Для шара, как показал Стокс,  $B=6\pi$ , а характерным размером является радиус. Итак, для шара

$$T = 6\pi\eta vr. \quad (11.13)$$

5. Полная сила сопротивления является довольно сложной комбинацией сопротивления давления  $R$  и сопротивления трения  $T$ . Однако при очень малых скоростях сила трения, пропорциональная первой степени скорости, будет значительно больше силы давления, которая пропорциональна второй степени скорости. При больших скоростях, очевидно, справедливо обратное.

Поскольку понятия «большая» и «малая» скорость являются довольно неопределенными, введем специальный критерий для ее оценки. Для этого найдем отношение сопротивления давления к сопротивлению трения:

$$\frac{R}{T} = \frac{C}{2B} \cdot \frac{\rho v^2 S}{\eta vL}.$$

Отбрасывая безразмерные коэффициенты  $C$  и  $B$  и считая площадь сечения пропорциональной квадрату характерного размера ( $S \sim L^2$ ), получим

$$\frac{R}{T} \approx \frac{\rho vL}{\eta} = \text{Re}. \quad (11.14)$$

Безразмерное число  $\text{Re}$ , называемое *числом Рейнольдса*, играет исключительно важную роль в гидро- и аэродинамике: именно оно и определяет величину сопротивления.

Так, для «ползущих» течений, когда  $\text{Re} < 1$ , можно пренебречь силами давления и учитывать только силы трения. Наоборот, при больших значениях числа Рейнольдса следует учитывать только силы давления, отбрасывая силы трения.

### § 11.9. Падение тела в жидкости или газе

1. Выше было рассмотрено свободное падение тел, т. е. движение тел под действием одной лишь силы тяжести. Мы установили, что это движение является равноускоренным, и нашли соответствующий закон движения (см. § 8.2). Здесь мы рассмотрим падение тела в среде с сопротивлением — в жидкости или газе. Заодно выясним, при каких условиях можно пренебречь сопротивлением воздуха и

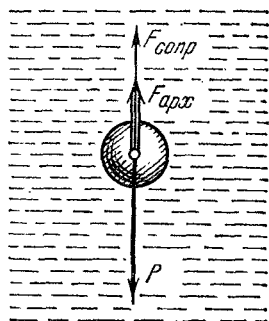


Рис. 11.12.

рассматривать падение тела в воздухе как свободное.

2. На тело, падающее в жидкости или газе, действуют три силы: сила тяжести  $P$ , архимедова выталкивающая сила  $F_{арх}$  и сила сопротивления  $F_{сопр}$  (рис. 11.12). Основной закон динамики в этом случае запишется так:

$$ma = P - F_{арх} - F_{сопр}. \quad (11.15)$$

Из трех сил лишь одна является переменной — это сила сопротивления, величина которой быстро возрастает с ростом скорости. Сила же тяжести и архимедова сила являются постоянными величинами. Естественно, что с течением времени, по мере возрастания скорости, ускорение уменьшается, и наступит такой момент, когда оно станет равно нулю. Начиная с этого момента тело будет двигаться *равномерно*. Итак, падение тела в жидкости и газе лишь на начальном этапе является ускоренным; начиная с некоторого момента тело падает с постоянной скоростью, которая называется *установившейся*.

3. Установившаяся скорость  $v_{уст}$  может быть найдена из (11.15) при условии  $a=0$ :

$$P - F_{арх} - F_{сопр}^{уст} = 0. \quad (11.16)$$

Для того чтобы произвести соответствующий расчет, следует оценить порядок величины числа Рейнольдса и выбрать соответствующее выражение для силы сопротивления.

Пусть, например, железный шарик ( $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ) с радиусом  $r = 2 \text{ мм}$  падает в глицерине. Вязкость глицерина  $\eta = 0,83 \text{ н} \cdot \text{сек/м}^2$ , его плотность  $\rho_{\text{ж}} = 1,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Число Рейнольдса

$$\text{Re} = \frac{\rho_{\text{ж}} r v}{\eta} = \frac{1,2 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-3} v}{0,83} \approx 3v.$$

Пусть  $\text{Re} < 1$ , тогда сила сопротивления вычислится по формуле Стокса (11.13).

Как известно, сила тяжести

$$P = mg = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g.$$

Выталкивающая сила по закону Архимеда равна весу вытесненной жидкости:

$$F_{\text{арх}} = P_{\text{ж}} = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{\text{ж}} g.$$

Подставив в (11.16) и произведя соответствующие преобразования, получим

$$v_{\text{уст}} = \frac{2r^2 g (\rho - \rho_{\text{ж}})}{9\eta} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 9,8 \cdot 6,6 \cdot 10^3}{9 \cdot 0,83} \approx 0,07 \text{ м/сек.}$$

Итак, здесь мы вполне обоснованно воспользовались формулой Стокса для вычисления сил сопротивления, ибо  $\text{Re} = 0,21 < 1$ .

В газах, например в воздухе, такие «ползущие» движения получают для очень малых тел — пылинок, капелек тумана и т. д.

4. При больших числах Рейнольдса сила сопротивления обусловлена в основном сопротивлением давления  $R$ . Основной закон динамики примет вид (пренебрегая для газов выталкивающей силой  $F_{\text{арх}} \ll P$ )

$$ma = mg - CS \frac{\rho_0 v^2}{2}, \quad (11.17)$$

где  $\rho_0$  — плотность газа.

Если тяжелое тело малых размеров падает с небольшой высоты, то сила сопротивления может оказаться много меньше силы тяжести. Тогда можно сопротивлением пренебречь и считать, что тело падает почти свободно.

Если же тело падает с большой высоты, то сопротивлением уже пренебречь нельзя, и начиная с некоторого момента тело будет падать с установившейся скоростью, которую легко определить из (11.17), полагив  $a = 0$ :

$$v_{\text{уст}} = \sqrt{\frac{2mg}{CS\rho_0}}. \quad (11.18)$$

Так, дождевые капли, имеющие форму шара ( $C = 0,4$ ) радиусом около  $r \approx 1-2 \text{ мм}$ , при плотности воздуха  $\rho_0 \approx 1 \text{ кг/м}^3$  падают с установившейся скоростью независимо от высоты облаков над поверхностью Земли (для воды  $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ ):

$$v_{\text{уст}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4 \pi r^2 \cdot \rho g}{3 \cdot C \cdot \pi r^2 \cdot \rho_0}} = \sqrt{\frac{8r\rho g}{3C\rho_0}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 \cdot 9,8}{3 \cdot 0,4 \cdot 1}} \approx 8 \text{ м/сек.}$$

5. Анализ формулы (11.18) позволяет понять роль парашюта. Человек, падая без парашюта со значительной высоты, имел бы установившуюся скорость порядка нескольких десятков метров в секунду. Удар о Землю с такой скоростью привел бы к его гибели.

При раскрытии парашюта сила сопротивления резко возрастает. Действительно, у парашюта площадь сечения, обдуваемого потоком, примерно в сто раз больше, чем у падающего человека, а коэффициент сопротивления  $C$  у парашюта в несколько раз больше, чем у человека. При возрастании множителя  $CS$  в несколько сот раз установившаяся скорость уменьшится в десятки раз, примерно до  $1$  м/сек. А приземление с такой скоростью совершенно безопасно.

## ГЛАВА 12

### ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

#### § 12.1. Скорость света и закон сложения скоростей

1. В середине XIX в. были разработаны методы, позволившие достаточно точно измерить скорость света. Оказалось, что в вакууме она составляет  $c=3 \cdot 10^8$  м/сек; более точно:

$$c = (2,997928 \pm 0,000004) \cdot 10^8 \text{ м/сек.}$$

Напрашивается естественный вопрос: к какой системе отсчета относится данное значение скорости света? Ведь говорить о скорости без указания системы отсчета, вообще говоря, бессмысленно.

Исходя из классического закона сложения скоростей, мы приходим к выводу, что в разных системах отсчета скорость света должна быть различной; следовательно, данное значение скорости света должно относиться лишь к одной какой-то системе отсчета, например, связанной с источником света. На этой основе можно предложить следующий эксперимент.

Пусть некоторый прибор, позволяющий измерить скорость света с достаточно большой точностью, покоится относительно источника света, расположенного в системе



отсчета *хуз*. В этом случае прибор зарегистрирует скорость света, равную  $c$  (рис. 12.1).

Поместим теперь прибор в другую систему отсчета, которая движется относительно системы *хуз* так, как это изображено на рис. 12.2, 12.3 и 12.4. На основе классического закона сложения скоростей следовало бы ожидать, что  $c' = c - v$ ,  $c'' = c + v$ ,  $c''' = \sqrt{c^2 + v^2}$ , т. е. что скорости света  $c'$ ,  $c''$  и  $c'''$  различны.

2. Первый опыт по измерению скорости света в движущейся системе отсчета был поставлен Майкельсоном в 1881 г., затем аналогичные эксперименты ставились рядом ученых буквально до самого последнего времени, причем точность измерений, естественно, все время возрастала. Оказалось, что опыт дает *отрицательный результат*: с очень высокой степенью точности во всех системах отсчета, независимо от величины и направления скорости их движения, скорость света (в вакууме) такая же, как и в системе отсчета, связанной с источником, т. е.  $c' = c'' = c''' = c$ .

Этот результат показывает, что классический закон сложения скоростей имеет ограниченную область применения. Он, в частности, не пригоден для описания явлений, связанных с распространением света. Но классический закон сложения скоростей является следствием из преобразований Галилея; следовательно, и последние имеют ограниченную область применения.

3. Поскольку постоянство скорости света во всех инерциальных системах отсчета есть твердо установленный экспериментальный факт, и в то же время этот факт не согласуется с преобразованиями Галилея, то возникла необходимость в критическом пересмотре тех идей, которые положены в основу этих преобразований. Эту задачу решил в 1905 г. А. Эйнштейн. Но для этого понадобился радикальный пересмотр наших представлений о пространстве и времени.

Эйнштейн показал, что при выводе преобразований Галилея в неявном виде вводились два положения, которые казались настолько очевидными, что их даже не считали нужным обосновывать:

а) полагали, что одновременность двух событий есть абсолютное понятие — два события, одновременные в одной системе отсчета, считали одновременными и в любой другой

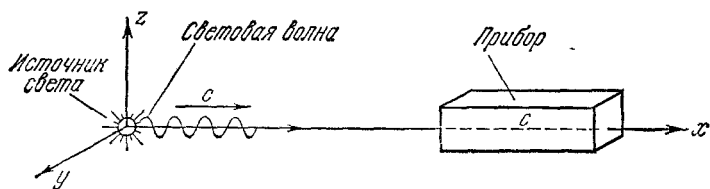


Рис. 12.1.

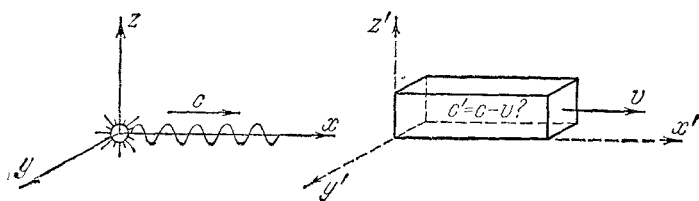


Рис. 12.2.

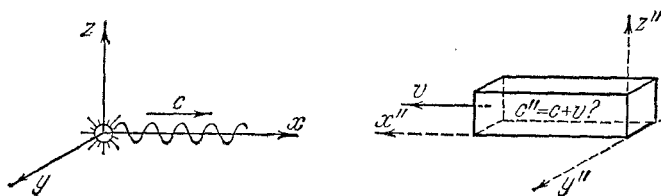


Рис. 12.3.

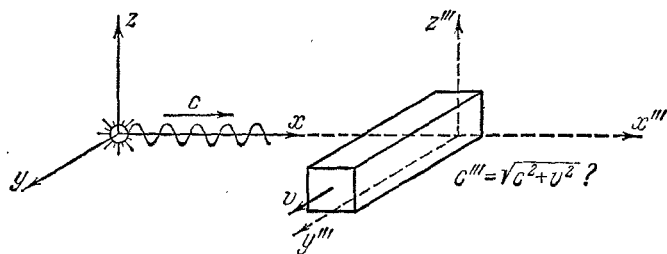


Рис. 12.4.

системе; отсюда вытекало, что часы, расположенные в произвольных инерциальных системах отсчета, регистрируют одно и то же время, — короче, что время во всех инерциальных системах отсчета протекает одинаково;

б) предполагалось, что длина стержня во всех инерциальных системах отсчета одна и та же (см. § 2.4).

В действительности эти положения оказались не универсальными, а только первым приближением, справедливым лишь в ньютоновской механике.

## § 12.2. Основные постулаты специальной теории относительности \*)

Специальная теория относительности называется иначе релятивистской теорией (от латинского *relativ* — относительный). В основу ее положены два принципа, которые являются постулатами. Эти постулаты надежно подтверждены экспериментально.

1. *Принцип относительности.* Все инерциальные системы отсчета равноправны, во всех инерциальных системах не только механические, но и все другие явления природы протекают одинаково.

2. *Принцип постоянства скорости света.* Во всех инерциальных системах скорость света в вакууме одинакова и равна  $c$ .

Посмотрим же, какие следствия вытекают из этих основных положений.

## § 12.3. Одновременность событий

1. Из двух основных постулатов теории относительности вытекает, что *два события, одновременные в одной системе отсчета, не одновременны в другой системе.*

Чтобы доказать это положение, которое на первый взгляд кажется парадоксальным, рассмотрим следующий эксперимент. Пусть одна система отсчета связана с Землей, вторая — с вагоном, движущимся относительно Земли прямолинейно и равномерно (рис. 12.5). Отметим на Земле

---

\*) Помимо специальной теории относительности, Эйнштейн в 1915 г. разработал общую теорию относительности (см. гл. 24).

точки  $A$ ,  $B$  и  $M$ , причем  $AM=BM$ , а в вагоне соответственно точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $M'$  с таким расчетом, что  $A'M'=B'M'$ . Пусть в тот момент, когда отмеченные на Земле и в вагоне точки совпадают, в точках  $A$  и  $B$  произойдут некоторые события, например ударяют две молнии.

Очевидно, что если свет от обеих вспышек придет в точку  $M$  одновременно, то в точку  $M'$  раньше придет свет из  $B'$ , затем из  $A'$ . Проанализируем теперь эти события с позиций наблюдателей, находящихся в обеих системах отсчета.

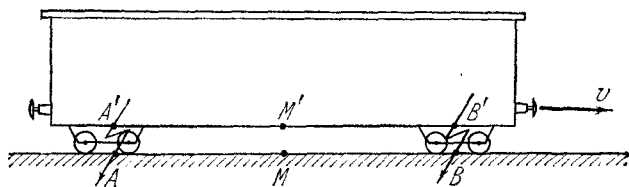


Рис. 12.5.

*На Земле:* расстояние  $AM=BM$ . Скорость света во всех направлениях одна и та же. Сигналы от обоих событий пришли в точку  $M$  одновременно. Следовательно, и события в точках  $A$  и  $B$  произошли одновременно.

*В вагоне:* расстояние  $A'M'=B'M'$ . Скорость света во всех направлениях одна и та же. Сигнал из точки  $B'$  пришел раньше, чем из точки  $A'$ . Следовательно, событие в точке  $B'$  произошло раньше, чем в точке  $A'$ .

Если бы вагон двигался справа налево, то получился бы обратный результат: событие  $B'$  произошло бы позже, чем  $A'$ .

Итак, понятие одновременности имеет относительный смысл, и в разных инерциальных системах отсчета время протекает по-разному.

2. Заметим, что в приведенном рассуждении мы пользовались только двумя принципами: мы считали обе системы отсчета равноправными (принцип относительности) и считали, что свет во всех направлениях движется с одной и той же скоростью (принцип постоянства скорости света). Никаких других дополнительных гипотез мы не вводили.

В классической же физике совершенно бездоказательно предполагалось, что время во всех системах отсчета протекает одинаково. Отсюда получался классический закон сло-

жения скоростей, который противоречит экспериментально установленному закону постоянства скорости света.

3. Иногда спрашивают: ну, а *на самом деле* события в точках *A* и *B* одновременны или нет? Очевидно, что этот вопрос не имеет смысла. Ответить на вопрос, что происходит *на самом деле*, означает фактически указать некую преимущественную систему отсчета. А такой системы отсчета просто нет в природе.

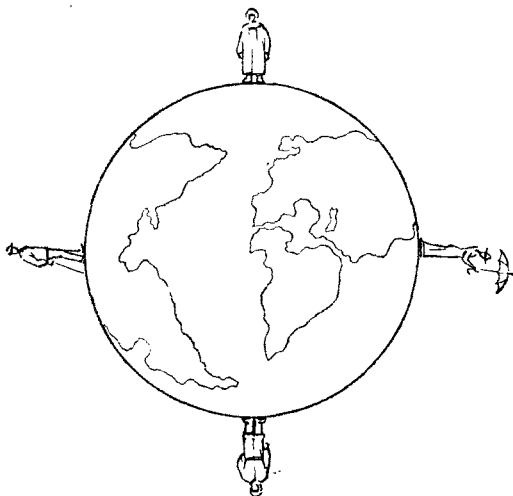


Рис. 12.6.

Вообще не всегда можно ответить на вопрос о том, что происходит на самом деле. Так, когда в Москве утро, то во Владивостоке вечер, а в Сан-Франциско ночь. И нелепо спрашивать, а что же сейчас на самом деле: утро, вечер или ночь? Это относительные понятия, ответ зависит от того, в какой точке Земли находится наблюдатель. В такой же мере относительны понятия «верха» и «низа» для людей, живущих на противоположных сторонах земного шара (рис. 12.6).

Точно так же понятие одновременности является относительным — на вопрос об одновременности или неодновременности двух событий нельзя ответить, не указав систему отсчета, относительно которой данная задача решается.

## § 12.4. Одновременность и длина

Выше мы определили длину стержня как разность координат его начала и конца, *измеренных одновременно* (см. § 2.4). Однако понятие одновременности имеет относительный смысл, и события, одновременные в одной системе отсчета, окажутся неодновременными в другой системе. А отсюда вытекает, что *длина стержня в разных системах отсчета будет различной* (см. далее § 12.8). Нельзя говорить о длине стержня, не указав системы отсчета, относительно которой эта длина измеряется. Это так же бессмысленно, как говорить о скорости пассажира, не указывая системы отсчета: скорость пассажира относительно вагона не равна его скорости относительно Земли.

Итак, в теории относительности промежутки времени между событиями и длины отрезков являются относительными понятиями, имеющими различные значения в разных инерциальных системах отсчета.

## § 12.5. Релятивистский закон сложения скоростей

1. Как было показано выше, преобразования Галилея не согласуются с экспериментально установленным фактом постоянства скорости света. Поэтому необходимо вывести новые преобразования координат при переходе из одной инерциальной системы отсчета к другой.

Рассмотрим систему координат  $xuz$ , связанную с Землей, и систему координат  $x'y'z'$ , связанную с вагоном (см. рис. 2.1, стр. 34). В этом случае вдоль оси ординат и оси апликата движения нет, откуда вытекает, что  $y' = y$  и  $z' = z$ , как и в случае преобразований Галилея.

Свободное пространство однородно и изотропно, поэтому единица длины во всех его точках и во всех направлениях должна быть одинаковой. То же относится и к масштабу времени. Поэтому мы будем искать релятивистские преобразования в виде линейных функций:

$$\left. \begin{aligned} x' &= Ax + Bt, \\ t' &= Mx + Nt. \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

Здесь  $A$ ,  $B$ ,  $M$  и  $N$  — постоянные, которые следует определить.

2. Перемещение вдоль оси абсцисс в вагоне

$$\begin{aligned}\Delta x' &= x'_2 - x'_1 = A(x_2 - x_1) + B(t_2 - t_1) = \\ &= A \Delta x + B \Delta t.\end{aligned}\quad (12.2)$$

Аналогично для промежутка времени между двумя событиями имеем

$$\Delta t' = M \Delta x + N \Delta t.\quad (12.3)$$

Разделив (12.2) на (12.3) и учитывая, что скорость точки относительно вагона

$$u' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'},\quad (12.4)$$

а скорость той же точки относительно Земли

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t},\quad (12.5)$$

получим выражение для закона сложения скоростей (вдоль оси абсцисс):

$$u' = \frac{Au + B}{Mu + N}.\quad (12.6)$$

3. Используем (12.6) для определения постоянных, введенных в выражение (12.1). Для этого рассмотрим следующие частные случаи:

а) Пусть точка  $K$  покоится относительно вагона. Тогда  $u' = 0$ ,  $u = v$ . Подставив в (12.6), имеем

$$0 = \frac{Av + B}{Mv + N},$$

откуда

$$B = -Av.\quad (12.7)$$

б) Пусть точка  $K$  покоится относительно Земли. Тогда  $u' = -v$ ,  $u = 0$ . Подставив в (12.6) и используя (12.7), имеем

$$-v = -\frac{Av}{N},$$

откуда

$$N = A.\quad (12.8)$$

в) Пусть вместо материальной точки  $K$  в вагоне распространяется световая волна. На основе второго постулата теории относительности — принципа постоянства скорости света во всех инерциальных системах — получим

$$u' = u = c.\quad (12.9)$$

Подставив в (12.6) и используя результаты (12.7) и (12.8), имеем

$$c = \frac{Ac - Av}{Mc + A},$$

откуда

$$M = -\frac{Av}{c^2}. \quad (12.10)$$

г) Полученные значения  $B$ ,  $M$  и  $N$  подставим в (12.6) и получим *релятивистский закон сложения скоростей* (вдоль оси абсцисс):

$$u' = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}} \quad \text{или} \quad u = \frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}}. \quad (12.11)$$

### § 12.6. Предельный характер скорости света

Из релятивистского закона сложения скоростей вытекает предельный характер скорости света: *ни в какой системе отсчета тело не может двигаться со скоростью, превосходящей скорость света в вакууме.*

Действительно, пусть тело движется относительно вагона со скоростью  $u'$ , не превосходящей скорость света в вакууме:  $0 < u' < c$ . Вагон же движется относительно Земли со скоростью  $v$ , также меньшей скорости света,  $0 < v < c$ . Тогда легко показать, что скорость тела относительно Земли (при любых  $u'$  и  $v$ , меньших  $c$ ) будет также меньше скорости света.

Доказательство поведем методом от противного. А именно, предположим, что  $u > c$ . Тогда из (12.11) следует

$$\frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}} > c. \quad (12.12)$$

Приведа к общему знаменателю и перенеся все слагаемые в левую часть неравенства, получим после несложных преобразований:

$$(v-c)(c-u') > 0. \quad (12.13)$$

Однако при  $0 < u' < c$  и  $0 < v < c$  неравенство (12.13) невозможно; следовательно, наше предположение, что можно найти систему отсчета, для которой  $u > c$ , оказалось неправильным. Итак, скорость света в вакууме есть максимально большая скорость в природе.



## § 12.7. Преобразования Лоренца

1. Преобразования координат, соответствующие двум основным постулатам теории относительности, были впервые получены Лоренцом. С помощью этих преобразований он объяснил отрицательный результат опыта Майкельсона.

Для вывода искомым преобразований подставим в выражение (12.1) значения постоянных  $B$ ,  $M$  и  $N$ ; получим

$$\left. \begin{aligned} x' &= A(x - vt), \\ t' &= A\left(t - \frac{vx}{c^2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (12.14)$$

Из принципа относительности вытекает полное равноправие обеих систем отсчета: можно считать покоящейся систему координат, связанную с вагоном; тогда система координат, связанная с Землей, будет двигаться относительно вагона со скоростью  $v' = -v$  (взаимность преобразований Лоренца).

Преобразования координат примут вид

$$\left. \begin{aligned} x &= A(x' + vt'), \\ t &= A\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (12.15)$$

Подставив выражения (12.15) в (12.14), имеем

$$x' = A^2\left(x' + vt' - vt' - \frac{v^2x'}{c^2}\right),$$

откуда после сокращений получим

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (12.16)$$

Окончательно преобразования Лоренца примут вид

$$\left. \begin{aligned} y' &= y, \quad z' = z, \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ t' &= \frac{t - \frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \right\} \quad (12.17)$$

ИЛИ

$$\left. \begin{aligned} y &= y', & z &= z', \\ x &= \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ t &= \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \right\} \quad (12.18)$$

2. В классической механике пространство и время рассматриваются как понятия, независимые друг от друга. Из преобразований Лоренца вытекает тесная связь между пространственными и временными координатами: не только пространственные координаты зависят от времени (это мы имели и в преобразованиях Галилея), но и время зависит от пространственных координат, а также от скорости движения системы отсчета.

3. Преобразования Лоренца и релятивистский закон сложения скоростей соответствуют принципу инерции.

Действительно, если тело движется равномерно и прямолинейно относительно одной инерциальной системы отсчета (скажем, относительно вагона), то оно будет двигаться прямолинейно и равномерно относительно любой другой инерциальной системы: из  $u' = \text{const}$  и  $v = \text{const}$  следует, согласно (12.11), что и  $u = \text{const}$ .

### § 12.8. Длина отрезка

1. Пусть стержень расположен параллельно оси абсцисс и покоится в системе отсчета  $xyz$  (например, на Земле). Его длину в системе отсчета, относительно которой он покоится, обозначим  $l_0 = x_2 - x_1$  (см. рис. 2.2, стр. 35). В системе отсчета  $x'y'z'$ , движущейся относительно системы  $xyz$  со скоростью  $v$  (например, в вагоне), длина стержня  $l$  определяется так:  $l = x'_2 - x'_1$  при условии  $t'_2 = t'_1$ . Из преобразований Лоренца (12.18) следует

$$x_2 = \frac{x'_2 + vt'_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x_1 = \frac{x'_1 + vt'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

отсюда

$$x_2 - x_1 = \frac{x'_2 - x'_1 + v(t'_2 - t'_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (12.19)$$

Положив по условию  $t'_2 = t'_1$ , имеем

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{или} \quad l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (12.20)$$

2. Назовем длину стержня в той системе отсчета, относительно которой он покоится, *собственной длиной*  $l_0$ . Из (12.20) следует, что длина стержня в любой другой системе отсчета, относительно которой он движется, меньше собственной длины.

Заметим, что в разных системах отсчета, движущихся с разными скоростями относительно той системы отсчета, в которой стержень покоится, длина этого стержня различна. А отсюда явно вытекает, что релятивистское изменение длины не вызвано никакими деформациями стержня (или другими аналогичными процессами).

## § 12.9. Промежуток времени между двумя событиями

1. Любые явления, происходящие с телами, будем называть *событиями*.

Пусть в точке  $A$ , где находится интересующее нас тело, в момент времени  $t_1$  происходит некоторое событие, а в момент времени  $t_2$  — другое событие. Тогда промежуток времени между этими событиями  $\tau_0 = t_2 - t_1$ . Этот промежуток времени измерен в системе отсчета  $xyz$ , связанной с исследуемым телом (собственное время). Найдем промежуток времени между этими же событиями в системе отсчета  $x'y'z'$ , движущейся относительно  $xyz$  со скоростью  $v$  (вдоль оси абсцисс).

Используя выражение (12.17) и учитывая, что события происходят в одной точке  $A$ , т. е.  $x_2 = x_1$ , имеем

$$\tau = t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

## 2. Итак, искомый промежуток времени

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (12.21)$$

Мы получили фундаментальной важности результат: *промежуток времени между двумя событиями имеет наименьшее значение в системе отсчета, связанной с точкой А, где происходят исследуемые события.*

В любой другой системе отсчета этот промежуток времени будет больше.

Время  $\tau_0$  называется *собственным временем.*

Иными словами, *в движущейся системе отсчета время замедляется* по сравнению с системой отсчета, в которой происходят события и которую мы приняли за неподвижную.

3. Замедление времени в движущейся системе отсчета позволяет объяснить одно любопытное явление.

Под действием космического излучения на границе атмосферы возникают частицы, называемые мезонами или, короче, мюонами (см. второй том). Эти частицы обнаруживаются затем на поверхности Земли. Толщина атмосферы — порядка 300 километров. Даже в том случае, если мюоны движутся со скоростью, очень близкой к скорости света, время их движения сквозь атмосферу — около  $10^{-3}$  сек.

Между тем опыты над мюонами, полученными в ускорителях, показывают, что эти частицы неустойчивы и самопроизвольно распадаются. Время жизни мюона  $10^{-6}$  сек, т. е. в тысячу раз меньше, чем время его движения сквозь атмосферу к поверхности Земли! Как же согласовать это кажущееся противоречие?

Оказывается, никакого противоречия здесь нет. Действительно, в системе отсчета, связанной с мюоном, время его жизни  $10^{-6}$  сек. Лабораторная же система отсчета, связанная с Землей, движется относительно мюона со скоростью, близкой к скорости света. В этой системе темп времени замедлен, и мюон живет в лабораторной системе около  $10^{-3}$  сек — в тысячу раз больше, чем в системе отсчета, связанной с этим мюоном.

## § 12.10. Промежуток времени между причиной и следствием

1. В природе часто встречаются события, связанные между собой определенным видом связи, которую мы называем причинно-следственной. Так, для того чтобы пуля попала в мишень, необходимо предварительно произвести выстрел. Здесь выстрел является тем событием, которое служит причиной, а попадание пули в мишень — следствием.

При этом необходимо отметить два характерных свойства этого вида связей между явлениями:

а) вначале всегда происходит событие, которое является причиной, а уж затем — следствие;

б) если каким-либо образом устранить событие, которое служит причиной, то не произойдет и другое событие, которое является следствием.

Покажем, что хотя в теории относительности время в разных системах отсчета протекает по-разному, последовательность во времени между причиной и следствием сохраняется.

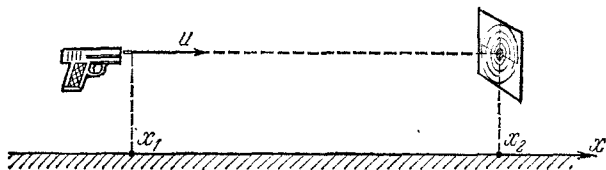


Рис. 12.7.

2. Пусть в системе отсчета, связанной с Землей, выстрел произошел в момент времени  $t_1$  в точке с координатой  $x_1$ , а пуля попала в мишень с координатой  $x_2$  в момент времени  $t_2$  (рис. 12.7). Скорость пули в этой системе отсчета

$$u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

Найдем промежуток времени между этими же событиями в системе отсчета, движущейся вдоль оси абсцисс со

скоростью  $v$ . Из выражения (12.17) получим

$$t'_2 - t'_1 = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{uv}{c^2}\right). \quad (12.22)$$

Скорость пули  $u$  и скорость движения новой системы отсчета  $v$  меньше скорости света в вакууме. Поэтому

$$1 - \frac{uv}{c^2}$$

является положительным числом. Знак разности  $t'_2 - t'_1$  совпадает со знаком разности  $t_2 - t_1$ .

Но  $t_2 > t_1$ , поскольку в системе отсчета, связанной с Землей, пуля попала в мишень *после выстрела*. А поэтому и в любой другой системе отсчета  $t'_2 > t'_1$ .

Итак, хотя промежуток времени между двумя событиями в разных системах отсчета различен, *во всех системах отсчета событие, являющееся причиной, происходит раньше события, которое является следствием*.

### § 12.11. Соотношение между релятивистской и ньютоновской механикой

1. Ньютоновская механика и, в частности, преобразования Галилея основывались на допущении, что во всех системах отсчета время протекает одинаково. Выше мы показали, что это допущение по существу неверно. Естественно, возникает вопрос: как могла эта теория в течение нескольких веков успешно применяться на практике и давать *правильные* результаты? Более того, и в настоящее время мы с успехом ведем расчеты движения небесных тел, космических кораблей, автомобилей, судов и т. п. на базе законов *ньютоновской механики*, пользуемся преобразованиями Галилея — и всегда получаем отличные результаты! Нет ли здесь какого-то противоречия?

Оказывается, никакого противоречия нет. Все дело в том, что перечисленные тела движутся со скоростями, значительно меньшими скорости света в вакууме. А в этом случае релятивистские формулы с достаточной для практи-

ческих целей точною автоматически переходят в ньютоновские.

2. Действительно, пусть тело движется со скоростью  $v=10$  км/сек относительно Земли. Это — скорость космической ракеты. Обычно в инженерной практике имеют дело с телами, которые движутся значительно медленнее. Свяжем с этим телом новую систему отсчета. Точные соотношения между координатами и временем в обеих системах отсчета выражаются с помощью преобразований Лоренца. Однако нетрудно убедиться, что, пользуясь преобразованиями Галилея, мы получим практически одинаковые результаты.

Действительно, в нашем случае отношение

$$\frac{v^2}{c^2} = \left( \frac{10^4}{3 \cdot 10^8} \right)^2 \approx 10^{-9}.$$

Следовательно, для того чтобы величину  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$  отличить от единицы, нужен измерительный прибор, позволяющий измерять с точностью до девяти значащих цифр! На практике мы пользуемся значительно менее точными приборами. То же самое можно сказать о величине  $1 - \frac{vx}{c^2t}$ : она несущественно отличается от единицы.

Но если в преобразованиях Лоренца положить  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1$  и  $1 - \frac{vx}{c^2t} \approx 1$ , то они автоматически перейдут в преобразования Галилея:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx x - vt,$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = t \frac{1 - \frac{vx}{c^2t}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx t.$$

Таким образом, при анализе явлений, происходящих со скоростями значительно меньшими, чем скорость света в

вакууме, можно с успехом пользоваться преобразованиями Галилея, т. е. формулами ньютоновской механики. Применение в этих случаях преобразований Лоренца даст практически тот же результат, хотя выкладки будут значительно более сложными.

Мы получили принципиальной важности результат: *теория относительности включает в себя ньютоновскую механику как предельный случай механики явлений, скорость которых значительно меньше скорости света в вакууме.*

3. На этом примере виден путь развития науки. Всякая научная теория описывает некоторый круг явлений с определенной степенью точности, зависящей от уровня развития науки, а также от уровня развития измерительной техники. При дальнейшем развитии науки мы охватываем всё более обширный круг явлений. Одновременно возрастает и точность наших измерений.

На определенном этапе может оказаться, что старая теория уже не сможет объяснить вновь открытые явления. Выводы старой теории вступят в противоречие с новыми фактами. Тогда создается новая теория, часто на основе совершенно новых принципов. Однако новая теория не отбрасывает старую, как заблуждение. Она включает в себя результаты старой теории как предельный случай для того круга явлений, которые и прежде описывались удовлетворительно. Это положение в науке называется *принципом соответствия*.

Часто критика принципиальных основ старой теории оказывается довольно болезненной, ибо нужно преодолеть представления, которые кажутся «очевидными», «само собой разумеющимися», а поэтому якобы истинными. Однако рано или поздно более прогрессивная теория всегда побеждает. И последующим поколениям часто даже непонятно, чем были вызваны предшествующие дискуссии.

Так было и с теорией относительности. Ее появление вызвало бурную дискуссию. Многие ученые, не сумев отказаться от привычных представлений, не поняли ее сущности. Реакционеры всех мастей повели с ней ожесточенную борьбу, пытаясь представить ее как противоречащую «здравому смыслу». Однако дальнейшее развитие науки полностью подтвердило истинность как ее исходных положений, так и всех ее выводов.



## Г Л А В А 13

### МАССА, ИМПУЛЬС И СИЛА В ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

#### § 13.1. Релятивистская масса

1. В ньютоновской механике предполагалось, что масса тела имеет одно и то же значение в различных инерциальных системах отсчета. Опыты над телами, скорость движения которых много меньше скорости света, казалось, подтверждали это положение: при этих скоростях никакой зависимости массы от скорости обнаружить не удастся. Именно поэтому во всех предыдущих расчетах мы полагали, что масса тела является постоянной величиной.

Рассмотрим, как будет двигаться при этом предположении тело под действием постоянной силы. Для упрощения дальнейших расчетов предположим, что при  $t_1=0$  начальная скорость  $v_1=0$ , т. е. тело не имеет начальной скорости. Тогда основной закон динамики примет вид

$$F = \frac{mv}{t}, \quad \text{или} \quad v = \frac{F}{m} t. \quad (13.1)$$

При предположении о постоянстве силы и массы  $a = F/m = \text{const}$ . Следовательно, скорость тела прямо пропорциональна времени действия силы:

$$v = at. \quad (13.2)$$

А это означает, что при достаточно длительном воздействии постоянной силы на тело скорость его движения возрастает неограниченно.

2. Этот результат противоречит теории относительности. Действительно, один из фундаментальных выводов теории относительности гласит, что *никакое тело не может двигаться со скоростью, превосходящей скорость света в вакууме* (см. § 12.6).

Таким образом, нам следует преобразовать основной закон динамики, чтобы выводы из него согласовывались с выводами теории относительности. Оказывается, что для этого необходимо считать, что *масса тела различна в разных*

системах отсчета. Это выражается зависимостью (рис. 13.1)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (13.3)$$

Здесь  $m_0$  — масса тела в системе отсчета, относительно которой оно покоится; эта величина называется *собственной массой* или *массой покоя*;

$m$  — масса того же тела в системе отсчета, относительно которой оно движется со скоростью  $v$ ; эта величина называется *релятивистской массой*.

3. Импульс в теории относительности определяется так же, как и в ньютоновской механике:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (13.4)$$

Но, в отличие от ньютоновской механики, масса, входящая в выражение (13.4), —

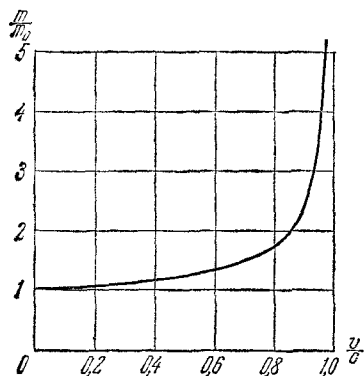


Рис. 13.1.

это не масса покоя, а релятивистская масса.

## § 13.2. Основной закон динамики в теории относительности

1. Основной закон динамики (7.2) и (7.4) сохраняет свою формулировку — *сила равна изменению импульса в единицу времени*, т. е. скорости изменения импульса:

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1}{t_2 - t_1} = \frac{m_2\mathbf{v}_2 - m_1\mathbf{v}_1}{t_2 - t_1}. \quad (13.5)$$

Покажем, что при такой записи основного закона динамики выводы из него не противоречат теории относительности.

2. При тех же предположениях, которые были сделаны выше ( $F = \text{const}$ ,  $t_1 = 0$ ,  $v_1 = 0$ ), имеем

$$F = \frac{mv}{t} = \frac{m_0v}{t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (13.6)$$

Положив  $F/m_0 = b = \text{const}$  и решив это уравнение относительно скорости  $v$ , получим

$$v = \frac{bt}{\sqrt{1 + \frac{b^2 t^2}{c^2}}}. \quad (13.7)$$

Исследуем полученный результат.

3. При достаточно малых промежутках времени произведение  $bt$  значительно меньше скорости света в вакууме; следовательно,  $b^2 t^2/c^2 \ll 1$ , и приближенно

$$v \approx bt.$$

Итак, мы получили классическое приближение как предельный случай медленных движений.

При длительном же действии постоянной силы величина  $bt$  может стать значительно больше  $c$ ; тогда  $b^2 t^2/c^2 \gg 1$ , и приближенно

$$v \approx \frac{bt}{\sqrt{\frac{b^2 t^2}{c^2}}} = c.$$

Таким образом, при длительном действии постоянной силы *скорость тела стремится к скорости света*, а не возрастает неограниченно, как это следовало из законов ньютоновской механики (см. далее рис. 13.2).

### § 13.3. Соотношение между ньютоновской и релятивистской динамикой

1. В § 12.11 было показано, что теория относительности не отменяет ньютоновскую кинематику, а включает ее в себя как предельный случай медленных движений. Результаты предыдущего параграфа приводят к выводу, что такое же положение имеет место и в динамике. А именно, мы показали, что при достаточно медленных движениях вполне допустимо пользоваться формулами ньютоновской механики, при анализе же быстрых движений правильные результаты дает только теория относительности.

Попробуем более точно ввести критерий того, какие движения следует считать медленными, а какие — быстрыми.

Допустим, что аппаратура позволяет производить измерения величин с точностью до  $n$  значащих цифр. Тогда, если

относительная ошибка (т. е. разность между двумя величинами, деленная на измеряемую величину) меньше  $10^{-n}$ , то мы ее обнаружить не сможем. Подсчитаем, при какой же скорости движения тела не могут быть обнаружены изменения его массы. Относительная ошибка при измерении массы

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{m - m_0}{m} = 1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (13.8)$$

Эта ошибка должна быть меньше  $10^{-n}$ , следовательно

$$1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < 10^{-n} \quad \text{или} \quad 1 - 10^{-n} < \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Возведем неравенство в квадрат, что возможно, ибо единица больше, чем  $10^{-n}$ . Тогда

$$1 - 2 \cdot 10^{-n} + 10^{-2n} < 1 - \frac{v^2}{c^2} \quad \text{или} \quad v < c \sqrt{2 \cdot 10^{-n} - 10^{-2n}}.$$

Учитывая, что  $10^{-2n} \ll 10^{-n}$ , имеем

$$v < c \sqrt{2 \cdot 10^{-n}}.$$

Пусть, например, измерения производятся с точностью до шести значащих цифр ( $n=6$ ). Тогда  $v < c \sqrt{2 \cdot 10^{-6}} = 423$  км/сек. Таким образом, при скоростях движения, не превосходящих *четырееста километров в секунду*, масса покоя отличается от релятивистской массы менее чем на  $10^{-6}$ , т. е. менее чем на одну десятитысячную долю процента!

В реальных условиях движения больших тел их скорость значительно меньше указанного предела — даже космические ракеты имеют скорость около 10 км/сек, т. е. в 40 раз меньше. Да и измерения в технике редко когда производятся с такой точностью. Ясно, что в этих условиях применение законов ньютоновской механики для расчета движения тел даст идеальные по своей точности результаты.

Однако в мире атомных частиц нередко встречаются скорости, близкие к скорости света в вакууме. В этом случае только применение законов теории относительности даст правильные результаты. В частности, при анализе движения быстрых микрочастиц удалось опытным путем проверить выражение для релятивистской массы (13.3), причем результаты эксперимента оказались в отличном согласии с теорией.

2. Изложенные соображения позволяют нам ввести следующую классификацию движений (рис. 13.2).

*Ньютоновская область.* Скорость движения тел столь мала, что измерительная аппаратура не позволяет обнаружить релятивистские эффекты замедления времени, сокращения длин, возрастания массы и т. п. Здесь вполне допустимо пользоваться законами ньютоновской механики.

*Релятивистская область.* Скорость движения достаточно велика, и релятивистские эффекты становятся вполне измеримыми. Естественно, что здесь правильные результаты дает только теория относительности.

*Ультрарелятивистская область.* Скорость тела становится почти равной скорости света в вакууме. Точнее, разность между скоростью тела и скоростью света меньше чувствительности измерительного прибора. Конечно, и в этом случае только применение законов теории относительности даст верные результаты.

В нашем примере, когда точность измерений не превосходит  $10^{-6}$ , классическую область скоростей составляют скорости, меньшие  $400 \text{ км/сек}$ ; ультрарелятивистскую область — скорости, отличающиеся от скорости света менее чем на  $300 \text{ м/сек}$ ; остальной диапазон скоростей — это собственно релятивистская область.

3. Рассмотрим, как же меняется импульс тела под действием постоянной силы. Из уравнения (13.5) при условии, что при  $t_1=0$  начальный импульс  $p_1=0$ , следует:

$$p = Ft. \quad (13.9)$$

Итак, под действием постоянной силы импульс возрастает пропорционально времени.

В ньютоновской области импульс возрастает только за счет роста скорости, ибо изменением массы можно пренебречь. Наоборот, в ультрарелятивистской области скорость

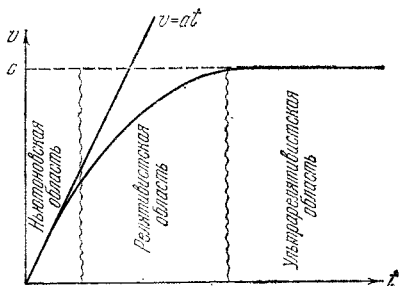


Рис. 13.2.

тела практически не меняется, и импульс растет только за счет роста массы. Естественно, что в промежуточной (релятивистской) области рост импульса происходит за счет возрастания обоих сомножителей — как скорости, так и массы. При этом скорость растет медленнее, чем в ньютоновской области, именно из-за возрастания массы ускоряемого тела.

## ГЛАВА 14

### ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ И СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

#### § 14.1. Начальные условия и измерительная аппаратура

1. Успешное применение рассмотренного в гл. 8 метода решения основной задачи динамики в ньютоновской механике неизбежно приводило ученых к мысли, что эти методы являются универсальными, что их можно применять для решения *любых* задач. При этом никто всерьез не задавался вопросом: а можно ли на самом деле задать начальные условия настолько точно, как это нам необходимо? Само успешное решение задач приводило к мысли, будто бы начальные условия могут быть заданы с произвольной степенью точности.

Конечно, измерение координат и импульсов производится с определенной погрешностью. Однако в XIX в. предполагалось, что путем усовершенствования измерительной аппаратуры погрешность измерений может быть сделана сколь угодно малой. Дальнейшее развитие науки показало несостоятельность этой точки зрения.

Попытаемся на примере проанализировать в общих чертах действие приборов, с помощью которых можно измерить координаты и скорости тел.

2. Для определения координат самолета применяется радиолокатор (рис. 14.1). Антенна локатора излучает радиоволны короткими импульсами. Волна, дойдя до самолета, отражается от него и возвращается к антенне. На экране локатора получают две отметки: от отправленного и принятого (отраженного) сигнала. Зная скорость движения луча по экрану  $u$  и скорость радиоволны ( $c=3 \cdot 10^8$  м/сек), можно

из пропорции  $\frac{L}{u} = \frac{2X}{c}$  по величине смещения отметки судить о расстоянии до самолета  $X = \frac{c}{2u} L$ . Смещение на экране градуируется в километрах (ибо величина  $c/2u$  постоянна и известна). Это позволяет без дополнительных расчетов сразу же определять координату самолета по отметкам на экране осциллографа.

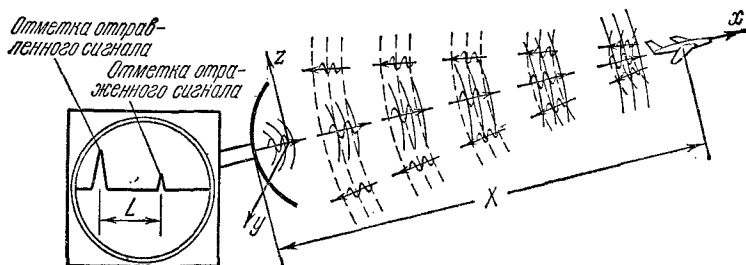


Рис. 14.1.

Заметим, что с помощью прибора, который служит для определения мгновенных значений координат, невозможно измерить мгновенные значения скорости. Правда, наблюдая за движением отметки на экране локатора, можно определить среднюю скорость самолета за некоторый промежуток времени, но мгновенную скорость самолета в момент измерения координаты найти с помощью этого прибора невозможно.

3. Существуют приборы, с помощью которых можно измерить мгновенную скорость точки. Например, тот же радиолокатор можно переоборудовать так, чтобы он сравнивал частоту колебаний в волне, которую посылает антенна, с частотой колебаний в волне, которая отражается от самолета.

Если самолет движется со скоростью  $v$  вдоль оси абсцисс, то темп времени в связанной с ним системе отсчета изменяется по сравнению с темпом времени в системе отсчета, связанной с радиолокатором (см. § 12.9). С изменением темпа времени, естественно, изменяется частота волны, что будет видно на экране переоборудованного радиолокатора: при удалении самолета от локатора волна растягивается вдоль

экрана (рис. 14.2), при приближении — сжимается (рис. 14.3).

Пользуясь преобразованиями Лоренца, можно вывести соотношение между частотой отправленной волны  $\nu$  и частотой

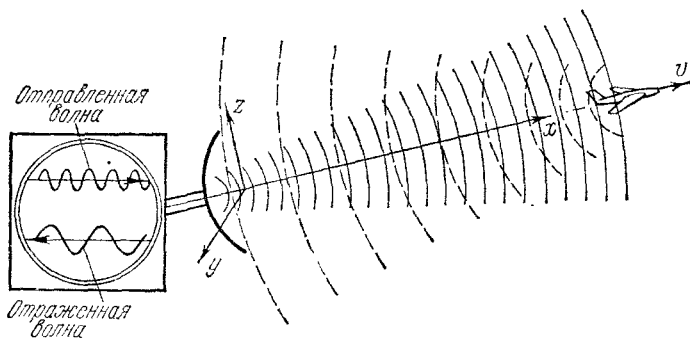


Рис. 14.2.

отраженной от самолета волны  $\nu'$ . Частотой \*) называется число колебаний в единицу времени; следовательно, частота

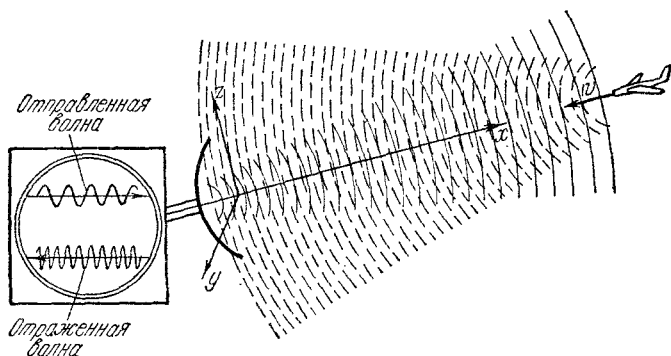


Рис. 14.3.

колебаний волны в разных системах отсчета *обратно пропорциональна* промежутку времени между двумя событиями, например промежутку времени между отражением волны от

\* Подробнее вопрос о частоте будет рассмотрен во втором томе.



самолета и приемом ее радиолокатором (рис. 14.4). В системе отсчета, связанной с локатором, имеем частоту волны  $\nu$  и промежуток времени  $\Delta t$ . В системе отсчета, связанной с самолетом, соответственно  $\nu'$  и  $\Delta t'$ . Тогда

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{\Delta t}{\Delta t'}. \quad (14.1)$$

Но

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v \cdot \Delta x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(см. (12.17)), где  $\Delta x$  — путь, пройденный отраженной волной. Учитывая, что  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = -c$  — скорость отраженной волны

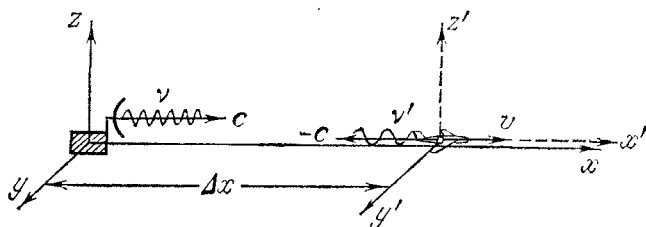


Рис. 14.4.

(знак минус появился потому, что отраженная волна движется в направлении, противоположном направлению оси абсцисс), получим

$$\Delta t' = \Delta t \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (14.2)$$

Сравнив оба выражения, получим

$$\nu' = \nu \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}}. \quad (14.3)$$

Итак, частота волны, которая отражается от удаляющегося самолета, будет меньше частоты волны, которую посылает локатор. Если же самолет приближается к локатору,

то его скорость меняет знак, вследствие чего частота отражаемой волны возрастает:

$$v'' = v \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}}. \quad (14.4)$$

Это явление называется оптическим продольным *эффектом Допплера*. С его помощью легко измерить скорость самолета — достаточно сравнить частоты излучаемой и отраженной волны.

С помощью эффекта Допплера можно измерить также скорость тела, которое само излучает свет, например скорость движения звезды.

4. Однако прибор, позволяющий измерить скорость материальной точки (следовательно, и ее импульс), не позволяет измерить ее координату. Действительно, для измерения скорости по эффекту Допплера необходимо иметь синусоидальную волну с определенной частотой, для измерения же координаты самолета радиолокатор должен излучать волны короткими импульсами, а такие волны, как будет показано во втором томе, не являются синусоидальными.

Следовательно, для одновременного измерения координаты и скорости (или импульса) движущегося тела необходимо иметь два прибора, из которых один измеряет координату, второй — скорость.

Нильс Бор (один из основателей современной квантовой физики) показал, что все измерительные приборы можно разделить на два класса таким образом, что приборы одного из них дают информацию, *дополнительную* к той, которую дают приборы другого класса. Например, одни приборы служат для измерения координат, другие — импульсов или скоростей. Полную информацию о характере движения тела можно получить только при совместном применении приборов обоих типов.

## § 14.2. Соотношение неопределенностей

1. Приборы, с помощью которых производятся измерения координат и скоростей, взаимодействуют с телом, параметры которого измеряются. Так, радиоволна, достигая

самолета и отражаясь от него, оказывает на самолет определенное давление и тем самым изменяет его координату и скорость.

Конечно, в случае самолета эти изменения совершенно ничтожны, и мы можем их не учитывать. Однако по мере проникновения в микромир стало ясно, что измерительный прибор может вносить серьезные возмущения в характер движения микрочастицы, и воздействием прибора пренебрегать нельзя. Это связано с особой природой микрочастиц, которую мы рассмотрим во втором томе.

2. В. Гейзенберг проанализировал результаты всевозможных экспериментов, которые могут быть проведены для измерения координаты частицы и ее импульса (или скорости). Он пришел к выводу, что особая природа микрочастиц приводит к тому, что при одновременном измерении координат и импульсов возникают неопределенности в их значениях, равные  $\Delta x$  и  $\Delta p_x$  соответственно. Эти неопределенности связаны соотношением

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx \hbar, \quad (14.5)$$

где *постоянная Планка*  $\hbar = 1,05443 \cdot 10^{-34}$  кг·м<sup>2</sup>/сек — одна из важнейших мировых констант, имеющая огромное значение в описании явлений микромира. С этой величиной мы часто будем встречаться в квантовой механике.

Аналогичным соотношением связаны неопределенности координат и импульсов и по другим осям:

$$\Delta y \cdot \Delta p_y \approx \hbar,$$

$$\Delta z \cdot \Delta p_z \approx \hbar.$$

Из соотношения неопределенностей Гейзенберга вытекает, что экспериментальные ошибки при измерении координат и импульсов вдоль некоторой оси не могут быть одновременно сделаны сколь угодно малыми — чем с меньшей ошибкой измерена координата частицы, тем с большей ошибкой будет измерен ее импульс, и наоборот. Это не относится к результатам измерения вдоль *разных* осей; например, ошибка при измерении ординаты  $\Delta y$  никак не связана с ошибкой при измерении импульса вдоль оси абсцисс  $\Delta p_x$  и т. п.

### § 14.3. Соотношение неопределенностей и классическая механика

1. Сопоставляя метод решения основной задачи динамики с соотношением неопределенностей Гейзенберга, мы видим, что они противоречат друг другу. Действительно, для определения закона движения необходимо максимально точное задание начальных условий; соотношение же неопределенностей показывает, что начальные условия могут быть заданы лишь приближенно, причем степень приближения не беспредельна. Но тогда неясно, как же в классической механике удастся найти закон движения с произвольной, наперед заданной точностью?

Для ответа на этот вопрос проанализируем три задачи. В первой из них рассмотрим движение макроскопического тела (ракеты); во второй — движение микрочастицы (электрона) на макроскопической траектории и, наконец, в третьей задаче — движение микрочастицы на микротраектории.

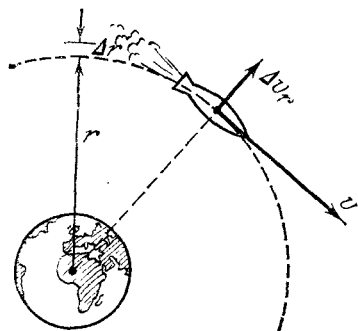


Рис. 14.5.

2. *Задача 1.* Ракета массой  $1\text{ т}$  вращается вокруг Земли по круговой орбите. Радиус орбиты  $6500\text{ км}$ ; скорость ракеты  $8\text{ км/сек}$ . С какой точностью могут быть заданы радиус и скорость?

Для того чтобы ракета двигалась по окружности, вектор скорости в каждой точке траектории должен быть перпендикулярен радиусу. Это значит, что компонента скорости вдоль радиуса должна равняться нулю. Но если эта компонента *точно* равна нулю, то и ее неопределенность  $\Delta v_r$  тоже равна нулю. А тогда, как показывает соотношение (14.5), неопределенность в значении радиуса станет бесконечно большой. Но мы можем пойти на компромисс. Пусть радиус орбиты задан с неопределенностью  $\Delta r$ , а радиальная компонента скорости равна нулю, но с неопределенностью  $\Delta v_r$ , которая может быть получена из соотношения неопределенностей Гейзенберга (рис. 14.5):

$$\Delta r \cdot \Delta p_r \approx \hbar.$$

Если при этом неопределенности интересующих нас величин значительно меньше их самих, то можно считать, что задача решена достаточно точно.

Положим в нашем случае, что  $\Delta r = 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$ , — эта неопределенность примерно равна диаметру атома. Ясно, что на практике ошибка любого измерительного прибора значительно больше! Тогда неопределенность радиальной составляющей импульса ракеты

$$\Delta p_r \approx \frac{\hbar}{\Delta r} = \frac{10^{-34}}{10^{-10}} = 10^{-24} \text{ кг} \cdot \text{м/сек},$$

а неопределенность радиальной компоненты скорости

$$\Delta v_r = \frac{\Delta p_r}{m} \approx \frac{\hbar}{m \Delta r} = \frac{10^{-34}}{10^3 \cdot 10^{-10}} = 10^{-27} \text{ м/сек}.$$

Но ведь орбитальная скорость ракеты  $8 \cdot 10^3 \text{ м/сек}$  несоизмеримо больше полученной неопределенности!

Итак, при анализе движения макроскопического тела соотношение неопределенностей не играет никакой роли. Мы можем вполне пренебречь неопределенностями координат и скоростей, полагать, что начальные условия могут быть заданы с той точностью, которая нам нужна, и решать основную задачу динамики классическими методами.

3. *Задача 2.* Электрон движется в бетатроне (приборе для ускорения электронов) по круговой орбите радиусом  $2,5 \text{ м}$  со скоростью, равной  $99\%$  от скорости света:  $v = 0,99c = 2,97 \cdot 10^8 \text{ м/сек}$ . С какой точностью могут быть заданы радиус орбиты и скорость электрона?

В отличие от предыдущей задачи, здесь следует учесть зависимость массы от скорости. Масса покоя электрона  $m_0 = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ . При данной скорости движения его масса

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - 0,99^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1,99 \cdot 0,01}} = \frac{m_0}{1,411 \cdot 0,1} = 7,1 m_0.$$

Поскольку масса электрона значительно меньше массы ракеты, нельзя задать радиус орбиты с такой высокой степенью точности, как это было сделано в предыдущей задаче. Однако если мы зададимся неопределенностью радиуса  $\Delta r = 0,05 \text{ мм}$ , то орбита будет определена весьма точно —

относительная ошибка составит

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{0,05}{2,5 \cdot 10^3} = 2 \cdot 10^{-5} = 0,002 \text{ \%}.$$

Неопределенность радиальной компоненты скорости

$$\Delta v_r \approx \frac{\hbar}{m \cdot \Delta r} = \frac{10^{-34}}{7 \cdot 9 \cdot 10^{-31} \cdot 5 \cdot 10^{-5}} \approx 0,3 \text{ м/сек.}$$

При скорости электрона, почти равной скорости света, радиальной компонентой в 30 см/сек можно безусловно пренебречь, положив ее равной нулю. Следовательно, и в этом случае, когда микрочастица движется по макроскопической траектории, соотношение неопределенностей фактически не играет никакой роли. И здесь можно полагать, что начальные условия могут быть заданы с нужной степенью точности, и решать задачу классическими методами (с учетом релятивистских эффектов).

В дальнейшем мы узнаем, что сложная природа элементарных частиц (электронов, протонов, нейтронов и т. п.) не позволяет, строго говоря, рассматривать их в качестве материальных точек, и их траектории нельзя так просто рассчитывать. Однако в случаях, аналогичных рассмотренному, вполне допустим такой подход к решению задачи о характере их движения.

4. *Задача 3.* Рассмотрим движение микрочастицы на микроорбите, например движение электрона в атоме. Радиус атома примерно равен  $r \approx 0,5 \text{ \AA} = 5 \cdot 10^{-11} \text{ м}$ ; орбитальная скорость примерно равна  $v \approx 10^6 \text{ м/сек}$ . При данной скорости можно пренебречь релятивистскими эффектами и считать массу электрона равной его массе покоя. Неопределенность радиуса положим равной одному проценту от значения радиуса, т. е.  $\Delta r = 0,01 r = 5 \cdot 10^{-13} \text{ м}$ . Тогда неопределенность радиальной компоненты скорости

$$\Delta v_r \approx \frac{\hbar}{m \cdot \Delta r} = \frac{10^{-34}}{9 \cdot 10^{-31} \cdot 5 \cdot 10^{-13}} = 2,2 \cdot 10^8 \text{ м/сек,}$$

что почти равно скорости света.

Итак, неопределенность радиальной компоненты скорости в 220 раз превышает орбитальную скорость! Очевидно, что в этом случае никакой речи о движении электрона по

орбите быть не может, ибо скорость его движения совершенно не определена.

Наоборот, если мы зададимся некоторым разумным значением неопределенности радиальной компоненты скорости, например  $\Delta v_r/v=1\%$ , то мы совершенно ничего не сможем сказать о траектории. Действительно, если  $\Delta v_r = 0,01 v = 10^4$  м/сек, то неопределенность радиуса

$$\Delta r \approx \frac{\hbar}{m \cdot \Delta v_r} = \frac{10^{-34}}{10^4 \cdot 9 \cdot 10^{-31}} = 1,1 \cdot 10^{-8} \text{ м} = 110 \text{ \AA}.$$

А это в 220 раз превышает сам радиус! Ясно, что здесь говорить о какой-то определенной орбите совершенно невозможно.

5. Итак, мы убедились, что соотношение неопределенностей не влияет на применимость методов ньютоновской механики или теории относительности к *макроскопическим* объектам. Здесь по силам и начальным условиям можно с любой наперед заданной степенью точности найти закон движения частицы, рассматривая ее как материальную точку. Соотношение неопределенностей фактически не ограничивает применение этих законов и к *микрочастицам*, которые движутся в *макроскопических* областях пространства. Так, вполне имеет смысл говорить о траектории электрона в радиолампе, электронно-лучевой трубке, ускорителе и т. п.

Совсем иная картина наблюдается в *микрообластях* — атоме, атомном ядре, кристаллической решетке твердого тела и т. д. Из-за соотношения неопределенностей здесь методы классической механики оказываются совершенно непригодными. В частности, здесь теряют всякий смысл такие классические понятия, как закон движения частицы, ее траектория, мгновенная скорость и т. п. Бессмысленно говорить о траектории электрона в атоме или о скорости движения протона в атомном ядре. Для решения этих задач используются методы *квантовой механики*, с которыми мы познакомимся во втором томе.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

ГЛАВА 15

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

§ 15.1. Замкнутая система тел

1. Для точного решения задачи о характере движения некоторого тела следует учесть все силы, действующие на него со стороны всех окружающих его тел. Но этих сил фактически бесконечно много. Кроме того, данные силы являются переменными, ибо в результате взаимодействия между собой окружающие тела движутся весьма сложным образом. В результате при такой постановке задачи ее фактически решить нельзя из-за непреодолимых математических трудностей.

На самом же деле задачу можно существенно упростить, если учесть, что не все окружающие тела действуют на данное тело с одинаковыми силами. Так, если спутник движется вокруг Земли на орбите с радиусом примерно  $r=8000$  км, то Солнце действует на него с силой, которая значительно меньше силы притяжения Земли:

$$\frac{F_3}{F_c} = \frac{\gamma m M_3 \cdot R^2}{r^2 \cdot \gamma m M_c} = \frac{M_3 R^2}{M_c r^2},$$

где  $R=1$  астр. ед.  $=1,5 \cdot 10^8$  км,  $M_3=6 \cdot 10^{24}$  кг и  $M_c=2 \cdot 10^{30}$  кг. Подставив численные значения, мы получим, что Солнце действует на этот спутник с силой, в тысячу раз меньшей силы притяжения Земли. Читатель может убедиться, что сила притяжения Луны будет еще в 200 раз меньше, а действие остальных планет — ничтожно мало.

2. Этот расчет показывает, что мы можем в первом приближении отвлечься от действия на спутник всех тел, кроме Земли. Следовательно, можно рассмотреть систему, состоящую из двух тел — спутника и Земли, и считать, что их взаимодействие в основном определяет характер движения спутника. Все остальные тела можно считать *внешними* по



отношению к этой системе и действие этих тел учесть в виде поправок к основной силе.

3. Принято силы, с которыми взаимодействуют между собой составные части данной системы, называть *внутренними силами*. *Внешними* называются силы, с которыми вся система или отдельные тела, входящие в ее состав, взаимодействуют с окружающими телами.

Система тел называется *замкнутой* (или *изолированной*), если можно пренебречь действием внешних сил по сравнению с внутренними.

4. Так, в рассмотренном примере систему тел Земля — спутник можно в первом приближении рассматривать как замкнутую.

С еще большей степенью точности можно считать замкнутой солнечную систему. Действительно, силы взаимодействия между Солнцем и планетами значительно превосходят силы, с которыми на эти планеты действуют даже самые близкие звезды. Ближайшая к солнечной системе звезда расположена на колоссальном расстоянии  $R=4,5$  свет. года \*)  $=4,2 \cdot 10^{13}$  км; расстояние же от Земли до Солнца  $r=1,5 \cdot 10^8$  км. Полагая, что масса звезды примерно равна массе Солнца, получим

$$\frac{F_c}{F_{зв}} = \frac{\gamma m M \cdot R^2}{r^2 \cdot \gamma m M} = \frac{R^2}{r^2} = \left( \frac{4,2 \cdot 10^{13}}{1,5 \cdot 10^8} \right)^2 \approx 8 \cdot 10^{10}.$$

Итак, здесь внутренняя сила (т. е. сила взаимодействия между Солнцем и Землей) в 80 миллиардов раз больше внешней силы (т. е. силы, с которой на Землю действует ближайшая звезда). Естественно, что у нас есть все основания считать систему Земля — Солнце замкнутой.

5. Понятие замкнутой системы является весьма полезной абстракцией, ибо в этих системах все явления описываются с помощью наиболее простых и общих законов. Поэтому *всюду, где это возможно, следует отвлекаться от действия внешних сил и рассматривать изучаемую систему тел как замкнутую*. Затем, если это необходимо, следует в решение, полученное в первом приближении, внести поправки, учитывающие характер возмущений, вносимых действием внешних сил.

\*) Световым годом называется расстояние, которое свет проходит в вакууме за 1 год.

## § 15.2. Закон сохранения импульса

1. Для замкнутых систем справедлив закон сохранения импульса, который можно сформулировать так: *суммарный импульс замкнутой системы тел сохраняется при любых процессах, происходящих в этой системе.*

Не следует думать, что этот закон требует неизменности импульса каждого тела, входящего в систему. Как раз наоборот — благодаря действию внутренних сил импульсы тел, входящих в систему, все время изменяются. *Сохраняется лишь векторная сумма импульсов всех составных частей системы.*

2. Для вывода закона сохранения импульса воспользуемся вторым и третьим законами Ньютона. Для простоты рассуждений ограничимся случаем, когда система состоит из двух тел; рассмотрение более общего случая системы, состоящей из многих тел, не даст ничего принципиально нового, но существенно усложнит вывод.

Пусть в момент времени  $t_1$  первое тело имеет массу  $m'_1$  и скорость  $\mathbf{v}'_1$ , второе — массу  $m'_2$  и скорость  $\mathbf{v}'_2$ ; в момент времени  $t_2$  — соответственно  $m_1$  и  $\mathbf{v}_1$ ,  $m_2$  и  $\mathbf{v}_2$ . Второй закон Ньютона для первого тела запишется так:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 - m'_1 \mathbf{v}'_1}{t_2 - t_1},$$

для второго

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{m_2 \mathbf{v}_2 - m'_2 \mathbf{v}'_2}{t_2 - t_1}.$$

По третьему закону Ньютона  $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ , или

$$\frac{m_2 \mathbf{v}_2 - m'_2 \mathbf{v}'_2}{t_2 - t_1} = - \frac{m_1 \mathbf{v}_1 - m'_1 \mathbf{v}'_1}{t_2 - t_1}.$$

Сократим знаменатели и перенесем все члены без штрихов в левую, а со штрихом — в правую часть равенства. Получим

$$m_2 \mathbf{v}_2 + m_1 \mathbf{v}_1 = m'_2 \mathbf{v}'_2 + m'_1 \mathbf{v}'_1 \quad (15.1)$$

или, короче,

$$m_2 \mathbf{v}_2 + m_1 \mathbf{v}_1 = \text{const} \quad (15.2)$$

для любого момента времени.

Если замкнутая система состоит из нескольких тел, то для нее закон сохранения импульса запишется так:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \dots + m_n \mathbf{v}_n = \text{const.} \quad (15.3)$$

3. При выводе закона сохранения импульса мы пользовались только законами Ньютона, причем в форме, которая справедлива как в релятивистской, так и в ньютоновской механике. Следовательно, закон сохранения импульса применим как в ньютоновской, так и в релятивистской механике; но в последней следует учитывать зависимость массы от скорости.

### § 15.3. Явление отдачи

1. На практике часто встречается явление, когда некоторое тело под действием внутренних сил распадается на две части. Если при этом внутренние силы много больше внешних, то эту систему можно рассматривать как замкнутую и применить закон сохранения импульса.

Для простоты рассуждений ограничимся случаем, когда тело до распада на части покоилось относительно системы отсчета. Тогда можно утверждать, что два новых тела, возникших в результате распада, будут двигаться в противоположных направлениях со скоростями, обратно пропорциональными их массам. Пусть массы этих тел равны  $m_1$  и  $m_2$ , их скорости соответственно  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$ . Из закона сохранения импульса

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2.$$

Поскольку до распада тело покоилось относительно системы отсчета, то  $\mathbf{p} = 0$ . Отсюда

$$0 = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 \quad (15.4)$$

или

$$\mathbf{v}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \mathbf{v}_1, \quad (15.5)$$

т. е. действительно векторы  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  направлены противоположно.

2. С явлением отдачи мы встречаемся, например, при выстреле из орудия: если его не закрепить, то оно откатится в сторону, противоположную направлению движения снаряда. В пулемете, автомате и т. п. за счет отдачи затвора

происходит выбрасывание стреляной гильзы и перезарядка оружия.

С явлением отдачи связано движение всех видов транспорта. Так, при вращении ведущих колес автомобиля возникает сила трения между поверхностью ската и Землей. Эта сила является внутренней (в системе машина — Земля). За счет этой силы автомобиль движется в одну сторону,

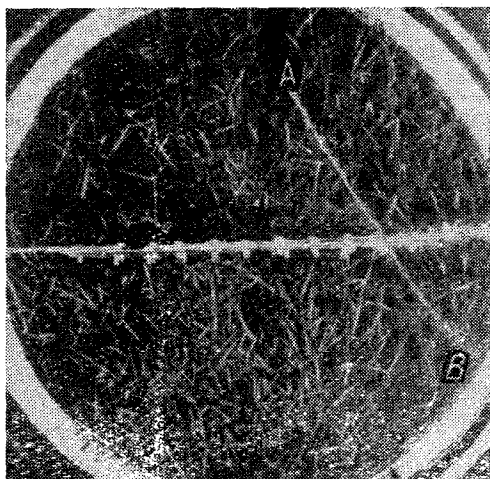


Рис. 15.1.

Земля — в противоположную. Движение Земли, конечно, происходит с ничтожно малой скоростью, ибо масса Земли несоизмеримо велика по сравнению с массой автомобиля.

Точно так же движется судно: его винт захватывает воду и отбрасывает ее за корму, благодаря чему судно движется вперед.

3. Многие явления в ядерной физике также сопровождаются отдачей. Например, ядро урана при попадании в него нейтрона делится на два осколка примерно равной массы. Поскольку ядро и нейтрон до реакции движутся с очень малыми (тепловыми) скоростями, то можно приближенно считать, что до распада система покоилась. Но тогда возникшие при распаде осколки должны двигаться в противоположные

стороны. Это хорошо видно на фотографии (рис. 15.1), полученной с помощью камеры Вильсона (см. § 36.9), посередине которой помещена пластинка с нанесенным слоем окиси урана. Видны следы  $A$  и  $B$ , оставленные двумя осколками, разлетевшимися в противоположных направлениях.

Ниже мы рассмотрим еще одно явление, связанное с отдачей при ядерных реакциях (см. § 17.4).

### § 15.4. Измерение масс

Пользуясь законом сохранения импульса, можно сравнить массы двух тел, не прибегая к их взвешиванию. Свяжем два тела разной массы нитью и поместим между ними сжатую пружину. При пережигании нити оба тела станут двигаться вдоль некоторой оси в противоположных направлениях со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ . Так как, согласно формуле (15.5), скорости обратно пропорциональны массам, то, зная эти скорости и массу одного тела, мы определим массу второго без весов.

В механике этим методом измерения массы практически не пользуются, поскольку измерить скорости тел довольно трудно: дело в том, что из-за наличия трения эти скорости непрерывно меняются. Однако в ядерной физике, где скорость частицы можно измерить по длине ее пробега, этот метод может быть использован, например, для сравнения масс осколков, возникших при делении ядра.

### § 15.5. Реактивное движение

1. Движение ракеты объясняется на основе того же закона, что и явление отдачи, а именно, закона сохранения импульса. При сгорании топлива из сопла с большой скоростью вырываются газы, в результате чего ракета движется в противоположном направлении так, что сумма импульсов ракеты и газов остается постоянной величиной.

Пусть в некоторый момент времени  $t_0$  масса ракеты (вместе с горючим и окислителем) равна  $m$ , а скорость ее относительно Земли равна  $v$ . При сгорании некоторого количества топлива ракета к моменту времени  $t_1$  будет иметь массу  $m_1$  и скорость относительно Земли  $v_1$ . Скорость газов

относительно ракеты — *скорость истечения* — равна  $u$  и направлена в сторону, противоположную скорости ракеты. Тогда скорость газов относительно Земли в момент времени  $t_1$  равна разности скорости ракеты и скорости истечения:  $v_{\text{газ}} = v_1 - u$ .

Импульс ракеты в момент времени  $t_0$  равен  $p_0 = mv$ . В момент времени  $t_1$  суммарный импульс ракеты и газов

$$p_1 = m_1 v_1 + m_{\text{газ}} v_{\text{газ}} = m_1 v_1 + (m - m_1)(v_1 - u).$$

Поскольку ракета и газы образуют замкнутую систему, к ней применим закон сохранения импульса:

$$mv = m_1 v_1 + (m - m_1)(v_1 - u). \quad (15.6)$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим

$$m(v - v_1) = u(m - m_1).$$

Но  $\Delta v = v_1 - v$  равно приращению скорости ракеты;  $\Delta m = m - m_1$  равно массе топлива, выгоревшего за время  $\Delta t = t_1 - t_0$ . Следовательно,

$$-m \cdot \Delta v = u \cdot \Delta m. \quad (15.7)$$

2. Газы, вырываясь из сопла ракеты, действуют на нее с некоторой силой, которая называется *реактивной силой тяги*. Чтобы найти ее, воспользуемся основным уравнением динамики (7.2). Для этого разделим обе части равенства (15.7) на  $\Delta t$ . Учитывая, что  $\frac{m \Delta v}{\Delta t} = F$  представляет собой *силу тяги*, а  $\mu = \frac{\Delta m}{\Delta t}$  — *ежесекундный расход топлива*, получим

$$F = -\mu u. \quad (15.8)$$

Итак, реактивная сила тяги пропорциональна ежесекундному расходу топлива и скорости истечения газов; она направлена противоположно направлению истечения газов.

## § 15.6. Расчет запаса топлива

1. Для грубой оценки примерного запаса топлива проведем ориентировочный расчет. Допустим, что ракета с массой около 10 тонн должна подниматься с ускорением  $a = 5g = 49 \text{ м/сек}^2$ . Сила тяги  $F = ma = 49 \cdot 10^4 \text{ н}$ . Скорость истечения газов у современных ракет  $u = 4 \text{ км/сек}$ . Отсюда

расход топлива

$$\mu = \frac{F}{u} = \frac{49 \cdot 10^4}{4 \cdot 10^3} = 122,5 \text{ кг/сек.}$$

Первую космическую скорость (8 км/сек) ракета, двигаясь с ускорением около 50 м/сек<sup>2</sup>, достигает через время  $t = v : a = 8000 : 50 = 160$  сек. Следовательно, суммарный запас топлива составит

$$M_{\text{топл}} = \mu t = 122,5 \text{ кг/сек} \cdot 160 \text{ сек} \approx 19600 \text{ кг} \approx 20 \text{ тонн.}$$

2. Приведенный расчет является весьма грубым и не годен даже для ориентировочной оценки запаса топлива. Дело в том, что ракета является телом с переменной массой, поскольку по мере выгорания топлива масса ее все время уменьшается. А поэтому, если нам нужно запустить на орбиту ракету массой 10 тонн, то в начале полета даже по нашему ориентировочному расчету ее масса составляет около 30 тонн. Чтобы сообщить этой массе нужное ускорение, нужна сила тяги в 3 раза больше, что требует увеличения расхода топлива, — а это неизбежно приведет к еще большему увеличению запаса топлива и его расхода.

3. Запас топлива можно точно рассчитать по формуле Циолковского, которую мы приведем без доказательства:

$$\frac{v}{u} = 2,3 \lg \frac{M_0}{M}, \quad (15.9)$$

где  $v$  — конечная скорость ракеты; начальная скорость  $v_0 = 0$ ;  $u$  — скорость истечения газов;  $M$  — масса ракеты на орбите;  $M_0 = M_{\text{топл}} + M$  — начальная масса ракеты с топливом. График этой функции приведен на рис. 15.2.

Полагая  $v = 8$  км/сек,  $u = 4$  км/сек,  $M = 10$  тонн, получим:

$$\lg \frac{M_0}{M} = \frac{8}{4 \cdot 2,3} = 0,870,$$

откуда  $M_0/M = 7,42$ ,  $M_0 = 74,2$  тонны и  $M_{\text{топл}} = 64,2$  тонны — почти в 3,5 раза больше того, что дала грубая оценка. Еще больший запас топлива — около 160 тонн — потребуется для достижения второй космической скорости  $v = 11,2$  км/сек.

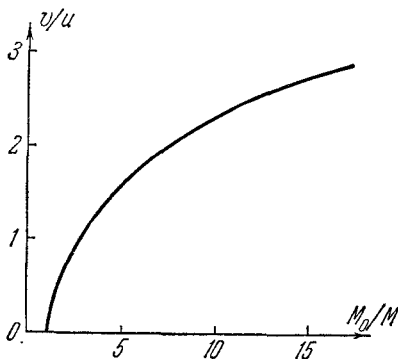


Рис. 15.2.

### § 15.7. Центр инерции

Пусть две материальные точки с массами  $m_1$  и  $m_2$  расположены на оси абсцисс в точках с координатами  $x_1$  и  $x_2$ .

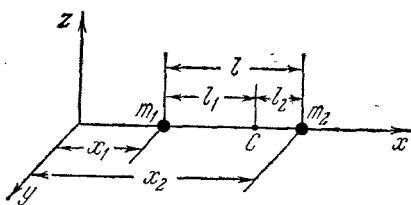


Рис. 15.3.

Расстояние между этими точками  $l = x_2 - x_1$  (рис. 15.3). Точку  $C$ , которая делит расстояние между частицами на отрезки, обратно пропорциональные массам этих частиц, назовем *центром инерции* (или *центром масс*) данной системы частиц. Итак, по определению

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (15.10)$$

Поскольку  $l_1 = x_{\text{ц}} - x_1$ ,  $l_2 = x_2 - x_{\text{ц}}$ , где  $x_{\text{ц}}$  — координата центра инерции, то

$$m_1(x_{\text{ц}} - x_1) = m_2(x_2 - x_{\text{ц}}),$$

откуда

$$x_{\text{ц}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \quad (15.11)$$

Это выражение легко обобщается на случай нескольких материальных точек, расположенных произвольным образом; абсцисса центра инерции

$$x_{\text{ц}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}. \quad (15.12)$$

Аналогичные выражения получаются для ординаты  $y_{\text{ц}}$  и аппликаты  $z_{\text{ц}}$  центра инерции системы материальных точек.

### § 15.8. Движение центра инерции

1. Задачу о характере движения центра инерции решим для случая, когда тела движутся со скоростями, много меньшими скорости света, когда массы тел являются постоянными величинами.



Записав выражение (15.12) для двух разных моментов времени и вычитая одно из другого, получим

$$\Delta x_{\text{ц}} = \frac{m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \quad (15.13)$$

Разделив обе части равенства на  $\Delta t = t_2 - t_1$  и положив  $\frac{\Delta x_{\text{ц}}}{\Delta t} = v_{\text{ц}}^{(x)}$  (компонента вектора скорости по оси абсцисс), имеем

$$v_{\text{ц}}^{(x)} = \frac{m_1 v_1^{(x)} + m_2 v_2^{(x)} + \dots + m_n v_n^{(x)}}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} \quad (15.14)$$

Аналогичные выражения получатся для компонент скорости по осям ординат и аппликат. Выражение для скорости центра инерции в векторной форме имеет вид

$$\mathbf{v}_{\text{ц}} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \dots + m_n \mathbf{v}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\mathbf{P}}{M}, \quad (15.15)$$

где  $M$  — суммарная масса системы,  $\mathbf{P}$  — ее суммарный импульс.

2. Если система частиц замкнута, то ее суммарный импульс является постоянной величиной. Но тогда и скорость центра инерции является постоянной величиной.

Иными словами, *центр инерции замкнутой системы совершает инерциальное движение*, т. е. движется прямолинейно и равномерно независимо от того, как движутся отдельные тела, из которых составлена система.

Следует обратить внимание на смысл этого утверждения. В замкнутой системе действуют внутренние силы, вследствие чего тела, входящие в состав системы, могут двигаться ускоренно и их скорости (и импульсы) могут непрерывно изменяться. Однако это не сказывается на движении центра инерции. Итак, *под действием внутренних сил скорость движения центра инерции не меняется*.

3. Читатель легко может найти ряд примеров, подтверждающих полученный результат. Так, находясь в автомобиле, можно давить на любую его стенку с произвольной силой, но это никак не повлияет на характер движения машины: если она покоится относительно Земли, то и останется в покое, а если движется, то продолжит движение с той же скоростью.

Точно так же ясно, что барон Мюнхаузен сочинял, рассказывая о том, как он сам себя за волосы вытягивал из болота (рис. 15.4). Поскольку его центр масс погружался, то любые усилия, которые он сам прилагал к своим волосам, не могли изменить скорость погружения.

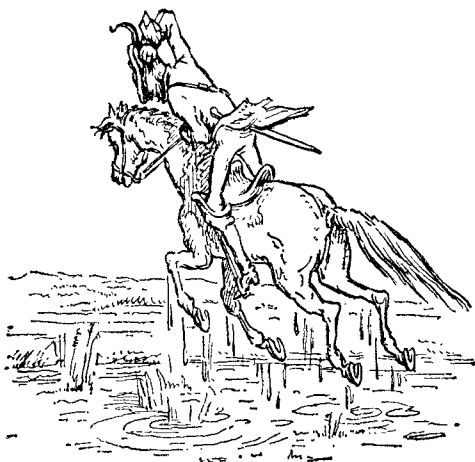


Рис. 15.4.

4. При перемещении человека вдоль лодки последняя перемещается в противоположном направлении. Причина заключается в следующем. При очень малых скоростях сила трения между лодкой и водой ничтожно мала (см. § 11.8), поэтому лодка вместе с человеком образует замкнутую систему. Перемещение человека в одном направлении вызывает соответствующее перемещение лодки в противоположном направлении так, что центр масс этой системы  $S$  сохраняет неизменное положение (рис. 15.5).

Данное положение относится не только к поступательному, но и к вращательному движению. Так, можно лишь приближенно говорить о том, что Луна вращается вокруг Земли; фактически система Земля — Луна вращается вокруг общего центра масс. Найдём его положение. Расстояние между центрами Земли и Луны равно 384 000 км, масса Луны в 81 раз меньше массы Земли. Из (15.12) следует, что

расстояние от центра масс до центра Земли

$$x_{ц} = \frac{1 \cdot 384\,000 + 81 \cdot 0}{1 + 81} \approx 4700 \text{ км.}$$

Но радиус земного шара равен 6370 км, следовательно, центр масс системы Земля — Луна заметно отстоит от

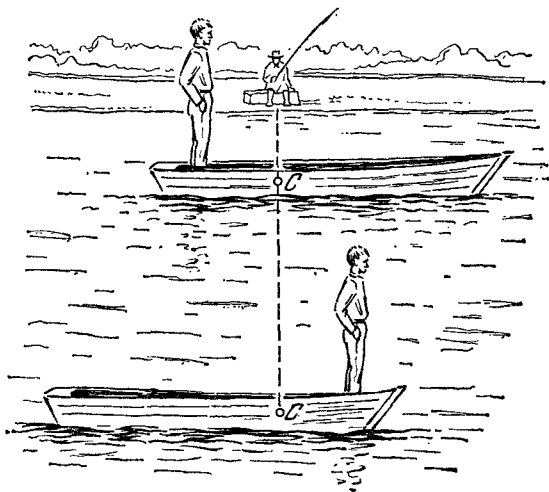


Рис. 15.5.

центра Земли. Прделав такой же расчет для системы Земля — Солнце и проанализировав результат, можно убедиться, что центр масс этой системы почти точно совпадает с центром Солнца.

## ГЛАВА 16

### ПОЛНАЯ И КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

#### § 16.1. Полная энергия тела

1. Понятие энергии является одним из основных понятий физики. Из начального курса физики читателю известен *закон сохранения энергии* — один из важнейших законов природы, а также ряд применений этого закона для объяснения

механических, тепловых и электрических явлений. С понятием энергии приходится встречаться при рассмотрении ряда технических задач, ибо одной из важнейших проблем техники является получение, передача и использование энергии. В этой и последующих главах будет подробно изложено понятие энергии и показано, как им пользоваться при решении ряда физических задач.

2. Наиболее общее понятие об энергии можно получить, пользуясь идеями теории относительности. Можно определить полную энергию тела как произведение его релятивистской массы на квадрат скорости света.

$$\mathcal{E} = mc^2, \quad (16.1)$$

где  $\mathcal{E}$  — полная энергия,  $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$  — релятивистская масса и  $c = 3 \cdot 10^8$  м/сек — скорость света.

Из этого определения следует, что в разных системах отсчета полная энергия тела различна. Она зависит от того, с какой скоростью тело движется относительно системы отсчета, поскольку от скорости зависит его релятивистская масса (см. § 13.1), а в разных системах отсчета тело имеет различную скорость.

Наименьшей энергией тело обладает в системе отсчета, относительно которой оно покоится. Это значение энергии тела называется энергией покоя.

$$\mathcal{E}_0 = m_0 c^2. \quad (16.2)$$

## § 16.2. Кинетическая энергия

1. Кинетической энергией тела называется разность между его полной энергией и энергией покоя:

$$K = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = (m - m_0)c^2, \quad (16.3)$$

где  $K$  — кинетическая энергия. Она зависит от скорости движения тела относительно системы отсчета.

Выражению для кинетической энергии придадим вид, более удобный для дальнейших исследований. Из (16.3) следует, что  $m_0/m = \sqrt{1-(v^2/c^2)}$ , откуда

$$K = mc^2 \left(1 - \frac{m_0}{m}\right) = mc^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right).$$

Умножив и разделив это выражение на  $1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ , имеем

$$K = \frac{mv^2}{1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{p^2}{m \left(1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)}. \quad (16.4)$$

В ньютоновской механике скорость движения тела относительно системы отсчета много меньше скорости света; поэтому там можно пренебречь дробью  $v^2/c^2$  по сравнению с единицей и положить  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1$ . Тогда мы получим очень простую формулу для вычисления кинетической энергии в ньютоновской механике:

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}. \quad (16.5)$$

Хотя эта формула и является приближенной, при скоростях движения, с которыми обычно приходится иметь дело в технике, она дает очень хорошую точность. Пользуясь результатами § 13.3, получим, что даже при скоростях порядка сотен километров в секунду приближенное выражение (16.5) отличается от точного (16.4) менее чем на десяти-тысячную долю процента.

2. При скоростях, много меньших скорости света, кинетическая энергия тела значительно меньше энергии покоя. Действительно,

$$\frac{K}{\mathcal{E}_0} = \frac{v^2}{2c^2} \ll 1.$$

Даже при скорости  $v \approx 300 \text{ км/сек} = 3 \cdot 10^5 \text{ м/сек}$ , что в 10 раз больше орбитальной скорости Земли, кинетическая энергия составит

$$\frac{K}{\mathcal{E}_0} = \frac{9 \cdot 10^{10}}{2 \cdot 9 \cdot 10^{16}} = 5 \cdot 10^{-7} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ ‰},$$

т. е. стотысячные доли процента от энергии покоя тела!

Наоборот, при ультрарелятивистских скоростях, мало отличающихся от скорости света, практически вся энергия тела сводится к его кинетической энергии: энергия покоя здесь значительно меньше кинетической. Так, в современных синхрофазотронах протоны разгоняются до скоростей

порядка  $v=0,9995 c$ , т. е. отличающихся от скорости света примерно на 0,05%. Здесь

$$\begin{aligned} \frac{K}{\mathcal{E}_0} &= \frac{(m-m_0)c^2}{m_0c^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 = \frac{100}{\sqrt{9,9975}} - 1 = \\ &= 31,6 - 1 \approx 30. \end{aligned}$$

Следовательно, при этих скоростях кинетическая энергия протона в 30 раз больше его энергии покоя.

Пренебрегая энергией покоя по сравнению с кинетической, получим из (16.3) приближенно для ультрарелятивистских скоростей

$$K \approx \mathcal{E} = mc^2. \quad (16.6)$$

### § 16.3. Энергия и импульс

1. Выведем соотношение между полной энергией тела и его импульсом, которое нам потребуется в дальнейшем. Для этой цели возведем в квадрат выражение для релятивистской массы (13.3); после несложных преобразований получим

$$m^2c^2 - m^2v^2 = m_0^2c^2$$

или, умножив на  $c^2$ ,

$$m^2c^4 - m^2v^2c^2 = m_0^2c^4. \quad (16.7)$$

Учитывая, что импульс тела  $p = mv$ , полная энергия  $\mathcal{E} = mc^2$  и энергия покоя  $\mathcal{E}_0 = m_0c^2$ , имеем

$$\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}_0^2 + p^2c^2. \quad (16.8)$$

В ультрарелятивистской области

$$K \approx \mathcal{E} \approx pc. \quad (16.9)$$

2. Анализ выражения (16.8) показывает, что существуют два способа изменения полной энергии тела.

Во-первых, можно изменить импульс тела, не меняя энергии покоя. Для этого необходимо изменить скорость движения тела относительно избранной системы отсчета.

Во-вторых, можно изменить энергию покоя; при этом, естественно, изменится и масса покоя этого тела. На первый взгляд неясно, с помощью каких процессов можно изменить массу покоя тела. На самом же деле такие процессы возможны, что будет показано в гл. 20 и 21.

### § 16.4. Кинетическая энергия и работа

1. Рассмотрим случай, когда на тело действует сила  $F$ , составляющая угол  $\alpha$  с направлением перемещения. В общем случае мы можем считать силу переменной, а траекторию тела криволинейной. Разложим силу на две компоненты (рис. 16.1), тангенциальную  $F_t = F \cos \alpha$  и нормальную  $F_n = F \sin \alpha$ , и рассмотрим, как они влияют на кинетическую энергию тела.

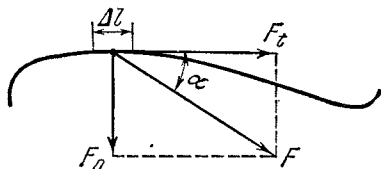


Рис. 16.1.

Нормальная компонента силы меняет только направление вектора скорости, но не меняет ее абсолютной величины (см. § 4.8), поэтому нормальная компонента силы не меняет кинетической энергии тела. Действительно, в выражение для кинетической энергии (16.4) входит квадрат скорости, следовательно, кинетическая энергия зависит только от модуля скорости (или импульса), но не зависит от направления этих векторов.

Тангенциальная же компонента силы влияет именно на абсолютную величину скорости (или импульса), но не на их направление. Следовательно, изменение кинетической энергии тела происходит под действием тангенциальной компоненты силы. Последняя, согласно (13.5), может быть записана так:

$$F_t = \frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta p}{\Delta t}.$$

Действительно, тангенциальная компонента силы характеризует изменение абсолютной величины импульса в единицу времени, поэтому следует в выражении (13.5) вместо разности векторов рассматривать разность модулей этих векторов.

2. Пусть под действием силы тело переместилось на малое расстояние  $\Delta l$  в течение малого промежутка времени  $\Delta t$ . При неизменной энергии покоя изменение кинетической энергии тела равно изменению его полной энергии:

$$\Delta K = K_2 - K_1 = (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_0) - (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0) = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = \Delta \mathcal{E}.$$

Изменение полной энергии может быть вычислено с помощью выражения (16.8):

$$\mathcal{E}_2^2 = \mathcal{E}_0^2 + p_2^2 c^2, \quad \mathcal{E}_1^2 = \mathcal{E}_0^2 + p_1^2 c^2.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)(\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1) = (p_2 - p_1)(p_2 + p_1)c^2.$$

Положим

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E} - \Delta \mathcal{E}, \quad \mathcal{E}_2 = \mathcal{E} + \Delta \mathcal{E}; \quad p_1 = p - \Delta p \quad \text{и} \quad p_2 = p + \Delta p.$$

Тогда

$$2\Delta \mathcal{E} \cdot 2\mathcal{E} = 2\Delta p \cdot 2pc^2 \quad \text{или} \quad \Delta \mathcal{E} mc^2 = \Delta p mvc^2.$$

Итак,

$$\Delta \mathcal{E} = \Delta K = v \cdot \Delta p. \quad (16.10)$$

Умножив и разделив (16.10) на  $\Delta t$ , учтем, что

$$v_{\text{ср}} \Delta t = \Delta l, \quad \frac{\Delta p}{\Delta t} = F_t = F \cos \alpha.$$

При неизменной энергии покоя изменение полной энергии тела равно изменению его кинетической энергии. Тогда получим

$$\Delta K = F_t \Delta l = F \Delta l \cos \alpha. \quad (16.11)$$

3. Физическую величину  $F_t \Delta l = F \Delta l \cos \alpha$  назовем *элементарной работой*:

$$\Delta A = F \Delta l \cos \alpha = F_t \Delta l. \quad (16.12)$$

Из (16.11) и (16.12) следует

$$\Delta A = \Delta K, \quad (16.13)$$

т. е. *элементарная работа равна бесконечно малому изменению кинетической энергии тела.*

4. Рассмотрим случай работы произвольной силы на конечном участке траектории (рис. 16.2). Разобьем эту тра-



екторию на малые участки  $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$ . Для каждого участка, согласно (16.13), имеем

$$\Delta A_1 = \Delta K_1 = K_1 - K_0;$$

$$\Delta A_2 = \Delta K_2 = K_2 - K_1;$$

.....

$$\Delta A_n = \Delta K_n = K - K_n.$$

Сложив все эти равенства и обозначив полную работу  $A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \dots + \Delta A_n$ , имеем

$$A = K - K_0, \quad (16.14)$$

ибо все промежуточные слагаемые взаимно уничтожаются.

Итак, работа силы на конечном участке пути равна изменению кинетической энергии тела, т. е. разности значений кинетической энергии в конечной и начальной точках траектории. Выражение (16.14) выведено на основе формул теории относительности и потому справедливо для движений тела с произвольными скоростями (но при условии, что энергия покоя не меняется).

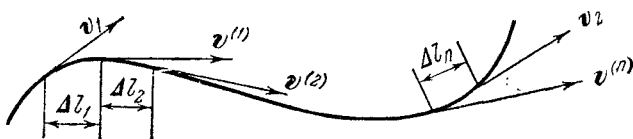


Рис. 16.2.

Учитывая важность этого результата, рекомендуем читателю самостоятельно вывести выражение (16.14) для случая действия постоянной силы в приближении  $v \ll c$  (ньютоновская механика). Можно, например, воспользоваться выражениями (4.9), (4.10) и (7.2) и получить

$$A = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}. \quad (16.15)$$

### § 16.5. Мощность

1. Средней мощностью за промежуток времени  $\Delta t$  называется отношение работы, совершаемой за это время, к промежутку времени:

$$N_{\text{ср}} = \frac{\Delta A}{\Delta t}. \quad (16.16)$$

Мгновенной мощностью называется предел, к которому стремится средняя мощность за бесконечно малый промежуток времени:

$$N = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t}. \quad (16.17)$$

2. Мгновенную мощность можно выразить через силу и мгновенную скорость. Для этого подставим в (16.17) выражение (16.12), получим

$$N = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( F_t \frac{\Delta l}{\Delta t} \right) = F_t \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = F_t v,$$

где  $v$  — модуль мгновенной скорости. Следовательно,

$$N = F_t v = F v \cos \alpha. \quad (16.18)$$

Заметим, что если сила перпендикулярна траектории ( $\alpha = \pi/2$ ), то и работа, и мощность равны нулю.

### § 16.6. Единицы измерения энергии, работы и мощности

1. Поскольку работа есть мера изменения энергии, то работа и энергия измеряются одними и теми же единицами.

В Международной системе единиц (СИ) единицей работы является джоуль. Джоуль — это работа, совершаемая силой 1 н на расстоянии 1 м:

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ н} \cdot 1 \text{ м}.$$

Размерность работы:

$$[A] = [F] [l] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{сек}^2.$$

Ту же размерность можно получить и так:

$$[A] = [\mathcal{E}] = [m] [c^2] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{сек}^2.$$

Наглядное представление о масштабе джоуля можно получить из следующих соображений: если тело массой 2 кг движется со скоростью 1 м/сек, то его кинетическая энергия равна 1 дж.

2. В системе СГС единицей работы является эрг:

$$1 \text{ эрг} = 1 \text{ дин} \cdot 1 \text{ см.}$$

Очевидно, что

$$1 \text{ дж} = 10^7 \text{ эрг.}$$

В технике нередко энергия измеряется в килограммометрах (кГм или кгсм):

$$1 \text{ кгсм} = 1 \text{ кгс} \cdot 1 \text{ м} = 9,81 \text{ дж.}$$

В тепловых расчетах энергию иногда измеряют в калориях; по определению

$$1 \text{ кал} = 4,1868 \text{ дж} \approx 4,2 \text{ дж} = 0,427 \text{ кгсм.}$$

В атомной физике применяется единица измерения энергии электрон-вольт (эв) и ее производные: килоэлектрон-вольт (1 кэв =  $10^3$  эв), мегаэлектрон-вольт (1 Мэв =  $10^6$  эв) и гигаэлектрон-вольт (1 Гэв =  $10^9$  эв).

$$1 \text{ эв} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ дж.}$$

Смысл такого наименования единицы энергии будет выяснен ниже (см. § 18.7).

3. Единицей измерения мощности в системе СИ служит ватт:

$$1 \text{ вт} = 1 \text{ дж/сек.}$$

Применяются также единицы:

$$1 \text{ эрг/сек} = 10^{-7} \text{ вт};$$

$$1 \text{ кГм/сек} = 9,81 \text{ вт};$$

$$1 \text{ л.с.} = 75 \text{ кГм/сек} = 735,499 \text{ вт} \approx 736 \text{ вт};$$

$$1 \text{ ккал/час} = \frac{10^3 \cdot 4,2 \text{ дж}}{3600 \text{ сек}} = 1,163 \text{ вт.}$$

Рекомендуем читателю в порядке упражнения вывести соотношения между единицами: киловатт-час и килокалория; лошадиная сила и килокалория в час; гектоватт-час и килограммометр.

## ГЛАВА 17

## ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ СТОЛКНОВЕНИЙ

## § 17.1. Что такое столкновение?

1. В обыденной жизни под столкновением понимается явление, аналогичное соударению *бильярдных шаров*, когда тела при встрече непосредственно касаются друг друга. В физике же это явление понимается в более широком смысле. Под *столкновением* или *ударом* мы понимаем *любое кратковременное взаимодействие частиц*. Так, можно говорить о столкновении молекул, хотя они взаимодействуют на расстоянии через свои электрические поля; можно говорить о столкновении нейтрона или альфа-частицы с ядром, хотя и здесь нет непосредственного касания частиц, а взаимодействие осуществляется с помощью ядерных или электрических сил.

2. Особенностью теории столкновений является то, что мы детально не анализируем механизм взаимодействия. Причина заключается в том, что анализ сил, возникающих при столкновении, весьма затруднителен, а во многих случаях и просто невозможен. Так, например, обстоит дело с ядерными силами, закон изменения которых с расстоянием пока еще не найден.

Естественно, что в результате мы лишаемся возможности детально описать закон движения частиц, не можем рассчитать траектории, мгновенные скорости и т. п. Но зачастую это нас особенно и не интересует, тем более, что для микрочастиц точное задание траектории и мгновенных скоростей (или импульсов) иногда просто невозможно из-за соотношения неопределенностей.

3. Задача о столкновениях обычно формулируется так: заданы импульсы и кинетические энергии частиц до столкновения; как найти значения этих величин после того, как столкновение произошло? Оказывается, что для решения этой задачи детальный анализ взаимодействия не нужен.

Ниже мы рассмотрим теорию столкновений только в приближении ньютоновской механики, когда скорости частиц много меньше скорости света в вакууме, а массы частиц достаточно велики. Кроме того, для простоты рас-

суждений мы рассмотрим столкновение только двух частиц. Несмотря на кажущуюся ограниченность такой постановки задачи, она окажется полезной для анализа многих реальных физических явлений. Рассмотрим некоторые задачи, для решения которых достаточно применить закон сохранения импульса.

### § 17.2. Абсолютно неупругий удар

1. Удар называется *абсолютно неупругим*, если тела после соударения движутся с одинаковой скоростью, образуя одно новое тело. Примером может служить, скажем, попадание снарядов в платформу с песком, удар метеорита о Землю и т. п.

Пусть частица с массой  $m_1$  движется со скоростью  $\mathbf{v}_1$ , а частица с массой  $m_2$  — со скоростью  $\mathbf{v}_2$ . Частицы встретились в некоторой точке и слиплись. Какова скорость вновь образовавшегося тела (рис. 17.1)? Поскольку мы рассматриваем нерелятивистский случай, массы тел при изменении

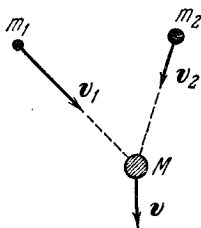


Рис. 17.1.

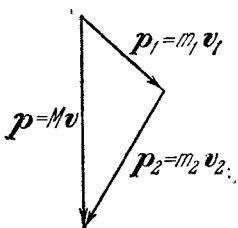


Рис. 17.2.

скорости не меняются, и масса образовавшегося тела  $M = m_1 + m_2$ . На основе закона сохранения импульса имеем

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{v}, \quad (17.1)$$

откуда

$$\mathbf{v} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (17.2)$$

2. Следует обратить внимание на то, что скорости и импульсы — векторы, и потому нельзя (17.1) понимать как арифметическую сумму. Сложение здесь выполняется по правилу сложения векторов (рис. 17.2). В частности,

если тела движутся по одной прямой навстречу друг другу, то одному вектору следует приписать знак плюс, другому — минус (рис. 17.3).

3. При неупругом ударе сумма кинетических энергий частиц до удара не равна кинетической энергии тела, образовавшегося после удара.

Это совершенно очевидно для случая неупругого столкновения двух тел, импульсы которых равны и противоположно направлены.

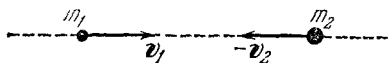


Рис. 17.3.

Здесь кинетическая энергия тела после столкновения равна нулю, а сумма кинетических энергий сталкивающихся тел до удара, естественно, нулю не равна. То же справедливо и для случая, когда тело, покоящееся относительно данной системы отсчета, распадается на два осколка.

4. В качестве примера рассмотрим конкретную задачу о так называемом альфа-радиоактивном распаде. При этом ядро некоторого радиоактивного элемента выбрасывает альфа-частицу (ядро гелия); вновь образовавшееся ядро испытывает отдачу.

Допустим, что нам известна кинетическая энергия альфа-частицы  $K$  и нас интересует кинетическая энергия нового ядра, которую мы обозначим буквой  $R$ . Эта задача легко решается на основе закона сохранения импульса.

Пусть масса альфа-частицы равна  $m$ , а масса ядра до распада  $M$ , тогда масса нового ядра равна  $M - m$ . Предполагая, что ядро до распада покоилось относительно лабораторной системы отсчета, получим в соответствии с законом сохранения импульса

$$0 = p_{\alpha} + p_R. \quad (17.3)$$

Следовательно, импульсы альфа-частицы и нового ядра равны по величине и противоположны по знаку.

Пусть альфа-частица движется с нерелятивистской скоростью; скорость нового ядра будет еще меньше. Их кинетические энергии найдем по формуле (16.5):

$$K = \frac{p_{\alpha}^2}{2m}, \quad R = \frac{p_R^2}{2(M-m)}. \quad (17.4)$$

Отношение кинетических энергий

$$\frac{K}{R} = \frac{M-m}{m}. \quad (17.5)$$

Изменение энергии первоначального ядра

$$\Delta \mathcal{E} = K + R = K \frac{m}{M-m}. \quad (17.6)$$

Рассмотрим конкретный числовой пример. Как показали исследования, ядра радия при распаде выбрасывают альфа-частицы с кинетической энергией  $K = 5,681 \text{ Мэв}$ ; масса ядра радия в 56 раз больше массы альфа-частицы ( $M = 56 m$ ). Тогда кинетическая энергия ядра, образовавшегося в результате радиоактивного распада,

$$R = \frac{Km}{M-m} = \frac{5,681 \cdot 1}{55} = 0,103 \text{ Мэв},$$

а полная энергия реакции

$$\Delta \mathcal{E} = K + R = 5,784 \text{ Мэв}.$$

### § 17.3. Упругий удар

1. Удар называется *упругим*, если, кроме суммы импульсов, сохраняется сумма кинетических энергий соударяющихся тел. Это вовсе не означает, что не меняется энергия каждого из них. Напротив, при ударе меняются скорости тел, а вместе с ними — импульсы и кинетические энергии. Но *сумма импульсов и сумма кинетических энергий* при упругом ударе сохраняется.

При упругом столкновении двух тел получим такую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} p_1 + p_2 &= p'_1 + p'_2, \\ K_1 + K_2 &= K'_1 + K'_2, \end{aligned} \right\} \quad (17.7)$$

где без штрихов обозначены энергии и импульсы до удара, штрихами — после удара.

2. Рассмотрим упругий *центральный* удар двух шаров, т. е. такой удар, когда векторы скоростей направлены по прямой, соединяющей центры этих шаров. Для простоты рассуждений будем рассматривать явление в той системе

отсчета, относительно которой шар  $m_2$  покоится (рис. 17.4), а шар  $m_1$  движется со скоростью  $v$ . Уравнения (17.7) примут вид

$$\left. \begin{aligned} m_1 v &= m_1 v_1 + m_2 v_2, \\ \frac{m_1 v^2}{2} &= \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (17.8)$$

Или так:

$$\left. \begin{aligned} m_1 (v - v_1) &= m_2 v_2, \\ m_1 (v^2 - v_1^2) &= m_2 v_2^2. \end{aligned} \right\}$$

Разделив второе равенство на первое, имеем

$$v + v_1 = v_2. \quad (17.9)$$

Подставив (17.9) в первое равенство системы (17.8), получим

$$m_1 v = m_1 v_1 + m_2 v + m_2 v_1,$$

откуда

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v; \quad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v. \quad (17.10)$$

3. Остановимся на некоторых интересных частных случаях.

а) Если  $m_2 = m_1$ , то  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = v$ . Следовательно, при упругом центральном ударе шара о покоящийся шар равной ему массы первый шар остановится, второй же приобретет скорость первого шара. Если эти шары к тому же неразличимы (например, молекулы), то результат будет такой, как

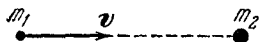


Рис. 17.4.

будто бы первый шар «прошел сквозь второй» и продолжал двигаться с той же скоростью, а неподвижный шар так и остался на месте.

б) Если  $m_1 > m_2$ , то  $0 < v_1 < v$ , а  $v_2 > v$ . В предельном случае, когда  $m_1 \gg m_2$ , скорость массивного шара почти не изменится, а легкий шар, покоившийся до удара, полетит со скоростью  $v_2 \approx 2v$ .

в) Если  $m_1 < m_2$ , то  $-v \leq v_1 < 0$ , т. е. легкий шар, налетев на массивный, отразится в обратном направлении. Массивный же шар  $m_2$  приобретет скорость  $0 \leq v_2 < v$ .



В предельном случае, когда  $m_2 \gg m_1$ , можно положить, что отношение  $m_1/m_2$  стремится к нулю. Тогда из (17.10) следует, что  $v_2 = 0$ ; скорость же первого шара

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v = \frac{(m_1/m_2) - 1}{(m_1/m_2) + 1} v = -v,$$

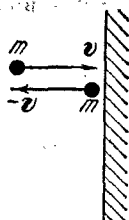


Рис. 17.5.

т. е. шар при ударе о массивную стенку отразится от нее с той же скоростью, с которой он на нее налетает (рис. 17.5); скорость стенки практически не изменится.

### § 17.4. Замедление нейтронов

1. Для некоторых ядерных реакций необходимо замедлить нейтроны, т. е. уменьшить их кинетическую энергию от нескольких  $Mэв$  до сотых долей электрон-вольта. Замедление достигается за счет упругих соударений нейтронов с ядрами вещества-замедлителя. Найдем коэффициент замедления  $r$ , равный отношению энергии, потерянной нейтроном при одном соударении, к его первоначальной кинетической энергии.

Пусть масса ядра замедлителя  $M$ , его скорость после удара  $u = \frac{2m}{m+M} v$  (см. (17.10)). Энергия, потерянная нейтроном, равна энергии, которую получило ядро замедлителя; итак,

$$r = \frac{\Delta K}{K} = \frac{Mu^2 \cdot 2}{2 \cdot mv^2} = \frac{4mM}{(m+M)^2}. \quad (17.11)$$

2. В качестве замедлителя часто используется углерод. Масса его ядра в 12 раз больше массы нейтрона. Из (17.11) при  $M = 12m$  получим

$$r = \frac{4 \cdot 1 \cdot 12}{13^2} = 0,284 = 28,4\%.$$

Для определения числа соударений до полного замедления нейтронов сделаем такой расчет. Если начальная кинетическая энергия нейтрона равна  $K$ , то после одного соударения

$$K_1 = K - \Delta K = K(1 - r).$$

После второго соударения

$$K_2 = K_1 - \Delta K_1 = K_1(1 - r) = K(1 - r)^2.$$

Очевидно, что после  $n$  столкновений кинетическая энергия

$$K_n = K(1 - r)^n.$$

Полагая  $K = 1,75 \text{ Мэв} = 1,75 \cdot 10^6 \text{ эв}$ ,  $K_n = 0,025 \text{ эв}$ ,  $r = 0,284$ , получим:  $0,025 = 1,75 \cdot 10^6 \cdot 0,716^n$  или  $7 \cdot 10^7 = 0,716^{-n}$ , откуда

$$n = \frac{-\lg(7 \cdot 10^7)}{\lg 0,716} = \frac{-7,845}{-0,145} = 54.$$

Итак, если бы упругое соударение нейтрона с ядром углерода было всегда центральным, то за 54 соударения его кинетическая энергия уменьшилась бы с  $1,75 \text{ Мэв}$  до  $0,025 \text{ эв}$ , т. е. в 70 миллионов раз! Однако на самом деле кроме центральных ударов происходят косые соударения, при которых нейтрон теряет меньше энергии, чем при центральных. Поэтому для получения соответствующего замедления потребуется некоторое увеличение числа столкновений.

3. Значительно более эффективным замедлителем служит «тяжелая» вода, в которой атомы водорода замещены атомами «тяжелого» водорода — дейтерия. Здесь  $M = 2m$ ,  $r = \frac{4mM}{(m+M)^2} = \frac{8}{9}$ . Подставив в (17.11), получим  $K_n = K/9^n$ . Полагая, как и выше,  $K = 1,75 \text{ Мэв}$ ,  $K_n = 0,025 \text{ эв}$ , получим  $n = 7$ .

### § 17.5. Давление потока частиц на стенку

1. Рассмотрим поток, состоящий из одинаковых частиц с массой  $m$ , которые все движутся со скоростью  $v$  перпендикулярно некоторой стенке, масса которой значительно больше массы всех частиц (рис. 17.6). Из рисунка видно, что за время  $\Delta t$  к стенке подойдут все частицы, содержащиеся в объеме  $V = S \Delta l = Sv \Delta t$ . Если концентрация частиц (число частиц в единице объема) равна  $n$ , то за время  $\Delta t$  о стенку ударится  $N$  частиц:

$$N = nV = nSv \Delta t. \quad (17.12)$$

2. При ударе о стенку на частицу действует сила, равная изменению импульса частицы в единицу времени:

$$f = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t}. \quad (17.13)$$

По третьему закону Ньютона частица действует на стенку с такой же по величине, но противоположно направленной силой. Учитывая, что на стенку за время  $\Delta t$  падает  $N$  частиц, найдем полную силу:

$$F = -fN = -nSv \cdot \Delta(mv). \quad (17.14)$$

3. Изменение импульса частицы зависит от характера ее удара о стенку.

При упругом ударе частицы о неподвижную стенку ее скорость меняется на противоположную (см. § 17.3). Итак,  $v_{\text{нач}} = v$ ,  $v_{\text{кон}} = -v$ ; изменение импульса

$$\Delta(mv)_{\text{упр}} = mv_{\text{кон}} - mv_{\text{нач}} = -2mv. \quad (17.15)$$

Подставив в (17.14), получим

$$F_{\text{упр}} = 2Snmv^2. \quad (17.16)$$

По определению *давлением*  $p$  называется отношение силы  $F$  к площади  $S$ , на которую эта сила действует (причем направление силы перпендикулярно площадке):

$$p = \frac{F}{S}.$$

Отсюда следует, что давление, которое оказывает поток частиц при упругом ударе о стенку, выразится так:

$$p_{\text{упр}} = 2nmv^2. \quad (17.17)$$

4. При неупругом ударе, когда частицы как бы «прилипают» к стенке, давление оказывается в два раза меньше. Действительно, здесь начальная скорость  $v_{\text{нач}} = v$ , а конечная скорость  $v_{\text{кон}} = 0$ . Изменение импульса

$$\Delta(mv)_{\text{неупр}} = mv_{\text{кон}} - mv_{\text{нач}} = -mv. \quad (17.18)$$

Подставив в (17.14), получим

$$F_{\text{неупр}} = Snmv^2, \quad p_{\text{неупр}} = nmv^2. \quad (17.19)$$

5. Полученные выражения для силы, с которой поток действует на стенку, являются весьма общими. Они пригодны,

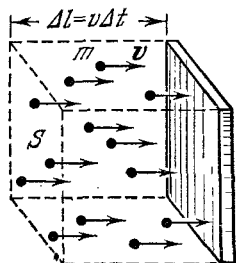


Рис. 17.6.

например, для вычисления давления газа (см. § 26.1), для расчета светового давления (см. т. II) и т. д.

Применим их для вычисления силы, с которой поток жидкости действует на стенку. Произведение  $\rho = mn$  есть плотность жидкости. Действительно, умножив концентрацию — число молекул в единице объема — на массу одной молекулы, мы получим массу вещества в единице объема, т. е. плотность вещества. Итак,

$$F_{\text{упр}} = 2S\rho v^2, \quad (17.20)$$

$$F_{\text{неупр}} = S\rho v^2. \quad (17.21)$$

По существу, аналогичными формулами мы уже пользовались в гл. II для оценки сил сопротивления, испытываемых телом при его движении в жидкости (см. (11.10)). Там выражение было получено из анализа размерностей, в данной же главе мы его вывели на основе закона сохранения импульса.

## ГЛАВА 18

# КОНСЕРВАТИВНЫЕ СИЛЫ И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

### § 18.1. Работа переменной силы

1. Как уже указывалось (§ 16.4), элементарной работой силы  $\mathbf{F}$  на бесконечно малом перемещении  $\Delta \mathbf{l}$  называется произведение модуля силы на модуль перемещения и на косинус угла между этими векторами:

$$\Delta A = F \Delta l \cos \alpha.$$

Иными словами, *элементарная работа равна произведению тангенциальной составляющей силы на модуль перемещения:*

$$\Delta A = F_t \Delta l.$$

В зависимости от того, является ли угол  $\alpha$  острым или тупым, элементарная работа  $\Delta A$  может быть как положительной (если  $0 < \alpha < \pi/2$ , то  $\Delta A > 0$ ), так и отрицательной (если  $\pi/2 < \alpha < \pi$ , то  $\Delta A < 0$ ).

2. Для вычисления работы на конечном участке пути разобьем весь путь на малые перемещения и вычислим эле-

ментарную работу на каждом из них. Сумма элементарных работ и будет искомой работой силы на конечном участке пути:

$$A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \dots + \Delta A_n = F_t^{(1)} \Delta l_1 + F_t^{(2)} \Delta l_2 + \dots + F_t^{(n)} \Delta l_n. \quad (18.1)$$

Строго говоря, здесь всегда возникает некоторая ошибка, зависящая от способа разбиения пути на малые участки. Точный результат получится лишь *в пределе*, когда путь будет разбит на бесконечно большое число бесконечно малых перемещений:

$$A = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} (F_t^{(1)} \Delta l_1 + F_t^{(2)} \Delta l_2 + \dots + F_t^{(n)} \Delta l_n). \quad (18.2)$$

3. Работа постоянной силы на прямолинейном участке пути выразится так:

$$A = F_t l = Fl \cos \alpha. \quad (18.3)$$

Действительно, в этом случае можно в формуле (18.1) вынести общий множитель  $F_t$  за скобки, а сумма элементарных перемещений  $\Delta l$  даст пройденный путь  $l$ .

Эту работу можно изобразить на графике (рис. 18.1). Графиком тангенциальной компоненты силы при  $F_t = \text{const}$  является прямая, параллельная оси абсцисс. Тогда работа на участке пути  $l = l_2 - l_1$

численно равна площади заштрихованного прямоугольника. При этом нужно учесть переводной масштаб — единичная площадка изображает единицу работы (на нашем рисунке  $1 \text{ см}^2$  изображает  $1 \text{ Дж}$ ).

4. В общем случае тангенциальная компонента силы является переменной величиной (рис. 18.2). Для графического вычисления работы разобьем путь  $l$  на несколько малых участков. Наименьшие значения силы на каждом участке (в нашем случае — левые ординаты) умножим на соответствующие перемещения и сложим. Площадь полученной таким образом внутренней ступенчатой фигуры изображает некоторую работу  $A_{\min}$ ; поскольку мы на каждом

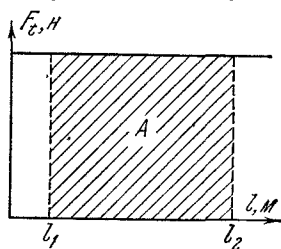


Рис. 18.1.

перемещении брали наименьшее значение силы, то работа  $A_{\min}$  меньше искомой работы  $A$ .

Если проделать такой же расчет, но выбрать на каждом перемещении наибольшие значения силы (на рис. 18.3 — правые ординаты), то площадь выступающей ступенчатой

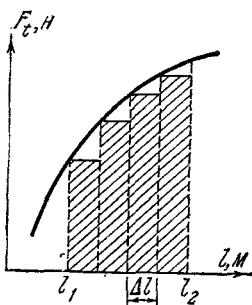


Рис. 18.2.

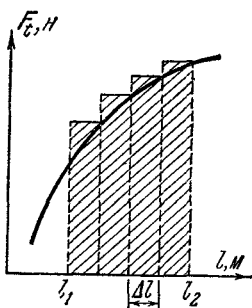


Рис. 18.3.

фигуры изображает некоторую работу  $A_{\max}$ , которая больше искомой работы  $A$ . Итак,

$$A_{\min} < A < A_{\max}.$$

Если увеличить число разбиений, скажем, вдвое, то площадь внутренней ступенчатой фигуры увеличится, а площадь внешней — уменьшится

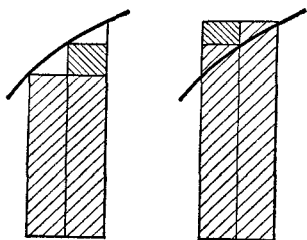


Рис. 18.4.

В курсах высшей математики доказывается, что при неограниченном возрастании числа разбиений (соответственно при  $\Delta l \rightarrow 0$ ) площади обеих ступенчатых фигур имеют общий предел, равный площади криволинейной трапеции, которая и даст точное численное значение работы переменной силы.

Итак, работа переменной силы изображается на графике площадью криволинейной трапеции, ограниченной снизу осью абсцисс, сверху — графиком силы и с боков — ординатами крайних точек.

## § 18.2. Работа упругой силы

1. Вначале мы вычислим работу внешней силы, растягивающей пружину. По третьему закону Ньютона внешняя сила равна по модулю силе упругости, но имеет противоположное

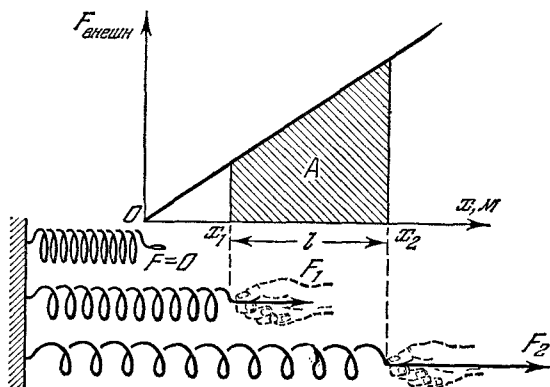


Рис. 18.5.

ложное направление ( $F_{\text{внешн}} = -F_{\text{упр}}$ ); учитывая выражение для упругой силы, получим

$$F_{\text{внешн}} = kx, \quad (18.4)$$

где  $k$  — коэффициент упругости. График этой силы изображен на рис. 18.5. Работа внешней силы на участке пути  $l = x_2 - x_1$  численно равна площади заштрихованной трапеции:

$$A_{\text{внешн}} = \frac{F_1 + F_2}{2} l = \frac{kx_1 + kx_2}{2} (x_2 - x_1) = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}. \quad (18.5)$$

2. Работа упругой силы на том же участке отличается только знаком, следовательно,

$$A_{\text{упр}} = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}. \quad (18.6)$$

3. При  $x_1 < x_2$ , т. е. при растяжении пружины, упругая сила совершает отрицательную работу, что соответствует правилу о знаке силы: силы притяжения считаются отрицательными, силы отталкивания — положительными (см. § 10.2).

Действительно, при увеличении расстояния между притягивающимися телами сила притяжения составляет тупой угол с направлением перемещения ( $\pi/2 < \alpha \leq \pi$ ), а косинус тупого угла является отрицательным числом. Здесь сила

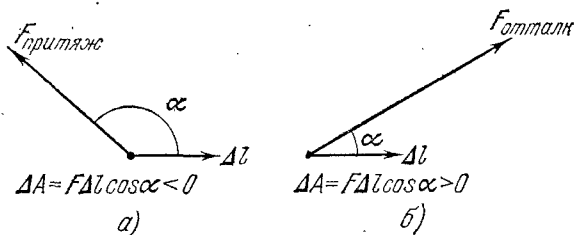


Рис. 18.6.

притяжения совершает отрицательную работу (рис. 18.6, а). Сила же отталкивания составит острый угол с направлением перемещения ( $0 \leq \alpha < \pi/2$ ); она совершает положительную работу (рис. 18.6, б).

### § 18.3. Работа кулоновской силы

1. Нам удалось довольно легко вывести выражение для работы упругой силы, ибо здесь работа изображается площадью обычной трапеции. Несколько труднее вычислить работу кулоновской (и гравитационной) силы.

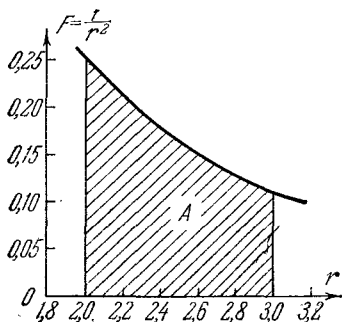


Рис. 18.7.

Действительно, здесь сила обратно пропорциональна квадрату расстояния, и графиком этой силы является кривая линия. Поэтому работа изображается площадью криволинейной трапеции (рис. 18.7), а такие площади мы вычислять не умеем. Для расчета воспользуемся численными методами.

2. Найдем работу, которую совершает кулоновская сила при перемещении заряда вдоль радиуса от  $r_1 = 2$  м до



$r_2 = 3$  м. Для простоты расчетов положим, что  $\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} = 1$ .

Тогда выражение для силы примет вид

$$F = \frac{1}{r^2}. \quad (18.7)$$

Разобьем путь  $l = r_2 - r_1$  на 10 равных участков. Элементарную работу вычислим как произведение средней силы на длину перемещения  $\Delta r$ :

$$\Delta A = F_{\text{ср}} \Delta r, \quad (18.8)$$

где за среднее значение силы примем полусумму ее значений в начале и конце перемещения:

$$F_{\text{ср}} = \frac{F_{\text{нач}} + F_{\text{кон}}}{2}.$$

Результаты вычислений сведем в табл. 18.1.

Таблица 18.1

$n$	$r$	$F = \frac{1}{r^2}$	$F_{\text{ср}} = \frac{F_n + F_{n+1}}{2}$	$\Delta A = F_{\text{ср}} \Delta r$	$A_n = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \dots + \Delta A_n$	$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_n}$
1	2,000	0,2500				0,5000	
2	2,100	0,2268	0,2384	0,0238	0,0238	0,4762	0,0238
3	2,200	0,2066	0,2167	0,0217	0,0455	0,4545	0,0455
4	2,300	0,1890	0,1978	0,0198	0,0653	0,4348	0,0652
5	2,400	0,1736	0,1813	0,0181	0,0834	0,4167	0,0833
6	2,500	0,1600	0,1668	0,0167	0,1001	0,4000	0,1000
7	2,600	0,1479	0,1539	0,0154	0,1155	0,3846	0,1154
8	2,700	0,1372	0,1425	0,0142	0,1297	0,3704	0,1296
9	2,800	0,1276	0,1324	0,0132	0,1429	0,3571	0,1429
10	2,900	0,1189	0,1232	0,0123	0,1552	0,3448	0,1552
11	3,000	0,1111	0,1150	0,0115	0,1667	0,3333	0,1667
12	3,100	0,1041	0,1076	0,0108	0,1775	0,3226	0,1774

Анализ этой таблицы показывает, что с хорошей степенью точности (четыре значащие цифры) работа силы (18.7) может быть выражена так:

$$A = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}. \quad (18.9)$$

3. Если бы мы провели расчет не для частного случая, когда  $\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} = 1$ , а для общего случая произвольных зарядов, мы получили бы для работы кулоновской силы выражение

$$A_{\text{кул}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2}. \quad (18.10)$$

Рекомендуем читателю самостоятельно показать, что в полном соответствии с положением, выведенным в конце предыдущего параграфа, при увеличении расстояния между зарядами силы отталкивания произведут положительную работу, а силы притяжения — отрицательную.

4. Рассчитаем работу кулоновской силы при перемещении заряда по произвольной криволинейной траектории (рис. 18.8).

Разобьем эту кривую на бесконечно малые перемещения  $\Delta l$ , которые в первом приближении можно считать бесконечно малыми отрезками. Элементарная работа на этом участке

$$\Delta A = F \Delta l \cos \alpha = F \Delta r, \quad (18.11)$$

ибо, как видно из чертежа,  $\Delta l \cos \alpha = \Delta r$ . Это выражение совпадает с (18.8), когда мы рассматривали перемещение заряда вдоль радиуса. Сумма всех элементарных работ

$$A = F_1 \Delta l_1 \cos \alpha_1 + F_2 \Delta l_2 \cos \alpha_2 + \dots + F_1 \Delta r_1 + F_2 \Delta r_2 + \dots$$

Взяв средние значения силы и произведя численный расчет, мы придем опять к выражению (18.10).

Итак, *работа кулоновской силы не зависит от формы траектории заряда*; она определяется только радиусами-векторами начальной и конечной точек траектории.

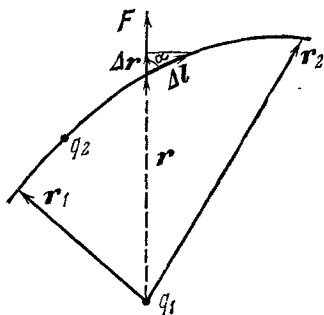


Рис. 18.8.

## § 18.4. Работа гравитационной силы

1. Расчет работы гравитационной силы фактически ничем не отличается от расчета работы кулоновской силы. Следует лишь в формуле (18.10) заменить  $q_1 q_2 / 4\pi \epsilon_0$  выражением  $\gamma m_1 m_2$  и изменить знак, ибо гравитационная сила всегда является силой притяжения. Получим

$$A_{\text{грав}} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r_1} + \frac{\gamma m_1 m_2}{r_2}. \quad (18.12)$$

2. Пусть тело с массой  $m$  поднимается на некоторую высоту  $h$  над поверхностью Земли (рис. 18.9). Полагая  $m_1 = m$  (масса тела),  $m_2 = M$  (масса Земли),  $r_1 = R$  (радиус земного шара) и  $r_2 = R + h$ , получим выражение для работы силы тяжести:

$$A = -\frac{\gamma m M}{R} + \frac{\gamma m M}{R+h} = -\frac{\gamma m M h}{R(R+h)}. \quad (18.13)$$

Работа внешней силы имеет противоположный знак, следовательно,

$$A_{\text{внешн}} = \frac{\gamma m M h}{R(R+h)}. \quad (18.14)$$

Если высота  $h$  много меньше радиуса Земли, то можно приближенно положить  $R+h \approx R$ . Используя (9.11), получим

$$A_{\text{внешн}} = \frac{\gamma m M h}{R^2} = mgh. \quad (18.15)$$

Собственно, этот результат можно было получить совершенно элементарно. На небольших высотах над Землей сила тяжести  $P = mg$  является постоянной величиной. А для постоянной силы  $A_{\text{внешн}} = Ph = mgh$ .

Однако предложенный выше вывод хотя и более сложен, но зато позволяет оценить погрешность, которую мы получаем, заменяя точную формулу (18.14) приближенным выражением (18.15). Действительно, пусть нам нужно вычислить работу с точностью до одного процента; тогда

$$\frac{A_{\text{прибл}} - A_{\text{точн}}}{A_{\text{точн}}} = \frac{A_{\text{прибл}}}{A_{\text{точн}}} - 1 \leq 0,01.$$

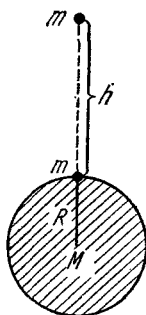


Рис. 18.9.

Подставив точные и приближенные значения работы и сократив одинаковые множители, имеем

$$\frac{R+h}{R} - 1 = \frac{h}{R} \leq 0,01.$$

Итак, вплоть до высот  $h=0,01R=0,01 \cdot 6371 \approx 64$  км можно с точностью до 1% пользоваться приближенной формулой (18.15).

3. Совершенно очевидно, что *работа гравитационной силы, как и кулоновской силы, не зависит от формы траектории*, по которой перемещается материальная точка; работа определяется только радиусами-векторами начальной и конечной точек траектории. Это прямо следует из полной тождественности выражений для вычисления работы гравитационной и кулоновской сил.

### § 18.5. Консервативные силы

1. В предыдущих параграфах было показано, что существуют силы — упругие, кулоновские, гравитационные, — работа которых не зависит от формы траектории, а определяется лишь координатами начала и конца траектории. Такие силы называются *консервативными* (от латинского *conservatio* — сохранение). Покажем, что *работа консервативной силы по произвольной замкнутой траектории равна нулю*.

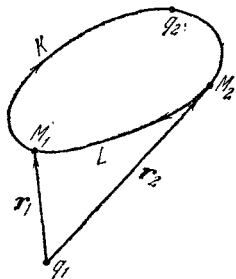


Рис. 18.10.

Для доказательства рассмотрим некоторую замкнутую траекторию (рис. 18.10). Работы на участках  $M_1KM_2$  и  $M_1LM_2$  обозначим соответственно  $A_K$  и  $A_L$ . Из определения понятия «консервативная сила» следует, что если тело перемещается из точки  $M_1$  в точку  $M_2$ , то работа не зависит от того, движется ли оно по кривой  $M_1KM_2$  или  $M_1LM_2$ ; итак,  $A_K = A_L$ . Пусть при движении тела из точки  $M_1$  в точку  $M_2$  совершается положительная работа, тогда при перемещении тела из точки  $M_2$  в точку  $M_1$  совершится отрицательная работа,  $A'_L = -A_L$ . Действительно, если направление силы не меняется, а направле-

ние перемещения изменить на противоположное, то работа, согласно определению, изменит знак.

Работа по замкнутой траектории есть сумма работ на участках  $M_1KM_2$  и  $M_2LM_1$ ; итак,

$$A_{\text{замкн}} = A_K + A'_L = A_K - A_L = 0.$$

Рекомендуем читателю проделать расчет для конкретной силы, действующей на заданной траектории, воспользовавшись полученными выражениями для упругой (18.6), кулоновской (18.10) или гравитационной силы (18.12).

2. Заметим, что существуют и неконсервативные (иначе — *диссипативные*, от латинского *dissipatio* — рассеяние) силы, работа которых существенно зависит от формы траектории. Примером может служить сила трения. Действительно, перемещая какой-либо предмет, скажем, по полу, мы совершаем работу против сил трения. Но здесь, как показывает опыт, работа существенно зависит от того, по какому пути перемещается тело. В частности, если сила трения во всех точках поверхности пола одинакова, то работа по кратчайшему пути меньше, чем по любой другой траектории.

Работа диссипативной силы по замкнутой траектории нулю не равна. Например, работа силы трения (и любых других сил сопротивления) всегда отрицательна, ибо сила направлена против перемещения. Естественно, что на любой траектории работа этой силы в нуль не обратится.

## § 18.6. Потенциальная энергия упругих, кулоновских и гравитационных взаимодействий

1. Введем понятие о *потенциальной энергии*  $U$  взаимодействующих тел. Так называется энергия, зависящая от взаимного расположения этих тел. Иначе ее называют *взаимной потенциальной энергией*.

Во всех рассмотренных примерах (формулы (18.6), (18.10), (18.12)) работа консервативных сил равнялась разности двух выражений, являющихся функциями координат начала и конца траектории. Следовательно, эта работа равнялась изменению потенциальной энергии системы взаимодействующих тел:

$$A = U_1 - U_2. \quad (18.16)$$

2. Сравнивая формулы (18.6) и (18.16), мы получим следующее выражение для *потенциальной энергии упругих сил*:

$$U_{\text{упр}} = \frac{kx^2}{2}. \quad (18.17)$$

Очевидно, что потенциальная энергия равна нулю при  $x=0$ , т. е. в том случае, когда пружина не деформирована.

3. Аналогичное сравнение формул (18.16) и (18.10) позволяет получить выражение для *потенциальной энергии кулоновских сил*:

$$U_{\text{кул}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (18.18)$$

Заметим, что здесь потенциальная энергия стремится к нулю в том случае, когда расстояние между взаимодействующими зарядами неограниченно возрастает ( $r \rightarrow \infty$ ). Если заряды  $q_1$  и  $q_2$  имеют одинаковый знак, то между ними действует сила отталкивания, а потенциальная энергия является положительной величиной. Если же заряды  $q_1$  и  $q_2$  имеют разные знаки, то между ними действует сила притяжения, и потенциальная энергия является отрицательной величиной.

4. *Потенциальная энергия гравитационных сил* может быть найдена путем сравнения формул (18.16) и (18.12):

$$U_{\text{грав}} = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r}. \quad (18.19)$$

Здесь потенциальная энергия является отрицательной величиной, ибо гравитационная сила является силой притяжения. При неограниченном увеличении расстояния между взаимодействующими телами ( $r \rightarrow \infty$ ) потенциальная энергия стремится к нулю, т. е. *возрастает* за счет работы внешней силы, которая увеличивает расстояние между взаимодействующими телами.

5. Определенный интерес представляет значение потенциальной энергии сил тяжести вблизи поверхности Земли. Положим в выражении (18.16) энергию на поверхности Земли  $U_1=0$ , энергию на высоте  $h$   $U_2=U$ ; вместо работы силы тяжести подставим выражение (18.13). Получим

$$U = \frac{\gamma m M h}{R(R+h)}. \quad (18.20)$$

При небольших высотах ( $h \ll R$ ) имеем приближенное

выражение

$$U = mgh. \quad (18.21)$$

Последние два выражения часто называют *потенциальной энергией тела в поле тяжести*. Такая терминология не вполне точна: фактически потенциальной энергией обладает не само тело, а система, состоящая из Земли и этого тела. Однако если об этом не забывать, подчеркивая наличие поля тяжести (которое создается Землей), то такое словоупотребление не принесет вреда. Аналогично можно говорить о потенциальной энергии заряда в электрическом поле. Но совершенно недопустимо говорить просто о потенциальной энергии тела, не указывая на поле, в котором находится это тело.

6. Заметим, что потенциальную энергию мы можем найти лишь с точностью до некоторой произвольной постоянной слагаемой. Действительно, прибавим ко всем значениям потенциальной энергии некоторую константу; новое значение потенциальной энергии  $U'$  выразится так:

$$U' = U + \text{const.}$$

При таком преобразовании потенциальной энергии работа не изменится. Действительно,

$$A' = U'_1 - U'_2 = (U_1 + \text{const}) - (U_2 + \text{const}) = U_1 - U_2 = A.$$

Полученный результат часто формулируется следующим образом: *нулевой уровень потенциальной энергии может быть выбран произвольно*; при переходе к другому нулевому уровню значения потенциальной энергии во всех точках изменяются на одно и то же слагаемое; работа же силы сохраняет свою величину.

Именно учитывая это свойство, мы подробно рассматривали вопрос о нулевом уровне потенциальной энергии упругого, кулоновского и гравитационного взаимодействия.

## § 18.7. Потенциал электростатического поля

1. В гл. 10 мы характеризовали электрическое поле с помощью *силовой характеристики* — вектора напряженности  $E$ . Однако можно ввести и *энергетическую характеристику* поля — скалярную величину  $\varphi$ , называемую *потенциалом*.

Потенциал точки поля численно равен отношению потенциальной энергии пробного точечного заряда, помещенного в эту точку поля, к величине этого заряда:

$$\varphi = \frac{U}{q}. \quad (18.22)$$

Если пробный заряд перемещается из точки поля с потенциалом  $\varphi_1$  в точку поля с потенциалом  $\varphi_2$ , то при этом поле совершает работу

$$A = U_1 - U_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (18.23)$$

Итак, *работа*, совершаемая электрическим полем при перемещении пробного заряда из одной точки поля в другую, *равна произведению заряда на разность потенциалов*.

2. Электрические силы являются консервативными; их работа не зависит от формы траектории и определяется только значениями потенциала начальной и конечной точек пути. Отсюда следует, что потенциальное электрическое поле неспособно заставить электрические заряды перемещаться по замкнутой траектории.

3. Единицей потенциала в системе СИ является *вольт* ( $v$ ). Вольт равен потенциалу точки поля, где пробный заряд в 1 к обладает потенциальной энергией в 1 дж. Естественно, что если разность потенциалов между двумя точками поля равна 1  $v$ , то электрические силы, перемещая между этими точками пробный заряд 1 к, совершат работу 1 дж:

$$1 \text{ в} = \frac{1 \text{ дж}}{1 \text{ к}}.$$

Теперь можно обосновать смысл единицы энергии *электрон-вольт*, введенной в § 16.6: электрон-вольт есть энергия, приобретенная частицей, несущей на себе элементарный заряд (т. е. заряд электрона), при движении ее между точками поля с разностью потенциалов в 1  $v$ .

Поскольку  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  к, а  $\varphi_1 - \varphi_2 = 1$  в, то

$$1 \text{ эв} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ к} \cdot 1 \text{ в} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ дж}.$$

Рекомендуем читателю самостоятельно показать, что единица потенциала в абсолютной электростатической системе единиц СГС составляет 300 в.



### § 18.8. Потенциал поля точечного заряда

1. Если обозначить через  $Q$  точечный заряд, создающий поле, а через  $q$  — пробный заряд, то потенциальная энергия пробного заряда на расстоянии  $r$  от источника поля согласно (18.18) примет вид

$$U = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (18.24)$$

Отсюда следует, что потенциал поля точечного заряда равен

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (18.25)$$

Из данного выражения вытекает, что потенциал поля точечного заряда обращается в нуль в бесконечно удаленной точке. Однако такой выбор нулевого уровня потенциала хотя и удобен, но вовсе не обязателен. В принципе можно нуль потенциала выбрать в любой точке поля (см. § 18.6, п. 6). От этого изменятся потенциалы всех точек поля на одно и то же постоянное слагаемое, однако работа электрических сил не изменится, так как она зависит не от абсолютных значений потенциалов, а от разности потенциалов, которая при этом не меняет своей величины.

2. Аналогично потенциалу поля электрического заряда можно ввести понятие о потенциале гравитационного поля. Потенциал поля частицы с массой  $M$  на расстоянии  $r$  от нее согласно (18.19) равен

$$\varphi_{\text{грав}} = -\frac{\gamma M}{r}. \quad (18.26)$$

При этом потенциал обращается в нуль в бесконечно удаленной точке.

Если же положить, что потенциал равен нулю на поверхности Земли, то, согласно (18.20), потенциал гравитационного поля на высоте  $h$  над поверхностью Земли равен

$$\varphi_{\text{грав}} = \frac{\gamma M h}{R(R+h)} = gh \frac{R}{R+h}. \quad (18.27)$$

А на небольших высотах ( $h \ll R$ ) имеем приближенно

$$\varphi_{\text{грав}} = gh. \quad (18.28)$$

### § 18.9. Энергия электрического поля

1. Потенциальная энергия двух зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , как было показано в § 18.6, равна

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Но выражение  $\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} = \varphi_1$  есть потенциал поля, созданного зарядом  $q_1$  в точке, где находится заряд  $q_2$ ; а выражение  $\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r} = \varphi_2$  есть потенциал поля, созданного зарядом  $q_2$  в точке, где расположен заряд  $q_1$ . Поэтому выражение для потенциальной энергии двух взаимодействующих зарядов может быть записано так:

$$U = q_1\varphi_2 = q_2\varphi_1. \quad (18.29)$$

Полусумма двух равных величин равна каждой из них; следовательно,

$$U = \frac{1}{2}(q_1\varphi_2 + q_2\varphi_1). \quad (18.30)$$

Для совокупности многих зарядов потенциальная энергия вычисляется аналогичным образом — как полусумма произведения каждого заряда на сумму потенциалов полей, созданных всеми зарядами, кроме него самого:  $q_1$  умножается на сумму всех потенциалов, но без  $\varphi_1$ ;  $q_2$  — на сумму всех потенциалов, кроме  $\varphi_2$ , и т. д. Причина заключается в том, что поле, созданное некоторым неподвижным зарядом, действует на любые другие заряды, но не на этот заряд.

## ГЛАВА 19

### ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ В НЬЮТОНОВСКОЙ МЕХАНИКЕ

#### § 19.1. Механическая энергия и ее сохранение

1. Рассмотрим систему тел, в которой действуют только консервативные силы. *Физическая величина  $W$ , равная сумме кинетической и потенциальной энергии, называется*

*механической энергией системы:*

$$W = K + U. \quad (19.1)$$

В ньютоновской механике эта величина играет исключительно важную роль.

2. Допустим, что рассматриваемая консервативная система тел является замкнутой, — это значит, что в ней действуют только внутренние силы. Из соотношения (16.14) следует, что работа внутренних сил равна изменению кинетической энергии, а из (18.16) — что она равна изменению потенциальной энергии. Итак,

$$A = K_2 - K_1 \quad \text{и} \quad A = U_1 - U_2.$$

Приравнивая правые части этих выражений, получим

$$K_2 - K_1 = U_1 - U_2$$

или

$$K_2 + U_2 = K_1 + U_1. \quad (19.2)$$

Следовательно, сумма кинетической и потенциальной энергии, т. е. механическая энергия системы, сохраняется:

$$W = K + U = \text{const}. \quad (19.3)$$

Мы получили *закон сохранения энергии* в ньютоновской механике. Его можно сформулировать так: *механическая энергия замкнутой консервативной системы сохраняется.*

## § 19.2. Механическая энергия и трение

Сформулированный выше закон сохранения энергии в ньютоновской механике является в некоторой степени идеализацией условий реального эксперимента. Действительно, во всякой реальной системе тел действуют силы трения, которые не являются консервативными. Поэтому закон сохранения механической энергии выполняется лишь приближенно и тем точнее, чем меньше силы трения по сравнению с упругими, электрическими или гравитационными силами.

Опыт показывает, что существуют такие системы тел, где силами трения можно в первом приближении пренебречь. В этом случае расчеты, проведенные на основе закона

сохранения механической энергии, хорошо оправдываются на практике.

Если же силами трения пренебречь нельзя, то можно внести поправку, учитывающую трение, написав закон сохранения механической энергии в таком виде:

$$W_1 = W_2 + A_{\text{тр}}, \quad (19.4)$$

где  $W_1$  и  $W_2$  — механическая энергия в начале и в конце процесса,  $A_{\text{тр}}$  — работа сил трения. Кстати, часто именно таким образом оказывается возможным определить силу трения.

Ниже будут рассмотрены некоторые примеры применения закона сохранения механической энергии.

### § 19.3. Космические скорости

1. Попробуем рассчитать, какую скорость следует сообщить ракете, чтобы она вышла на круговую орбиту вокруг Земли. Обозначим ее орбитальную скорость  $v_{\text{орб}}$ , скорость запуска  $v$ , радиус орбиты  $r$  (рис. 19.1).

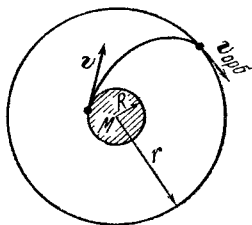


Рис. 19.1.

На ракету, движущуюся на круговой орбите, действует сила тяготения Земли, сообщаящая ей нормальное ускорение  $a = v_{\text{орб}}^2/r$ . По второму закону Ньютона

$$\gamma \frac{mM}{r^2} = \frac{mv_{\text{орб}}^2}{r}. \quad (19.5)$$

Однако нас интересует не орбитальная скорость, а скорость запуска. Для ее нахождения воспользуемся законом сохранения энергии в ньютоновской механике: суммы потенциальной и кинетической энергии на поверхности Земли и на орбите равны между собой,

$$K_{\text{пов}} + U_{\text{пов}} = K_{\text{орб}} + U_{\text{орб}}, \quad (19.6)$$

или

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma mM}{R} = \frac{mv_{\text{орб}}^2}{2} - \frac{\gamma mM}{r}. \quad (19.7)$$

Учитывая (19.5), имеем

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{\gamma mM}{R} = \frac{\gamma mM}{2r} - \frac{\gamma mM}{r}.$$

Окончательно получим

$$v = \sqrt{\gamma M \left( \frac{2}{R} - \frac{1}{r} \right)}. \quad (19.8)$$

Мы провели расчет без учета сопротивления воздуха. В реальных условиях, когда ракета запускается в атмосфере, скорость запуска должна быть увеличена. Однако расчет истинной скорости запуска весьма сложен, и здесь он не может быть выполнен.

2. Рассчитаем *первую космическую скорость*, т. е. скорость запуска при условии, когда ракета вращается недалеко от поверхности Земли. В этом случае  $r \approx R$ , поэтому

$$v_1 = \sqrt{\gamma M \left( \frac{2}{R} - \frac{1}{R} \right)} = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}}. \quad (19.9)$$

Поскольку на малых высотах  $g = \gamma M/R^2$ , то

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{gR} = \sqrt{9,81 \text{ м/сек}^2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ м}} = \\ &= 7,91 \cdot 10^3 \text{ м/сек} \approx 8 \text{ км/сек}. \end{aligned}$$

Итак, первая космическая скорость составляет 8 км/сек.

3. *Второй космической скоростью* называется скорость запуска ракеты при условии, что она покинет поле тяготения Земли и станет искусственной планетой. В этом случае можно положить, что ракета уйдет на бесконечно далекую орбиту. Полагая в (19.8), что  $r \rightarrow \infty$ , имеем

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} = v_1 \sqrt{2} = 7,91 \cdot 1,414 = 11,2 \text{ км/сек}.$$

Вторая космическая скорость почти в полтора раза больше первой.

### § 19.4. «Чертова петля»

Пусть велосипедист скатывается, не вращая педали, по вертикальному треку «чертова петля» (рис. 19.2). Требуется определить минимальную высоту  $H$ , с которой должен начаться спуск, чтобы велосипедист не сорвался в верхней точке петли, т. е. в наиболее опасном участке траектории.

В верхней точке на велосипедиста действуют две силы: сила тяжести  $P=mg$  и реакция трека  $N$ ; их равнодействующая сообщает велосипедисту нормальное ускорение  $a = v^2/r$ . Согласно второму закону Ньютона

$$mg + N = \frac{mv^2}{r}. \quad (19.10)$$

Чтобы найти скорость в верхней точке петли, используем закон сохранения энергии: потенциальная энергия

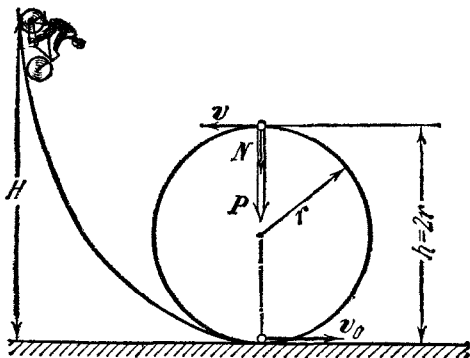


Рис. 19.2.

в начале спуска (на высоте  $H$ ) должна быть равна сумме кинетической и потенциальной энергии в верхней точке петли (на высоте  $h=2r$ ),

$$mgH = mg \cdot 2r + \frac{mv^2}{2}$$

или

$$H = 2r + \frac{v^2}{2g}.$$

Подставив значение  $v^2$  из (19.10), имеем

$$H = \frac{5r}{2} + \frac{Nr}{2mg}.$$

Минимальная высота (без учета трения) получится, если в верхней точке петли велосипедист проскальзывает, почти не касаясь трека. Тогда реакция трека  $N=0$  и  $H=2,5r$ .

## § 19.5. Потенциальные кривые

1. Часто материальная точка может двигаться только по некоторой заданной кривой, например вдоль оси абсцисс. В этом случае ее потенциальная энергия зависит только от одной переменной, т. е. потенциальная энергия выражается в виде функции  $U=f(x)$ . График, изображающий зависимость потенциальной энергии от расстояния, называется *потенциальной кривой*. Оказывается, что анализ формы этого графика дает очень много сведений о характере движения точки.

В качестве примера рассмотрим движение частицы под действием упругой силы (рис. 19.3). При  $x=x_0$  пружина не деформирована и сила, действующая на частицу, равна нулю. При отклонении частицы от положения равновесия на нее действует сила  $F=-k(x-x_0)$ . Заметим, что при  $x>x_0$  сила отрицательна (притяжение), а при  $x<x_0$  — положительна (отталкивание).

Потенциальная энергия частицы (см. (18.17)) равна

$$U = \frac{k(x-x_0)^2}{2}. \quad (19.11)$$

Она изображается на графике (рис. 19.3) в виде параболы с вершиной в точке  $x=x_0$ . Механическая же энергия частицы  $W=K+U$  является постоянной величиной, и она изображается на графике прямой, параллельной оси абсцисс.

Из графика, прежде всего, видно, что кинетическую энергию в любой точке можно сразу найти как длину отрезка от прямой  $W$  до параболы, ибо  $K=W-U$ . Максимальное значение кинетической энергии частица имеет при  $x=x_0$ ; здесь  $U=0$  и  $K_{\max}=W$ . В точках же  $x=x_1$  и  $x=x_2$  кинетическая энергия частицы равна нулю, ибо здесь  $U_{\max}=W$ .

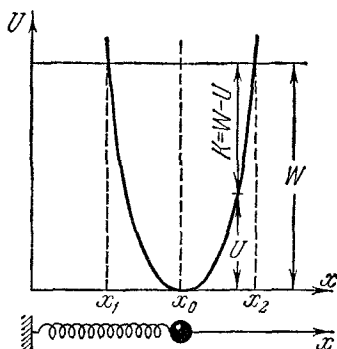


Рис. 19.3.

Далее, из графика видно, что частица не может сместиться правее точки  $x_2$  и левее точки  $x_1$ . Действительно, кинетическая энергия не может быть отрицательной величиной, следовательно, потенциальная энергия не может стать больше полной\*). В этом случае говорят, что частица находится в *потенциальной яме* с координатами  $x_1 \leq x \leq x_2$ .

2. Анализ наклона потенциальной кривой позволяет сразу же определить знак силы и тем самым — характер ее действия (притяжение или отталкивание). В самом деле, элементарная работа  $\Delta A = F \Delta x$ ; с другой стороны,  $\Delta A = U_1 - U_2 = -\Delta U$ . Следовательно, если сила — функция только одной координаты, например абсциссы  $x$ , то  $F \Delta x = -\Delta U$ , или

$$F = -\frac{\Delta U}{\Delta x}. \quad (19.12)$$

Но на графике  $\Delta U / \Delta x = \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  — угол наклона потенциальной кривой к оси абсцисс (рис. 19.4). Собственно, точное значение силы получится лишь в пределе, когда перемещение  $\Delta x$  стремится к нулю:

$$F = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x}.$$

Однако нас здесь интересует только знак силы, это можно получить и без предельного перехода.

В случае, когда потенциальная энергия возрастает, потенциальная кривая образует с осью абсцисс острый угол. Тангенс острого угла — положительное число, а сила имеет противоположный знак, т. е. отрицательный; следовательно, она является силой притяжения.

Если же потенциальная энергия убывает, то потенциальная кривая образует с осью абсцисс тупой угол, тангенс которого является отрицательным числом. В этом случае сила положительна, т. е. является силой отталкивания.

\*) Во втором томе мы увидим, что квантовая механика вносит в этот вывод существенные поправки, связанные с особой природой микрочастиц и с соотношением неопределенностей.

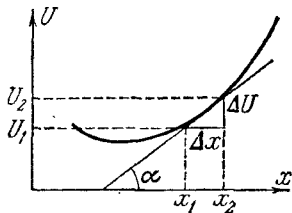


Рис. 19.4.



Наконец, в точках минимума или максимума энергии сила, очевидно, равна нулю, ибо в окрестностях этих точек она меняет знак. На графике касательная к потенциальной кривой в этих точках параллельна оси абсцисс (рис. 19.5).

Предлагаем читателю самостоятельно доказать, что в случае, изображенном на рис. 19.6, частица с полной энергией  $W < U_0$  будет либо находиться в потенциальной яме  $x_1 \leq x \leq x_2$ , либо удаляться в бесконечно удаленную точку; потенциальный же барьер  $x_2 \leq x \leq x_3$  эта частица не сможет преодолеть ни слева, ни справа.

3. Следует обратить внимание на одно весьма интересное свойство потенциальной энергии сил притяжения. Если расстояние между притягивающимися частицами убывает, то убывает и потенциальная энергия, а сила притяжения увеличивается. Наоборот, увеличение расстояния между притягивающимися частицами сопровождается ростом потенциальной энергии и уменьшением сил притяжения.

Это свойство является совершенно общим и пригодно для любых сил притяжения. Правда, его доказательство

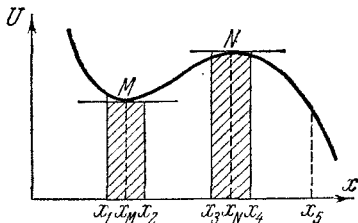


Рис. 19.5.

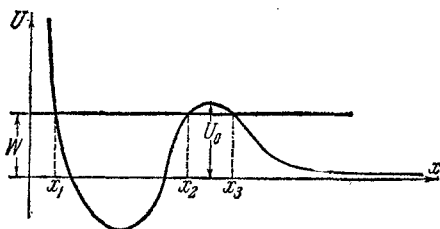


Рис. 19.6.

в общем виде несколько затруднительно, и мы здесь этим заниматься не будем. Проверить же его справедливость на примере кулоновских или гравитационных сил мы представим читателю.

Для этого целесообразно проанализировать потенциальную кривую гравитационного взаимодействия между двумя материальными точками, изображенную на рис. 19,7, и сравнить энергию и силу в точках с координатами  $r_1$  и  $r_2$ . При построении кривой мы полагали, что потенциальная энергия равна нулю при бесконечно большом расстоянии

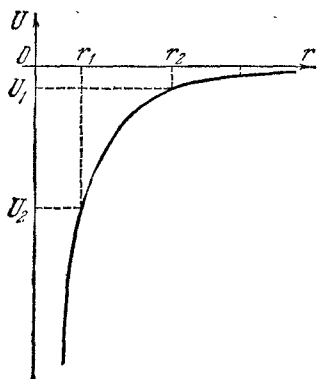


Рис. 19.7.

между взаимодействующими точками (см. (18.19)). Однако это не имеет принципиального значения — результат рассуждения совершенно не зависит от того, где выбран нулевой уровень потенциальной энергии.

### § 19.6. Потенциальная энергия и равновесие

1. Анализ потенциальных кривых позволяет судить об условиях равновесия некоторого тела (точнее — материальной точки).

Тело находится в равновесии, если равнодействующая всех сил, приложенных к нему, равна нулю. Очевидно, что равновесию соответствуют точки с минимальной или максимальной потенциальной энергией (точки  $M$  и  $N$  на рис. 19.5), ибо именно в этих точках сила обращается в нуль. Однако точки максимума или минимума энергии не равноценны.

Действительно, пусть частица находится в точке  $x_M$ , где потенциальная энергия минимальна. На участке  $x_1 \leq x < x_M$  потенциальная энергия убывает; следовательно, на частицу действует положительная сила отталкивания, возвращающая ее в точку  $M$ . На участке  $x_M < x \leq x_2$  потенциальная энергия возрастает; следовательно, на частицу действует отрицательная сила притяжения, вновь возвращающая ее в точку  $M$ .

Итак, если частицу, находящуюся в точке с минимальным значением потенциальной энергии, вывести из этого состояния, то под действием сил она будет возвращаться в эту точку. Мы приходим к выводу, что условием устойчи-

вого равновесия является минимальное значение потенциальной энергии.

Проведя аналогичные рассуждения для точки  $N$ , где частица обладает максимальным значением потенциальной энергии, читатель легко убедится, что здесь силы, действующие в ее ближайшей окрестности, не будут возвращать частицу в эту точку. Таким образом, *максимум потенциальной энергии характеризует состояние неустойчивого равновесия*.

2. При анализе условий равновесия мы рассматривали только *ближайшую окрестность* интересующей нас точки поля. Под ней следует понимать такую область, где нет дополнительных максимумов или минимумов энергии. Если не обратить внимания на это условие, то можно прийти к неверным выводам.

Так, анализируя силы, действующие на частицу, смещенную вправо от положения устойчивого равновесия ( $x_2 > x_M$ ), мы утверждали, что это будут силы притяжения. Но это верно лишь до тех пор, пока частица остается левее максимума энергии. Если же переместить частицу дальше вправо, например в точку  $x_5 > x_N$  (см. рис. 19.5), то мы уже получим силу отталкивания, и частица не вернется в прежнее положение.

## Г Л А В А 20

### ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ

#### § 20.1. Внутренняя энергия системы частиц

1. В гл. 16 было показано, что полную энергию тела можно представить в виде суммы кинетической энергии и энергии покоя. Кинетическая энергия тела зависит от скорости его движения относительно избранной системы отсчета, т. е. относительно внешних тел.

Энергия покоя тела зависит от процессов, происходящих внутри этого тела, и поэтому энергия покоя иначе называется *внутренней энергией*.

2. Пусть тело с массой покоя  $M_0$  состоит из  $N$  частиц, массы покоя которых  $m_0^{(1)}, m_0^{(2)}, \dots, m_0^{(N)}$ . Далее, пусть эти частицы движутся с произвольными скоростями  $v_1, v_2, \dots, v_N$ ,

но так, что при этом их центр масс остается неподвижным в данной системе отсчета, т. е.  $m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \dots + m_N\mathbf{v}_N = 0$ .

Наконец, предположим, что эти частицы находятся друг от друга на значительных расстояниях, так что взаимодействием между ними можно в первом приближении пренебречь.

На первый взгляд может показаться, что энергия покоя тела просто равна сумме энергий покоя частиц, из которых оно состоит. Но это неверно. Действительно, хотя тело и покоится относительно системы отсчета, частицы, из которых оно состоит, определенным образом движутся. Поэтому *внутренняя энергия тела* (т. е. его энергия покоя) *равна сумме полных энергий частиц*, из которых это тело состоит:

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}^{(1)} + \mathcal{E}^{(2)} + \dots + \mathcal{E}^{(N)}. \quad (20.1)$$

Учитывая, что, согласно (16.3),  $\mathcal{E}^{(i)} = \mathcal{E}_0^{(i)} + K^{(i)}$ , где  $i$  — номер частицы, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= \mathcal{E}_0^{(1)} + \mathcal{E}_0^{(2)} + \dots + \mathcal{E}_0^{(N)} + K^{(1)} + K^{(2)} + \dots + K^{(N)} = \\ &= \mathcal{E}_0^{(1)} + \mathcal{E}_0^{(2)} + \dots + \mathcal{E}_0^{(N)} + K_{\text{внутр}}, \end{aligned} \quad (20.2)$$

где  $K_{\text{внутр}} = K^{(1)} + K^{(2)} + \dots + K^{(N)}$  — суммарная кинетическая энергия внутреннего движения частиц, из которых состоит тело.

3. Выше мы рассмотрели систему невзаимодействующих частиц. На самом же деле во всех телах (за исключением разреженных газов) частицы довольно сильно взаимодействуют друг с другом. Обычно эти силы являются силами притяжения. Потенциальная энергия сил притяжения является *отрицательной* величиной, поскольку при отсутствии сил взаимодействия мы считали потенциальную энергию равной нулю (см. § 18.6).

Обозначим через  $U_{\text{внутр}}$  суммарную потенциальную энергию взаимодействия частиц. Фактически  $U_{\text{внутр}}$  представляет собой энергию полей, с помощью которых осуществляется взаимодействие между частицами внутри тела. Тогда, обобщая формулу (20.2) на случай взаимодействующих частиц, получим

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0^{(1)} + \mathcal{E}_0^{(2)} + \dots + \mathcal{E}_0^{(N)} + K_{\text{внутр}} + U_{\text{внутр}}. \quad (20.3)$$

Итак, *внутренняя энергия тела равна сумме энергий покоя частиц, из которых тело состоит, плюс суммарная кинетическая энергия этих частиц и потенциальная энергия полей, осуществляющих взаимодействие между частицами.*

4. Разделив (20.3) на  $c^2$  и учитывая, что  $\mathcal{E}_0/c^2 = M_0$  есть масса покоя тела, а  $\mathcal{E}_0^{(i)}/c^2 = m_0^{(i)}$  — масса покоя некоторой частицы с номером  $i$ , получим

$$M_0 = m_0^{(1)} + m_0^{(2)} + \dots + m_0^{(N)} + \frac{K_{\text{внутр}} + U_{\text{внутр}}}{c^2}. \quad (20.4)$$

Таким образом, оказывается, что в общем случае *масса покоя тела не равна сумме масс покоя частиц, из которых это тело состоит.*

В частности, при наличии больших сил притяжения абсолютная величина потенциальной энергии полей может оказаться значительно больше суммарной кинетической энергии внутреннего движения. А так как потенциальная энергия сил притяжения есть число отрицательное, то может оказаться, что  $K_{\text{внутр}} + U_{\text{внутр}} < 0$ . Следовательно, в этом случае масса покоя тела будет меньше суммы масс покоя частиц, из которых состоит это тело.

С этим явлением мы встретимся во втором томе при изучении ядерных сил и методов получения энергии ядра.

## § 20.2. Изменение внутренней энергии при деформации тела

1. Тело под действием силы деформируется, т. е. меняет свои размеры и форму. Деформация тела связана с изменением расстояния между молекулами и, тем самым, с изменением энергии молекулярного взаимодействия. Следовательно, *деформация тела сопровождается изменением его внутренней энергии.*

Поскольку внутренняя энергия тела меняется, то изменяется и его масса. Почему же мы этого не замечаем? Ответить на этот вопрос позволит следующий пример.

Стальной стержень длиной  $l = 1$  м и сечением  $S = 1$  см<sup>2</sup> под действием силы  $F = 2 \cdot 10^4$  н удлиняется на  $\Delta l = 1$  мм. Работа упругой силы

$$A = \frac{kx^2}{2} = \frac{F \Delta l}{2} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 10^{-3}}{2} = 10 \text{ Дж.}$$

Она равна изменению внутренней энергии стержня:  
 $A = \Delta \mathcal{E}_0$ . Изменение его массы

$$\Delta m = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{c^2} = \frac{10}{9 \cdot 10^{16}} = 1,1 \cdot 10^{-16} \text{ кг.}$$

Масса же стержня до деформации

$$m = \rho l S = 7,8 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-4} = 0,78 \text{ кг.}$$

Как видно из расчета, изменение массы тела ничтожно мало — оно скажется только в шестнадцатом знаке после запятой! Не существует приборов, которые были бы в состоянии обнаружить такую малую величину. Поэтому на практике изменениями массы тела при его деформациях пренебрегают.

2. Рассчитаем, на сколько изменится энергия одной молекулы при деформации тела. Один килограмм стали содержит  $10^{25}$  молекул. Наш стержень массой 0,78 кг состоит из  $N = 0,78 \cdot 10^{25}$  молекул. Тогда изменение энергии одной молекулы

$$\varepsilon = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{N} = \frac{10}{0,78 \cdot 10^{25}} = 1,3 \cdot 10^{-24} \text{ Дж.}$$

Удобнее эту энергию выразить в электрон-вольтах. Как уже указывалось,  $1 \text{ эв} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ , следовательно,

$$\varepsilon = \frac{1,3 \cdot 10^{-24}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 10^{-5} \text{ эв.}$$

Итак, изменение энергии молекулы при деформациях тела составляет по порядку несколько миллионных долей электрон-вольта. Ниже мы сравним эту величину с изменением энергии молекулы при иных процессах.

### § 20.3. Изменение внутренней энергии тела при тепловых процессах

1. Тепловыми называются процессы, связанные с изменением температуры тела, а также с изменениями его агрегатного состояния — плавлением или затвердеванием, испарением или конденсацией. Подробно эти процессы будут рассмотрены ниже, здесь же мы ограничимся лишь общей характеристикой этих процессов с точки зрения изменения внутренней энергии.

Изменение температуры тела связано с изменением кинетической энергии движения его молекул. Однако следует подчеркнуть, что одновременно меняется и потенциальная энергия их взаимодействия (за исключением случая разреженного газа). Действительно, изменение температуры сопровождается изменением расстояния между положениями равновесия в узлах кристаллической решетки тела, что мы регистрируем как тепловое расширение тел. Естественно, что при этом изменяется энергия взаимодействия молекул. Изменение же агрегатного состояния является результатом изменения молекулярной структуры тела, что вызывает изменение как энергии взаимодействия молекул, так и характера их движения.

Итак, *тепловые процессы сопровождаются изменением внутренней энергии тела.*

2. Оценим, на сколько меняется энергия молекулы при тепловых процессах. Известно, что при изменении температуры 1 кг воды на  $1^\circ\text{C}$  поглощается энергия, равная  $1 \text{ ккал} = 4,18 \cdot 10^3 \text{ Дж}$ . Один килограмм воды состоит из  $3,3 \cdot 10^{25}$  молекул. Следовательно,

$$\varepsilon = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{N} = \frac{4,18 \cdot 10^3}{3,3 \cdot 10^{25} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 10^{-3} \text{ эв.}$$

Эта энергия примерно в 100 раз больше энергии при упругих деформациях. При превращении же 1 кг воды в пар поглощается  $539 \text{ ккал} = 2,25 \cdot 10^6 \text{ Дж}$ . Энергия молекулы при этом увеличится примерно на 0,5 эв:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{N} = \frac{2,25 \cdot 10^6}{3,3 \cdot 10^{25} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 0,5 \text{ эв.}$$

3. Несмотря на то, что при тепловых процессах внутренняя энергия возрастает в тысячи раз больше, чем при упругих деформациях, изменение массы тела и при этих процессах измерить невозможно. Действительно, если при испарении 1 кг воды его энергия возрастает на  $2,25 \cdot 10^6 \text{ Дж}$ , масса увеличится на величину

$$\Delta m = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{c^2} = \frac{2,25 \cdot 10^6}{9 \cdot 10^{16}} = 2,5 \cdot 10^{-10} \text{ кг,}$$

что лежит далеко за пределами чувствительности измерительной аппаратуры.

## § 20.4. Изменение внутренней энергии при химических реакциях

1. Химические реакции представляют собой процессы перестройки молекул, их распада на более простые части или, наоборот, возникновение более сложных молекул из более простых или из отдельных атомов (реакции анализа и синтеза). При этом существенно изменяются силы взаимодействия между атомами, что сопровождается соответствующим изменением энергии взаимодействия. Кроме того, меняется характер как движения молекул, так и взаимодействия между ними, ибо молекулы вновь возникшего вещества взаимодействуют между собой иначе, чем молекулы исходных веществ.

Итак, *химические реакции сопровождаются изменением внутренней энергии тела.*

Заметим, что химические реакции всегда сопровождаются тепловыми процессами — изменением температуры, а часто и агрегатного состояния системы. Так, твердый углерод при сгорании образует газообразные продукты: окись углерода (угарный газ) и двуокись углерода (углекислый газ).

2. Оценим изменение энергии молекулы при химических реакциях. При сгорании 1 кг угля выделяется энергия примерно  $7000 \text{ ккал} = 3 \cdot 10^7 \text{ дж}$ . Поскольку 1 кг угля состоит из  $5 \cdot 10^{25}$  атомов углерода, то изменение энергии одной молекулы составит

$$\varepsilon = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{N} = \frac{3 \cdot 10^7}{5 \cdot 10^{25} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 4 \text{ эв.}$$

Следовательно, при химических реакциях изменение энергии молекулы составляет несколько электрон-вольт — в сотни и тысячи раз больше, чем при тепловых процессах, и в миллионы раз больше, чем при упругих деформациях.

3. Однако и здесь изменение массы взаимодействующих тел столь мало, что оно лежит за пределами точности измерительных приборов: оно скажется лишь в десятой значащей цифре, а с такой точностью массу измерять мы не умеем. Действительно, при сгорании 1 кг угля

$$\Delta m = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{c^2} = \frac{3 \cdot 10^7}{9 \cdot 10^{16}} = 3,3 \cdot 10^{-10} \text{ кг.}$$



### § 20.5. Изменение внутренней энергии при ядерных реакциях

1. При некоторых условиях, которые будут рассмотрены во втором томе, ядра атомов испытывают превращения, которые называются *ядерными реакциями*. Независимо от механизма процессов, происходящих при этом (а они могут быть весьма различными), все они связаны со значительным изменением энергии взаимодействующих частиц. Следовательно, *ядерные реакции сопровождаются изменением внутренней энергии тела*, в состав которого входят ядра, испытывающие соответствующие превращения.

Изменение массы тела при ядерных реакциях настолько велико, что его могут обнаружить достаточно чувствительные измерительные приборы.

2. Оказывается, если 1 кг тяжелого водорода (дейтерия) превратится в гелий, то в результате этой реакции получится всего 993,75 г гелия, т. е. масса покоя уменьшится на  $\Delta m_0 = 6,25$  г. А такое изменение массы (на 0,6%) уже вполне может быть измерено чувствительными приборами.

Изменение внутренней энергии при этой реакции составит

$$\Delta \mathcal{E}_0 = \Delta m_0 c^2 = 6,25 \cdot 10^{-3} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 5,62 \cdot 10^{14} \text{ дж.}$$

Для сопоставления вычислим, сколько угля нужно сжечь для получения такой же энергии:

$$m_{\text{угля}} = \frac{5,62 \cdot 10^{14}}{3 \cdot 10^7} \approx 2 \cdot 10^7 \text{ кг}$$

(здесь  $3 \cdot 10^7$  дж — энергия, выделяющаяся при сгорании 1 кг угля). Учитывая, что вагон вмещает около 50 т угля, мы получим, что 1 кг дейтерия при превращении в гелий выделит столько же энергии, сколько выделяется при сгорании 400 вагонов угля.

3. Оценим изменение энергии одного ядра при такого рода реакции. Один килограмм гелия состоит из  $1,5 \cdot 10^{26}$  атомов, следовательно,

$$\varepsilon = \frac{\Delta \mathcal{E}_0}{N} = \frac{5,62 \cdot 10^{14}}{1,5 \cdot 10^{26} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 2,34 \cdot 10^7 \text{ эв} = 23,4 \text{ Мэв.}$$

Эта энергия в миллионы раз больше энергии химических реакций и в миллиарды раз больше энергии тепловых процессов.

Заметим, что эти цифры характеризуют и порядок ядерных сил по сравнению с силами взаимодействия между атомами и между молекулами.

## ГЛАВА 21

### ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

#### § 21.1. Работа как мера изменения полной и внутренней энергии

1. В § 20.2 мы выяснили, что при деформациях тела меняются расстояния между частицами, из которых оно состоит. А это приводит к изменению внутренней энергии тела.

Кроме того, при неупругих деформациях меняется температура тела, в чем легко убедиться на опыте. Если несколько раз быстро перегнуть кусок проволоки, то в месте изгиба температура резко возрастет; это можно почувствовать, притронувшись к месту изгиба пальцем.

Но при деформации тела совершается работа. Эта работа и является мерой изменения внутренней энергии.

2. Внутренняя энергия тела меняется также при его неупругом соударении с другим телом. При этом, как было показано (см. § 17.2), кинетическая энергия соударяющихся тел уменьшается. Но отсюда вовсе не следует, что кинетическая энергия исчезает бесследно. Нетрудно убедиться, что она превращается во внутреннюю энергию тела.

Проведем следующий опыт. Положим кусок проволоки на наковальню и сильно ударим по ней несколько раз молотком. Если затем дотронуться до этого участка проволоки, то можно убедиться в значительном повышении температуры.

Как мы видим, при неупругом ударе кинетическая энергия тел превращается во внутреннюю. Но мерой изменения кинетической энергии является работа силы. Естественно, что работа этой же силы может служить и мерой изменения внутренней энергии.

3. Наконец, изменение внутренней энергии тела происходит под действием силы трения, поскольку, как известно из опыта, трение всегда сопровождается изменением температуры трущихся тел. Естественно, что работа силы трения может служить мерой изменения внутренней энергии.

4. Приведенные примеры позволяют установить более общую связь между работой силы и изменением энергии, чем это было сделано в гл. 16.

Пусть полная энергия тела в некотором состоянии равна  $\mathcal{E}^{(1)} = \mathcal{E}_0^{(1)} + K^{(1)}$ . Если на тело подействует некоторая внешняя сила, то состояние этого тела изменится; соответственно изменится и его полная энергия; она станет равна  $\mathcal{E}^{(2)} = \mathcal{E}_0^{(2)} + K^{(2)}$ . Изменение энергии  $\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)} = (\mathcal{E}_0^{(2)} - \mathcal{E}_0^{(1)}) + (K^{(2)} - K^{(1)})$  или, короче,

$$\Delta\mathcal{E} = \Delta\mathcal{E}_0 + \Delta K. \quad (21.1)$$

Но мы уже знаем, что работа внешней силы может изменить как кинетическую, так и внутреннюю энергию тела, т. е. его полную энергию. Поэтому можно написать

$$\Delta\mathcal{E} = A_{\text{внешн}}, \quad (21.2)$$

т. е. *работа внешней силы есть мера изменения полной энергии тела.*

## § 21.2. Теплообмен

1. Существует еще один способ изменения энергии тела, не связанный с работой сил. Если тело поместить в пламя горелки, то его температура изменится, следовательно, изменится и его внутренняя энергия. Поместив затем нагретое тело в холодную воду, мы убедимся, что его температура вновь изменится, что опять связано с изменением его энергии. Однако никакая работа здесь не совершалась, ибо не происходило видимого перемещения ни самого тела, ни отдельных его частей под действием каких-либо сил.

Фактически здесь изменение внутренней энергии тела происходит под действием молекулярных соударений. У нагретого тела молекулы движутся с большими скоростями, у холодного — с малыми. При контакте этих тел происходят упругие соударения между молекулами. Быстро движущаяся частица, столкнувшись с другой частицей, имеющей меньшую скорость, передает ей часть своей кинетической

энергии. Естественно, что при контакте двух тел с разной температурой за счет соударений между молекулами суммарная кинетическая энергия молекул горячего тела уменьшится, суммарная же кинетическая энергия молекул холодного тела возрастет. Следствием этого и является передача энергии от горячего тела к холодному без совершения работы.

*Процесс передачи энергии от одного тела к другому без совершения работы называется теплообменом.*

2. Рассмотренный процесс теплообмена между телами, находящимися в непосредственном контакте, называется *теплопроводностью* или *кондуктивным теплообменом*.

Теплообмен может совершаться и за счет конвекции. Слои жидкости или газа, прикасаясь к телу с высокой температурой, нагреваются и всплывают вверх, а на их место поступают более холодные. Теплообмен, происходящий с помощью струй жидкости или газа, называется *конвективным теплообменом*.

3. Наконец, теплообмен может осуществляться с помощью как видимых, так и невидимых лучей. Убедиться в этом можно с помощью следующего опыта. Укрепим в штативе нагретое тело, например утюг. Поднесем снизу руку на расстояние 15—20 см. Мы почувствуем, что утюг передает руке энергию. Этот процесс не является конвекцией, ибо струи нагретого воздуха поднимаются вверх и руки не достигают. Это не может быть и теплопроводность, ибо она у всех газов, в частности у воздуха, очень мала. Во втором томе будет подробно рассмотрен механизм излучения электромагнитных волн нагретыми телами. Будет показано, что всякое тело излучает инфракрасные лучи, а при температурах свыше  $800^{\circ}\text{C}$  — и видимый свет.

Процесс передачи энергии с помощью электромагнитных волн (инфракрасного и видимого излучения) называется *теплообменом с помощью излучения*.

4. В описанном опыте с нагретым утюгом мы действительно имеем дело с такого рода теплообменом. В самом деле, поместив между рукой и утюгом лист жести, мы почувствуем, что нагрев руки прекратился. Причина заключается в том, что металл частично отражает, а частично поглощает излучение, и оно уже до руки не доходит.

Наконец, отметим, что если для кондуктивного или конвективного теплообмена между двумя телами необходимо,

чтобы между ними обязательно было вещество, то теплообмен с помощью излучения происходит и в вакууме. Так, энергия, излучаемая Солнцем, поступает на Землю через космическое пространство, где царит глубокий вакуум.

### § 21.3. Количество теплоты

1. Мерой изменения энергии тела при механических процессах является работа, совершаемая внешними силами (см. (21.2)). Введем физическую величину, характеризующую изменение энергии тела при теплообмене. Эта величина называется *количеством теплоты* и обозначается  $Q$ .

*Количеством теплоты называется энергия, переданная путем теплообмена.*

Из этого определения следует, что в случае, если энергия тела меняется только путем теплообмена, то

$$Q = \Delta \mathcal{E}, \quad (21.3)$$

т. е. *количество теплоты есть мера изменения энергии тела при теплообмене.*

2. В Международной системе единиц измерения количества теплоты, как и работы и энергии, служит джоуль (см. § 16.6):

$$[Q] = [\mathcal{E}] = [A] = \text{дж.}$$

На практике иногда применяется внесистемная единица измерения количества теплоты — *калория*. По определению

$$1 \text{ кал} = 4,1868 \text{ дж.}$$

3. Напомним читателю известные из курса восьмилетней школы выражения, с помощью которых можно рассчитать количество теплоты:

а) При изменении температуры тела

$$Q = mc \Delta t, \quad (21.4)$$

где  $m$  — масса тела,  $\Delta t$  — изменение температуры,  $c$  — удельная теплоемкость вещества.

б) При плавлении кристалла (при кристаллизации расплава)

$$Q = m\lambda, \quad (21.5)$$

где  $\lambda$  — удельная теплота плавления.

в) При испарении жидкости (или конденсации пара)

$$Q = mL, \quad (21.6)$$

где  $L$  — удельная теплота парообразования.

г) При химической реакции

$$Q = mq, \quad (21.7)$$

где  $q$  — удельная теплота реакции. Так, количество теплоты, выделяющееся при сгорании 1 кг топлива, называется удельной теплотворной способностью (удельной теплотой сгорания).

4. Следует обратить внимание на то, что термин «нагревание» применяется в обиходе в двух смыслах: как передача энергии в форме теплоты (при теплообмене) и как изменение температуры. Между тем оба эти процесса неравнозначны. Температуру тела можно изменить, не передавая ему теплоты. При неупругом ударе, при неупругой деформации, при трении и т. п. температура тела изменяется за счет работы, а не за счет теплообмена. Наоборот, при таких процессах, как плавление или кипение, температура тела не меняется, хотя энергия в форме теплоты к нему подводится. Поэтому при точном описании явлений следует избегать двусмысленного термина «нагревание», нужно точно указывать, в чем сущность рассматриваемого процесса — в изменении температуры или в передаче энергии путем теплообмена.

## § 21.4. Первое начало термодинамики

Наука, изучающая условия превращения энергии из одного вида в другой и характеризующая эти превращения с количественной стороны, называется *термодинамикой*.

Выше было показано (формулы (21.2) и (21.3)), что энергия тела может изменяться либо за счет действия внешних сил, либо за счет теплообмена с окружающей средой. Возможен и такой случай, когда энергия тела изменяется за счет обеих этих причин. Тогда изменение энергии системы равно сумме работы внешних сил и количества теплоты, полученного от окружающих тел:

$$\Delta \mathcal{E} = A_{\text{внешн}} + Q. \quad (21.8)$$

2. Работа, совершаемая системой против внешних сил, отличается от работы внешних сил только знаком:  $A = -A_{\text{внешн}}$ . Тогда выражению (21.8) можно придать вид

$$\Delta \mathcal{E} = -A + Q,$$

или

$$Q = \Delta \mathcal{E} + A, \quad (21.9)$$

т. е. количество теплоты (энергия, полученная системой путем теплообмена) расходуется на изменение энергии системы и на работу против внешних сил.

3. Полученное выражение называется *первым началом термодинамики*. Оно имеет чрезвычайно общий смысл и может применяться для описания самого широкого круга явлений. В дальнейшем мы используем этот закон для описания ряда тепловых и иных процессов.

В последующих параграфах данной главы мы выясним связь между первым началом термодинамики и одним из важнейших законов природы — законом сохранения энергии.

## § 21.5. Адиабатически изолированная система

1. *Замкнутой* является система тел, в которой можно пренебречь действием внешних сил по сравнению с внутренними (см. § 15.1). Из этого определения следует, что в замкнутой системе работа внешних сил равна нулю.

*Адиабатически изолированной* называется система, которая не вступает в теплообмен с окружающей средой. Согласно этому определению количество теплоты, получаемое адиабатически изолированной системой, равно нулю.

2. Понятие адиабатически изолированной системы является идеализацией некоторых реальных систем. Конечно, полностью отключить систему от теплообмена невозможно, но существует возможность приблизить процессы, происходящие в данной системе, к адиабатным.

Прежде всего, теплообмен происходит обычно достаточно медленно, значительно медленнее, чем передача энергии с помощью других процессов. Поэтому любой быстрый про-

цесс типа взрыва, удара, вспышки и т. п. может с хорошей степенью точности рассматриваться как адиабатный.

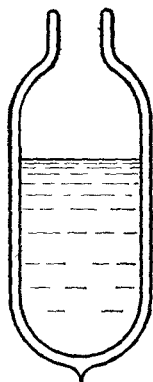


Рис. 21.1.

С другой стороны, систему можно приблизить к адиабатной, затруднив теплообмен с окружающей средой, т. е. создав надежную теплоизоляцию. Хорошим примером адиабатной оболочки является сосуд Дьюара, который служит основной частью термоса (рис. 21.1). Это тонкостенный стеклянный сосуд с двойными стенками, между которыми создан хороший вакуум. Вакуум препятствует кондуктивному теплообмену и конвекции. Внутренняя стенка сосуда посеребрена. Получившаяся в результате этого зеркальная поверхность хорошо отражает лучи, препятствуя лучистому теплообмену.

Систему, находящуюся в оболочке типа сосуда Дьюара, можно с хорошей степенью точности считать адиабатически изолированной.

## § 21.6. Закон сохранения энергии

1. Рассмотрим некую систему тел, которая не взаимодействует с окружающими ее телами механическим путем (система замкнута) и не вступает с внешними телами в теплообмен (система адиабатически изолирована). Из условия замкнутости следует, что система не совершает работы против внешних сил, т. е.  $A=0$ . Из условия адиабатической изоляции вытекает, что система не получает и не отдает энергию путем теплообмена, т. е.  $Q=0$ .

Из первого начала термодинамики (21.9) получим, что в этом случае полная энергия системы не меняется:  $\Delta \mathcal{E}=0$  и потому  $\mathcal{E}=\text{const}$ .

Итак, *полная энергия замкнутой и адиабатически изолированной системы является постоянной величиной. Это и есть наиболее общая формулировка закона сохранения энергии.*

2. Закон сохранения энергии в ньютоновской механике (см. § 19.1) является частным случаем полученного здесь закона. Действительно, в гл. 19 мы рассматривали только консервативные системы, а в этих системах отсутствует теп-



лообмен и для сохранения энергии необходимо только одно условие — замкнутость системы.

3. Закон сохранения энергии вовсе не требует, чтобы энергия каждого из тел, входящих в данную систему, оставалась неизменной. На самом деле между телами может осуществляться как механическое взаимодействие, так и теплообмен, и потому энергия отдельных тел, входящих в данную систему, будет безусловно меняться. Для сохранения энергии системы необходимо, чтобы она не взаимодействовала с внешними телами и не участвовала в теплообмене. В этом случае полная энергия системы не будет меняться, хотя энергия ее составных частей меняется.

### § 21.7. Закон сохранения массы

1. Если полная энергия системы сохраняется, то сохраняется и пропорциональная ей релятивистская масса. Итак, из закона сохранения энергии можно вывести *закон сохранения массы*:

*Релятивистская масса замкнутой и адиабатически изолированной системы является постоянной величиной.*

Как мы видим, закон сохранения массы есть следствие закона сохранения энергии. Поэтому нередко говорят о едином законе сохранения энергии и массы.

Значительно сложнее обстоит дело с массой покоя (собственной массой системы).

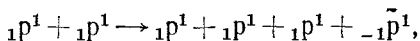
2. В ньютоновской механике рассматриваются тела, движущиеся с малыми скоростями. В этом случае масса тела фактически совпадает с его собственной массой; здесь изменения энергии тела за счет его движения, деформации, тепловых или химических процессов ничтожно малы по сравнению с энергией покоя (см. §§ 16.2, 20.2, 20.3, 20.4), так что можно последнюю считать постоянной величиной. Кроме того, в ньютоновской механике не рассматриваются случаи преобразования одних форм материи в другие; например, в рамках этой теории невозможны преобразования одних частиц вещества в другие, в электромагнитное поле и иные поля. Поэтому в ньютоновской механике масса рассматривается как величина, постоянная для данного тела (независимо от его энергии), а масса системы — как сумма масс тел, из которых она состоит. Естественно, что в нью-

тоновской механике справедлив закон сохранения массы, независимый от закона сохранения энергии. Опыт отлично подтверждает этот закон при тех процессах, которые рассматриваются в этой теории.

3. В теории относительности масса покоя системы не равна сумме масс покоя тел, из которых эта система состоит (см. § 20.1). Собственно, этого одного уже достаточно, чтобы утверждать, что в общем случае масса покоя не является сохраняющейся величиной.

Но кроме этого при больших кинетических энергиях возможно превращение одних частиц в другие, а также «рождение» и «исчезновение» частиц. Подробно этот вопрос будет рассмотрен во втором томе. Здесь же мы ограничимся одним примером.

4. Пусть быстрый протон, разогнанный в ускорителе до скорости, близкой к скорости света, ударяется о неподвижный протон. Оказывается, что если быстрый протон обладает достаточной кинетической энергией, то вместо двух частиц возникнут четыре: три протона и один антипротон. Реакция записывается так:



где  ${}_1p^1$  — протон, а  ${}_{-1}\bar{p}^1$  — антипротон (частица с массой, равной массе протона, но с противоположным знаком электрического заряда). Обозначим энергию покоя протона  $\mathcal{E}_0$ ; тогда энергия покоя системы до удара составляла  $2\mathcal{E}_0$ , после удара  $4\mathcal{E}_0$ . Итак, масса покоя здесь не сохраняется; кинетическая энергия превращается в энергию покоя.

Пользуясь законами сохранения энергии и импульса, определим минимальную кинетическую энергию протона, способного при ударе о неподвижную водородную мишень «родить» антипротон. Для простоты решения примем, что после удара все частицы движутся с одним и тем же импульсом  $p_1$ . Согласно закону сохранения импульса

$$p = 4p_1, \quad (21.10)$$

где  $p$  — импульс быстрого протона до удара о мишень. Используя связь (16.8) между энергией и импульсом, имеем

$$\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}_0^2 = p^2 c^2, \quad \mathcal{E}_1^2 - \mathcal{E}_0^2 = p_1^2 c^2, \quad (21.11)$$

где  $\mathcal{E}_0$  — энергия покоя протона,  $\mathcal{E}$  — энергия быстрого про-

тона до удара и  $\mathcal{E}_1$  — энергия протона или антипротона после удара. Исключив из (21.10) и (21.11) импульс  $p$ , получим

$$\mathcal{E}^2 - 16\mathcal{E}_1^2 + 15\mathcal{E}_0^2 = 0. \quad (21.12)$$

Из закона сохранения энергии следует, что полная энергия двух протонов до столкновения равна сумме полных энергий четырех частиц, возникших после столкновения:

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_0 = 4\mathcal{E}_1. \quad (21.13)$$

Подставив в (21.12) и проделав несложные выкладки, получим

$$\mathcal{E} = 7\mathcal{E}_0, \quad (21.14)$$

откуда следует, что кинетическая энергия быстрого протона до соударения

$$K = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = 6\mathcal{E}_0. \quad (21.15)$$

Существенно важно, что, из кинетической энергии  $K = 6\mathcal{E}_0$  только  $2\mathcal{E}_0$  превратилось в энергию покоя; остаток же  $4\mathcal{E}_0$  сохранил форму кинетической энергии продуктов реакции — трех протонов и одного антипротона.

5. Рекомендуем читателю произвести числовой расчет, учитывая, что масса покоя протона  $m_0 = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг. Вы убедитесь, что кинетическая энергия быстрого протона составит  $K \approx 6 \text{ Гэв} = 6 \cdot 10^9 \text{ эв}$ , а его скорость равна 99% от скорости света.

## Г Л А В А 22

### ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

#### § 22.1. Особенности вращательного движения

Вращающиеся тела часто встречаются на практике — это всевозможные маховики, валы, роторы генераторов и двигателей, винты, сверла, фрезы и т. п. Особенностью вращательного движения является то, что все точки тела движутся по концентрическим окружностям, центры которых расположены на оси вращения. Все эти точки движутся с *разными* линейными скоростями, а одинаковой для них является угловая скорость  $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta t}$  (см. § 4.7).

При изучении законов движения материальной точки мы ввели ряд динамических величин: импульс, сила, кинетическая энергия и т. п. Фактически мы пользовались этими величинами и для описания законов поступательного движения твердого тела. Если твердое тело движется поступательно, то все его точки движутся по одинаковым траекториям (см. § 1.1), а значит, и с одинаковой скоростью. Поэтому выражения для импульса или кинетической энергии имеют точно такой же вид, как и для материальной точки. В самом деле, импульс тела равен сумме импульсов отдельных частиц, из которых это тело состоит:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p} &= \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \dots + \boldsymbol{p}_n = m_1 \boldsymbol{v} + m_2 \boldsymbol{v} + \dots + m_n \boldsymbol{v} = \\ &= (m_1 + m_2 + \dots + m_n) \boldsymbol{v} = m \boldsymbol{v}, \end{aligned}$$

где  $m_1, m_2, \dots, m_n$  — массы отдельных частиц, а масса тела  $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ . Такой же результат получится и для кинетической энергии тела при его поступательном движении.

Если же твердое тело вращается, то приведенное рассуждение окажется непригодным, ибо скорости разных точек различны. Здесь нужно все динамические характеристики выразить через угловую скорость. Именно по этой причине мы вынуждены будем ввести в данном случае ряд новых физических величин — момент силы, момент инерции и момент импульса.

## § 22.2. Кинетическая энергия и момент инерции

1. Выведем выражение для кинетической энергии твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Задачу будем решать в приближении ньютоновской механики, т. е. при условии, что все точки движутся со скоростями, значительно меньшими скорости света в вакууме. Для упрощения задачи вначале рассмотрим систему, состоящую из двух материальных точек, а затем обобщим полученный результат на любое твердое тело.

2. Пусть две материальные точки с массами  $m_1$  и  $m_2$  расположены на расстоянии  $l$  друг от друга (рис. 22.1). Будем считать систему жесткой, т. е. расстояние между точками не меняется. Система вращается вокруг оси с угловой ско-

ростью  $\omega$ . Тогда, согласно (4.12), скорость первой точки  $v_1 = r_1\omega$ , скорость второй  $v_2 = r_2\omega$ , где  $r_1$  и  $r_2$  — расстояния от материальных точек до оси вращения. Кинетические энергии материальных точек, согласно (16.5),

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2, \\ K_2 &= \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2. \end{aligned} \right\} \quad (22.1)$$

Кинетическая энергия системы равна сумме кинетических энергий материальных точек, из которых эта система состоит:

$$K = K_1 + K_2 = \frac{\omega^2}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2). \quad (22.2)$$

### 3. Физическая величина

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 \quad (22.3)$$

называется *моментом инерции* системы материальных точек. Он характеризует распределение масс этих частиц относительно оси вращения.

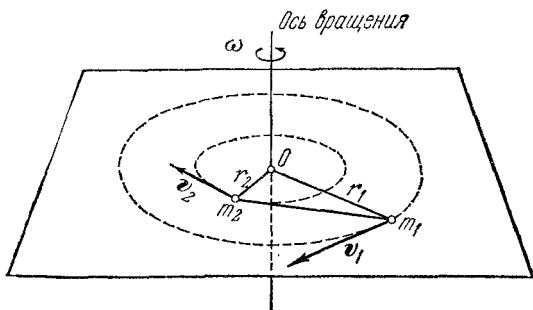


Рис. 22.1.

Единицей измерения момента инерции в системе СИ служит килограмм на метр в квадрате ( $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ ).

Подставив в (22.2), получим

$$K = \frac{J \omega^2}{2}. \quad (22.4)$$

Итак, *кинетическая энергия системы материальных точек равна половине произведения момента инерции этой системы на квадрат угловой скорости вращения.*

4. Если система состоит не из двух, а из  $n$  материальных точек, то выражение для ее кинетической энергии сохранится, но момент инерции примет вид

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2. \quad (22.5)$$

Твердое тело можно разбить на достаточно большое число частиц с массами  $\Delta m_1, \Delta m_2, \dots, \Delta m_n$  таким образом, чтобы каждую из них можно было считать материальной точкой. Тогда момент инерции этого тела

$$J = \Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \dots + \Delta m_n r_n^2. \quad (22.6)$$

Вообще говоря, результат будет зависеть от способа разбиения тела на частицы и от положения оси вращения. Только перейдя к пределу при неограниченном увеличении числа разбиений, мы получим точный результат. Вычисление моментов инерции твердого тела представляет собой довольно сложную математическую задачу, и мы ее здесь решать не будем.

### § 22.3. Зависимость момента инерции от положения оси вращения

1. Момент инерции тела зависит не только от его массы, но и от положения оси вращения. Это непосредственно следует из выражения (22.5). Действительно, если перенести ось вращения в другую точку, то массы  $m_1, m_2, \dots, m_n$  не изменятся, а радиусы  $r_1, r_2, \dots, r_n$  станут другими, в результате чего и момент инерции окажется иным.

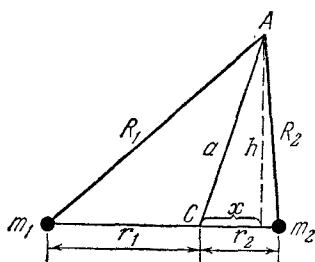


Рис. 22.2.

Вычислим моменты инерции системы из двух материальных точек относительно двух осей, параллельных друг другу и перпендикулярных плоскости чертежа (рис. 22.2). Расстояние между осями  $AC = a$ .

Момент инерции системы относительно оси, проходящей через точку  $A$ :

$$J = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2. \quad (22.7)$$

Момент инерции той же системы относительно оси, проходящей через центр масс  $C$ :

$$J_0 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2. \quad (22.8)$$

По теореме Пифагора

$$R_1^2 = h^2 + (r_1 + x)^2, \quad R_2^2 = h^2 + (r_2 - x)^2.$$

Подставив в (22.7) и проделав несложные преобразования, получим с учетом (22.8)

$$J = J_0 + (m_1 + m_2)(h^2 + x^2) + 2x(m_1 r_1 - m_2 r_2).$$

Но  $h^2 + x^2 = a^2$ ; из определения понятия «центр масс» (см. § 15.7) следует, что  $m_1 r_1 - m_2 r_2 = 0$ . Наконец, для нерелятивистских скоростей  $m_1 + m_2 = m$  есть масса системы. Следовательно,

$$J = J_0 + ma^2. \quad (22.9)$$

Итак, момент инерции системы материальных точек относительно произвольной оси равен моменту инерции этой системы относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, плюс произведение массы системы на квадрат расстояния между осями (*теорема Штейнера*).

Поскольку  $ma^2$  — положительное число, то из теоремы Штейнера следует, что минимальное значение имеет момент инерции системы относительно оси, проходящей через ее центр масс.

2. Воспользуемся теоремой Штейнера для вычисления момента инерции однородного стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец (рис. 22.3). Пусть масса стержня  $m$ , его длина  $l$ . Момент инерции пропорционален массе и квадрату линейных размеров:

$$J = \theta ml^2, \quad (22.10)$$

где  $\theta$  — коэффициент пропорциональности (отвлеченное число).

Вычислим момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс. С одной стороны, мы можем считать стержень состоящим из двух равных кусков с массами

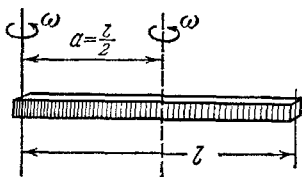


Рис. 22.3.

$m_1 = m/2$  и длинами  $l_1 = l/2$ . Учитывая, что момент инерции всего стержня равен сумме моментов инерции обеих половин, получим, согласно (22.10),

$$J_0 = 2\theta m_1 l_1^2 = 2\theta \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{l^2}{4} = \frac{\theta}{4} ml^2.$$

С другой стороны, согласно теореме Штейнера

$$J_0 = J - ma^2 = \theta ml^2 - m \left(\frac{l}{2}\right)^2 = ml^2 \left(\theta - \frac{1}{4}\right).$$

Сравнив равенства, получим

$$\frac{\theta}{4} = \theta - \frac{1}{4}, \quad \text{откуда} \quad \theta = \frac{1}{3}.$$

Итак, момент инерции однородного стержня относительно оси, проходящей через его конец перпендикулярно стержню,

$$J = \frac{ml^2}{3}. \quad (22.11)$$

Момент инерции того же стержня относительно оси, проходящей через центр масс,

$$J_0 = \frac{ml^2}{12}. \quad (22.12)$$

## § 22.4. Момент силы

1. Пусть на тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, действует некоторая сила  $F$  (рис. 22.4). Вычислим работу, которую совершает эта сила при повороте тела на угол  $\Delta\alpha$ . Элементарная работа, согласно определению (16.12), равна

$$\Delta A = F_t \Delta l.$$

Но  $F_t = F \sin \gamma$ , где  $\gamma$  — угол между направлением силы и направлением радиуса, проведенного от оси вращения до точки приложения силы. Дуга же  $\Delta l = r \Delta\alpha$ . Следовательно,

$$\Delta A = Fr \sin \gamma \cdot \Delta\alpha. \quad (22.13)$$

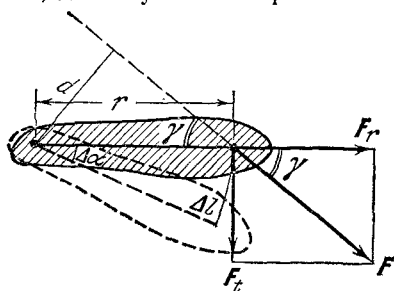


Рис. 22.4.

приложения силы. Дуга же  $\Delta l = r \Delta\alpha$ . Следовательно,



## 2. Величину

$$M = Fr \sin \gamma = Fd \quad (22.14)$$

назовем *моментом силы* относительно оси вращения. Кратчайшее расстояние от оси вращения до направления силы  $d = r \sin \gamma$  назовем *плечом силы*.

*Моментом силы относительно некоторой оси называется произведение силы на ее плечо.*

Единица измерения момента силы в Международной системе единиц — *ньютон на метр* ( $\text{н} \cdot \text{м}$ ).

3. Подставив (22.14) в выражение для элементарной работы (22.13), получим

$$\Delta A = M \Delta \alpha, \quad (22.15)$$

т. е. *работа, совершаемая при повороте тела, равна произведению момента силы на угол поворота.*

4. Чтобы вычислить мощность, следует выражение (22.15) разделить на промежуток времени  $\Delta t$ . Учитывая, что  $\Delta A / \Delta t = N_{\text{ср}}$  есть средняя мощность, а  $\Delta \alpha / \Delta t = \omega_{\text{ср}}$  — средняя угловая скорость, получим

$$N_{\text{ср}} = M \omega_{\text{ср}},$$

или, перейдя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим для мгновенной мощности

$$N = M \omega. \quad (22.16)$$

*Мгновенная мощность равна произведению момента силы на угловую скорость вращения.*

## § 22.5. Условие равновесия тела, имеющего ось вращения

1. В § 19.6 мы вывели условие равновесия для свободного тела, которое может перемещаться в любых направлениях. В этом случае равновесие достигается, если векторная сумма всех сил (их равнодействующая) равна нулю. Рассмотрим, при каком условии находится в равновесии тело, которое может вращаться вокруг некоторой заданной оси.

Будем считать положительными моменты, вращающие тело против часовой стрелки, и отрицательными — моменты, вращающие его по часовой стрелке. Так, на рис. 22.5 моменты сил  $F_1$  и  $F_2$  имеют отрицательный знак, момент силы  $F_3$  — положительный, если ось проходит через  $O$ .

2. Если тело находится в состоянии равновесия, то при повороте его на бесконечно малый угол  $\Delta\alpha$  потенциальная энергия не изменится, следовательно, элементарная работа  $\Delta A$ , равная изменению потенциальной энергии, равна нулю:  $\Delta A = 0$ . Но

$$\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3 = M_1 \Delta\alpha + M_2 \Delta\alpha + M_3 \Delta\alpha = \\ = (M_1 + M_2 + M_3) \Delta\alpha.$$

Поскольку  $\Delta\alpha \neq 0$ , то очевидно, что

$$M_1 + M_2 + M_3 = 0. \quad (22.17)$$

Это и есть искомое условие равновесия. Итак, *тело, имеющее заданную ось вращения, находится в состоянии равновесия, если алгебраическая сумма всех моментов сил относительно этой оси равна нулю.*

Иначе можно сказать, что равновесие достигается здесь в том случае, если сумма моментов, вращающих тело против часовой стрелки, равна сумме моментов, вращающих тело по часовой стрелке.

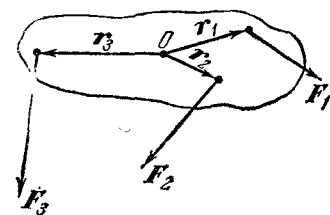


Рис. 22.5.

3. Из полученного условия видно, что малая сила, имеющая большое плечо, способна уравновесить большую силу, имеющую малое плечо. Это свойство моментов сил находит практическое применение в рычагах, воротах, винтовом подъемнике (домкрате) и в целом ряде других приспособлений, широко применяемых в технике.

## § 22.6. Момент импульса и основное уравнение динамики

1. Пусть на тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, действует несколько сил (рис. 22.5). Алгебраическую сумму моментов всех сил обозначим  $M$ . Как показывает опыт, под действием суммарного момента сил угловая скорость вращения тела меняется и вместе с этим меняется его кинетическая энергия. Если в момент времени  $t_1$  тело имеет угловую скорость  $\omega_1$  и кинетическую энергию  $K_1 = J\omega_1^2/2$ , то

В момент времени  $t_2$  оно имеет угловую скорость  $\omega_2$  и энергию  $K_2 = J\omega_2^2/2$ . Изменение кинетической энергии

$$\Delta K = K_2 - K_1 = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2} = \frac{J}{2}(\omega_2 - \omega_1)(\omega_2 + \omega_1) = \\ = (J\omega_2 - J\omega_1)\omega_{cp},$$

где средняя угловая скорость  $\omega_{cp} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ . Работа, совершаемая суммарным моментом сил, выражается, согласно (22.15), формулой

$$\Delta A = M \Delta \alpha = M \omega_{cp} \Delta t.$$

Но работа есть мера изменения кинетической энергии, следовательно

$$M \omega_{cp} \Delta t = (J\omega_2 - J\omega_1)\omega_{cp},$$

откуда

$$M \Delta t = J\omega_2 - J\omega_1. \quad (22.18)$$

2. Физическая величина, равная произведению момента инерции на угловую скорость, называется *моментом импульса* (иначе — *вращательным моментом* или *моментом количества движения*):

$$L = J\omega. \quad (22.19)$$

Заметим, что для материальной точки, движущейся по окружности радиуса  $r$ , момент импульса равен произведению импульса на радиус:

$$L = J\omega = mr^2\omega = mrv = pr. \quad (22.20)$$

Единицей измерения момента импульса в Международной системе единиц служит

$$[L] = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{сек}} = \text{дж} \cdot \text{сек}.$$

3. Разделив обе части равенства (22.18) на  $\Delta t$  и учитывая, что  $J\omega_2 - J\omega_1 = L_2 - L_1 = \Delta L$ , получим

$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t}. \quad (22.21)$$

Это и есть *основное уравнение динамики для вращающегося твердого тела*: момент силы равен изменению момента импульса в единицу времени.

4. Следует обратить внимание на тот факт, что в выражении (22.21) речь идет только о сумме моментов *внешних сил*. Что же касается внутренних сил, то сумма их моментов

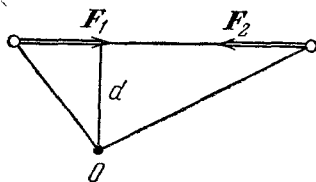


Рис. 22.6.

всегда равна нулю, что прямо следует из третьего закона Ньютона. Для доказательства рассмотрим систему из двух взаимодействующих материальных точек (рис. 22.6). Сила  $F_2 = -F_1$ , обе силы имеют одно и то же плечо  $d$ . Следовательно,  $M_1 = F_1 d$ ,  $M_2 = F_2 d = -F_1 d = -M_1$ , и суммарный момент внутренних сил

$$M_{\text{внутр}} = M_1 + M_2 = 0. \quad (22.22)$$

### § 22.7. Закон сохранения момента импульса

1. Пусть алгебраическая сумма моментов внешних сил, действующих на тело, равна нулю. В частности, это условие всегда справедливо для замкнутой системы, на которую внешние силы вообще не действуют. Тогда из (22.21) следует

$$\Delta L = 0, \quad \text{или} \quad L = \text{const.}$$

Мы получили очень важный результат, который называется *законом сохранения момента импульса*:

*Момент импульса замкнутой системы является постоянной величиной.*

2. Из различия между понятиями «импульс» и «момент импульса» вытекает одно интересное следствие.

В § 15.8 было показано, что под действием внутренних сил скорость центра масс системы материальных точек не может измениться. При поступательном движении тела скорость всех его точек совпадает со скоростью центра масс. Следовательно, внутренние силы не в состоянии изменить скорость поступательно движущегося тела.

Совсем иной результат получается при вращении тела вокруг оси. Под действием внутренних сил может измениться расстояние между отдельными частями тела, что приведет к изменению его момента инерции. Но из закона сохранения момента импульса следует, что постоянным

является лишь произведение  $L = J\omega$ , а не каждый из сомножителей. Если момент инерции под действием внутренних сил уменьшится, то во столько же раз возрастет угловая скорость, произведение же  $J\omega$  останется постоянной величиной.

3. Данный результат имеет многочисленные практические применения.



Рис. 22.7.

Рассмотрим, например, как спортсмен совершает сальто назад (рис. 22.7). После приседания с отведенными назад руками спортсмен прыгает вверх, поднимая руки вперед и затем вверх и слегка назад. Тем самым он сообщает своему телу небольшую скорость вращения относительно оси, проходящей через центр масс (примерно на уровне талии). Вблизи верхней точки траектории он «группируется» — резко подтягивает колени к подбородку и охватывает их руками. При этом момент инерции значительно уменьшается, а скорость вращения возрастает, что позволяет спортсмену быстро совершить поворот. При приземлении он вновь выпрямляется и выбрасывает руки вверх и слегка вперед, замедляя тем самым вращение.

Аналогично фигуристы на льду выполняют фигуру, называемую волчком. Раздвинув руки в стороны и заводя свободную ногу, фигурист сообщает себе медленное вращение вокруг вертикальной оси. Резко «сгруппировавшись», т. е. подтянув руки и ногу, он уменьшает момент инерции и начинает быстро вращаться.

4. Нетрудно убедиться, что во всех приведенных примерах кинетическая энергия вращения не сохраняется. Пусть вначале кинетическая энергия  $K = J\omega^2/2$ . После «группировки» момент инерции уменьшается в  $n$  раз,  $J_1 = J/n$ . Во столько же раз увеличивается угловая

скорость: из  $J\omega = J_1\omega_1$  следует, что  $\omega_1 = n\omega$ . Кинетическая энергия

$$K_1 = \frac{J_1\omega_1^2}{2} = \frac{J \cdot \omega^2 n^2}{n \cdot 2} = nK.$$

Приращение кинетической энергии  $\Delta K = K_1 - K = K(n-1)$ . Но для увеличения кинетической энергии нужна работа. Какие же силы ее совершают?

Поскольку рассматриваемые системы в первом приближении являются замкнутыми, то действием внешних сил можно пренебречь. Следовательно, в данном случае кинетическая энергия вращения возрастает за счет действия внутренних сил, т. е. в конечном счете за счет внутренней энергии вращающейся системы. Естественно, что этот результат находится в полном соответствии с законом сохранения энергии.

### § 22.8. Аналогия между величинами и соотношениями между ними при поступательном и вращательном движениях

1. Если сопоставить соотношения между величинами, характеризующими движение материальной точки (или поступательно движущегося тела), с такими же соотношениями, описывающими вращение тела вокруг оси, то бросается в глаза глубокая аналогия между ними. Запишем ряд величин и связывающие их уравнения в виде таблицы, ограничиваясь случаем ньютоновской механики (табл. 22.1).

Из таблицы видно, что простая подстановка аналогичных величин в формулы для поступательного движения автоматически приводит к правильным формулам для вращательного движения. Так, заменив в выражении  $K = p^2/2m$  импульс  $p$  на аналогичный ему момент импульса  $L$ , а массу  $m$  на ее аналог — момент инерции  $J$ , получим для вращательного движения верное выражение  $K = L^2/2J$ . Точно так же можно по аналогии написать выражение для работы, совершаемой при закручивании пружины на некоторый угол  $\varphi$ . Действительно, в § 18.2 мы получили из графика выражение  $A = Fl/2$ . Заменив силу ее аналогом — моментом силы, а перемещение — углом поворота, получим  $A = M\varphi/2$ . Конечно, это выражение можно вывести независимо, с помощью графика, но из аналогии результат получается быстрее и проще.

Т а б л и ц а 22.1

Поступательное движение	Вращательное движение
Перемещение $\Delta l$	Угол поворота $\Delta \alpha$
Скорость $v$	Угловая скорость $\omega$
Масса $m$	Момент инерции $J$
Импульс $p = mv$	Момент импульса $L = J\omega$
Сила $F$	Момент силы $M$
Основное уравнение динамики	Основное уравнение динамики
$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}$	$M = \frac{\Delta L}{\Delta t}$
Кинетическая энергия	Кинетическая энергия
$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$	$K = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{L^2}{2J}$
Элементарная работа $\Delta A = F_t \Delta l$	Элементарная работа $\Delta A = M \Delta \alpha$
Мощность $N = F_t v$	Мощность $N = M\omega$

Рекомендуем читателю, введя понятие об угловом ускорении  $\beta = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$ , получить по аналогии выражения для мгновенной угловой скорости и угла поворота при равнопеременном вращении, а также выражение для основного уравнения динамики вращающегося тела.

## Г Л А В А 23

## СИММЕТРИЯ В ПРИРОДЕ И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

## § 23.1. Законы сохранения как основные законы природы

1. В предыдущих главах были рассмотрены три основных закона природы: законы сохранения импульса, момента импульса и энергии. Следует учесть, что эти законы выполняются только в инерциальных системах отсчета. В самом деле, при выводе этих законов мы пользовались вторым и третьим законами Ньютона, а последние применимы только в инерциальных системах.

Напомним также, что импульс и момент импульса сохраняются в том случае, если систему можно считать замкнутой (сумма всех внешних сил и соответственно всех моментов

сил равна нулю). Для сохранения же энергии тела условия замкнутости недостаточно — тело должно еще быть и адиабатически изолированным (т. е. не участвовать в теплообмене).

2. Законы сохранения ценны своей общностью. Действительно, ни детали того или иного физического процесса, ни особенности отдельных тел, участвующих в этих процессах, не влияют на справедливость этих законов. Они в одинаковой мере применимы как к планетам и звездам, так и к молекулам, атомам и элементарным частицам, из которых состоят атомные ядра. Ими можно пользоваться при исследовании тепловых, химических, электрических и любых иных процессов.

3. Во всей истории развития физики законы сохранения оказались чуть ли не единственными законами, сохранившими свое значение при замене одних теорий другими.

Так, в теории относительности существенные изменения претерпевают классические представления о времени и одновременности событий, о длине отрезков и массе тел; вводятся новые формулировки закона сложения скоростей и второго закона Ньютона; меняется выражение для кинетической энергии и т. д. Однако законы сохранения импульса, момента импульса и энергии оказываются полностью справедливыми в этой теории. Более того, в теории относительности два закона ньютоновской механики — закон сохранения массы и закон сохранения энергии — объединяются в единый закон сохранения массы и энергии.

В микромире — мире атомов, молекул и элементарных частиц — мы встречаемся с рядом специфических явлений, которые резко отличаются от явлений в мире больших тел. Благодаря соотношению неопределенностей здесь, например, невозможно решить основную задачу динамики и однозначно определить, скажем, траекторию электрона в атоме. Все это требует совершенно иного подхода к явлениям микромира. Однако и здесь законы сохранения остаются в силе, и в квантовой механике они играют еще более важную роль, чем в ньютоновской или релятивистской механике. Часто законы сохранения оказываются единственным инструментом для объяснения явлений, происходящих в микромире.

Именно *универсальный характер законов сохранения* и придает им особую ценность.



## § 23.2. Законы сохранения как принципы запрета

1. Между законами типа основного уравнения динамики и законами сохранения имеется принципиальная разница. Законы динамики дают нам представление о детальном ходе процесса. Так, если задана сила, действующая на материальную точку, и начальные условия, то можно найти закон движения, траекторию, величину и направление скорости в любой момент времени и т. п. (см. гл. 8). Законы же сохранения не дают нам прямых указаний на то, как должен идти тот или иной процесс. Они говорят лишь о том, какие процессы запрещены и потому в природе не происходят.

Таким образом, законы сохранения проявляются как *принципы запрета*: *любое явление, при котором не выполняется хотя бы один из законов сохранения, запрещено, и в природе такие явления никогда не наблюдаются. Всякое явление, при котором не нарушается ни один из законов сохранения, в принципе может происходить.* Заметим, что незапрещенные явления на практике всегда и происходят, хотя и с разной вероятностью: некоторые из этих явлений происходят очень часто, другие — редко, но все же их можно наблюдать.

Может показаться, что законы сохранения оставляют слишком большой произвол, слишком много вариантов, и потому неясно, почему в эксперименте реализуется чаще всего один-единственный процесс. На самом же деле оказывается, что совместное действие нескольких законов сохранения часто почти однозначно определяет возможный ход процесса.

2. Рассмотрим следующий пример. Может ли покоящееся тело за счет своей внутренней энергии начать двигаться? Этот процесс не противоречит закону сохранения энергии. Нужно лишь, чтобы возникшая кинетическая энергия точно равнялась убыли внутренней энергии.

На самом же деле этот процесс никогда не происходит, ибо он противоречит закону сохранения импульса. Раз тело покоилось, то его импульс был равен нулю. А если оно начнет двигаться, то его импульс сам собой увеличится, что невозможно. Поэтому внутренняя энергия тела не может превратиться в кинетическую, если тело не распадется на части.

Если же допустить возможность распада этого тела на части, то запрет, налагаемый законом сохранения импульса, снимается. При этом возникшие осколки могут двигаться так, чтобы их центр масс остался в покое, — а только этого и требует закон сохранения импульса.

Итак, для того чтобы внутренняя энергия покоящегося тела могла превратиться в кинетическую, это тело должно быть способно распадаться на части. Если же есть еще один какой-либо закон, запрещающий распад этого тела на осколки, то его внутренняя энергия (и масса покоя) будут постоянными величинами.

3. Кстати, именно совместным действием законов сохранения энергии и импульса объясняется тот факт, что для получения антипротонов при столкновении быстрых протонов с неподвижными (см. § 21.7) необходимо бомбардирующим частицам сообщить кинетическую энергию  $6\mathcal{E}_0 \approx \approx 6 \text{ Гэв} = 6 \cdot 10^9 \text{ эв}$ , хотя для возникновения двух новых частиц — протона и антипротона — достаточна энергия  $2\mathcal{E}_0$ .

### § 23.3. Законы сохранения и симметрия пространства — времени

1. Показав универсальный характер законов сохранения, мы тем самым пришли к некоторому логическому противоречию с теми рассуждениями, с помощью которых эти законы были выведены. Действительно, законы сохранения были нами получены как следствия второго и третьего законов Ньютона. Между тем сами законы Ньютона являются результатом обобщения экспериментов с упругими, гравитационными и кулоновскими взаимодействиями. Но эти взаимодействия не описывают всех явлений природы.

В настоящее время известны еще два вида взаимодействий. *Сильным взаимодействием* обусловлены ядерные силы, действующие между элементарными частицами внутри ядра, а также процессы образования тяжелых элементарных частиц при очень высоких энергиях, например рассмотренная нами в § 21.7 реакция рождения пары протон — антипротон. *Слабые взаимодействия* имеют своим результатом распад некоторых элементарных частиц, например бета-распад ядер (см. т. II).

2. Совсем не очевидно, что для этих взаимодействий пригодны законы Ньютона, тем более что здесь начинает играть определяющую роль соотношение неопределенностей. Между тем, законы сохранения здесь полностью сохраняют свою силу, о чем свидетельствуют все известные явления.

Таким образом, оказывается, что законы сохранения имеют значительно более всеобъемлющий характер, чем законы Ньютона, из которых мы исходили. Поэтому представляется целесообразным найти некоторые более общие принципы, из которых вытекали бы законы сохранения.

3. Оказалось, что такие принципы действительно существуют. Ими оказались *принципы симметрии пространства — времени*. Было показано, что из однородности пространства вытекает закон сохранения импульса, из изотропности пространства — закон сохранения момента импульса и из однородности времени — закон сохранения энергии.

Тот факт, что законы сохранения являются следствиями столь общих представлений, является сильнейшим подтверждением универсальной значимости этих законов.

Ниже мы изложим довольно простые, хотя и не строгие выводы этих положений иллюстративного характера.

## § 23.4. Однородность пространства и сохранение импульса

1. Свободное пространство однородно, т. е. все его точки совершенно равноправны (см. § 1.2). А это означает, что начало координат выбранной нами инерциальной системы отсчета мы можем поместить в любой точке пространства.

Рассмотрим некоторое тело с массой покоя  $m_0$ . Предположим, что на это тело не действует внешняя сила, т. е. это тело можно рассматривать как замкнутую систему материальных точек.

Из однородности пространства следует, что при перемещении начала координат на некоторую произвольную малую величину  $\Delta x$  (или соответственно на  $\Delta y$ , или на  $\Delta z$ ) масса покоя  $m_0$  не меняется. Действительно, масса покоя тела есть его масса в той системе отсчета, где тело покоится, независимо от того, где выбрано начало координат этой системы.

2. Пользуясь выражением (16.8), которое связывает импульс тела и его энергию, и учитывая, что при переносе

начала координат на величину  $\Delta x$  масса покоя не меняется, мы получим после преобразований выражение, совпадающее с (16.10):

$$\Delta \mathcal{E} = v \cdot \Delta p. \quad (23.1)$$

При условии  $m_0 = \text{const}$  и соответственно  $\mathcal{E}_0 = \text{const}$  имеем, согласно (16.11),

$$\Delta \mathcal{E} = \Delta K = F_x \Delta x, \quad (23.2)$$

где  $F_x$  — компонента внешней силы вдоль оси абсцисс. Сопоставив оба выражения, имеем

$$F_x \Delta x = v \Delta p. \quad (23.3)$$

Но наша система замкнута, следовательно,  $F_x = 0$ . Поскольку  $v$  — произвольная скорость движения тела относительно системы отсчета, то  $v \neq 0$ . Отсюда следует, что  $\Delta p = 0$ , или  $p = \text{const}$ .

Такой же результат получится при переносе начала координат в произвольном направлении на отрезок

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}.$$

3. Мы лишены здесь возможности учесть векторную природу импульса, ибо читатель не знаком с правилами умножения векторов. На самом деле выражение (23.1) можно записать в векторной форме и показать, что сохраняется не только величина импульса, но и его направление.

Итак, из факта однородности пространства вытекает закон сохранения импульса замкнутой системы.

### § 23.5. Изотропность пространства и сохранение момента импульса

1. Свободное пространство изотропно (§ 1.2), т. е. все направления в нем совершенно равноправны. А это означает, что оси координат могут быть направлены произвольным образом.

Рассмотрим некоторую материальную точку с массой покоя  $m_0$ , расположенную на расстоянии  $r$  от начала координат. Предположим, что на эту точку никакие силы не действуют.

2. Из изотропности пространства следует, что при повороте осей координат на некоторый угол  $\Delta \alpha$  масса покоя не

изменится. Следовательно, и в этом случае выражение (23.1) останется в силе.

Из тех же соображений, что и в предыдущем параграфе (см. (23.2)), получим

$$\Delta \mathcal{E} = \Delta K = F_l \Delta l = F_l r \Delta \alpha = M \Delta \alpha, \quad (23.4)$$

ибо, согласно (22.14),  $F_l r = Fd = M$  — моменту внешней силы. Правую же часть выражения (23.1) преобразуем так:

$$v \Delta p = \omega r (p_2 - p_1) = \omega (r p_2 - r p_1) = \omega (L_2 - L_1) = \omega \Delta L, \quad (23.5)$$

ибо, согласно (22.20), момент импульса материальной точки  $L = rp$ . Сравнив (23.1), (23.4) и (23.5), получим

$$M \Delta \alpha = \omega \Delta L. \quad (23.6)$$

Но из условия замкнутости следует  $M = 0$ , т. е. на точку не действует момент внешней силы. Поскольку угловая скорость точки может быть произвольной, то  $\omega \neq 0$ . Отсюда следует  $\Delta L = 0$  и  $L = \text{const}$ .

Рассматривая произвольное тело как систему материальных точек и учитывая, что момент импульса тела равен сумме моментов импульсов его составных частей, мы легко обобщим полученный результат на любое тело, изолированное от действия внешних сил.

3. Мы лишены здесь возможности показать, что сохраняется не только абсолютная величина момента импульса, но и направление оси вращения тела. На самом деле выражение (23.6) можно записать в векторном виде и отсюда получить требуемое сохранение направления вращения.

Итак, из факта изотропности пространства вытекает закон сохранения момента импульса замкнутой системы.

### § 23.6. Однородность времени и сохранение энергии

1. Однородность времени, о которой уже говорилось в § 1.2, выражает собой не что иное, как независимость явлений природы от того, какой момент будет нами принят в качестве начального. В частности, отсюда следует, что масса покоя замкнутой и адиабатически изолированной системы не зависит от времени.

Заметим, что условие адиабатической изоляции, не игравшее роли при анализе свойств пространства, здесь играет

существенную роль, ибо при наличии теплообмена масса покоя со временем меняется.

2. Если записать уравнение (16.8) для двух моментов времени, в течение которых рассматривается замкнутая и адиабатически изолированная система, то с учетом  $m_0 = \text{const}$  мы вновь получим уравнение (23.1). Так как система замкнута, то внешняя сила  $F=0$ , следовательно,  $\Delta p = F\Delta t = 0$ . Из (23.1) при этих условиях вытекает, что  $\Delta \mathcal{E} = 0$ .

Итак, для замкнутой и адиабатически изолированной системы из факта однородности времени следует  $\Delta \mathcal{E} = 0$ , или  $\mathcal{E} = \text{const}$ , т. е. закон сохранения энергии.

3. Мы видим, что из принципов симметрии пространства—времени нам удалось, хотя и не вполне строго, вывести законы сохранения трех фундаментальных величин: импульса, момента импульса и энергии. Более строгое доказательство требует значительно более сложного математического аппарата, чем тот, который мы предполагаем у читателя.

## ГЛАВА 24

### НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА И ТЯГОТЕНИЕ

#### § 24.1. Явления в ускоренно движущейся системе отсчета

1. В предыдущих главах мы описывали явления в инерциальных системах отсчета. Рассмотрим, как же ведут себя тела в системах отсчета, которые движутся с ускорением относительно инерциальной системы. Для простоты рассуждений ограничимся частным случаем, когда неинерциальная система отсчета движется относительно инерциальной *прямолинейно, с постоянным ускорением  $\omega = \text{const}$  и в течение небольших промежутков времени*, так что скорость системы отсчета  $v = \omega t \ll c$ .

Несмотря на такую ограниченную постановку задачи, мы получим, и притом элементарными средствами, все закономерности, которые имеют принципиальное значение.

2. Представим себе достаточно длинный вагон, вдоль которого протянут горизонтальный стержень. На стержне может без трения двигаться массивный шар (рис. 24.1).

Система отсчета  $xuz$ , связанная с Землей, как уже говорилось, является в достаточной мере инерциальной. Рассмотрим, как явления, происходящие в вагоне, описываются в связанной с ним системе отсчета  $x'y'z'$ .

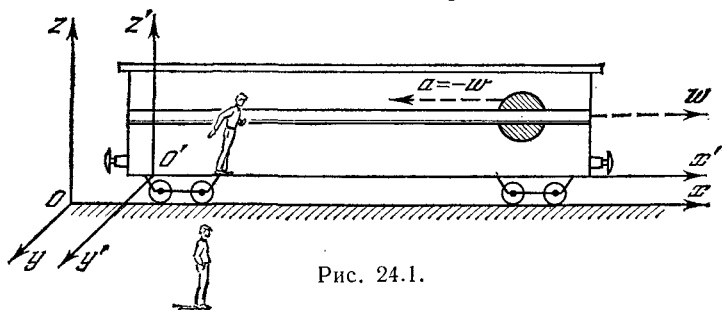


Рис. 24.1.

Опыт показывает, что когда вагон движется с ускорением  $\omega$  относительно Земли, то шар перемещается вдоль стержня с ускорением  $a = -\omega$  относительно вагона. Опишем это явление с точки зрения обеих систем отсчета.

Система $xuz$	Система $x'y'z'$
<p>На шар никакие силы не действуют, и по закону инерции его скорость не меняется, т. е. относительно Земли он движется без ускорения. Но вагон движется относительно Земли с ускорением <math>\omega</math>, и потому относительно вагона шар движется с ускорением</p>	<p>На шар никакие силы не действуют, и тем не менее относительно вагона он имеет ускорение <math>a</math>. Значит в системе отсчета, связанной с вагоном, закон инерции нарушен: здесь возникают ускорения, не вызванные силами. Причина заключается в том, что вагон движется относительно инерциальной системы с ускорением</p>
$a = -\omega.$	$\omega = -a.$

Итак, в ускоренно движущейся системе отсчета нарушается закон инерции. Поэтому такая система отсчета является *неинерциальной*.

3. Видоизменим несколько эксперимент, соединив шар с пружиной, один конец которой прикреплен к передней стенке вагона (рис. 24.2). Пока вагон покоится относительно Земли или движется относительно нее прямолинейно и равномерно, пружина остается недеформированной. Если вагон

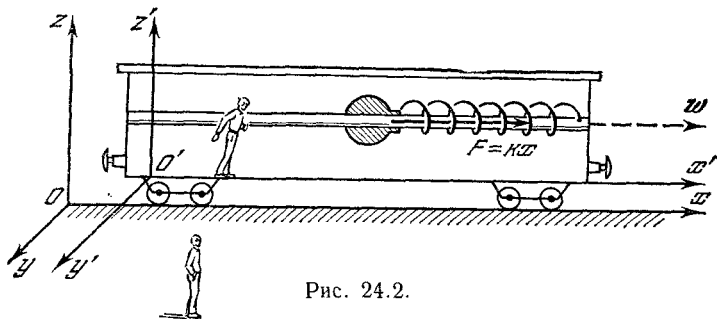


Рис. 24.2.

станет двигаться с ускорением, то пружина растянется и будет сохранять это деформированное состояние до тех пор, пока продолжается ускоренное движение вагона. Шар же будет покоиться относительно вагона.

Рассмотрим и этот случай с точки зрения обеих систем отсчета.

### *Система $xuz$ (инерциальная)*

Шар покоится относительно вагона, следовательно, он вместе с вагоном движется относительно Земли с ускорением  $\omega$ . Но по второму закону Ньютона ускорение вызывается силой  $F = m\omega$ . Эта сила приложена к шару со стороны деформированной пружины:

$$F = kx = m\omega.$$

### *Система $x'y'z'$ (неинерциальная)*

Шар покоится относительно вагона, хотя деформированная пружина действует на него с силой  $F = kx$ . Следовательно, в системе отсчета, связанной с вагоном, нарушается второй закон Ньютона. Дело в том, что вагон движется относительно инерциальной системы отсчета с ускорением

$$\omega = \frac{F}{m} = \frac{kx}{m}.$$



## § 24.2. Силы инерции и принцип Даламбера

1. Как было показано в предыдущем параграфе, в неинерциальных системах отсчета законы Ньютона не выполняются. Однако можно сформулировать правило, позволяющее *формально* пользоваться вторым законом Ньютона (основным уравнением динамики) и в неинерциальных системах отсчета.

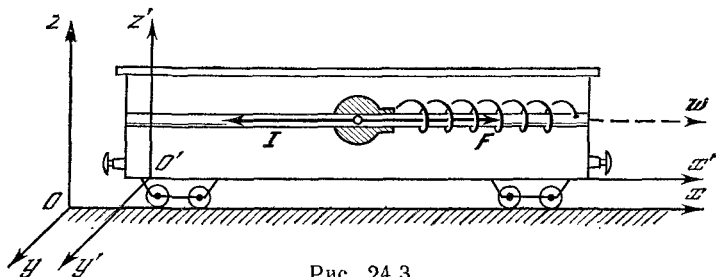


Рис. 24.3.

Для этого вернемся к анализу явлений, происходящих в вагоне при его ускоренном движении (см. рис. 24.1 и 24.2). В первом опыте, когда шар не взаимодействует с другими телами, он все же движется относительно вагона с ускорением  $a = -w$ . Таким образом, шар ведет себя так, как если бы на него действовала некая сила  $I = ma = -mw$ , которая и сообщала бы ему это ускорение.

Во втором опыте на шар действует деформированная пружина с силой  $F = -kx$ . Однако эта сила не сообщает шару ускорение относительно вагона. Дело обстоит так, как если бы на шар действовала некая сила  $I = ma = -mw$ , которая уравновешивала бы силу  $F$  (рис. 24.3).

Величина

$$I = -mw,$$

где  $w$  — ускорение неинерциальной системы отсчета (относительно инерциальной), называется *силой инерции*.

2. Пользуясь этим понятием, можно записать основное уравнение динамики в неинерциальных системах следующим образом:

$$R + I = ma, \quad (24.1)$$

где  $R$  — это сумма всех сил взаимодействия,  $I$  — сила инерции и  $a$  — ускорение тела относительно неинерциальной системы отсчета.

Формула (24.1) есть математическое выражение принципа Даламбера, который формулируется так:

*Векторная сумма всех сил взаимодействия и сил инерции равна произведению массы тела на его ускорение относительно неинерциальной системы отсчета.*

Как мы видим, принцип Даламбера есть обобщение основного уравнения динамики на случай неинерциальных систем отсчета. Покажем на примере, как он применяется.

3. Пусть в вагоне, движущемся ускоренно относительно Земли, висит на нити некоторое тело с массой  $m$ . Как показывает опыт, до тех пор, пока вагон движется с ускорением, нить составляет некоторый угол  $\alpha$  с вертикалью. Вычислим этот угол, причем расчет проведем в инерциальной и неинерциальной системах отсчета.

### Инерциальная система

Поскольку тело покоится относительно вагона, оно вместе с вагоном движется с ускорением  $w$  относительно Земли. Это ускорение телу сообщает

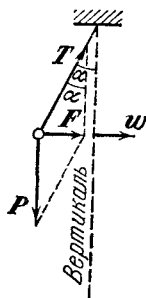


Рис. 24.4.

равнодействующая двух сил — силы тяжести и силы натяжения нити (рис. 24.4).

### Неинерциальная система

Поскольку тело покоится относительно вагона, то, согласно принципу Даламбера, векторная сумма всех сил, включая

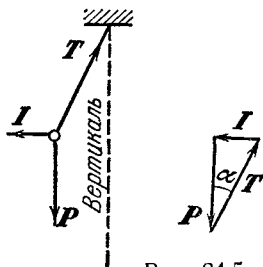


Рис. 24.5.

силы взаимодействия и силы инерции, равна нулю. Следовательно, сила

Согласно основному уравнению динамики

$$F = P + T = m\omega.$$

Но  $F/P = \operatorname{tg} \alpha$ . Подставив значения  $F = m\omega$  и  $P = mg$ , получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m\omega}{mg} = \frac{\omega}{g}.$$

тяжести, сила натяжения нити и сила инерции образуют замкнутый треугольник (рис. 24.5). Из рисунка следует:  $\operatorname{tg} \alpha = I/P$ . Подставив  $I = m\omega$  и  $P = mg$ , получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m\omega}{mg} = \frac{\omega}{g}.$$

### § 24.3. Особенности сил инерции

1. Силы инерции обладают рядом особенностей, отличающих их от сил взаимодействия: упругих, электрических, гравитационных, сил трения. Перечислим важнейшие из них.

а) Сила инерции вызвана не взаимодействием тел, а ускоренным движением самой системы отсчета; поэтому к силам инерции неприменим третий закон Ньютона.

б) Сила инерции действует на тело только в неинерциальной системе отсчета; в инерциальных системах таких сил нет.

в) Для любой системы тел, находящейся в неинерциальной системе отсчета, силы инерции являются внешними силами; следовательно, здесь нет замкнутых систем, и потому не выполняются законы сохранения (подробнее об этом см. § 24.4).

г) Наконец, отметим, что сила инерции, как и сила тяготения, пропорциональна массе тела; поэтому в поле сил инерции, как и в поле сил тяготения, все тела движутся с одним и тем же ускорением независимо от их масс (подробнее об этом см. § 24.5).

2. В инерциальных системах отсчета сил инерции вообще нет. И поэтому пользоваться силами инерции в этих системах нельзя, это является грубой ошибкой. В инерциальных системах термин «сила» применяется только в ньютоновском смысле, как мера взаимодействия тел. В неинерциальных же системах силы инерции действуют так же, как и силы взаимодействия. И если при резком торможении вагона сила

инерции бросит вас вперед, то вы эту силу будете ощущать так же реально, как и силу тяжести. Точно так же космонавт очень реально чувствует силу инерции, прижимающую его к креслу при разгоне ракеты.

#### § 24.4. Пространство и время в неинерциальных системах отсчета

1. Мы уже неоднократно обращали внимание читателя на то, что в инерциальных системах отсчета время однородно, а пространство однородно и изотропно. Геометрические свойства однородного и изотропного пространства описываются с помощью геометрии Евклида.

Одним из основных положений геометрии Евклида является пятый постулат, который можно сформулировать так: через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести прямую, параллельную данной, и притом только одну. Из пятого постулата вытекает, что сумма внутренних углов треугольника равна  $\pi$  радиан ( $180^\circ$ ). Наконец, заметим, что в евклидовой геометрии кратчайшим расстоянием между двумя точками является отрезок прямой.

Для упрощения дальнейших рассуждений ограничимся анализом геометрических соотношений на плоскости, например  $xy$ .

2. В однородном и изотропном пространстве длина отрезка не зависит от того, в какой области пространства он находится. Разобьем оси координат на равные отрезки  $\Delta x = \Delta y = l$  и через точки деления проведем параллельные осям прямые. Тогда плоскость  $xy$  разобьется на элементарные ячейки (рис. 24.6), имеющие форму равных квадратов.

Точно так же благодаря однородности времени в инерциальной системе отсчета промежуток времени между двумя событиями  $\Delta t$  не зависит от того, в какой точке пространства эти события происходят.

3. В неинерциальной системе отсчета пространство неоднородно. В самом деле, длина отрезка в движущейся системе отсчета меньше, чем в системе отсчета, где отрезок покоится (см. § 12.8):

$$\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (24.2)$$

Но при равноускоренном движении  $v^2 = 2\omega x$ , где  $\omega$  — ускорение неинерциальной системы отсчета. Подставив в (24.2), получим

$$\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - \frac{2\omega x}{c^2}}. \quad (24.3)$$

Мы видим, что в неинерциальных системах отсчета длина отрезка зависит от того, в какой области пространства он находится: в точках с разными абсциссами длина одного и того же отрезка различна. Отрезок же вдоль оси ординат

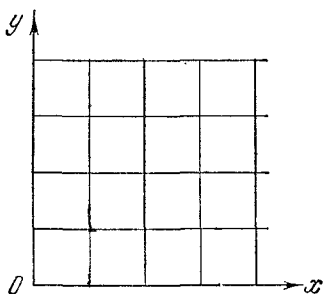


Рис. 24.6.

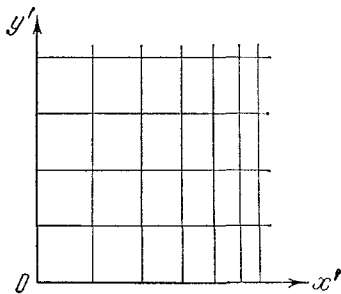


Рис. 24.7.

сохраняет неизменную длину, ибо вдоль этой оси нет движения:  $\Delta y' = \Delta y$ . Построив координатную сетку в неинерциальной системе отсчета, мы убедимся, что здесь уже плоскость  $x'y'$  разбивается на элементарные ячейки в виде прямоугольников, ширина которых убывает по мере продвижения вдоль оси абсцисс (рис. 24.7).

4. В неинерциальной системе отсчета пространство не только неоднородно, но и неизотропно.

Действительно, здесь оба направления вдоль оси абсцисс неравноправны: в нашем примере вдоль положительного направления этой оси элемент длины убывает, вдоль отрицательного — возрастает, а вдоль оси ординат его величина не меняется. Следовательно, у нас есть возможность с помощью физического эксперимента различить разные направления в этом пространстве, а это и свидетельствует о его неизотропности.

Заметим, что благодаря неоднородности и неизотропности пространства в неинерциальных системах отсчета не выполняются законы сохранения импульса и момента импульса, о чем мы уже говорили.

5. Наконец, можно убедиться, что и время в неинерциальных системах отсчета неоднородно, вследствие чего здесь не выполняется закон сохранения энергии. В движущейся системе отсчета промежуток времени между двумя событиями, происходящими в одной и той же точке (см. § 12.9), выражается так:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (24.4)$$

Используя, как и выше, выражение  $v^2 = 2\omega x$ , получим

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{2\omega x}{c^2}}}. \quad (24.5)$$

6. Покажем, что в неинерциальных системах отсчета благодаря неоднородности и неизотропности пространства его свойства должны описываться *неевклидовой геометрией*.

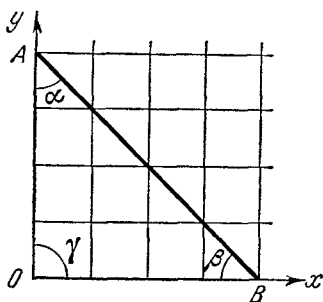


Рис. 24.8.

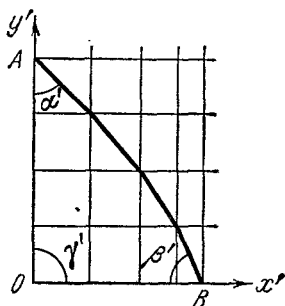


Рис. 24.9.

Для доказательства рассмотрим, как в данном пространстве выглядит отрезок прямой, не параллельной осям координат. Построим в инерциальной системе отсчета отрезок  $AB$ , наклоненный под углом  $45^\circ$  к осям координат (рис. 24.8). В неинерциальной системе этот отрезок превра-

тится в ломаную (рис. 24.9), а фактически, если сделать элемент длины  $\Delta x'$  бесконечно малым, — в кривую линию. Но тогда уже сумма углов полученного криволинейного треугольника окажется больше  $180^\circ$  ( $\alpha' + \beta' + \gamma' > 180^\circ$ ). А это и означает, что в данном пространстве геометрия является неевклидовой.

Заметим также, что здесь кратчайшим расстоянием между точками  $A$  и  $B$  является не отрезок прямой, а дуга некоторой кривой, — а это тоже отличает геометрию данного пространства от евклидовой.

7. Впервые идею о возможности существования неевклидовых геометрий выдвинул в 1826 г. Н. И. Лобачевский. Он показал возможность построения непротиворечивой геометрии, в которой не выполняется пятый постулат Евклида, положив тем самым начало ряду последовавших затем работ по неевклидовым геометриям. При этом он также выдвинул идею о том, что геометрия реального мира, возможно, и не является евклидовой.

Современники Лобачевского не могли понять глубины идей, заложенных в его работах, и многие их просто не принимали всерьез. И неудивительно, — геометрия Евклида, которой пользовались в течение более двух тысячелетий, представлялась незыблемой основой науки, а попытка создания неевклидовой геометрии выглядела как явное чудачество, противоречила «здравому смыслу». Кстати, так же многие ученые восприняли несколько позже и теорию относительности.

И все же истина заключалась не в «здравом смысле» консерваторов, а в смелых, революционных идеях Лобачевского и Эйнштейна. Предвидение Лобачевского о неевклидовом характере окружающего нас мира полностью подтвердилось в общей теории относительности.

Пространство, геометрические свойства которого описываются неевклидовой геометрией, часто называют «искривленным» пространством. Смысл такого термина заключается в том, что в неевклидовом пространстве кратчайшим расстоянием между двумя точками оказывается не прямая линия, а некоторая кривая, называемая «геодезической линией». Примером может служить дуга большого круга на поверхности шара или винтовая линия на поверхности цилиндра.

### § 24.5. Принцип эквивалентности

1. Силы инерции, как и силы тяготения, пропорциональны массам тел, на которые эти силы действуют. Поэтому в поле сил инерции, как и в поле сил тяготения, все тела движутся с одним и тем же ускорением независимо от их масс.

Таким образом, *силы инерции по своим проявлениям неотличимы от сил тяготения*. Для иллюстрации этого положения проанализируем еще раз явление, описанное в п. 3 § 24.1. Здесь на шар действует упруго деформированная пружина с силой  $F = -kx$ , но эта сила не сообщает телу ускорения относительно вагона. Такое положение возможно, если на шар, помимо силы упругости, действует еще одна сила, равная ей по величине и противоположная по направлению. Однако все тела, находящиеся в вагоне, с шаром не взаимодействуют. Какие же выводы можно сделать?

#### Первый вывод

По-видимому, вагон является неинерциальной системой отсчета, и силу упругости уравнивает сила инерции:  $F = -I$ . Чтобы убедиться, что это действительно сила инерции, нужно к пружине прикреплять тела с разной массой. Так как сила инерции пропорциональна массе тела, то и растяжение пружины должно быть пропорционально массе:

$$x = \frac{-F}{k} = \frac{I}{k} = \frac{m\omega}{k} = \xi m,$$

где

$$\xi = \frac{\omega}{k} = \text{const.}$$

#### Второй вывод

По-видимому, вагон является инерциальной системой, но он находится в поле тяготения, и силу упругости уравнивает сила тяжести:  $F = -P$ . Чтобы убедиться, что это действительно сила тяжести, нужно к пружине прикреплять тела с разной массой. Так как сила тяжести пропорциональна массе тела, то и растяжение пружины должно быть пропорционально массе:

$$x = \frac{-F}{k} = \frac{P}{k} = \frac{mg}{k} = \xi m,$$

где

$$\xi = \frac{g}{k} = \text{const.}$$



Таким образом, явления в инерциальной системе, находящейся в однородном поле тяжести, и в неинерциальной системе, движущейся с постоянным по величине и направлению ускорением, происходят совершенно одинаково. Это положение было впервые сформулировано Эйнштейном и положено им в основу релятивистской теории тяготения (см. § 24.6). Оно называется *принципом эквивалентности*.

Следует обратить особое внимание на точность формулировки принципа эквивалентности. Он справедлив только для *малых* областей пространства — столь малых, что в этих областях поле тяготения можно считать однородным. В больших же областях пространства, где отчетливо проявляется неоднородность поля тяготения, невозможно подобрать такую неинерциальную систему отсчета, чтобы в ней силы инерции имели такие же величины и направления, как в поле сил тяготения.

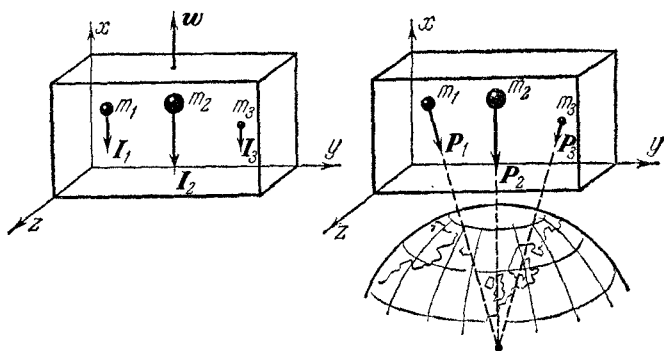


Рис. 24.10.

Дело в том, что поле сил тяготения является *центральным* — силы тяготения направлены к центру тяготеющей массы, например Земли; они убывают обратно пропорционально квадрату расстояния. Никаким ускорением системы отсчета получить такие силы инерции невозможно — при ускоренном движении системы отсчета силы инерции будут параллельны друг другу (рис. 24.10).

3. Отсюда следует, что не может быть и речи о том, будто бы из принципа эквивалентности следует, что поле тяготения является лишь «кажущимся», что будто бы в любом

случае можно выбрать систему отсчета, где поля тяготения не будет. Об этой ошибке предупреждал неоднократно Эйнштейн. Речь может идти лишь о том, что свойства пространства и времени в поле тяготения и в неинерциальных системах отсчета аналогичны. Это и составляет сущность теории тяготения Эйнштейна, некоторые идеи которой будут изложены ниже.

### § 24.6. Понятие о теории тяготения Эйнштейна

1. Вблизи массивных тел возникает поле тяготения. Оно характеризуется вектором напряженности  $\mathbf{G}$ , совпадающим по смыслу с ускорением тел в данной точке поля, и скалярной величиной  $\varphi$  — потенциалом поля тяготения (см. §§ 9.6, 18.9). В однородном поле, направленном вдоль оси абсцисс, потенциал  $\varphi = gx$ , где  $g$  — ускорение силы тяжести,  $x$  — расстояние точки поля от нулевого уровня потенциала, который мы выберем на оси ординат (см. (18.28)).

Из принципа эквивалентности следует, что свойства пространства и времени в поле тяготения должны быть такими же, как и в неинерциальных системах отсчета.

2. Пусть в точке, где потенциал поля тяготения равен нулю, элемент длины вдоль оси абсцисс равен  $\Delta x_0$ ; промежуток времени в этой же точке поля равен  $\Delta t_0$ . Тогда в любой другой точке поля, где потенциал равен  $\varphi$ , элемент длины  $\Delta x \neq \Delta x_0$ , а промежуток времени  $\Delta t \neq \Delta t_0$ . Для их вычисления воспользуемся формулами (24.3) и (24.5). Поскольку из принципа эквивалентности следует, что  $g = \omega$ , то произведение  $\omega x = gx = \varphi$ . Подставив в (24.3) и (24.5), получим

$$\Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}} \quad (24.6)$$

и

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}}}. \quad (24.7)$$

Итак, в гравитационном поле, как и в неинерциальных системах отсчета, время неоднородно, а пространство является неевклидовым, т. е. неоднородным и неизотропным.

Тем самым подтверждено гениальное предвидение Лобачевского, что геометрия реального мира может быть неевклидовой.

3. Посмотрим, как с этой точки зрения описывается движение тела в поле тяготения.

В ньютоновской механике тело при отсутствии поля тяготения движется по инерции, т. е. прямолинейно и равномерно. Если же оно попало в поле тяготения, то под действием силы нарушится инерциальность движения. Тело приобретает ускорение и движется уже не равномерно и не прямолинейно.

Согласно общей теории относительности (теории тяготения Эйнштейна) *тела всегда движутся по инерции независимо от наличия или отсутствия поля тяготения. Движение по инерции есть движение по геодезической линии* (т. е. по кратчайшему расстоянию), и на движение расходуется *минимальное собственное время* (т. е. время по часам, связанным с движущимся телом).

Если тело движется вне поля тяготения, то там пространство однородно и изотропно, а время однородно. Следовательно, тело будет двигаться по прямолинейной траектории, а скорость движения будет постоянной величиной: из  $\Delta x = \text{const}$  и  $\Delta t = \text{const}$  следует  $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{const}$ .

Если же тело движется в поле тяготения, где время неоднородно, а пространство неоднородно и неизотропно, то геодезическая линия уже не прямая, а какая-то кривая, форма которой зависит от структуры поля тяготения. Точно так же скорость движения окажется переменной величиной, ибо элемент длины и промежуток времени являются здесь функциями гравитационного потенциала (см. (24.6)) и (24.7)).

Основываясь на этих идеях, Эйнштейну удалось сформулировать релятивистскую теорию тяготения, из которой закон тяготения Ньютона вытекает как предельный случай для слабых полей при медленных движениях взаимодействующих тел.

Однако новый взгляд на свойства пространства и времени позволил Эйнштейну не только получить новую теорию тяготения, но и обнаружить три эффекта, которые не были известны в теории тяготения Ньютона.

4. Прежде всего, Эйнштейн показал, что планеты движутся вокруг Солнца не по эллипсам, а по незамкнутым кривым. Каждую из этих кривых можно приближенно представить как эллипс, ось которого медленно поворачивается в плоскости орбиты.

Для планет, которые находятся далеко от Солнца, обнаружить этот эффект очень трудно. Меркурий же расположен к Солнцу ближе остальных планет; следовательно, он находится в более сильном гравитационном поле и движется по орбите быстрее других планет. Поэтому здесь релятивистские эффекты скажутся сильнее. Оказалось, что поворот оси Меркурия должен составить 43 дуговых секунды за столетие. Такая особенность в законах движения Меркурия была замечена астрономами еще в середине XIX столетия, но объяснить это явление не удавалось. Наиболее точные астрономические измерения дали для смещения значение  $42,6 \pm 0,9$  дуговой секунды за столетие, что отлично объясняется теорией тяготения Эйнштейна.

5. Вторым эффектом, вытекающим из этой теории, является искривление световых лучей в поле тяготения. Действительно, свет всегда распространяется по геодезическим линиям, а в поле тяготения геодезической линией является кривая, форма которой зависит от структуры поля.

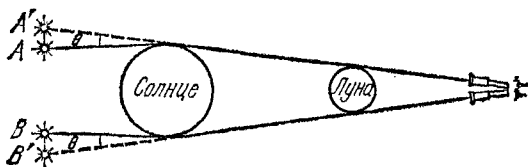


Рис. 24.11.

В пределах солнечной системы сильное поле тяготения имеется лишь вблизи поверхности Солнца. Поэтому искривление световых лучей можно наблюдать следующим образом. Нужно сфотографировать участок небесной сферы вблизи Солнца, а затем — тот же участок, когда Солнце уйдет оттуда; при этом должно наблюдаться смещение звезд на некоторый угол  $\theta$  (рис. 24.11). Естественно, что фотографировать небо следует во время полного солнечного зат-

меня, иначе на фоне яркого света Солнца слабый свет, исходящий из звезд, не будет виден.

Эйнштейн показал, что

$$\theta = \frac{4\varphi}{c^2} = \frac{4\gamma M}{c^2 R}, \quad (24.8)$$

где  $M$  и  $R$  — масса и радиус Солнца. Подставив значения  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{сек}^2$ ,  $M = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$ ,  $R = 7 \cdot 10^8 \text{ м}$  и  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/сек}$ , получим

$$\theta = 0,85 \cdot 10^{-5} \text{ радиана} = 1,75 \text{ угловой секунды.}$$

Измерения, проведенные рядом наблюдателей, дали от  $1,72 \pm 0,11$  до  $1,82 \pm 0,15$  секунды, что в пределах ошибок измерения отлично согласуется с теорией.

6. Наконец, благодаря неоднородности времени любой периодический процесс в поле тяготения должен идти несколько медленнее, чем вне поля.

Так, пусть атом излучает электромагнитные волны (безразлично — видимый свет или гамма-излучение) вне поля тяготения с некоторой частотой  $\nu_0$ . Тогда этот же атом, находясь в поле тяготения с потенциалом  $\varphi$ , излучает волны с меньшей частотой  $\nu$ . Действительно,  $\nu_0 = \frac{\Delta N}{\Delta t_0}$ , где  $\Delta N$  — число колебаний. В поле тяготения  $\nu = \frac{\Delta N}{\Delta t}$ , откуда

$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t}$ . Используя (24.7), получим

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}}. \quad (24.9)$$

В эксперименте может быть зарегистрировано изменение частоты

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} = \frac{\nu_0 - \nu}{\nu_0} = 1 - \sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}} = \frac{2\varphi}{c^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}}\right)}.$$

Поскольку обычно  $\frac{2\varphi}{c^2} \ll 1$ , то  $1 + \sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}} \approx 2$ .

Итак,

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} = \frac{\varphi}{c^2}. \quad (24.10)$$

В поле тяготения Земли эффект изменения частоты исключительно мал. Так, на высоте  $h$  над поверхностью Земли

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{\varphi}{c^2} = \frac{gh}{c^2} = \frac{9,81h}{9 \cdot 10^{16}} = 1,09 \cdot 10^{-16}h.$$

Тем не менее в 1960 г. Паунд и Ребка, используя эффект Мёссбауэра (см. т. II), сумели экспериментально подтвердить изменение частоты гамма-излучения в поле тяготения Земли. Сравнивалось излучение ядер изотопа железа с атомным весом 57 у двух источников, один из которых находился на поверхности Земли, второй — на высоте 22,5 м. Теоретическое изменение частоты  $\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = 2,46 \cdot 10^{-15}$ . В эксперименте получилось  $\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = (2,56 \pm 0,25) \cdot 10^{-15}$ . Их отношение

$$\frac{\Delta\nu(\text{эксп.})}{\Delta\nu(\text{теор.})} = 1,04 \pm 0,12,$$

что в пределах ошибок эксперимента блестяще подтверждает теорию тяготения Эйнштейна.

МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ  
ГАЗА

ГЛАВА 25  
МОЛЕКУЛЯРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 25.1. Как измерили скорость движения молекул

1. Из курса физики восьмилетней школы читателю известно, что все тела состоят из молекул или атомов, которые находятся в состоянии непрерывающегося беспорядочного движения. Как же определить скорости движения молекул?

Впервые такой эксперимент поставил в 1920 г. Штерн. В дальнейшем предложенная им методика «молекулярного

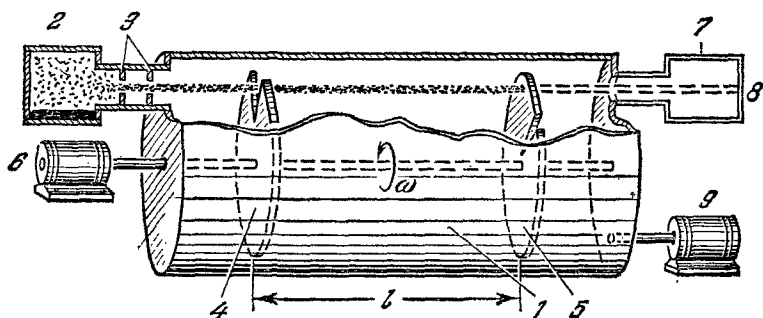


Рис. 25.1.

пучка» использовалась различными учеными, создавшими более совершенные установки. Рассмотрим идею эксперимента, осуществленного Ламмертом в 1929 г.

2. Прибор (рис. 25.1) состоит из толстостенного сосуда 1, к которому присоединяется «молекулярная печка» 2 — сосуд, в котором испаряется ртуть (или какой-либо другой жидкий металл). Пары ртути проходят через систему диа-

фрагм 3, в результате чего создается довольно узкий молекулярный пучок. Два диска 4 и 5 с узкими прорезями (рис. 25.2) повернуты друг относительно друга на некоторый угол  $\varphi$  и приводятся во вращение мотором 6. Молекулярный пучок, пройдя через прорези обоих дисков, попадает в ловушку 7, охлаждаемую жидким азотом. Молекулы осаждаются на стеклянной мишени 8, образуя на ней видимый осадок.

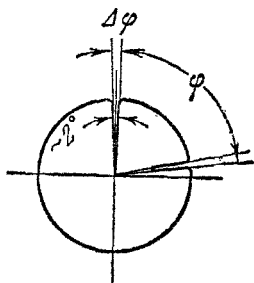


Рис. 25.2.

В установке с помощью насоса 9 поддерживается высокий вакуум, чтобы избежать столкновений молекул ртути с молекулами воздуха.

3. Очевидно, что при неподвижных дисках молекулярный пучок на мишень не попадет. Если же диски привести во вращение, то молекулы, обладающие определенной скоростью, смогут пройти через прорезь второго диска. Это произойдет в том случае,

когда за время, в течение которого молекулы движутся между обоими дисками, второй диск как раз успеет повернуться на угол  $\varphi$ , так что прорезь окажется на пути молекулярного пучка.

Если диск вращается с угловой скоростью  $\omega = 2\pi n$  (где  $n$  — частота его вращения), то угол  $\varphi = \omega t = 2\pi n t$ . Но  $t = l/v$ , где  $v$  — скорость молекул. Отсюда  $\varphi = 2\pi n l/v$ , или

$$v = \frac{2\pi n l}{\varphi}. \quad (25.1)$$

Зная угол между прорезями, расстояние между дисками и частоту их вращения, можно вычислить скорость молекул.

Например, если  $l = 40 \text{ см} = 0,4 \text{ м}$ ,  $\varphi = 24^\circ = 24\pi/180 \text{ рад}$  и  $n = 3000 \text{ об/мин} = 50 \text{ об/сек}$ , то скорость молекул

$$v = \frac{2\pi \cdot 50 \cdot 0,4 \cdot 180}{24} = 300 \text{ м/сек.}$$

4. Заметим, что вследствие конечной ширины прорезей скорость измеряется не точно, а с некоторой погрешностью. Действительно, пусть молекула летит через левый край прорези первого диска. Во второй прорези она может пройти как через левый, так и через правый край. Но в пер-



вом случае система повернется на угол  $\varphi$ , а во втором — на угол  $\varphi_1 = \varphi + \Delta\varphi$ . Соответственно на мишень попадут как молекулы, которые движутся со скоростью  $v$  (они пройдут через левый край), так и молекулы, движущиеся с меньшей скоростью  $v_1 = 2\pi nl / \varphi_1$  (они пройдут через правый край прорези). Погрешность при измерении скорости равна

$$\Delta v = v - v_1 = \frac{2\pi nl}{\varphi} - \frac{2\pi nl}{\varphi + \Delta\varphi} = \frac{2\pi nl \Delta\varphi}{\varphi(\varphi + \Delta\varphi)} = \frac{v \Delta\varphi}{\varphi + \Delta\varphi}. \quad (25.2)$$

В конкретном примере, который мы рассчитали выше, при  $\Delta\varphi = 2^\circ$  имеем

$$\Delta v = \frac{300 \cdot 2}{22} = 27,3 \text{ м/сек.}$$

Итак, в данном опыте мы можем лишь утверждать, что скорость молекул лежит в интервале между 300 м/сек и 272,7 м/сек.

Конечно, эту погрешность можно уменьшить, сделав прорези более узкими. Однако принципиально невозможно полностью ликвидировать разброс скоростей, поскольку нельзя сделать щель бесконечно тонкой.

## § 25.2. Распределение молекул по скоростям

1. Если бы все молекулы двигались с одинаковыми скоростями, то при заданном угле между прорезями и заданном расстоянии между дисками все молекулы попали бы в ловушку только при определенной скорости вращения диска. В этом случае при подходящей скорости вращения мишень быстро покроется налетом молекул, а при иных скоростях молекулы на нее не попадут. На самом деле результаты эксперимента оказались совершенно иными. Прежде всего, молекулы проникали в ловушку при разных скоростях вращения дисков. А это свидетельствует о наличии в пучке молекул с различными скоростями. В самом деле, из (25.1) следует, что молекулы, движущиеся с большими скоростями, попадут в ловушку при большей скорости вращения дисков, медленные же молекулы попадут в ловушку при меньших скоростях вращения. Далее оказалось, что для получения осадка одинаковой толщины при разных скоростях вращения требуется различное время. А это свидетель-

ствуется о том, что доля быстрых и медленных молекул в пучке различна.

2. Наиболее трудно в данном эксперименте определить число молекул, движущихся с той или иной скоростью. Из этого затруднения был найден весьма остроумный выход. Опыт показал, что видимый осадок получается при вполне определенном числе сконденсировавшихся молекул. Чем больше число молекул в пучке, тем меньше времени требуется для получения видимого осадка, т. е.  $\frac{N_1}{N_2} = \frac{t_2}{t_1}$ . Таким образом, в данном эксперименте может быть определено *относительное число молекул*, скорость которых лежит в интервале от  $v$  до  $v + \Delta v$ , т. е. число  $\frac{\Delta N}{N \Delta v}$ .

Результаты одного из экспериментов приведены в табл. 25.1 и на рис. 25.3. Измерения проведены с молекулами некоторого вещества при определенной температуре в «молекулярной печи».

Таблица 25.1

Интервал скоростей, м/сек	Относительное число молекул $\Delta N/N \Delta v$	Интервал скоростей, м/сек	Относительное число молекул $\Delta N/N \Delta v$
60—90	82	360—390	313
90—120	137	390—420	278
120—150	195	420—450	237
150—180	251	450—480	198
180—210	300	480—510	161
210—240	338	510—540	127
240—270	361	540—600	86
270—300	368	600—660	46
300—330	361	660—720	22
330—360	342	720—840	9

3. Из результатов эксперимента вытекает, что имеется некоторая скорость, с которой движется наибольшее число молекул; в нашем случае она лежит в интервале 270—300 м/сек. Эта скорость называется *наиболее вероятной*. Обозначим ее через  $u$ .

Большинство молекул движется со скоростями, близкими к наиболее вероятной; имеется очень мало молекул,

скорость которых много больше или много меньше наиболее вероятной скорости.

Распределение молекул по скоростям, полученное экспериментально, хорошо согласуется с теоретическим распределением, которое получил Максвелл еще в 1860 г., применив к тепловому, хаотическому движению законы теории вероятностей. Полученный им закон называется *максвелловским распределением молекул по скоростям*. Хорошее согласие теоретического закона с экспериментальными данными является отличным подтверждением правильности наших представлений о характере молекулярного движения в газах.

4. Как из опыта, так и из максвелловского распределения можно вычислить наиболее вероятную скорость движения молекул газа. Оказалось, что она зависит от температуры газа и массы его молекул.

Так, для водорода при температуре  $0^{\circ}\text{C}$  и  $100^{\circ}\text{C}$  наиболее вероятная скорость равна соответственно  $1510\text{ м/сек}$  и  $1765\text{ м/сек}$ . При тех же

условиях наиболее вероятная скорость молекул кислорода равна  $378\text{ м/сек}$  и  $442\text{ м/сек}$ , т. е. в 4 раза меньше, а скорость молекул паров ртути —  $151\text{ м/сек}$  и  $176,5\text{ м/сек}$ , т. е. в 10 раз меньше, чем скорость молекул водорода.

Как известно, масса молекулы водорода в 16 раз меньше массы молекулы кислорода и в 100 раз меньше массы атома ртути (молекула ртути состоит из одного атома, молекулы же водорода и кислорода — двухатомные). Следовательно, из опыта вытекает, что при заданной температуре газов наиболее вероятные скорости их молекул обратно

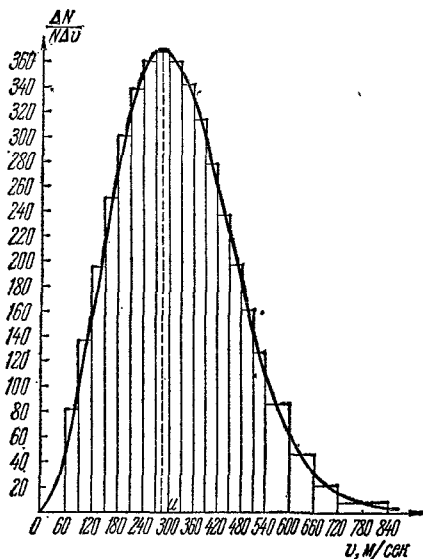


Рис. 25.3.

пропорциональны корням квадратным из их масс:

$$\frac{u_1}{u_2} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}. \quad (25.3)$$

Отсюда можно получить

$$\frac{m_1 u_1^2}{2} = \frac{m_2 u_2^2}{2}. \quad (25.4)$$

Итак, *средняя кинетическая энергия молекул не зависит от природы газа, а зависит только от его температуры.*

### § 25.3. Длина свободного пробега молекулы

1. Поскольку при комнатных температурах скорость молекул газа составляет несколько сот метров в секунду, то на первый взгляд неясно, почему диффузия в газах происходит сравнительно медленно. Например, в комнате запах из одного конца в другой распространяется в течение десятков секунд, а не сотых долей секунды, как этого, казалось бы, следовало ожидать. Причина заключается в том, что молекулы очень часто соударяются друг с другом, вследствие чего траектория молекулы представляет собой не прямую линию, а весьма сложную, запутанную ломаную.

Представление о характере этой траектории можно получить, наблюдая в микроскоп за движением броуновской частицы. В 1827 г. Броун с помощью сильного микроскопа наблюдал за поведением в жидкости мельчайших спор, размером около микрона. Он обнаружил, что эти частицы находятся в состоянии непрерывного беспорядочного движения, как бы отплясывая какой-то фантастический танец. В дальнейшем было обнаружено, что броуновское движение совершают любые микроскопические частицы как в жидкостях, так и в газах.

2. Как доказали в 1905 г. Эйнштейн и Смолуховский, броуновские частицы ведут себя как гигантские молекулы, средняя кинетическая энергия которых равна средней кинетической энергии молекул жидкости или газа, окружающих эту частицу. Поэтому характер движения броуновских частиц полностью соответствует характеру движения молекул, но с одной лишь существенной разницей: скорость движения частиц значительно меньше скорости движения молекул.

Действительно, из равенства средних значений кинетической энергии частицы и молекул  $\overline{K}_{\text{част}} = \overline{K}_{\text{мол}}$  следует

$$\frac{M\overline{v}_{\text{част}}^2}{2} = \frac{m\overline{v}_{\text{мол}}^2}{2}, \quad \text{или} \quad \overline{v}_{\text{част}} = \overline{v}_{\text{мол}} \sqrt{\frac{m}{M}},$$

где чертой обозначено среднее значение скорости,  $m$  — масса молекулы,  $M$  — масса броуновской частицы. Броуновская частица содержит миллиарды молекул:  $M/m \approx 10^{10}$ ; скорость газовых молекул составляет несколько сот метров в секунду. Следовательно, скорость броуновских частиц составит несколько миллиметров в секунду, что и наблюдается на практике.

3. Итак, молекула испытывает каждую секунду множество столкновений. Попробуем вычислить *число соударений за 1 сек и среднюю длину свободного пробега молекулы*.

Предположим, что молекулы газа при столкновении ведут себя как упругие шарики. Для упрощения расчета предположим, что движется только одна молекула, крайняя слева на рис. 25.4, а остальные покоятся. При столкновении двух молекул их центры сближаются на расстояние  $d$ , равное диаметру молекулы. Поэтому удобно считать, что движущаяся молекула имеет радиус  $r = d$ , а остальные молекулы являются материальными точками.

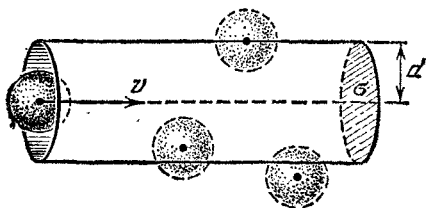


Рис. 25.4.

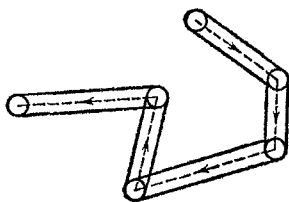


Рис. 25.5.

При каждом столкновении молекула меняет направление своего движения, так что ее траектория имеет форму запутанной ломаной (рис. 25.5). Для удобства расчета мысленно спрямим эту траекторию, как это изображено на рис. 25.4. Это не может отразиться на расчете числа столкновений, ибо форма траектории здесь не играет никакой роли. Рассматриваемая молекула за время  $t$  пройдет путь

$l=vt$ . При этом она столкнется со всеми молекулами, центры которых лежат в цилиндре, образующая которого  $l=vt$ , а площадь основания  $\sigma$  имеет диаметр, равный удвоенному диаметру молекулы. Эта площадь называется *эффективным сечением соударения*.

Число молекул в этом цилиндре  $N=n\sigma l=n\sigma vt$ , где  $n$  — концентрация молекул, т. е. число молекул в единице объема. За 1 сек молекула испытывает  $z$  столкновений:

$$z = \frac{N}{t} = n\sigma v. \quad (25.5)$$

4. Если бы молекула двигалась в вакууме, не испытывая соударений, то она за секунду прошла бы расстояние, численно равное ее скорости. На самом же деле она за секунду испытывает  $z$  столкновений. Следовательно, *длина свободного пробега*

$$\lambda = \frac{v}{z} = \frac{1}{n\sigma}. \quad (25.6)$$

Этот расчет является довольно приближенным, так как при выводе мы сделали ряд искусственных допущений. Однако строгая теория, учитывающая движение всех молекул, дает результат, отличающийся от полученного нами на 30—40%, что в данном случае не очень существенно, ибо нас интересуют здесь не точные значения величин, а лишь их порядок.

5. Существует несколько методов, позволяющих экспериментально определить длину свободного пробега. Оказалось, что при нормальном атмосферном давлении длина свободного пробега молекулы газа составляет около 0,1 микрона  $= 10^{-7}$  м; концентрация же молекул газа при этих условиях  $n \approx 10^{25}$  молекул в  $1 \text{ м}^3$ . Отсюда можно найти эффективное сечение соударения:

$$\sigma = \frac{1}{n\lambda} \approx \frac{1}{10^{-7} \cdot 10^{25}} = 10^{-18} \text{ м}^2.$$

Поскольку  $\sigma = \pi d^2$ , где  $d$  — эффективный диаметр молекулы, то

$$d = \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} \approx 10^{-9} \text{ м} = 10 \text{ \AA};$$

здесь  $1 \text{ \AA}$  (ангстрем)  $= 10^{-10} \text{ м}$  — единица длины, часто употребляемая в оптике, молекулярной и атомной физике. Полученный результат по порядку хорошо согласуется с численными значениями для размеров молекул, которые получены другими способами.

## § 25.4. Диффузия

1. Диффузией называется процесс выравнивания концентраций двух веществ при их смешении друг с другом. Диффузия происходит как в газах, так и в жидкостях и твердых телах.

Для наблюдения диффузии в газах можно поставить следующий эксперимент. Толстостенный стальной цилиндр разделен перегородкой с клапаном на две части (рис. 25.6).

Нижняя половина цилиндра заполняется кислородом, верхняя — водородом. В боковых стенках имеются запальные свечи, между электродами которых может создаваться искра. В начале эксперимента искра не вызывает взрыва, так как кислород отделен от водорода. Если же открыть клапан, то через некоторое время газы перемешаются и искра вызовет взрыв возникшей при этом смеси — гремучего газа. Заметим, что при диффузии более тяжелый кислород поднимался вверх, а водород, который легче кислорода в 16 раз, опускался вниз. Следовательно, газы двигались вопреки действию поля силы тяжести.

Это явление естественно объясняется на основе молекулярно-кинетической теории. Дело в том, что молекулы обоих газов, двигаясь беспорядочно и сталкиваясь друг с другом, попадают в промежутки между соседними молекулами, что приводит к проникновению одного газа в другой. Постепенно возникает смесь двух газов с одинаковой концентрацией обоих сортов молекул.

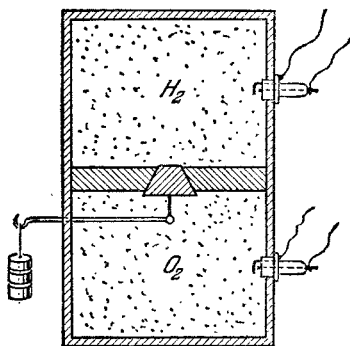


Рис. 25.6.

2. Заметим, что именно благодаря диффузии окружающая нас атмосфера (по крайней мере ее нижний слой — тропосфера) представляет собой однородную смесь азота, кислорода, углекислого газа и небольшой примеси инертных газов и паров воды. При отсутствии диффузии произошло бы расслоение атмосферы под действием поля силы тяжести: внизу оказался бы слой наиболее тяжелого углекислого газа, над ним — кислород, а еще выше — азот и инертные газы.

3. Так как с ростом температуры возрастают скорости движения молекул, то при этом ускоряется и процесс диффузии, что и наблюдается на практике. Всем известно, что в горячей воде соль или сахар растворяются значительно быстрее, чем в холодной, — а это и означает ускорение процесса диффузии с ростом температуры. Аналогичные явления наблюдаются и в газах, и в твердых телах.

### § 25.5. Закон диффузии

1. Попытаемся выяснить более глубоко механизм диффузии в газах, а заодно определить, от чего зависит масса вещества, переносимого в процессе диффузии. Для простоты рассуждений рассмотрим процесс *самодиффузии* — случай, когда сосуд заполнен одним газом, но концентрация молекул в разных частях сосуда различна.

Пусть, например, сосуд представляет собой трубу, в левой части которой поддерживается избыточная концентрация, а в правой — некоторое разрежение (рис. 25.7). Концентрация молекул  $n$  и пропорциональная ей плотность газа  $\rho = mn$  убывают по направлению оси абсцисс. Выделим мысленно в трубе некоторую площадку  $S$  и подсчитаем массу  $\Delta M$  вещества, которая переносится через единицу площадки в единицу времени, т. е. величину  $\Delta M/S\Delta t$ .

2. Через площадку могут пройти только те молекулы, которые отстоят от нее на расстоянии, не превышающем длину свободного пробега, т. е. молекулы, находящиеся в слоях 1 и 2 на рис. 25.7. Но так как молекулы движутся совершенно беспорядочно, то для них все направления в пространстве одинаковы, и потому в среднем в заданном направлении движется лишь одна шестая часть всех молекул:  $N/6$  вдоль положительного направления оси абсцисс,



$N/6$  вдоль ее отрицательного направления,  $N/6$  вдоль положительного направления оси ординат и т. д.

В объеме 1 находится  $N_1 = n_1 S \lambda$  молекул; из них через площадку  $S$  пройдет одна шестая часть, т. е.  $\frac{N_1}{6} = \frac{1}{6} n_1 S \lambda$ . Соответственно из объема 2 через площадку  $S$  пройдет

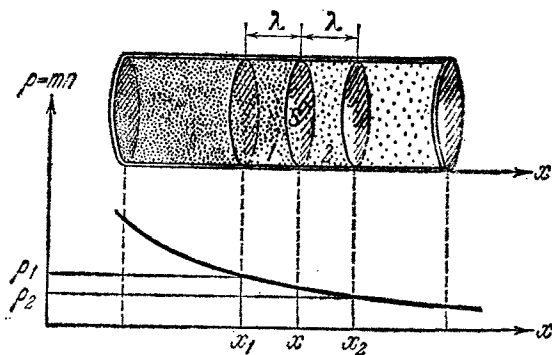


Рис. 25.7.

$\frac{N_2}{6} = \frac{1}{6} n_2 S \lambda$  молекул. В результате через площадку за время  $\Delta t$  продиффундирует молекул  $\Delta N = \frac{1}{6} S \lambda (n_1 - n_2)$ . Умножив обе части равенства на массу одной молекулы  $m$  и учитывая, что  $m \Delta N = \Delta M$ , а  $m(n_1 - n_2) = m n_1 - m n_2 = \rho_1 - \rho_2 = -\Delta \rho$ , получим

$$\Delta M = -\frac{1}{6} S \lambda \Delta \rho. \quad (25.7)$$

3. Преобразуем несколько это равенство. Величина  $\frac{\Delta \rho}{\Delta x} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{x_2 - x_1}$ , характеризующая скорость изменения плотности газа вдоль оси абсцисс, называется *градиентом плотности*. Дробь  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2\lambda}{\Delta t} = 2v$  равна удвоенной средней скорости движения молекул. Учитывая это, перепишем (25.7) так:

$$\Delta M = -\frac{1}{6} S \lambda \Delta \rho = -\frac{1}{6} S \lambda \frac{\Delta \rho}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \Delta t = -\frac{1}{3} \lambda v \frac{\Delta \rho}{\Delta x} S \Delta t.$$

Отсюда масса вещества, переносимого вследствие диффузии

через единицу площади в единицу времени, выразится так:

$$\Delta M = -\frac{1}{3} \lambda v \frac{\Delta \rho}{\Delta x} S \Delta t, \quad (25.8)$$

или

$$\Delta M = -D \frac{\Delta \rho}{\Delta x} S \Delta t, \quad (25.9)$$

т. е. масса продиффундировавшего вещества пропорциональна градиенту плотности, площади сечения трубы и времени. Это и есть закон диффузии.

#### 4. Коэффициент

$$D = \frac{1}{3} \lambda v \quad (25.10)$$

называется коэффициентом диффузии. Зная коэффициент диффузии и среднюю скорость движения молекул, можно вычислить и длину свободного пробега молекулы.

### § 25.6. Разделение газовых смесей

1. Довольно интересные явления наблюдаются при диффузии газов через пористую перегородку. Для ознакомления с явлением сделаем следующий опыт (рис. 25.8). Пористый сосуд из необожженной глины соединим резиновой трубкой с водяным манометром. Накроем сосуд небольшим химическим стаканом и введем в стакан водород — газ, молекулы которого имеют гораздо меньшую массу, чем молекулы азота или кислорода, из которых состоит воздух. Мы заметим, что уровень жидкости в манометре сместится и покажет, что давление внутри пористого сосуда стало больше атмосферного.

Рис. 25.8.

Это явление можно объяснить следующим образом. Через стенки пористого сосуда диффундирует как воздух, так и водород. Воздух выходит из сосуда, водород же проникает внутрь. Однако скорость диффузии у них различна. По-

сколько масса молекулы водорода примерно в 16 раз меньше массы молекулы кислорода и в 14 раз — молекулы азота, то скорость движения его молекул и соответственно коэффициент диффузии водорода примерно в 4 раза больше, чем коэффициент диффузии воздуха. В результате в пористый сосуд проникает гораздо больше водорода, чем из него выходит воздуха, и давление внутри этого сосуда возрастает.

Исходя из этих соображений, мы можем предугадать, что если пористый сосуд опустить в более тяжелый газ, например в углекислый, то скорость диффузии воздуха из него будет значительно больше скорости диффузии углекислого газа в пористый сосуд. В результате давление газа внутри пористого сосуда станет меньше атмосферного, что и покажет манометр. Опыт подтверждает это предположение.

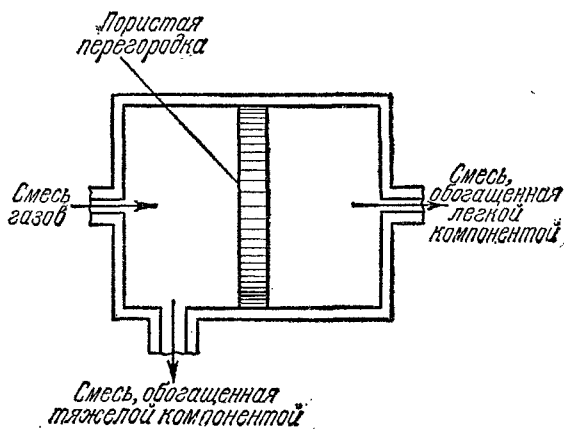


Рис. 25.9.

2. Описанное явление может быть использовано для разделения газовых смесей. Представим себе сосуд, разделенный пополам пористой перегородкой (рис. 25.9). В левую половину сосуда нагнетается газовая смесь, состоящая из двух компонент. Поскольку легкая компонента быстрее диффундирует через пористую перегородку, чем тяжелая, то на выходе из прибора мы получим уже новые газовые смеси, из которых одна обогащена легкой компонентой, а вторая — более тяжелой. Пропустив интересующую нас

смесь через большое число камер, можно добиться практически полного отделения одной компоненты от другой.

3. Почти все химические элементы представляют собой смесь *изотопов*, т. е. атомов, которые обладают совершенно одинаковыми химическими свойствами, но различаются атомным весом.

Так, природный водород состоит из 99,985% легкого изотопа (протия) и из 0,015% тяжелого изотопа (дейтерия); массы их атомов относятся примерно как 1 : 2 (точнее — 1,008142 : 2,014735). Искусственно можно получить и сверхтяжелый изотоп водорода (третий), масса этого атома примерно в 3 раза больше массы атома протия. Природный уран состоит в основном из двух изотопов, массы атомов которых относятся как 235 : 238 (точнее — 235,11704 : 238,12493); легкий изотоп составляет 0,715%, тяжелый — 99,28% всей массы урана, оставшиеся 0,005% составляют другие изотопы.

Разделение изотопов химическими методами невозможно, ибо их химические свойства совершенно одинаковы. Поэтому для их разделения нужно использовать физические явления, ход которых зависит от массы атомов. Одним из важнейших способов разделения изотопов является диффузионный метод, описанный выше.

Так, для некоторых типов ядерных реакторов необходим обогащенный уран, содержащий до 80% легкого изотопа. Для его получения используется газ — шестифтористый уран ( $UF_6$ ), который прогоняется насосами через систему из нескольких сот или даже тысяч диффузионных камер (в зависимости от нужной степени обогащения). В результате установка для диффузионного разделения изотопов урана представляет собой огромное и дорогостоящее сооружение.

## ГЛАВА 26

### ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ

#### § 26.1. Давление газа

1. Опыт показывает, что газ, заключенный в некоторый сосуд, производит давление на его стенки. Это явление объясняется на основе молекулярно-кинетической теории следующим образом. Молекулы, двигаясь совершенно бес-

порядочно, ударяются о стенки сосуда. Суммарный импульс, который молекулы передают за единицу времени единице площади, — это и есть давление, производимое газом.

Для вычисления давления воспользуемся формулой (17.17), с помощью которой описывается давление потока частиц, упруго соударяющихся со стенкой (см. § 17.5):

$$p = 2n\bar{m}\bar{v}^2, \quad (26.1)$$

где  $n$  — концентрация частиц (число частиц в единице объема). Однако в это выражение нужно внести две существенные поправки. В § 17.5 мы рассматривали поток частиц, в котором все они движутся в одном направлении с одной и той же скоростью. Молекулы идеального газа движутся беспорядочно во всевозможных направлениях, а скорость молекул, согласно распределению Максвелла, различна. Поэтому вместо скорости  $v$  нужно в формулу (26.1) ввести среднюю скорость  $\bar{v}$ , а вместо концентрации  $n$  — одну шестую концентрации,  $n/6$ . Действительно, вследствие полной хаотичности молекулярного движения и огромного числа молекул в единице объема можно утверждать, что в любом направлении движется одна шестая часть всех молекул.

2. Таким образом, *давление газа пропорционально концентрации молекул и их средней кинетической энергии:*

$$p = \frac{2}{3} n \cdot \frac{m\bar{v}^2}{2}. \quad (26.2)$$

Выражению (26.2) можно придать другую форму, учитывая, что концентрация молекул  $n = N/V$ , где  $N$  — полное число молекул в сосуде объемом  $V$ ; подставим  $n = N/V$  в (26.2); тогда

$$pV = \frac{2}{3} N \frac{m\bar{v}^2}{2}. \quad (26.3)$$

3. Как показывает опыт, средняя кинетическая энергия молекул не зависит от сорта газа, а определяется только его температурой (см. § 25.2). Следовательно, при *изотермическом процессе* (т. е. процессе, происходящем при неизменной температуре) средняя кинетическая энергия молекул является постоянной величиной. Но тогда из (26.3) вытекает, что и произведение давления газа на его объем является при

этом условии постоянной величиной. Итак, мы получили следующий важный результат:

При неизменной температуре ( $m\bar{v}^2/2 = \text{const}$ ) и неизменной массе газа (число молекул  $N = \text{const}$ ) произведение его давления на объем является постоянной величиной (закон Бойля и Мариотта),

$$pV = \text{const}. \quad (26.4)$$

4. Закон этот часто формулируется и так: при изотермическом процессе давление газа обратно пропорционально его объему (при неизменной массе газа).

Графиком изотермы на осях  $p$ — $V$  является гипербола (рис. 26.1). Для одной и той же массы газа разные кривые соответствуют различным температурам.

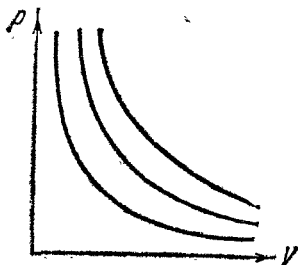


Рис. 26.1.

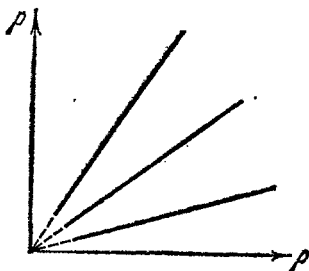


Рис. 26.2.

5. Объем равен частному от деления массы на плотность:  $V = m/\rho$ . Подставив в (26.4) и учитывая, что мы полагаем массу газа величиной постоянной, получим

$$\frac{p}{\rho} = \text{const}. \quad (26.5)$$

Итак, закон Бойля и Мариотта можно сформулировать и следующим образом: при постоянной температуре и неизменной массе газа его давление прямо пропорционально плотности.

График этой зависимости на осях  $p$ — $\rho$  изображен на рис. 26.2. Наклон графика зависит от температуры газа.

## § 26.2. Единицы давления

1. Единицей измерения давления в Международной системе единиц служит  $\text{н/м}^2$ . Это давление, которое производит сила в  $1 \text{ н}$ , равномерно распределенная на площадке  $1 \text{ м}^2$ , при условии, что направление силы перпендикулярно площадке.

В системе СГС единицей давления служит  $\text{дин/см}^2$ ;

$$1 \text{ н/м}^2 = 10 \text{ дин/см}^2.$$

Часто используется внесистемная единица давления — бар:

$$1 \text{ бар} = 10^5 \text{ н/м}^2 = 10^6 \text{ дин/см}^2.$$

В технике широко используется внесистемная единица — техническая атмосфера ( $\text{ат}$ ):

$$1 \text{ ат} = 1 \text{ кгс/см}^2 = 98066,5 \text{ н/м}^2 \approx 9,81 \cdot 10^4 \text{ н/м}^2 = 0,981 \text{ бар}.$$

С ошибкой порядка 2% можно пренебречь разницей между атмосферой и баром.

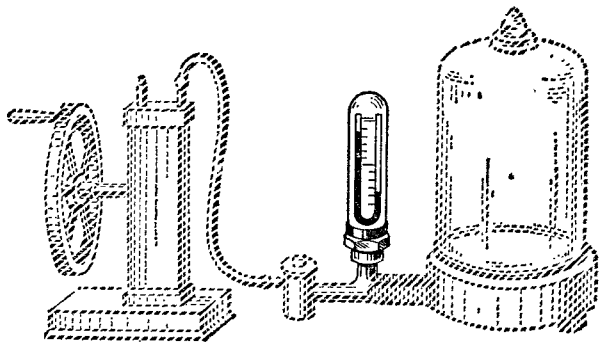


Рис. 26.3.

2. Давление в жидкости или газе удобно сравнивать с давлением вертикального столба некоторой жидкости. Так, например, измеряется давление атмосферы с помощью ртутного барометра или степень разрежения в вакуумной установке (рис. 26.3) с помощью манометра.

Для вычисления давления, которое производит вертикальный столбик жидкости, нужно его вес разделить на

площадь основания:

$$p = \frac{P}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{\rho h S g}{S} = \rho h g, \quad (26.6)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $h$  — высота столба,  $g$  — ускорение силы тяжести.

Для измерения малых давлений нередко применяется наклонная манометрическая трубка. Здесь

$$p = \rho g l \sin \alpha, \quad (26.7)$$

где  $\alpha$  — угол между трубкой и горизонтальной плоскостью и  $l$  — длина столба жидкости.

3. Для практических целей часто оказывается удобным определять давление по высоте столбика жидкости в манометрической трубке. Используются единицы:

*миллиметр ртутного столба (тор):*

$$\begin{aligned} 1 \text{ мм рт. ст.} &= 10^{-3} \text{ м} \cdot 13\,595 \text{ кг/м}^3 \cdot 9,80665 \text{ м/сек}^2 = \\ &= 133,322 \text{ н/м}^2; \end{aligned}$$

*нормальная или физическая атмосфера:*

$$1 \text{ атм} = 760 \text{ мм рт. ст.} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2$$

(с ошибкой порядка 3% можно пренебречь разницей между физической и технической атмосферой);

*метр водяного столба:*

$$\begin{aligned} 1 \text{ м вод. ст.} &= 1 \text{ м} \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot 9,81 \text{ м/сек}^2 = \\ &= 9,81 \cdot 10^3 \text{ н/м}^2 = 0,1 \text{ ат.} \end{aligned}$$

### § 26.3. Идеальный газ

1. Закон Бойля и Мариотта неоднократно проверялся на опыте. Оказалось, что при давлениях, не превосходящих нескольких десятков атмосфер, и при сравнительно высоких температурах (порядка комнатных и выше) он выполняется довольно хорошо. Отступления результатов эксперимента от теоретических расчетов не превосходят 1—3%. Однако при давлениях порядка сотен атмосфер и выше экспериментальные значения произведения  $pV$  уже значительно отличаются от теоретических.



В табл. 26.1 и на рис. 26.4 приведены некоторые данные по сжатию трех различных газов при неизменной температуре  $t_0=0^\circ\text{C}$ , начальном давлении  $p_0=1\text{ атм}=101325\text{ н/м}^2$  и одинаковом начальном объеме  $V_0=22,41\text{ л}=0,02241\text{ м}^3$ .

Таблица 26.1

Кислород			Водород			Гелий		
$p, \text{ атм}$	$V, \text{ л}$	$\frac{pV}{p_0V_0}$	$p, \text{ атм}$	$V, \text{ л}$	$\frac{pV}{p_0V_0}$	$p, \text{ атм}$	$V, \text{ л}$	$\frac{pV}{p_0V_0}$
10,07	2,20	0,988	10,07	2,24	1,007	10,04	2,24	1,004
51,4	0,408	0,937	51,9	0,448	1,04	51,1	0,448	1,02
106	0,187	0,884	108	0,224	1,08	105	0,224	1,05

2. Из анализа результатов эксперимента следует, что при давлениях, не превосходящих нескольких десятков атмосфер, соотношение между давлением и объемом газа выражается законом Бойля и Мариотта. Целесообразно не

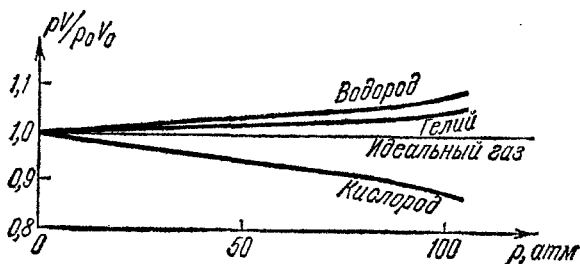


Рис. 26.4.

учитывать при этих условиях незначительные отклонения экспериментальных данных от теоретического значения  $pV=\text{const}$  и ввести понятие о некотором идеальном газе, который точно следует закону Бойля и Мариотта.

Итак, идеальным газом называется газ, у которого при изотермическом процессе давление в точности обратно пропорционально его объему (при неизменной массе).

Понятие идеального газа является идеализацией, аналогично тому как идеализациями являются понятия мате-

риальной точки, точечного заряда и т. п. Однако в ряде случаев использование подобных идеализаций весьма целесообразно, ибо позволяет существенно упростить решение задачи без заметного ущерба для точности ее решения.

3. Попытаемся выяснить, какова же молекулярная структура идеального газа. Для этой цели сравним плотность газа с плотностью жидкости (или твердого тела) при одном и том же давлении и температуре.

При нормальном атмосферном давлении и температуре  $100^{\circ}\text{C}$  плотность воды равна  $958,4 \text{ кг/м}^3$ , а водяного пара  $0,598 \text{ кг/м}^3$ , т. е. в 1600 раз меньше. Но плотность есть произведение массы молекулы на концентрацию молекул:  $\rho = mp$ . Следовательно, в единице объема воды в 1600 раз больше молекул, чем в единице объема водяного пара.

Так как объем пропорционален кубу линейных размеров, то расстояние между молекулами пара в  $\sqrt[3]{1600} \approx 12$  раз больше, чем расстояние между молекулами воды при тех же условиях. Аналогичный расчет для других веществ приводит к такому же результату: *расстояние между молекулами в газах в десятки раз больше, чем в жидкостях или твердых телах* (при не очень больших давлениях).

4. Ниже будет показано, что молекулярные силы меняются очень быстро с расстоянием; например, силы молекулярного притяжения обратно пропорциональны *седьмой степени* расстояния (см. § 31.4). Следовательно, *в газах силы взаимодействия между молекулами* (при не очень больших давлениях) *в десятки миллионов раз меньше, чем в жидкостях и твердых телах*. А это означает, что при этих условиях можно вообще пренебречь силами молекулярного взаимодействия.

Тем самым оправдано то неявное допущение, которое мы фактически сделали при выводе формулы (26.2), когда учитывалось только взаимодействие между молекулами газа и стенками сосуда, но не учитывалось взаимодействие между самими молекулами. Следовательно, закон Бойля и Мариотта будет выполняться, если в газе не играют заметной роли силы молекулярного взаимодействия.

Заметим, что в этом случае не учитываются также и размеры молекул, поскольку суммарный объем молекул (рассчитанный, например, по их эффективным размерам) оказывается много меньше объема сосуда.

Итак, с молекулярной точки зрения *идеальный газ представляет собой систему молекул, которые друг с другом не взаимодействуют и которые в первом приближении можно считать материальными точками.*

## § 26.4. Температура

1. Понятие температуры возникло вначале из ощущений «горячее» и «холодное». Однако такой критерий весьма субъективен, поскольку наши ощущения зависят не только от состояния среды, но и от состояния нашего организма. Так, если в одну и ту же комнату войдут два человека, один из горячей ванны, а второй с мороза, то первому будет холодно, а второму тепло.

Необходимо найти объективный критерий для характеристики температуры, а также установить однозначный способ измерения этой величины.

2. С точки зрения термодинамики *температура является величиной, характеризующей направление теплообмена.* Действительно, как показывает опыт, теплообмен происходит всегда таким образом, что энергия в форме тепла передается только от нагретых тел к холодным.

Для иллюстрации этого явления рассмотрим следующий эксперимент. В сосуд, содержащий некоторое количество воды, опустим горячий кусок железа. Спустя некоторое время мы заметим, что температуры обоих тел сравнялись — вода и тело на ощупь будут одинаково теплыми. Но при этом железо охладилось, а его внутренняя энергия соответственно уменьшилась; вода же нагрелась, следовательно, ее внутренняя энергия возросла.

3. По определению (см. § 21.3) количеством теплоты называется энергия, переданная путем теплообмена. Следовательно, при контакте двух тел с различной температурой *количество теплоты передается от тела с более высокой температурой к телу с более низкой температурой.* Равенство температур определяется следующим условием: *температуры двух тел равны, если между ними не происходит теплообмена.*

Это необходимо учитывать при измерении температуры. Термометр фактически регистрирует всегда свою собственную температуру; поэтому для правильного измерения

температуры некоторого тела следует термометр привести в контакт с телом и выждать, пока показания термометра не окажутся стабильными. Это и будет означать, что теплообмен между телом и термометром прекратился и температура у них одинаковая.

4. С точки зрения молекулярно-кинетических представлений *температура есть величина, характеризующая среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул идеального газа*. Это определение имеет смысл, поскольку опыт показывает, что при одинаковой температуре средние кинетические энергии молекул различных газов совпадают (см. § 25.2).

Учитывая термодинамический смысл температуры, мы можем свести измерение температуры любого тела к измерению средней кинетической энергии молекул идеального газа, находящегося в состоянии термодинамического равновесия с данным телом. Однако измерение скоростей (или кинетических энергий) молекул связано со значительными трудностями. Поэтому на практике измеряют не кинетическую энергию молекул, а некоторую другую величину, пропорциональную ей, например давление газа.

### § 26.5. Абсолютная температура и уравнение состояния идеального газа

1. Определим *абсолютную температуру* как физическую величину, *пропорциональную средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеального газа*. В соответствии с этим определением и законами классической молекулярной теории зависимость между температурой и средней кинетической энергией молекул такого газа имеет вид

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2} kT. \quad (26.8)$$

Здесь  $\bar{\epsilon}_k$  — средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул,  $T$  — абсолютная температура и  $k$  — коэффициент пропорциональности, который называется *постоянной Больцмана* (см. § 26.9).

Для того чтобы можно было пользоваться сформулированным выше понятием абсолютной температуры, следует прежде всего установить метод измерения этой величины;

затем следует установить единицу измерения и, наконец, определить нулевой уровень температуры. Это будет сделано в следующих параграфах.

2. Как было показано, средняя кинетическая энергия молекул идеального газа может быть выражена через давление газа и концентрацию его молекул (см. (26.2)):

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{n}. \quad (26.9)$$

Из (26.8) и (26.9) следует

$$p = nkT, \quad (26.10)$$

т. е. *давление идеального газа пропорционально его абсолютной температуре и концентрации молекул.*

3. Учитывая, что  $n = N/V$ , получим

$$\frac{pV}{T} = Nk = \text{const.} \quad (26.11)$$

Данное уравнение называется *уравнением газового состояния*. Оно формулируется так:

*При неизменной массе газа (т. е. при неизменном числе молекул  $N$ ) произведение его давления на объем пропорционально его абсолютной температуре.*

### § 26.6. Газовый термометр

1. Прибором для измерения абсолютной температуры служит *газовый термометр* (рис. 26.5). Он представляет собой баллон 1, который заполнен газом (обычно водородом); с помощью трубки 2 с расширением и резинового шланга 3 сосуд соединяется с манометрической трубкой 4.

Сосуд с водородом приводится в контакт с телом, температуру которого нужно измерить. Поднимая либо опуская манометрическую трубку, мы доводим уровень ртути в расширении 2 до заданной метки, так что измерение давления производится при неизменном объеме газа.

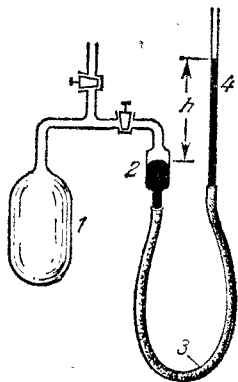


Рис. 26.5.

2. Температуры двух тел сравниваются следующим образом. Приведем газовый термометр вначале в состояние термодинамического равновесия с первым телом, а затем — со вторым, каждый раз измеряя при этом давление по высоте столбика ртути. Тогда на основании уравнения газового состояния (26.11) при условии постоянства объема газа мы заключаем, что

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1}{p_2}. \quad (26.12)$$

Тем самым измерение температуры сведено к измерению давления газа.

На практике, естественно, температуру измеряют не газовым термометром, а другими приборами — ртутными или спиртовыми термометрами, термометрами сопротивления, термопарами и т. п. Однако все эти приборы градуируются с помощью газового термометра, который служит, таким образом, эталонным прибором.

3. Выбор в качестве термометрического тела именно водорода, а не какого-либо иного газа, не случаен. Оказывается, что показания водородного термометра точнее, чем газового термометра, баллон которого заполнен любым другим газом. Они ближе всего к показаниям, кото-

Таблица 26.2

Газ	$\delta = \Delta p / p_{ид}$
Кислород . . .	0,00073
Водород . . .	0,00012
Гелий . . . .	0,00018

рые дал бы газовый термометр с идеальным газом.

В табл. 26.2 показаны ошибки, которые дают газовые термометры при измерении температуры кипящей воды. Относительная ошибка

$$\delta = \frac{\Delta p}{p_{ид}} = \frac{p - p_{ид}}{p_{ид}},$$

где  $p_{ид}$  — показания газового термометра с идеальным газом,  $p$  — показания газового термометра, заполненного соответствующим газом. Мы видим, что отклонения эти вообще очень малы, они составляют сотые доли процента. При этом показания водородного термометра в полтора раза точнее, чем гелиевого, и в шесть раз точнее, чем при заполнении баллона кислородом (или воздухом).

## § 26.7. Градус. Абсолютная шкала и шкала Цельсия

1. За единицу измерения абсолютной температуры принимается *градус Кельвина* — это одна сотая температурного интервала между точкой таяния льда и точкой кипения дистиллированной воды (при нормальном давлении  $p_0 = 101\,325 \text{ н/м}^2$ ):

$$1^\circ \text{К} = \frac{T_{\text{кип}} - T_{\text{пл}}}{100}. \quad (26.13)$$

На основе данного определения единицы измерения температуры можно экспериментально определить значения абсолютной температуры для точки плавления льда и точки кипения воды. Действительно, из (26.12) следует

$$\frac{p_{\text{кип}}}{p_{\text{пл}}} = \frac{T_{\text{кип}}}{T_{\text{пл}}} \quad \text{или} \quad \frac{p_{\text{кип}} - p_{\text{пл}}}{p_{\text{пл}}} = \frac{T_{\text{кип}} - T_{\text{пл}}}{T_{\text{пл}}}, \quad (26.14)$$

где  $p_{\text{пл}}$  — давление, регистрируемое газовым термометром, погруженным в смесь воды и тающего льда,  $p_{\text{кип}}$  — давление, регистрируемое тем же термометром, погруженным в кипящую дистиллированную воду.

Из опыта следует, что  $p_{\text{кип}}/p_{\text{пл}} = 1,3661$ ; следовательно,

$$\frac{p_{\text{кип}} - p_{\text{пл}}}{p_{\text{пл}}} = 0,3661.$$

Согласно же определению градуса (26.13)  $T_{\text{кип}} - T_{\text{пл}} = 100^\circ \text{К}$ . Подставив в (26.14), получим

$$T_{\text{пл}} = 273,15^\circ \text{К}.$$

Итак, точка плавления льда при нормальном давлении равна  $273,15^\circ \text{К}$ ; соответственно точка кипения дистиллированной воды при нормальном давлении равна  $373,15^\circ \text{К}$ .

2. Определив основные (реперные) точки абсолютной шкалы, можно проградуировать газовый термометр. Для этой цели запишем формулу (26.12) следующим образом:

$$\frac{T}{T_{\text{пл}}} = \frac{p}{p_{\text{пл}}} = \frac{h}{h_{\text{пл}}}, \quad (26.15)$$

или

$$T = \frac{273,15}{h_{пл}} h, \quad (26.16)$$

где  $h$  — высота столбика ртути в манометрической трубке газового термометра при измеряемой температуре, а  $h_{пл}$  — высота того же столбика ртути при точке плавления льда; эта величина определяется для каждого газового термометра опытным путем.

Тем самым осуществлена градуировка газового термометра — по высоте столбика ртути в манометрической трубке (в миллиметрах) можно сразу вычислить абсолютную температуру.

3. Для практических измерений температуры используется обычно не абсолютная шкала температур, а Международная практическая температурная шкала, иначе называемая шкалой Цельсия. В ней точке кипения воды присвоена температура  $100^\circ \text{C}$ , точке плавления льда —  $0^\circ \text{C}$ .

Таким образом, цена градуса в абсолютной шкале и шкале Цельсия одна и та же. Сдвинут лишь нулевой уровень отсчета температур. Соотношение

между температурами в обеих шкалах изображено на рис. 26.6. Нетрудно убедиться, что

$$t = T - 273,15, \quad (26.17)$$

где  $t$  — температура по шкале Цельсия,  $T$  — та же температура по абсолютной шкале.

Для расчетов с точностью 0,055% можно положить, что

$$t = T - 273.$$

## § 26.8. Абсолютный нуль

1. Нулевой уровень температуры по абсолютной шкале называется абсолютным нулем. Ему соответствует температура  $-273,15^\circ \text{C}$  по Международной практической температурной шкале.

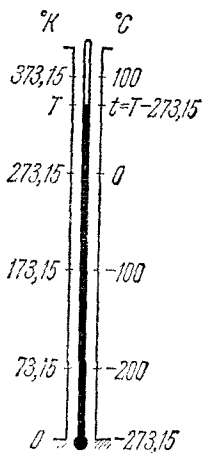


Рис. 26.6.



Абсолютный нуль — это предельно низкая температура. Ни при каком эксперименте невозможно получить температуру, равную абсолютному нулю. Тем более невозможно получить температуру, меньшую абсолютного нуля.

Получение низких температур, близких к абсолютному нулю, представляет большой интерес, поскольку при таких температурах свойства вещества существенно изменяются. Возникает ряд интересных явлений, таких, как сверхтекучесть гелия, сверхпроводимость и т. д. (см. т. II). В настоящее время с помощью очень сложных методов, которые здесь не могут быть рассмотрены, удалось достичь температур, лишь на  $0,0001^\circ \text{K}$  выше абсолютного нуля.

2. Следует отметить, что при температурах, близких к абсолютному нулю, средняя кинетическая энергия молекул уже не пропорциональна абсолютной температуре. Это прямо следует из соотношения неопределенностей (§ 14.2). В самом деле, если бы соотношение между средней кинетической энергией молекул и температурой (26.8) выполнялось вплоть до абсолютного нуля, то при этом скорость молекул при абсолютном нуле была бы точно равна нулю. Следовательно, вблизи абсолютного нуля неопределенность скорости и соответственно неопределенность импульса вдоль любой координаты стремились бы к нулю:  $\Delta v_x \rightarrow 0$  и  $\Delta p_x = m\Delta v_x \rightarrow 0$ . А тогда, согласно соотношению неопределенностей (14.5), неопределенность координаты  $\Delta x \approx \hbar/\Delta p_x \rightarrow \infty$ , что нелепо — неопределенность координаты во всяком случае не может быть больше размеров сосуда, в котором находится газ.

Итак, при температурах, близких к абсолютному нулю, средняя кинетическая энергия молекул уже не пропорциональна абсолютной температуре, а выражается значительно более сложной функцией. Поэтому принципиально неверно утверждение, встречающееся иногда в популярной литературе, будто бы при абсолютном нуле прекращается молекулярное движение. Как доказано в настоящее время, молекулярное движение даже при абсолютном нуле не прекращается — молекулы совершают так называемые *нулевые колебания*. Нулевым колебаниям соответствует *нулевая энергия* — минимальная энергия, которой могут обладать молекулы данного вещества и которая не может быть отнята от тела ни при каком охлаждении, вплоть до абсолютного нуля.

3. При абсолютном нуле теряет также смысл понятие идеального газа. Поэтому неверным является встречающееся иногда утверждение, что при абсолютном нуле давление идеального газа якобы равно нулю. Такая экстраполяция формулы (26.10) незаконна, она имеет смысл только при температурах, далеких от абсолютного нуля. При температурах, близких к абсолютному нулю, вообще нельзя пользоваться понятием идеального газа.

### § 26.9. Число Авогадро и постоянная Больцмана

1. Из выражения (26.10) можно получить ряд интересных следствий. Прежде всего, из него следует, что при одинаковых условиях (т. е. при одинаковых давлениях и температурах) концентрация молекул у различных газов одна и та же. Иными словами, *в единице объема различных газов при одинаковых условиях содержится одинаковое число молекул* (закон Авогадро).

Для вычисления концентрации молекул следует знать постоянную Больцмана. Имеется ряд методов измерения этой величины, которые мы здесь не можем рассматривать. В настоящее время ее измерили с точностью до 0,0036%:

$$k = (1,38049 \pm 0,00005) \cdot 10^{-23} \text{ дж/град.}$$

Зная постоянную Больцмана, вычислим число молекул в  $1 \text{ м}^3$  газа при нормальных условиях ( $p_0 = 1 \text{ атм} = 101\,325 \text{ н/м}^2$ ,  $T_0 = 273,15^\circ \text{ К}$ ):

$$N_L = n_0 = \frac{p_0}{kT_0} = \frac{101\,325}{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273,15} = 2,687 \cdot 10^{25} \text{ 1/м}^3.$$

Эта величина называется *числом Лошмидта*:

$$N_L = (2,68709 \pm 0,00009) \cdot 10^{25} \text{ 1/м}^3.$$

2. Зная плотность газа при нормальных условиях, можно вычислить массу одной его молекулы, учитывая, что плотность есть произведение массы одной молекулы на их концентрацию. Итак,

$$m = \frac{\rho_0}{n_0} = \frac{\rho_0}{2,687 \cdot 10^{25}}.$$

Так, плотность водорода при нормальных условиях  $\rho_0 = 0,0899 \text{ кг/м}^3$ , кислорода  $1,4291 \text{ кг/м}^3$  и гелия  $0,1785 \text{ кг/м}^3$ . Тогда масса молекулы водорода равна  $3,345 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ , масса молекулы кислорода  $53,145 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ , масса атома гелия  $6,643 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ .

3. *Киломодем* вещества называется такое количество вещества, масса которого в килограммах численно равна молекулярному весу. Так, киломоль водорода равен  $2,016 \text{ кг}$ , киломоль кислорода  $32 \text{ кг}$ , киломоль гелия  $4,003 \text{ кг}$  и т. д. Условимся в дальнейшем все величины, отнесенные к киломолю, обозначать звездочкой.

Разделив массу киломоля  $m^*$  на плотность газа при нормальных условиях, получим объем киломоля газа при нормальных условиях:

$$V^* = \frac{m^*}{\rho_0} = \frac{2,016}{0,0899} = \frac{32}{1,4291} = \frac{4,003}{0,1785} = 22,41 \text{ м}^3.$$

При нормальных условиях киломоль любого газа занимает один и тот же объем\*).

4. Число молекул в одном киломоле называется *числом Авогадро*  $N^*$ . Оно равно произведению числа Лошмидта на объем киломоля:

$$N^* = N_L V^* = 2,687 \cdot 10^{25} \cdot 22,41 = 6,02 \cdot 10^{26} \text{ 1/кмоль.}$$

В настоящее время число Авогадро вычислено различными методами с точностью до  $0,00083\%$ :

$$N^* = (6,02497 \pm 0,00005) \cdot 10^{26} \text{ 1/кмоль.}$$

5. Пользуясь выведенными величинами, преобразуем уравнение газового состояния. Из (26.10) следует:

$$p = nkT = mn \cdot \frac{k}{m} T = \rho \frac{kN^*}{mN^*} T = \frac{R^*}{m^*} \rho T, \quad (26.18)$$

где  $m^* = mN^*$  — молекулярный вес газа,  $R^* = kN^*$  — универсальная газовая постоянная:

$$R^* = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 6,025 \cdot 10^{26} = 8,314 \cdot 10^3 \text{ Дж/кмоль} \cdot \text{град} = \\ = 1,986 \text{ ккал/кмоль} \cdot \text{град.}$$

\*) Предлагаем читателю доказать это самостоятельно,

Величина

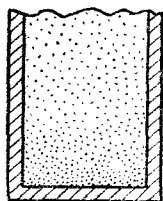
$$R = \frac{k}{m} = \frac{R^*}{m^*} \quad (26.19)$$

называется *удельной газовой постоянной*. Подставив в (26.18), получим

$$p = R\rho T. \quad (26.20)$$

### § 26.10. Распределение молекул в силовом поле

1. Допустим, что газ, заключенный в некотором сосуде, находится в силовом поле, например в поле тяжести (рис. 26.7). Выясним, как влияет наличие поля тяжести на характер распределения молекул газа.



Земля

Рис. 26.7.

Если бы поля силы тяжести не было, то молекулы с течением времени разместились бы в сосуде совершенно равномерно. Концентрация молекул  $n$  была бы во всех точках одинаковой, следовательно, плотность газа  $\rho = mn$  и давление  $p = knT$  были бы также одинаковыми во всех точках пространства.

Если бы, наоборот, действовало только поле силы тяжести, но не было теплового движения молекул, то они оказались бы прижатыми силами тяжести к нижнему дну сосуда, иными словами, пришли бы в состояние с минимальной потенциальной энергией. Это является следствием общего закона: всякая система частиц всегда приходит в состояние с минимальной потенциальной энергией.

2. Мы видим, что тепловое движение молекул стремится разбросать их по возможности более беспорядочно, так, чтобы они по возможности более равномерно заполнили все доступное для них пространство. Силовое же поле, наоборот, стремится по возможности упорядочить распределение молекул с тем, чтобы они заняли уровень с наименьшим значением потенциальной энергии. Под действием обоих этих факторов молекулы газа распределяются по всему сосуду, но их концентрация в разных точках окажется различной. А именно, наибольшая концентрация молекул ока-

жется там, где их потенциальная энергия минимальна; в тех же участках, где потенциальная энергия велика, концентрация молекул окажется малой.

3. В качестве примера можно рассмотреть характер изменения концентрации молекул в атмосфере Земли (и других планет). Опыт показывает, что по мере подъема над поверхностью Земли атмосферное давление и плотность воздуха убывают (табл. 26.3).

Таблица 26.3

Высота над уровнем моря, м	Давление, н/м <sup>2</sup>	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Температура, °С	Высота над уровнем моря, м	Давление, н/м <sup>2</sup>	Плотность, кг/м <sup>3</sup>	Температура, °С
0	101 325	1,2250	15,0	8 000	35 600	0,52717	—37,0
1000	89 874	1,1117	8,5	10 000	26 436	0,41271	—50,0
2000	79 495	1,0065	2,0	12 000	19 330	0,31083	—56,5
3000	70 108	0,90913	—4,5	14 000	14 102	0,22675	—56,5
4000	61 640	0,81914	—11,0	16 000	10 287	0,16542	—56,5
5000	54 020	0,73612	—17,5	18 000	7504,8	0,12068	—56,5
6000	47 181	0,65970	—24,0	20 000	5474,9	0,08804	—56,5
7000	41 061	0,58950	—30,5				

Заметим, что при исследовании атмосферы следует вводить поправку на изменение температуры газа с высотой, что несколько усложняет расчет.

### § 26.11. Барометрическое распределение

1. Выведем выражение для закона распределения молекул в силовом поле. Для простоты рассуждений будем считать температуру газа постоянной во всех точках.

Для расчета введем понятие о *вероятности* нахождения молекул в данной точке силового поля, где потенциальная энергия молекулы равна  $U$ . Вероятность  $w$  равна отношению концентрации молекул в данной точке поля  $n$  к концентрации молекул  $n_0$  в той точке поля, где потенциальная энергия равна нулю:

$$w = \frac{n}{n_0}. \quad (26.21)$$

2. Анализ характера воздействия силового поля и теплового движения молекул, проведенный в предыдущем параграфе, показывает, что вероятность нахождения молекулы в данной точке сосуда зависит от ее потенциальной энергии в этой точке и от температуры газа. Чем больше потенциальная энергия  $U$ , тем меньше вероятность того, что молекула окажется в этой точке. Чем выше температура, тем вероятнее, что молекулы распределятся более равномерно, т. е. тем больше вероятность найти молекулу в данной точке сосуда.

Введем вспомогательную переменную  $x$ , равную отношению потенциальной энергии молекулы  $U$  к средней энергии ее теплового движения  $\varepsilon \approx kT$ , т. е.

$$x = U/kT.$$

Тогда оказывается, что вероятность найти молекулу в данной точке есть некоторая функция этой переменной:

$$w = f(x).$$

Пусть  $x = x_1 + x_2$ . Тогда  $f(x) = f(x_1 + x_2)$ . Как доказывается в теории вероятностей, вероятность сложного события, состоящего из двух независимых событий, равна произведению вероятностей каждого из событий в отдельности:  $w = w_1 \cdot w_2$ , или

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2). \quad (26.22)$$

Можно показать, что единственная функция, удовлетворяющая этому уравнению, это показательная функция вида

$$f(x) = a^{-\alpha x}. \quad (26.23)$$

Для проверки воспользуемся свойством показательной функции: при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются, т. е.

$$a^{-\alpha(x_1 + x_2)} = a^{-\alpha x_1} \cdot a^{-\alpha x_2}. \quad (26.24)$$

Основание  $a > 1$  может быть выбрано совершенно произвольно\*). Это отразится лишь на численном значении коэффициента  $\alpha$ .

---

\*) Обычно выбирается основание натуральных логарифмов — иррациональное число  $e = 2,71828\dots$ . При  $a = e$  коэффициент  $\alpha = 1$ .

3. Итак, вероятность найти молекулу в точке поля, где ее потенциальная энергия равна  $U$ , выразится так:

$$\omega = a^{-\frac{\alpha U}{kT}}. \quad (26.25)$$

Знак минус в показателе появляется по следующим соображениям. Как уже указывалось, чем больше потенциальная энергия молекулы в данной точке, тем меньше вероятность того, что молекула там окажется. Следовательно, искомая вероятность является убывающей функцией. А при основании  $a > 1$  показательная функция убывает, если ее показатель является отрицательным числом.

4. Сопоставив уравнения (26.21) и (26.25), получим выражение для концентрации молекул:

$$n = n_0 a^{-\frac{\alpha U}{kT}}. \quad (26.26)$$

Соответственно получим для плотности газа

$$\rho = \rho_0 a^{-\frac{\alpha U}{kT}} \quad (26.27)$$

и для давления

$$p = p_0 a^{-\frac{\alpha U}{kT}}. \quad (26.28)$$

5. Если рассматривать распределение молекул в поле силы тяжести Земли (или другой планеты), то при  $h \ll R$ , где  $R$  — радиус планеты, можно положить, согласно (18.21), что  $U = mgh$ , где  $m$  — масса молекулы,  $g$  — ускорение силы тяжести и  $h$  — высота над поверхностью планеты. Для давления получится выражение

$$p = p_0 a^{-\frac{\alpha mgh}{kT}}. \quad (26.29)$$

График этой зависимости показан на рис. 26.8. Она называется *барометрическим распределением*.

Аналогичное выражение получится и для плотности газа. Этот результат хорошо согласуется с данными эксперимента для атмосферы Земли.

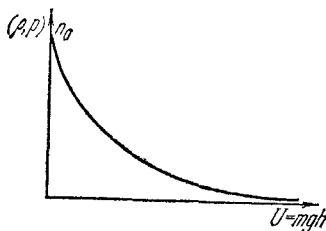


Рис. 26.8.

Именно барометрическим распределением объясняется отсутствие атмосферы у Луны и крайняя степень разреженности атмосферы Марса. Благодаря малой массе этих

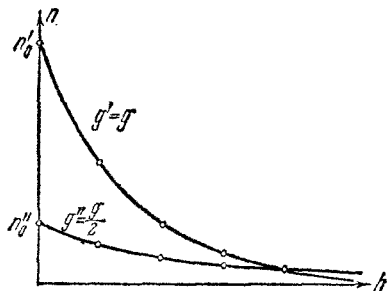


Рис. 26.9.

небесных тел у них относительно слабое поле тяготения: на Луне сила тяжести в 6 раз меньше, чем на Земле, на Марсе — в 2,6 раза. Но, как видно из (26.29), при малом  $g$  резко возрастает вероятность того, что молекулы окажутся на больших высотах (рис. 26.9), где поле тяготения значительно слабее, чем на поверхности планеты. Ско-

рость молекул может здесь оказаться больше второй космической скорости, и газ рассеется в мировом пространстве.

## ГЛАВА 27

### ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ И ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

#### § 27.1. Внутренняя энергия одноатомного идеального газа

1. Идеальный одноатомный газ является простейшей термодинамической системой, и его внутреннюю энергию можно легко вычислить.

Вспомним, что молекулы идеального одноатомного газа мы рассматриваем как материальные точки, взаимодействие между которыми столь мало, что им можно пренебречь. Отсутствие сил взаимодействия означает постоянство потенциальной энергии молекулярного взаимодействия (§ 19.5). Сумма энергий покоя самих молекул тоже постоянна, ибо сами молекулы при тепловых процессах не изменяются. Полагая в (20.2)  $\mathcal{E}_0^{(1)} + \mathcal{E}_0^{(2)} + \dots + \mathcal{E}_0^{(N)} = \text{const}$ , получим, что *внутренняя энергия идеального одноатомного газа представляет собой сумму кинетических энергий поступательного движения молекул* плюс некоторая постоянная величина.



В термодинамике принято обозначать внутреннюю энергию символом  $U$ , а не  $\mathcal{E}_0$ , как мы это делали в гл. 20. Итак,

$$U = K_1 + K_2 + \dots + K_N + \text{const}, \quad (27.1)$$

где  $K_1, K_2, \dots, K_N$  — кинетические энергии поступательного движения отдельных молекул. Учитывая, что средняя кинетическая энергия молекулы  $\bar{\epsilon}_k = (K_1 + K_2 + \dots + K_N)/N$ , а согласно (26.8)  $\bar{\epsilon}_k = \frac{3}{2}kT$ , получим

$$U = N\bar{\epsilon}_k + \text{const} = \frac{3}{2}NkT + \text{const}, \quad (27.2)$$

где  $N$  — общее число молекул в газе. Постоянное слагаемое в выражении (27.2) нередко опускают, поскольку во всех дальнейших расчетах оно не играет роли.

2. Из (27.2) следует, что *внутренняя энергия идеального газа полностью определяется его абсолютной температурой*. Она не зависит от того, с помощью какого процесса газ пришел в состояние с этой температурой.

Соответственно и изменение внутренней энергии идеального газа при переходе из состояния с температурой  $T_1$  в состояние с температурой  $T_2$  определяется только его начальным и конечным состояниями, но не зависит от характера процесса, с помощью которого газ переходит от первого ко второму состоянию:

$$U_2 - U_1 = \frac{3}{2}Nk(T_2 - T_1). \quad (27.3)$$

## § 27.2. Работа при расширении идеального газа

1. Пусть идеальный газ заполняет некоторый цилиндр, перекрытый подвижным поршнем (рис. 27.1). При перемещении поршня на бесконечно малое расстояние  $\Delta x$  совершится элементарная работа  $\Delta A = F \cdot \Delta x$ . Из определения давления следует:  $F = pS$ ; так как  $S \cdot \Delta x = \Delta V$  есть бесконечно малое изменение объема газа, то элементарная работа  $\Delta A = p \cdot \Delta V$ .

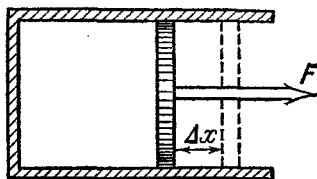


Рис. 27.1.

При расширении газа он совершает *положительную* работу против внешних сил ( $\Delta V > 0$ ). При сжатии же газа

работа отрицательная, поскольку  $\Delta V < 0$ ; ее совершают внешние силы, сжимающие газ.

2. Работа, совершаемая при изменении объема газа на конечную величину  $V_2 - V_1$ , находится следующим образом (см. § 18.1). Разбиваем полное изменение объема на элементы объема  $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_N$ . Вычисляем средние значения давления на отдельных участках:

$$p_{\text{ср}}^{(1)} = \frac{p_1 + p_2}{2}, \quad p_{\text{ср}}^{(2)} = \frac{p_2 + p_3}{2}, \quad \dots, \quad p_{\text{ср}}^{(N)} = \frac{p_N + p_{N+1}}{2}.$$

Тогда полная работа

$$\begin{aligned} A &= \Delta A_1 + \Delta A_2 + \dots + \Delta A_N = \\ &= p_{\text{ср}}^{(1)} \cdot \Delta V_1 + p_{\text{ср}}^{(2)} \cdot \Delta V_2 + \dots + p_{\text{ср}}^{(N)} \cdot \Delta V_N. \end{aligned} \quad (27.5)$$

Чем меньше выбранный элемент объема  $\Delta V$ , тем точнее совпадет результат численного расчета с истинным значением искомой работы.

3. Графически работа изображается площадью криволинейной трапеции, ограниченной снизу осью абсцисс, сверху графиком давления, а слева и справа крайними ординатами (рис. 27.2).

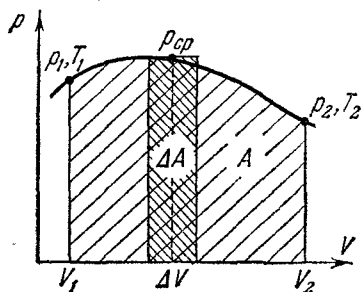


Рис. 27.2.

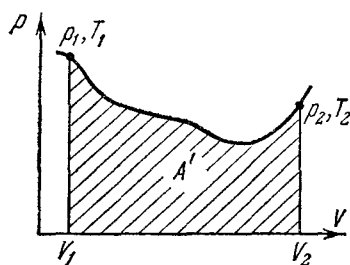


Рис. 27.3.

В Международной системе единиц  $[p] = \text{н/м}^2$ ;  $[V] = \text{м}^3$  и  $[A] = \text{дж}$ .

На практике часто выражают давление в технических или нормальных атмосферах, а объем — в литрах. Тогда

$$\begin{aligned} 1 \text{ л} \cdot \text{ат} &= 10^{-3} \text{ м}^3 \cdot 9,81 \cdot 10^4 \text{ н/м}^2 = 98,1 \text{ дж}, \\ 1 \text{ л} \cdot \text{атм} &= 10^{-3} \text{ м}^3 \cdot 1,01 \cdot 10^5 \text{ н/м}^2 = 101 \text{ дж}. \end{aligned}$$

4. Следует обратить внимание на тот факт, что работа при изменении объема газа определяется не только начальным и конечным состояниями газа, но и *характером процесса*, с помощью которого газ переходит от начального состояния к конечному. Для доказательства сравним рис. 27.2 и 27.3. Здесь начальные и конечные состояния газа одинаковые, тем не менее работы  $A'$  и  $A$  не равны между собой:  $A' < A$ , поскольку промежуточные состояния в обоих процессах отличаются.

А это означает, что сила давления газа не является консервативной и работу силы давления нельзя рассматривать как разность потенциальных энергий (см. § 18.6).

### § 27.3. Первое начало термодинамики и теплоемкость газа

1. Изменение полной энергии неподвижного газа сводится к изменению его внутренней энергии:  $\Delta \mathcal{E} = \Delta U = U_2 - U_1$ . Подставив в (21.9), получим

$$Q = U_2 - U_1 + A. \quad (27.6)$$

Для одноатомного газа с учетом (27.3) это выражение для первого начала термодинамики примет вид

$$Q = \frac{3}{2} Nk(T_2 - T_1) + A. \quad (27.7)$$

2. Количество теплоты, полученное газом, состоит из двух слагаемых. Одно из них — изменение внутренней энергии — определяется только начальным и конечным состояниями системы и не зависит от характера процесса, переводящего систему из начального состояния в конечное; второе слагаемое — работа — зависит от характера процесса, который происходит с газом. Естественно, что и количество теплоты зависит не только от начального и конечного состояний, но и от характера исследуемого процесса.

Итак, количество теплоты и работа являются количественными характеристиками не состояния системы, а процесса, происходящего с ней. Так же как нельзя говорить о «запасе работы» в системе, нельзя говорить и о «запасе теплоты». Количество теплоты и работа суть количественные характеристики двух разных форм изменения энергии системы, а не какие-то особые виды энергии. Именно поэтому

не имеет физического смысла термин «тепловая энергия», который нередко встречается в литературе.

3. *Удельной теплоемкостью* называется отношение количества теплоты, полученного системой, к ее массе и изменению ее температуры:

$$c = \frac{Q}{M(T_2 - T_1)}, \quad (27.8)$$

где  $M$  — масса системы,  $T_1$  — начальная и  $T_2$  — конечная температуры. Удельная теплоемкость численно равна количеству теплоты, которое необходимо сообщить телу с единичной массой для повышения его температуры на один градус.

Единицей измерения удельной теплоемкости в Международной системе единиц служит *дж/кг·град*. На практике используются и внесистемные единицы *кал/г·град* и *ккал/кг·град*;

$$1 \text{ кал/г·град} = 1 \text{ ккал/кг·град} = 4,1868 \cdot 10^3 \text{ дж/кг·град}.$$

Естественно, что теплоемкость, как и количество теплоты, зависит не только от начального и конечного состояния системы, но и от процесса, с помощью которого система переходит от начального состояния к конечному. Поэтому необходимо, указывая значение теплоемкости, оговаривать характер процесса, при котором это значение получено (т. е. измерено или вычислено).

Ниже будут вычислены теплоемкости идеальных газов при некоторых процессах.

#### § 27.4. Изохорный процесс

1. *Изохорным* называется процесс, происходящий при неизменном объеме газа. Из уравнения газового состояния (26.11) при условии  $V = \text{const}$  вытекает, что *при изохорном процессе давление идеального газа прямо пропорционально его абсолютной температуре (закон Шарля)*:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (27.9)$$

2. Очевидно, что при изохорном процессе газ работы не совершает, ибо при  $\Delta V = 0$  и работа  $A = 0$ . Отсюда следует, что *при изохорном процессе количество теплоты, полученное*

газом, идет целиком на изменение его внутренней энергии. Согласно (27.7) получим

$$Q_V = U_2 - U_1 = \frac{3}{2} Nk(T_2 - T_1). \quad (27.10)$$

Здесь мы использовали принятое в термодинамике обозначение: если какой-либо параметр при данном процессе остается неизменным, то он служит индексом при интересующей нас величине. Например, обозначение  $Q_V$  читается так: количество теплоты, полученное системой при постоянном объеме;  $c_V$  — удельная теплоемкость при постоянном объеме (изохорная теплоемкость) и т. д.

3. *Изохорную удельную теплоемкость* определим согласно (27.8) и (27.10):

$$c_V = \frac{Q_V}{M(T_2 - T_1)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Nk}{M} = \frac{3}{2} \cdot \frac{k}{m} = \frac{3}{2} R, \quad (27.11)$$

ибо частное от деления массы газа  $M$  на число молекул  $N$  даст массу одной молекулы:  $m = M/N$ .

Пользуясь выражением (27.11), мы можем вычислить удельную теплоемкость любого одноатомного газа, т. е. газа, у которого молекула состоит из одного атома. К их числу относятся инертные газы (гелий, неон, аргон и др.), пары металлов и т. п.

4. Во многих случаях вместо удельной теплоемкости удобно пользоваться *молярной теплоемкостью*  $C^*$ :

$$C_V^* = m^* c_V, \quad (27.12)$$

где  $m^*$  — молекулярный вес газа, т. е. масса одного киломоля. Масса киломоля равна произведению массы одной молекулы на число молекул в киломоле, т. е. на число Авогадро:

$$m^* = mN^*. \quad (27.13)$$

Подставив в (27.12) значения  $c_V$  и  $m^*$  из (27.11) и (27.13), получим

$$C_V^* = \frac{3}{2} N^* k = \frac{3}{2} R^*. \quad (27.14)$$

Полученное согласно (27.14) значение молярной теплоемкости одноатомных газов отлично совпадает с экспериментальными данными в очень широком интервале температур.

## § 27.5. Изобарный процесс

1. *Изобарным* называется процесс, происходящий при постоянном давлении. Из уравнения газового состояния (26.11) при условии  $p = \text{const}$  вытекает, что при изобарном процессе объем идеального газа прямо пропорционален его абсолютной температуре (закон Гей-Люссака):

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (27.15)$$

2. Работа при изобарном расширении газа вычисляется совершенно элементарно. Действительно, поскольку  $p = \text{const}$ , то

$$A_p = p(V_2 - V_1), \quad (27.16)$$

где  $V_1$  — начальный и  $V_2$  — конечный объемы. На графике эта работа выражается площадью прямоугольника (см. рис. 27.4).

Эта работа может быть выражена через изменение температуры газа. Используя (26.11), имеем:  $pV_2 = NkT_2$ ,  $pV_1 = NkT_1$ , следовательно

$$A_p = Nk(T_2 - T_1). \quad (27.17)$$

3. Количество теплоты, полученное идеальным газом, идет как на увеличение внутренней энергии газа, так и на работу расширения. Согласно (27.7) имеем для одноатомного газа

$$\begin{aligned} Q_p &= U_2 - U_1 + A_p = \frac{3}{2} Nk(T_2 - T_1) + Nk(T_2 - T_1) = \\ &= \frac{5}{2} Nk(T_2 - T_1). \end{aligned} \quad (27.18)$$

Мы видим, что для изобарного нагревания газа требуется большее количество теплоты, чем для его изохорного нагревания в том же температурном интервале. Это естественно, ибо внутренняя энергия газа в обоих случаях изменяется на одну и ту же величину, но при изобарном процессе газ еще совершает работу расширения, а при изохорном процессе работа не совершается.

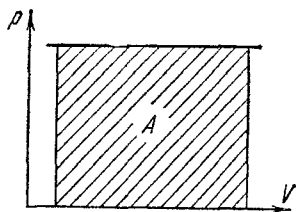


Рис. 27.4.

4. Очевидно, что изобарная теплоемкость больше изохорной; для одноатомного газа

$$c_p = \frac{Q_p}{M(T_2 - T_1)} = \frac{5}{2} \cdot \frac{k}{m} = \frac{5}{2} R, \quad (27.19)$$

в то время как  $c_v = \frac{3}{2} \cdot \frac{k}{m}$  (см. (27.11)). Соответственно молярная изобарная теплоемкость такого газа

$$C_p^* = \frac{5}{2} R^* = \frac{3}{2} R^* + R^* = C_v^* + R^*. \quad (27.20)$$

5. Отношение изобарной теплоемкости к изохорной называется *коэффициентом Пуассона*:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{C_p^*}{C_v^*}. \quad (27.21)$$

Сопоставив (27.11) и (27.19), получим важный результат: для всех одноатомных газов коэффициент Пуассона имеет одно и то же значение,

$$\gamma = \frac{5}{3} = 1,67. \quad (27.22)$$

Эксперимент в весьма широком диапазоне температур, при котором одноатомный газ можно рассматривать как идеальный, блестяще подтверждает результат этого расчета.

## § 27.6. Изотермический процесс

1. Как говорилось в § 26.1, изотермическим называется процесс, происходящий при неизменной температуре газа. Там же было показано, что соотношение между давлением и объемом газа при изотермическом процессе выражается законом Бойля и Мариотта (26.4), и были вычерчены графики изотермы на осях  $p-V$  и  $p-\rho$ .

Работа, совершаемая при изотермическом процессе, графически выражается площадью криволинейной трапеции. Элементарными методами эту работу вычислить нельзя, но для заданных числовых значений объемов и давлений всегда можно произвести численный расчет по методу, изложенному в § 27.2.

Рекомендуем читателю произвести расчет самостоятельно. Полученный результат можно проверить по формуле, которую приведем без доказательства:

$$A_T = 2,3p_1V_1 \lg \frac{V_2}{V_1} = 2,3NkT \lg \frac{V_2}{V_1}.$$

2. При изотермическом процессе внутренняя энергия газа не меняется, что непосредственно следует из (27.3), ибо  $T_2 = T_1 = T$ . Отсюда иногда делают неверный вывод: раз при изотермическом процессе температура не меняется, то газу якобы не нужно сообщать теплоту. Это неверное рассуждение! Из первого начала термодинамики (27.6) вытекает

$$Q_T = A_T, \quad (27.23)$$

т. е. при изотермическом процессе газу необходимо сообщить некоторое количество теплоты, в точности равное работе, которую совершает газ.

3. Поскольку при изотермическом процессе газу сообщается теплота, а его температура при этом не меняется, то понятие изотермической теплоемкости, вообще говоря, не имеет смысла: в знаменатель дроби (27.8) нужно подставить  $T_2 - T_1 = 0$ , а при делении на нуль получается бесконечность.

Если же процесс почти изотермический, т. е. происходит почти при неизменной температуре, то теплоемкость газа при этом выражается очень большим числом, ибо если знаменатель дроби стремится к нулю, то сама дробь неограниченно возрастает. Именно в этом смысле говорят, что при изотермическом процессе теплоемкость газа бесконечно велика.

## § 27.7. Адиабатный процесс

1. Как говорилось в § 21.5, адиабатным называется процесс, происходящий в системе, которая не вступает в теплообмен с окружающей средой. Согласно данному определению  $\Delta Q_{ад} = 0$ . Отсюда следует (см. (27.8)), что и адиабатная теплоемкость газа равна нулю:  $c_{ад} = 0$ .

Для того чтобы процесс, происходящий с газом, можно было считать адиабатным, газ следует теплоизолировать, т. е. заключить его в адиабатную оболочку (типа сосуда Дьюара). Однако есть и другая возможность: процесс можно



провести настолько быстро, чтобы не успел произойти теплообмен между газом и окружающей средой. Это возможно, поскольку теплообмен происходит значительно медленнее, чем сжатие или расширение газа.

2. При адиабатном расширении газ совершает работу за счет убыли его внутренней энергии (поскольку теплообмен с окружающей средой отсутствует). Соответственно при адиабатном сжатии газа его внутренняя энергия возрастает за счет работы внешних сил. А так как внутренняя энергия идеального газа целиком определяется его температурой, то ясно, что *при адиабатном сжатии идеального газа его температура возрастает, а при расширении — убывает.*

Это широко применяется на практике. Так, если открыть вентиль баллона, в котором находится сжатый углекислый газ (при давлении около 40 атм), то последний станет адиабатно расширяться. При этом его температура падает до  $-80^{\circ}\text{C}$ , и часть газа превращается в кристаллическую массу наподобие снега. Спрессовывая эту массу, получают «сухой лед».

В двигателях внутреннего сгорания типа «Дизель» при быстром адиабатном сжатии воздуха его температура возрастает до  $500\text{--}600^{\circ}\text{C}$ , что приводит к самовоспламенению жидкого топлива, вбрызгиваемого в цилиндр в конце сжатия.

3. Поскольку адиабатный процесс происходит без теплообмена с окружающей средой, то для вычисления работы следует в выражении (27.6) положить  $Q_{\text{ад}}=0$ . Получим для одноатомного газа согласно (27.7):

$$A_{\text{ад}} = \frac{3}{2} Nk(T_1 - T_2), \quad (27.24)$$

где  $T_1$  — температура в начале и  $T_2$  — температура в конце процесса. Воспользовавшись уравнением газового состояния (26.11), получим

$$A_{\text{ад}} = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1} = \frac{3}{2} (p_1 V_1 - p_2 V_2), \quad (27.25)$$

ибо, согласно (27.22),

$$\gamma - 1 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}.$$

4. Выясним, как меняется давление идеального газа при адиабатном изменении его объема, и построим график адиабаты на осях  $p$ — $V$  (рис. 27.5).

Пусть газ находится в состоянии, которое характеризуется объемом  $V_0$ , давлением  $p_0$  и температурой  $T_0$ . Расширим газ до объема  $V_1$ . Если расширение произвести изотермически, то давление  $p_1^{\text{изот}} = p_0 V_0 / V_1$ . Если же расширение произвести адиабатно, то давление упадет более резко,

поскольку при адиабатном процессе не только возрастает объем, но и температура убывает. Из уравнения газового состояния  $p_0 V_0 / T_0 = p_1 V_1 / T_1$  получим

$$p_1^{\text{ад}} = \frac{p_0 V_0}{V_1} \cdot \frac{T_1}{T_0} = p_1^{\text{изот}} \cdot \frac{T_1}{T_0}.$$

Но так как при адиабатном расширении  $T_1 < T_0$ , то  $p_1^{\text{ад}} < p_1^{\text{изот}}$ . Вследствие этого график адиабаты на рис. 27.5 идет ниже графика изотермы.

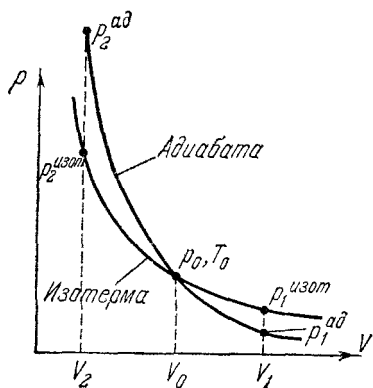


Рис. 27.5.

Проделав аналогичное рассуждение для случая сжатия газа из состояния с параметрами  $p_0, V_0, T_0$  в состояние  $p_2, V_2, T_2$ , читатель убедится, что при этом благодаря повышению температуры  $p_2^{\text{ад}} > p_2^{\text{изот}}$ , и график адиабаты пройдет уже выше графика изотермы.

Из графика видно, что при адиабатном расширении газ совершает меньшую работу, чем при изотермическом процессе (рис. 27.6). При адиабатном же сжатии газа внешние силы совершают большую работу, чем при изотермическом (рис. 27.7).

4. Связь между давлением и объемом идеального газа при адиабатном процессе выражается уравнением Пуассона, которое мы приводим без доказательства:

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma. \quad (27.26)$$

Рекомендуем читателю, воспользовавшись определением плотности газа и уравнением газового состояния, получить

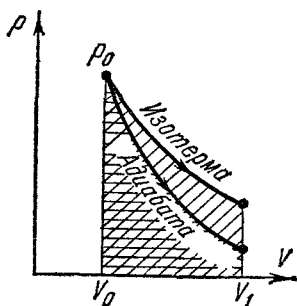


Рис. 27.6.

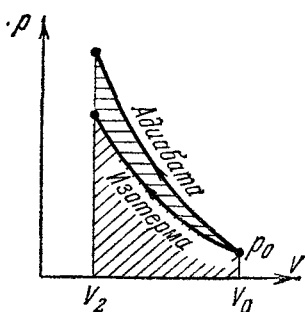


Рис. 27.7.

следующие следствия из уравнения Пуассона:

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^\gamma, \quad \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^\gamma, \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}.$$

## § 27.8. Теплоемкость двухатомного газа

1. Опыт показывает, что теплоемкости двухатомных газов (водорода, кислорода, азота и др.), а также многоатомных газов (углекислого газа, метана и т. п.) значительно больше теплоемкостей одноатомных газов. Кроме того, теплоемкости этих газов при разных температурах различны, в то время как теплоемкости одноатомных газов не зависят от температуры. Не имея возможности изложить здесь теорию теплоемкостей многоатомных газов, мы на примере водорода и кислорода выясним характер зависимости теплоемкости двухатомных газов от температуры, а затем изложим основные идеи квантовой теории этого явления.

2. При нормальном давлении точка кипения водорода равна  $20,45^\circ \text{ К}$ . Очевидно, что вблизи этой температуры водород нельзя рассматривать как идеальный газ. Однако при более высоких температурах, начиная примерно с  $30^\circ \text{ К}$ , этот газ при нормальном давлении ведет себя уже как идеальный.

Теплоемкость водорода в интервале температур порядка 30—80° К не отличается от теплоемкости одноатомного газа. При повышении же температуры теплоемкость постепенно возрастает, а коэффициент Пуассона уменьшается. Соответствующие экспериментальные и расчетные данные приведены в табл. 27.1.

Таблица 27.1

°К	Эксперимент		Вычислено		
	$C_p^*$ , $\frac{\text{ккал}}{\text{кмоль} \cdot \text{град}}$	$\gamma$	$\frac{C_p^*}{R^*}$	$\frac{C_V^*}{R^*}$	$\frac{C_p^* - C_V^*}{R^*}$
50	4,96	1,66	2,51	1,51	1,00
100	5,48	1,57	2,76	1,76	1,00
273	6,86	1,41	3,46	2,46	1,00
773	7,06	1,39	3,56	2,56	1,00
1273	7,49	1,36	3,76	2,77	0,99

3. Точка кипения кислорода при нормальном давлении равна 90,25° К. Начиная с температуры порядка 100° К, кислород при нормальном давлении ведет себя как идеальный газ, изобарная молярная теплоемкость которого примерно равна  $C_p^* \approx \frac{7}{2} R^*$ , а коэффициент Пуассона  $\gamma \approx 1,4$ . С ростом температуры теплоемкость возрастает (см. табл. 27.2).

Таблица 27.2

°К	Эксперимент		Вычислено		
	$C_p^*$ , $\frac{\text{ккал}}{\text{кмоль} \cdot \text{град}}$	$\gamma$	$\frac{C_p^*}{R^*}$	$\frac{C_V^*}{R^*}$	$\frac{C_p^* - C_V^*}{R^*}$
150	6,96	1,40	3,50	2,50	1,00
273	7,01	1,39	3,53	2,53	1,00
773	8,02	1,33	4,04	3,05	0,99
1273	8,59	1,29	4,32	3,34	0,98

На рис. 27.8 изображена зависимость изохорных теплоемкостей водорода и кислорода от температуры. Для сравнения показана также теплоемкость одноатомного газа.

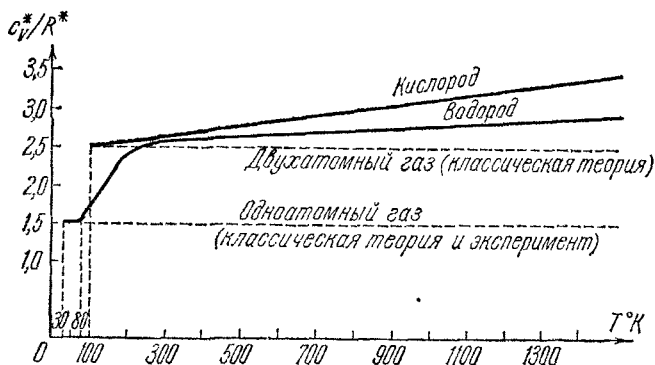


Рис. 27.8.

4. Как и в случае одноатомного газа, изохорная теплоемкость характеризует количество теплоты, идущее на изменение внутренней энергии газа. Но при одной и той же температуре средние кинетические энергии *поступательного* движения одноатомных и многоатомных молекул совпадают. Следовательно, внутренняя энергия многоатомных газов представляет собой сумму энергий не только поступательного движения молекул, но и других видов движений: *вращения молекул и колебаний атомов внутри молекулы.*

В классической молекулярной теории предполагалось, что молекула двухатомного газа представляет собой жесткую систему из двух шариков, расстояние между которыми не меняется (наподобие гантели). Молекула может двигаться поступательно вдоль трех произвольных осей координат и вращаться вокруг двух из них, например  $Oy$  и  $Oz$  (рис. 27.9).

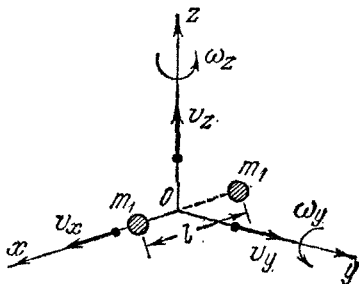


Рис. 27.9.

Вращение вокруг оси  $Ox$  не вносит вклада в энергию молекулы ввиду малого значения момента инерции молекулы относительно этой оси. Следовательно, энергия молекулы складывается из кинетической энергии трех поступательных движений и кинетической энергии двух вращений:

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{m\bar{v}_x^2}{2} + \frac{m\bar{v}_y^2}{2} + \frac{m\bar{v}_z^2}{2} + \frac{J\bar{\omega}_y^2}{2} + \frac{J\bar{\omega}_z^2}{2}. \quad (27.27)$$

В классической молекулярной теории доказывается, что на каждое из этих движений приходится в среднем одна и та же энергия, равная  $kT/2$ :

$$\frac{m\bar{v}_x^2}{2} = \frac{m\bar{v}_y^2}{2} = \frac{m\bar{v}_z^2}{2} = \frac{J\bar{\omega}_y^2}{2} = \frac{J\bar{\omega}_z^2}{2} = \frac{1}{2} kT.$$

Подставив последнее выражение в (27.27), получим, что средняя энергия молекулы двухатомного газа

$$\bar{\epsilon}_k = \frac{5}{2} kT. \quad (27.28)$$

Отсюда следует, что внутренняя энергия одного киломоля двухатомного газа

$$U^* = \frac{5}{2} N^* kT + \text{const} = \frac{5}{2} R^* T + \text{const}. \quad (27.29)$$

Изохорная же молярная теплоемкость

$$C_V^* = \frac{5}{2} R^*. \quad (27.30)$$

5. Сравнив последний результат с данными эксперимента (см. рис. 27.8), мы видим, что численные значения теплоемкостей двухатомных газов плохо согласуются с теоретическим значением (27.30). Так, для кислорода расхождение составляет около 20—30%. Однако классическая теория обладает и более существенными недостатками — она не в состоянии объяснить следующие факты:

1) Почему теплоемкости двухатомных (и вообще многоатомных) газов возрастают с ростом температуры?

2) Почему при низких температурах теплоемкость водорода совпадает с теплоемкостью одноатомных газов (т. е.  $C_V^* = \frac{3}{2} R^*$ , а не  $\frac{5}{2} R^*$ , как при более высоких температурах)?

3) Почему этот эффект проявляется у водорода, а у кислорода он отсутствует?

4) Почему двухатомные молекулы ведут себя как жесткие системы? Почему при соударениях не возбуждаются колебания атомов в молекуле?

Ответить на эти вопросы удалось только на основе квантовой теории теплоемкости.

## § 27.9. Понятие о квантовой теории теплоемкости газов

1. Энергия молекулы двухатомного газа может быть представлена как сумма кинетических энергий ее поступательного и вращательного движения и энергии колебания атомов внутри молекулы:

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_{\text{пост}}^{\text{кин}} + \bar{\epsilon}_{\text{вр}}^{\text{кин}} + \bar{\epsilon}_{\text{колеб}} = \frac{p^2}{2m} + \frac{L^2}{2J} + \bar{\epsilon}_{\text{колеб}}, \quad (27.31)$$

где  $p$  — импульс молекулы,  $L$  — момент импульса,  $m$  — масса молекулы,  $J$  — момент инерции. Изменение внутренней энергии газа сводится к изменению энергии поступательного и вращательного движения молекул и энергии колебаний. Однако согласно квантовой теории эти три компоненты энергии молекулы по-разному реагируют на изменение температуры газа.

2. Изменение кинетической энергии поступательного движения сводится к изменению импульса молекулы. Естественно, что изменение импульса должно быть не меньше неопределенности импульса, которую можно вычислить из соотношения (14.5). Полагая в (14.5) неопределенность координаты равной по порядку длине свободного пробега молекулы,  $\Delta l \approx \lambda \approx 10^{-7}$  м (см. § 25.3), получим неопределенность импульса

$$\Delta p \approx \frac{\hbar}{\Delta l} \approx \frac{10^{-34}}{10^{-7}} = 10^{-27} \text{ кг} \cdot \text{м/сек.}$$

Ей соответствует неопределенность в значении кинетической энергии молекулы

$$\Delta \epsilon_{\text{пост}} = \frac{\Delta p^2}{2m}.$$

Неопределенности энергии соответствует неопределенность

температуры  $\Delta T_{\text{пост}}$ , которую можно найти из соотношения

$$\Delta \epsilon_{\text{пост}} = \frac{\Delta p^2}{2m} = \frac{3}{2} k \Delta T_{\text{пост}}.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta T_{\text{пост}} = \frac{\Delta p^2}{3mk}. \quad (27.32)$$

Масса молекулы водорода

$$m = \frac{2 \text{ кг}}{6,02 \cdot 10^{23}} = 3,32 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Следовательно,

$$\Delta T_{\text{пост}} \approx \frac{10^{-34}}{3 \cdot 3,32 \cdot 10^{-27} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ \text{К}.$$

Фактически это означает, что энергия поступательного движения может меняться при любом изменении температуры. Следовательно, квантовая теория в этом случае дает такой же результат, как и классическая статистика.

3. Изменение кинетической энергии вращательного движения молекулы сводится к изменению ее момента импульса. В квантовой теории доказывается, что изменение момента импульса не может быть любым — оно кратно постоянной Планка. Отсюда следует, что момент импульса молекулы может принимать ряд значений \*):

$$L_1 = \hbar, \quad L_2 = 2\hbar, \quad \dots, \quad L_n = n\hbar.$$

Соответственно и кинетическая энергия вращательного движения молекулы может принимать значения

$$\epsilon_{\text{вр}}^{(1)} = \frac{L_1^2}{2J} = \frac{\hbar^2}{2J}, \quad \epsilon_{\text{вр}}^{(2)} = \frac{L_2^2}{2J} = \frac{4\hbar^2}{2J} \text{ и т. д.}$$

Минимальное изменение кинетической энергии вращательного движения молекулы  $\Delta \epsilon_{\text{вр}}^{\text{квн}} = \epsilon_{\text{вр}}^{(2)} - \epsilon_{\text{вр}}^{(1)} = \frac{3\hbar^2}{2J}$ . Этому изменению энергии соответствует изменение температуры, которое следует из равенства  $\frac{3}{2} k \Delta T_{\text{вр}} = \frac{3\hbar^2}{2J}$ , откуда

$$\Delta T_{\text{вр}} = \frac{\hbar^2}{Jk}. \quad (27.33)$$

\*) Во втором томе мы уточним этот результат.



4. Момент инерции молекулы водорода можно найти из следующих соображений. Представим себе эту молекулу в виде гантели (см. рис. 27.9); расстояние между центрами атомов  $l \approx 0,74 \cdot 10^{-10}$  м; масса атома водорода вдвое меньше массы молекулы и равна  $m_1 = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг. Тогда

$$J_{H_2} = 2m_1 r^2 = \frac{m_1 l^2}{2} \approx 4 \cdot 10^{-48} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

( $r = l/2$ ). Подставив в (27.33), получим, что для изменения кинетической энергии вращательного движения молекулы водорода температура газа должна измениться на

$$\Delta T_{вр} \approx \frac{10^{-68}}{4 \cdot 10^{-48} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} \approx 180^\circ \text{ К.}$$

Итак, при температурах порядка  $200^\circ \text{ К}$  молекулы при соударениях в состоянии изменить энергию своего вращательного движения, и поэтому  $C_V^* \approx \frac{5}{2} R^*$ .

При температурах около  $100^\circ \text{ К}$  лишь небольшая часть молекул, энергия которых, согласно распределению Максвелла (см. § 25.2), больше средней, в состоянии при соударениях изменить энергию вращения молекул. Поэтому при этих температурах  $\frac{3}{2} R^* < C_V^* < \frac{5}{2} R^*$ . А при температурах порядка  $50^\circ \text{ К}$  процент молекул, способных при соударении изменить энергию вращения, оказывается столь малым, что фактически при изменениях температуры меняется кинетическая энергия только поступательного движения молекул. Естественно, что при этих температурах изохорная теплоемкость водорода  $C_V^* = \frac{3}{2} R^*$  такая же, как у одноатомного газа.

5. Совершенно иначе обстоит дело с теплоемкостью кислорода. Здесь масса атома в 16 раз больше массы атома водорода, а расстояние между центрами атомов  $l \approx 1,2 \times 10^{-10}$  м; следовательно, момент инерции молекулы кислорода примерно в 40 раз больше момента инерции молекулы водорода. Согласно (27.33) изменение температуры газа, сопровождающееся изменением энергии вращения, составит для кислорода  $\Delta T_{вр} \approx \frac{180}{40} \approx 4^\circ \text{ К}$ . А так как точка

кипения кислорода при нормальном давлении равна  $90^\circ \text{K}$ , то при тех условиях, когда кислород можно рассматривать как идеальный газ, у него при столкновениях будут возрастать кинетические энергии как поступательного, так и вращательного движения молекул, что соответствует классической теории теплоемкостей двухатомных газов.

6. В предыдущих рассуждениях мы не учитывали энергии колебательного движения молекул, молчаливо предполагая, что при рассматриваемых температурах она является постоянной величиной. Причина такого положения вещей также хорошо объясняется на основе квантовой механики, где доказывается, что в первом приближении энергия колебания

$$\epsilon_{\text{колеб}} = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right).$$

Здесь  $\omega$  — собственная частота колебаний атомов в молекуле, а  $n$  — целое число:  $n=0, 1, 2, 3, \dots$ . Отсюда следует, что минимальное изменение энергии колебания  $\Delta\epsilon_{\text{колеб}} = \hbar\omega$ .

Собственные частоты колебаний молекул определяются оптическими методами. Для водорода  $\omega_{\text{H}_2} = 7,86 \cdot 10^{14} \text{ рад/сек}$ ; для кислорода  $\omega_{\text{O}_2} = 2,94 \cdot 10^{14} \text{ рад/сек}$ .

Вычислим температуру, при которой за счет соударения между молекулами возрастает энергия колебаний. Получим  $\frac{3}{2} k \Delta T = \Delta\epsilon_{\text{колеб}} = \hbar\omega$ , откуда

$$\Delta T_{\text{колеб}} = \frac{2\hbar\omega}{3k}. \quad (27.34)$$

Для водорода

$$\Delta T_{\text{колеб}} \approx \frac{2 \cdot 10^{-34} \cdot 7,86 \cdot 10^{14}}{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} \approx 3800^\circ \text{K};$$

для кислорода

$$\Delta T_{\text{колеб}} \approx \frac{2 \cdot 10^{-34} \cdot 2,94 \cdot 10^{14}}{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}} \approx 1400^\circ \text{K}.$$

Естественно, что в диапазоне температур порядка до  $1300\text{—}1500^\circ \text{K}$  энергия колебаний в молекуле водорода практически не меняется и теплоемкость водорода практически не возрастает (см. рис. 27.9).

В молекуле же кислорода энергия колебаний возрастает при значительно более низких температурах. Уже при тем-

пературах порядка  $700\text{—}900^\circ\text{K}$  примерно половина молекул оказывается способной увеличить энергию колебаний, вследствие чего  $C_V^* \approx 3R^*$ , что больше классического значения для двухатомного газа, равного  $2,5R^*$ . При температурах же порядка  $1400\text{—}1500^\circ\text{K}$  все молекулы должны при соударениях изменять энергию колебаний.

Можно вычислить предел, к которому в этом случае стремится изохорная теплоемкость кислорода, воспользовавшись тем же правилом, которое мы в § 27.8 применили для учета кинетической энергии поступательного и вращательного движений. При колебаниях меняется как кинетическая, так и потенциальная энергия молекулы. Оказывается, что их изменения одинаковы и равны каждое  $kT/2$ . Взамен (27.28) получится выражение

$$\bar{\varepsilon}_k = \frac{7}{2} kT. \quad (27.35)$$

Отсюда следует, что

$$C_V^* = \frac{7}{2} R^*, \quad C_p^* = \frac{9}{2} R^* \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{9}{7} = 1,29.$$

Сравнив с табл. 27.2, мы видим, что полученный нами результат соответствует эксперименту.

7. Итак, мы убедились, что на основе квантовых представлений можно объяснить характерные особенности поведения теплоемкостей двухатомных газов. Классическая же статистика не в состоянии объяснить все эти явления, хотя и позволяет в некоторых случаях получить предельные значения интересующих нас величин.

## Г Л А В А 28

### ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

#### § 28.1. Квазистатические процессы

1. В предыдущих главах, рассматривая различные процессы, происходящие с идеальным газом, мы говорили о его температуре, плотности, давлении. При этом молчаливо предполагалось, что во всех точках данного объема газа его давление, плотность и температура одинаковы. Эти величины называются *термодинамическими параметрами* состояния.

Строго говоря, равенство термодинамических параметров во всех точках системы возможно только при условии, что она находится в состоянии равновесия. Если же в системе происходят какие-либо процессы, то данное условие нарушается.

Так, если слегка передвинуть поршень в цилиндре, то газ вблизи поршня слегка сожмется, и в этой области его давление, плотность и температура возрастут. В других же участках параметры газа не успеют сразу измениться (рис. 28.1). Через некоторое время  $\tau$ , которое называется *временем релаксации*, нарушенное равновесие восстановится. При этом термодинамические параметры газа во всех точках примут новые, но повсюду вновь одинаковые значения.

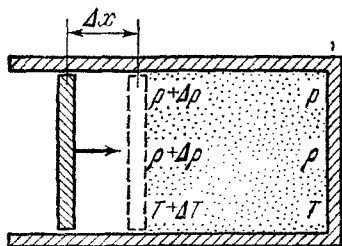


Рис. 28.1.

Пусть сжатие происходит настолько медленно, что время его протекания много больше времени релаксации. В этом случае весь процесс можно представить в виде суммы большого числа очень малых сжатий, причем так, что длительность каждого микросжатия окажется все же больше времени релаксации. Тогда в течение каждого из микросжатий в системе успеет установиться равновесие, и весь процесс будет представлять собой совокупность переходов через множество равновесных состояний.

Процессы, при которых система проходит через ряд положений равновесия, называются *квазистатическими*, т. е. как бы равновесными (от латинского *quasi* — как будто, вроде).

2. Скорость изохорного, изобарного или изотермического процесса ничем не ограничена, так что эти процессы можно проводить сколь угодно медленно. А поэтому в сосуде небольших размеров, стенки которого обладают большой теплопроводностью, можно любой из этих процессов с наперед заданной точностью приблизить к квазистатическому.

Значительно труднее осуществить квазистатический адиабатный процесс. С одной стороны, он должен протекать

настолько быстро, чтобы не было заметного теплообмена с окружающей средой. С другой стороны, время его протекания должно быть много больше времени релаксации. Поскольку оба эти условия противоречивы, удовлетворить им одновременно нелегко, и процессы, происходящие на практике, лишь с известным приближением являются адiabатными и в то же время квазистатическими.

3. На графиках изображаются только квазистатические процессы, ибо каждая точка на графике характеризует какое-либо промежуточное состояние равновесия. Вопрос о методике изображения реальных, а не квазистатических процессов здесь не будет рассматриваться.

## § 28.2. Обратимые процессы

1. *Обратимым* называется процесс, который отвечает следующим условиям:

а) его одинаково легко можно провести в двух противоположных направлениях;

б) в каждом из этих случаев система и окружающие ее тела проходят через одни и те же промежуточные состояния;

в) после проведения прямого и обратного процесса система и окружающие ее тела возвращаются к исходному состоянию.

Всякий процесс, не удовлетворяющий хотя бы одному из этих условий, является *необратимым*.

2. *Обратимыми являются процессы, протекающие в системах, где действуют консервативные силы (§ 18.5).*

Действительно, пусть абсолютно упругий шарик падает в вакууме на абсолютно упругую плиту. Пользуясь законами упругого удара (см. § 17.3), нетрудно показать, что шарик, упав на плиту, вернется после отражения в исходную точку, пройдя в обратном направлении все те промежуточные состояния, которые он проходил при падении. После окончания процесса шарик и все окружающие его тела вернутся в первоначальное состояние, и это может повториться сколько угодно раз.

Так же легко убедиться, что колебания маятника в вакууме или тела на абсолютно упругой пружине также представляют собой обратимые процессы.

3. Нетрудно убедиться, что *все квазистатические тепловые процессы также обратимы*. Рассмотрим для примера квазистатический изотермический процесс.

Пусть газ квазистатически и вместе с тем изотермически расширился и его объем возрос на малую величину  $\Delta V$ . Поскольку при данном процессе система все время проходила через равновесные состояния, то очевидно, что в любой момент его можно направить в обратном направлении, т. е. сжать на ту же величину  $\Delta V$ . При этом вся система пройдет через те же промежуточные состояния, которые она проходила при расширении.

Как известно (см. § 27.6), газ при изотермическом расширении совершает работу, получая из окружающей среды путем теплообмена некоторое количество теплоты:  $Q_T = A_T$ . Пусть эта работа пошла на увеличение потенциальной энергии какого-то тела массой  $m$ , которое поднимается на высоту  $h$ . Тогда из закона сохранения энергии следует, что  $Q_T = A_{\text{расш}} = mgh$ . При обратном процессе тело опустится на ту же высоту  $h$ ; потенциальная энергия груза пойдет на совершение работы по сжатию газа; при этом газ отдаст окружающей среде путем теплообмена такое же количество теплоты, которое он получил при расширении.

Итак, после проведения процесса расширения, а затем сжатия газа он сам и все окружающие тела вернуться к начальным условиям, пройдя через одни и те же промежуточные состояния. Следовательно, квазистатический изотермический процесс обратим.

Аналогичные рассуждения позволяют доказать обратимость и любых других квазистатических процессов, ибо в предыдущем рассмотрении важен был не характер теплообмена системы с окружающей средой, а равновесный способ прохождения системой всех промежуточных состояний, т. е. квазистатический характер процесса.

### § 28.3. Необратимость реальных тепловых процессов

1. Рассмотренные примеры обратимых процессов представляют собой идеализацию реальных природных явлений. На самом деле в природе нет строго консервативных систем; например, в любой реальной системе действуют силы трения. В природе нет также строго квазистатических процес-

сов, ибо все тепловые процессы протекают не бесконечно медленно, а с конечной скоростью. А отсюда следует, что *все реальные процессы в природе необратимы*.

Не следует, однако, думать, что понятие об обратимом квазистатическом процессе является бессодержательным, а потому излишним. Аналогично таким идеализациям, как материальная точка, точечный заряд, консервативная система и т. п., понятие об обратимом процессе оказывается весьма удобной идеализацией реальных процессов, позволяющей в ряде случаев упростить решение той или иной конкретной задачи. Следует только всегда вначале тщательно проверить, в какой степени применение этой идеализации законно, в какой степени результаты идеализированного расчета приближаются к результатам эксперимента.

Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие необратимость реальных тепловых процессов.

2. Как показывает опыт, при диффузии выравнивание концентраций происходит самопроизвольно, без внешнего воздействия. Обратный же процесс сам по себе никогда не пойдет: сколько бы времени мы ни ждали, не получится так, чтобы, например, смесь газов разделилась на исходные компоненты или растворенное в жидкости вещество (соль, сахар, краска и т. п.) само по себе выделилось из этой жидкости.

Конечно, смесь можно разделить на исходные компоненты. Но при этом, во-первых, система не проходит через те промежуточные состояния, которые она проходила в процессе диффузии. А во-вторых, возвращение системы к исходному состоянию приводит к существенному изменению свойств окружающих ее тел. Так, разделяя газовую смесь, возникшую при диффузии, на исходные компоненты (см. § 25.6), мы должны затратить энергию на работу насосов; точно так же, выделяя, скажем, соль из водного раствора путем дистилляции, мы расходуем энергию на испарение воды, что связано с изменением состояния окружающих данную систему тел.

Итак, диффузия является односторонним, а тем самым и необратимым процессом.

3. Опыт показывает, что теплообмен, как и диффузия, является односторонне направленным процессом. В результате теплообмена энергия передается сама собой всегда от тела с более высокой температурой к телу с более низкой

температурой. Вследствие этого теплообмен всегда сопровождается выравниванием температур. Обратный процесс передачи энергии в форме тепла от холодных тел к горячим сам по себе никогда не происходит.

Одностороннее направление имеет также процесс превращения механической энергии во внутреннюю при неупругом ударе или при трении. Механическая энергия соприкасающихся тел превращается во внутреннюю, за счет чего их температура повышается. Однако сколько бы мы ни ждали, не произойдет обратный процесс самопроизвольного превращения внутренней энергии в механическую.

### § 28.4. Необратимость и статистика

1. На первый взгляд необратимость тепловых процессов представляется парадоксальной. Действительно, все тепловые процессы в конечном счете сводятся к механическим — к движению и взаимодействию молекул. Но ведь механические процессы обратимы; чем же вызвана необратимость тепловых явлений?

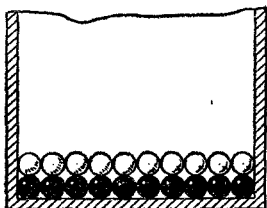


Рис. 28.2.

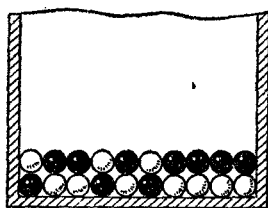


Рис. 28.3.

Разрешить это кажущееся противоречие удастся с помощью молекулярной статистики, в которой методы теории вероятностей применяются для изучения процессов, происходящих в системе, состоящей из огромного множества частиц. Суть ее идей мы вначале рассмотрим на более простом примере модели сосуда с двумя сортами шаров.

2. Пусть на дне сосуда лежат два слоя шаров одинакового размера и одинаковой массы, но окрашенных в два цвета: снизу десять черных шаров, сверху — десять белых (рис. 28.2). При встряхивании сосуда они перемешаются и в каждом ряду получится набор черных и белых шаров,



например такой, как на рис. 28.3. Сколько бы мы затем ни встряхивали сосуд, практически никогда не восстановится первоначальное состояние. Итак, процесс перемешивания шаров необратим — при встряхивании ящика упорядоченное расположение самопроизвольно переходит в беспорядочное, а обратный процесс сам по себе практически никогда не идет.

В чем же причина необратимости этого процесса? Откуда шары «знают», что нужно располагаться в беспорядке, а не упорядоченно? Ответить на этот вопрос можно будет, если мы сможем подсчитать, сколько всего имеется возможных комбинаций для распределения десяти черных и десяти белых шаров в два слоя.

3. Для облегчения расчета обозначим как-то шары, например все белые — заглавными буквами алфавита, все черные — строчными:

Белые	А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, К
Черные	а, б, в, г, д, е, ж, з, и, к

Пусть в верхнем ряду лежат три белых шара и семь черных (рис. 28.3). Естественно, что в нижнем ряду их число будет обратным — семь белых и три черных, так что выбор какого-либо распределения шаров в верхнем ряду автоматически определяет их распределение в нижнем. Вычислим, сколько комбинаций шаров соответствует данному распределению. Из десяти белых шаров можно выбрать три шара разными способами: АБВ, АБЖ, ДЕК и т. д. Их число равно числу сочетаний, которые можно составить из 10 элементов по 3. Оно обозначается  $C_{10}^3$  и равно

$$C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Аналогично подсчитывается число способов, с помощью которых можно выбрать семь черных шаров из десяти:

$$C_{10}^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = C_{10}^3 = 120^*).$$

\*) Заметим, что всегда  $C_m^n = C_m^{m-n}$ . Рекомендуется проверить это свойство сочетаний на примерах. Общее доказательство дается в курсах математики.

Поскольку черные шары могут выбираться независимо от белых (лишь бы их число было равно 10), то общее число комбинаций, с помощью которых можно осуществить распределение из трех белых и семи черных шаров в верхнем ряду, равно произведению числа сочетаний из белых и из черных шаров, т. е. равно  $C_{10}^3 \cdot C_{10}^7 = (120)^2 = 14\,400$ .

Аналогично можно подсчитать число комбинаций, соответствующих расположению из двух белых и восьми черных шаров, из четырех белых и шести черных и т. д. Результаты подсчета сведем в табл. 28.1.

Таблица 28.1

Номер состояния	Расположение шаров в верхнем ряду		Число комбинаций, соответствующих данному состоянию	В процентах
	белых	черных		
1	10	0	$C_{10}^{10} \cdot C_{10}^0 = 1$	0,00054
2	9	1	$C_{10}^9 \cdot C_{10}^1 = (C_{10}^1)^2 = 10^2 = 100$	0,05446
3	8	2	$C_{10}^8 \cdot C_{10}^2 = (C_{10}^2)^2 = \left(\frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2}\right)^2 = 2025$	1,096
4	7	3	$C_{10}^7 \cdot C_{10}^3 = (C_{10}^3)^2 = \left(\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right)^2 = 14400$	7,794
5	6	4	$C_{10}^6 \cdot C_{10}^4 = (C_{10}^4)^2 = \left(\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\right)^2 = 44100$	23,87
6	5	5	$C_{10}^5 \cdot C_{10}^5 = \left(\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\right)^2 = 63504$	34,37
7	4	6	$C_{10}^4 \cdot C_{10}^6 = (C_{10}^4)^2 = 44100$	23,87
8	3	7	$C_{10}^3 \cdot C_{10}^7 = (C_{10}^3)^2 = 14400$	7,794
9	2	8	$C_{10}^2 \cdot C_{10}^8 = (C_{10}^2)^2 = 2025$	1,096
10	1	9	$C_{10}^1 \cdot C_{10}^9 = (C_{10}^1)^2 = 100$	0,05446
11	0	10	$C_{10}^0 \cdot C_{10}^{10} = 1$	0,00054
Всего			184 756	100

4. Будем встряхивать сосуд и каждый раз при этом фотографировать возникшее распределение шаров. Если сделать большое число снимков, например миллион, то из них примерно 5—6 снимков будут соответствовать распределению, когда внизу лежат все белые, а сверху — все черные шары; столько же снимков дадут обратную картину; число же снимков, соответствующих распределению, когда в каждом ряду находится пять белых и пять черных шаров, будет равно примерно 344000!

Итак, система из десяти белых и десяти черных шаров может находиться в одиннадцати различных состояниях. Однако каждое из этих состояний может быть реализовано разным числом комбинаций шаров.

*Термодинамической вероятностью данного состояния некоторой системы тел называется число комбинаций отдельных элементов системы, с помощью которых реализуется это состояние.*

Из табл. 28.1 видно, что наибольшая термодинамическая вероятность соответствует равномерному распределению черных и белых шаров в обоих рядах (состояние № 6) и состояниям № 5 и 7, близким к равномерному. Наименьшая же термодинамическая вероятность соответствует полностью упорядоченному расположению шаров (состояния № 1 и 11), а также состояниям № 2 и 10, близким к полной упорядоченности.

5. Можно показать, что *время пребывания некоторой системы в том или ином состоянии пропорционально термодинамической вероятности этого состояния.* Тем самым становится ясной причина необратимости процесса перемешивания шаров. При встряхивании сосуда шары располагаются случайным образом, и в принципе может возникнуть любая комбинация. Однако чаще всего реализуется то состояние, термодинамическая вероятность которого больше. Так, если сосуд с шариками непрерывно встряхивать в течение суток, то в состоянии № 6 система будет пребывать около 8 часов, в состоянии № 5 или № 7 — около 6 часов, а в состояниях № 1 или № 11 — всего лишь около 0,5 секунды!

Итак, *необратимость процесса перемешивания шаров определяется термодинамической вероятностью тех состояний, в которых может пребывать данная система.*

Самопроизвольно идет процесс перехода из состояния с малой термодинамической вероятностью в более вероятное состояние. Обратный же процесс перехода из беспорядочного (и тем самым наиболее равномерного) распределения элементов системы (шаров) в упорядоченное состояние практически никогда сам по себе не происходит именно потому, что вероятность такого процесса совершенно ничтожна.

Аналогичный результат мы получим при анализе явлений в любой системе, состоящей из большого числа однородных элементов, например в системе, состоящей из множества молекул, движущихся беспорядочно.

### § 28.5. Диффузия и термодинамическая вероятность

1. Явление диффузии во многом аналогично процессу перемешивания шаров, который был рассмотрен в предыдущем параграфе. Поэтому можно для объяснения причины необратимости этого явления воспользоваться тем же методом. Представим себе сосуд, разделенный пополам непроницаемой перегородкой; обе половины сосуда заполнены одинаковым числом молекул разных газов (рис. 28.4). Если убрать перегородку, то в результате диффузии само-

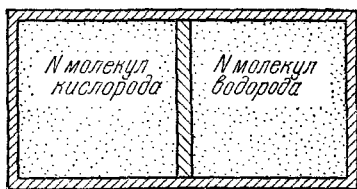


Рис. 28.4.

произвольно возникнет однородная смесь газов. Однако сколько бы мы ни ждали, смесь не разделится самопроизвольно на исходные компоненты.

Сравним вероятность «молекулярного беспорядка», соответствующего однородной смеси газов, с вероятностью «молекулярного порядка», со-

ответствующего исходному распределению обоих газов по разным половинам сосуда.

2. Исходное распределение может быть реализовано только одним способом, следовательно, его термодинамическая вероятность равна единице. Однородную же смесь можно получить огромным числом способов: оно равно произведению числа сочетаний из  $N$  молекул водорода по  $N/2$  молекул в каждой половине сосуда на такое же число соче-

таний из  $N$  молекул кислорода по  $N/2$  молекул в каждой половине. Итак, термодинамическая вероятность этого состояния

$$W_{\text{равном}} = (C_N^{N/2})^2. \quad (28.1)$$

3. В обычных условиях даже в небольших объемах газа содержится колоссальное количество молекул, например в одном кубическом миллиметре — около  $10^{16}$ . При  $N \approx 10^{16}$  термодинамическая вероятность состояния, соответствующего однородной смеси газов, выражается огромным числом:

$$W_{\text{равном}} \approx 10^{10^{15}}.$$

Отсюда ясна причина необратимости явления диффузии. Термодинамическая вероятность состояния однородной смеси несоизмеримо больше вероятности состояния, при котором обе компоненты смеси разделены. А поэтому система самопроизвольно, за счет беспорядочного движения молекул, переходит в наиболее вероятное состояние, соответствующее однородной смеси газов. Обратный же процесс разделения смеси на исходные компоненты настолько маловероятен, что практически он никогда не происходит.

## § 28.6. Термодинамическая вероятность и другие тепловые процессы

1. Понятие термодинамической вероятности может быть применено и для объяснения причины необратимости процесса превращения механической энергии во внутреннюю при неупругом ударе. Однако, в отличие от случая диффузии, здесь подсчитать термодинамическую вероятность очень трудно, и мы ограничимся лишь качественной оценкой этой величины.

Пусть тело, движущееся со скоростью  $v$ , неупруго соударяется со стенкой. В первом состоянии все молекулы тела, участвуя в беспорядочном тепловом движении, вместе с тем движутся в одном направлении с одной и той же скоростью  $v$ . После неупругого удара тело останавливается, но его кинетическая энергия не пропадает — она расходуется

на увеличение внутренней энергии тела и стенки:

$$K = U_2 - U_1 + Q, \quad (28.2)$$

где  $K$  — кинетическая энергия тела до столкновения,  $U_2 - U_1$  — изменение внутренней энергии тела,  $Q$  — количество теплоты, переданное стенке, воздуху и т. п.

2. Кинетическая энергия характеризует полностью упорядоченное движение молекул — все они движутся в одном направлении с одной скоростью. Такое состояние может быть реализовано одним способом, следовательно, его термодинамическая вероятность равна единице.

Переходу кинетической энергии тела во внутреннюю соответствует переход от упорядоченного движения к беспорядочному. Мы не можем элементарно подсчитать число комбинаций, соответствующих различному распределению молекул по всевозможным величинам и направлениям скоростей, характеризующих беспорядочное тепловое движение. Но можно уверенно сказать, что число этих комбинаций при огромном числе молекул исключительно велико. Следовательно, термодинамическая вероятность второго состояния выражается очень большим числом.

3. Итак, процесс превращения механической энергии во внутреннюю есть переход из состояния с малой термодинамической вероятностью в более вероятное состояние. При огромном числе молекул этот процесс идет самопроизвольно. Обратный процесс перехода внутренней энергии в механическую означал бы переход от более вероятного состояния к менее вероятному. При большом числе молекул такой процесс столь мало вероятен, что практически он никогда не произойдет. Именно поэтому процесс преобразования механической энергии во внутреннюю необратим.

4. Читатель легко убедится самостоятельно, что все рассуждения, примененные при анализе явления неупругого удара, можно применить и для рассмотрения процесса преобразования энергии при трении, при нагревании проводников электрическим током и т. п.

Аналогичные рассуждения позволяют выяснить и причину необратимости процесса теплообмена. Однако здесь мы этот вопрос рассматривать не будем, а сделаем это несколько более простым способом в § 28.8.

### § 28.7. Термодинамическая вероятность и энтропия

1. *Термодинамическая вероятность служит характеристикой направленности тепловых процессов.* Сравнив вероятности двух состояний термодинамической системы, мы сразу установим направление процесса, который возможен в данной системе: это будет переход из менее вероятного в более вероятное состояние. Однако вычисление термодинамической вероятности является весьма сложной задачей, так как практически чрезвычайно трудно подсчитать число различных комбинаций молекул, соответствующих тому или иному состоянию системы. Поэтому для термодинамических расчетов используется иная физическая величина, введенная Клаузиусом и названная им *энтропией*.

*Энтропия, как и термодинамическая вероятность, — это физическая величина, характеризующая направленность процессов в природе.*

2. Больцман установил, что *энтропия пропорциональна логарифму термодинамической вероятности:*

$$S = K \lg W, \quad (28.3)$$

где  $S$  — энтропия,  $W$  — термодинамическая вероятность и  $K$  — коэффициент пропорциональности. Планк доказал, что  $K = 2,3 k$ , где  $k$  — постоянная Больцмана. Если система переходит из одного состояния в другое, то с изменением термодинамической вероятности меняется и энтропия:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = K \lg W_2 - K \lg W_1 = K \lg \frac{W_2}{W_1}, \quad (28.4)$$

где индекс 1 относится к первому состоянию, индекс 2 — ко второму.

Выясним основные свойства энтропии — физической величины, играющей исключительно важную роль в термодинамике.

3. Прежде всего, *энтропия системы полностью определяется состоянием, в котором находится система;* она не зависит от того процесса, с помощью которого система пришла в это состояние. В этом отношении энтропия аналогична энергии и отличается от работы или количества теплоты. Причина заключается в том, что каждое состояние системы определяется каким-то числом комбинаций молекул.

Следовательно, ему соответствует определенная термодинамическая вероятность, а согласно (28.3) каждому значению вероятности соответствует одно определенное значение энтропии.

4. Далее, *энтропия системы, состоящей из двух (или нескольких) независимых частей, равна сумме энтропий этих частей*. И в этом отношении энтропия похожа на энергию, ибо при отсутствии взаимодействия между двумя частями системы ее энергия равна сумме энергий этих частей.

Для доказательства вычислим сперва термодинамическую вероятность. Пусть состояние первой части системы реализуется с помощью  $W^{(1)}$  комбинаций молекул, второй части — с помощью  $W^{(2)}$  комбинаций. Поскольку обе части независимы, то каждому сочетанию молекул в первой части системы могут быть поставлены в соответствие  $W^{(2)}$  сочетаний в другой части. Тогда число комбинаций молекул, с помощью которых реализуется состояние всей системы, равно  $W^{(2)} \cdot W^{(1)}$ . Но это и есть ее термодинамическая вероятность. Итак,

$$W = W^{(1)} \cdot W^{(2)}. \quad (28.5)$$

Прологарифмировав выражение (28.5) и умножив полученное равенство на  $K$ , получим

$$K \lg W = K \lg W^{(1)} + K \lg W^{(2)}$$

или, согласно (28.3),

$$S = S^{(1)} + S^{(2)}. \quad (28.6)$$

5. Наконец, очевидно, что при *необратимых процессах*, таких, как диффузия или превращение механической энергии во внутреннюю, *энтропия возрастает*. В самом деле, как было показано выше, при этих процессах возрастает термодинамическая вероятность, а тогда, согласно (28.4), растет и энтропия: если  $W_2 > W_1$ , то и  $S_2 > S_1$ .

## § 28.8. Энтропия и теплообмен

1. Пусть тело изодермически получает или отдает некоторое количество теплоты  $Q$ ; при этом его энтропия меняется. Как показал Клаузиус, в этом случае изменение



энтропии

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \frac{Q}{T}, \quad (28.7)$$

где  $S_1$  — энтропия начального состояния,  $S_2$  — энтропия конечного состояния,  $T$  — температура, при которой происходит теплообмен,  $Q$  — отданное или полученное количество теплоты. При этом, согласно определению понятия «количество теплоты» (см. § 21.3), справедливо следующее правило знаков:  $Q > 0$ , если тело при теплообмене получает энергию;  $Q < 0$ , если тело при теплообмене теряет энергию, отдавая ее другому телу.

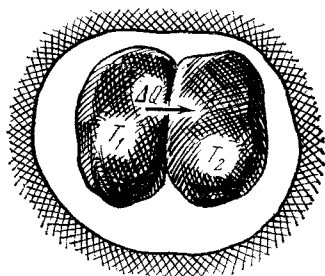


Рис. 28.5.

2. Вычислим изменение энтропии системы из двух тел, если между ними происходит теплообмен. Для простоты расчета положим, что эта система окружена адиабатной оболочкой, так что теплообмен с окружающей средой исключен (рис. 28.5).

Согласно (28.6) имеем

$$\Delta S = \Delta S^{(1)} + \Delta S^{(2)}, \quad (28.8)$$

где  $\Delta S^{(1)}$  — изменение энтропии первого тела, а  $\Delta S^{(2)}$  — второго.

Пусть температура первого тела до теплообмена равна  $T_1$ , температура второго —  $T_2$ , причем  $T_2 < T_1$ . Как известно из опыта, при теплообмене энергия (в форме теплоты) передается всегда от горячего тела к холодному; тогда, согласно правилу знаков для количества теплоты,  $Q^{(1)} = -Q$ ,  $Q^{(2)} = Q$ , ибо первое тело отдает энергию, а второе — получает. В результате теплообмена температуры тел изменятся и станут: у первого  $T_1 - \Delta T_1 = T_{\text{ср}}^{(1)}$ , у второго  $T_2 + \Delta T_2 = T_{\text{ср}}^{(2)}$ . Изменение энтропии всей системы, согласно (28.7) и (28.8), равно

$$\Delta S = \frac{Q^{(1)}}{T_{\text{ср}}^{(1)}} + \frac{Q^{(2)}}{T_{\text{ср}}^{(2)}} = -\frac{Q}{T_{\text{ср}}^{(1)}} + \frac{Q}{T_{\text{ср}}^{(2)}} = \frac{Q (T_{\text{ср}}^{(1)} - T_{\text{ср}}^{(2)})}{T_{\text{ср}}^{(1)} \cdot T_{\text{ср}}^{(2)}}. \quad (28.9)$$

Но абсолютные температуры  $T_{\text{ср}}^{(1)}$  и  $T_{\text{ср}}^{(2)}$  — положительные числа; согласно условию теплообмена  $T_{\text{ср}}^{(1)} - T_{\text{ср}}^{(2)} > 0$  и  $Q > 0$ . Итак, в выражении (28.9) правая часть — существенно положительное число. Отсюда следует, что  $\Delta S > 0$ , т. е. энтропия замкнутой и адиабатически изолированной системы в результате теплообмена между ее составными частями возрастает.

4. Заметим, что рассмотренный процесс теплообмена необратим: энергия (в форме тепла) сама собой переходит от горячего тела к холодному, что ведет к выравниванию температур во всех частях этой системы. Обратный же процесс передачи тепла от холодного тела к горячему сам по себе никогда не идет.

Итак, мы видим, что при необратимых процессах энтропия замкнутой и адиабатически изолированной системы возрастает,

$$\Delta S_{\text{необр}} > 0. \quad (28.10)$$

5. Наконец, покажем, что при обратимых процессах энтропия не меняется. Для этой цели исследуем в качестве примера квазистатический изотермический и адиабатный процессы расширения или сжатия газа.

Пусть газ квазистатически изотермически расширяется. При этом он совершает работу по подъему груза и получает некоторое количество теплоты из окружающей среды. Изменение энтропии всей системы

$$\Delta S = \Delta S_{\text{с}} + \Delta S_{\text{г}} + \Delta S_{\text{м}}, \quad (28.11)$$

где индексы «с», «г» и «м» относятся соответственно к среде, газу и механической системе. Но  $\Delta S_{\text{с}} = -Q/T$  и  $\Delta S_{\text{г}} = Q/T$ , ибо среда отдает энергию (в форме тепла), а газ столько же получает. Что же касается изменения энтропии механической системы, то оно равно нулю, ибо в консервативных системах при любых процессах термодинамическая вероятность и соответственно энтропия не меняются  $\Delta S_{\text{м}} = 0$ . Подставив в (28.11), получим

$$\Delta S = -\frac{Q}{T} + \frac{Q}{T} = 0.$$

Очевидно также, что при квазистатическом адиабатном процессе энтропия системы не меняется: из условия адиабатности  $Q = 0$  следует, согласно (28.7), что и  $\Delta S = 0$ .

6. Но *квазистатические процессы* (как изотермический, так и адиабатный) *обратимы*. Следовательно, на этих примерах мы показали, что

$$\Delta S_{\text{обр}} = 0. \quad (28.12)$$

Итак, мы получили весьма важный результат: *при любых процессах энтропия не убывает*,

$$\Delta S \geq 0. \quad (28.13)$$

Здесь знак равенства относится к обратимым процессам, знак неравенства — к необратимым.

### § 28.9. Второе начало термодинамики

1. При рассмотрении реальных тепловых процессов мы убедились в том, что им присуща определенная направленность. Именно, все они самопроизвольно протекают таким образом, что их результатом является *выравнивание термодинамических параметров*: давления, температуры, плотности, химического состава и т. п. Между тем из основных законов природы — законов сохранения импульса, момента импульса и энергии (в форме первого начала термодинамики) — направленность и, тем самым, необратимость тепловых процессов никак не вытекает.

В самом деле, первое начало термодинамики не накладывает запрета на процесс, при котором некоторое количество теплоты передавалось бы от холодного тела к горячему.

Первое начало требует лишь одного: чтобы количество теплоты, отданное одним телом, в точности равнялось количеству теплоты, которое получит другое, иными словами, чтобы полная энергия замкнутой и адиабатически изолированной системы не изменилась. А вот вопрос о том, от какого тела к какому перейдет энергия при теплообмене, от горячего к холодному или наоборот, остается открытым: ответ на него из первого начала термодинамики не следует.

Точно так же, исходя из первого начала, нельзя объяснить необратимость процесса превращения механической

энергии во внутреннюю при неупругом ударе, трении и т. п. Первое начало требует лишь одного: чтобы сумма механической и внутренней энергии замкнутой и адиабатически изолированной системы не изменилась. Но и здесь закон сохранения энергии допускает в равной мере возможность превращения как механической энергии во внутреннюю, так и внутренней в механическую. Истинное направление процесса на основе первого начала термодинамики предсказать нельзя.

2. Таким образом, мы пришли к выводу, что направленность и, тем самым, необратимость реальных тепловых процессов определяется не законами сохранения, а каким-то другим законом природы. Он называется *вторым началом термодинамики*.

Существуют различные формулировки второго начала термодинамики, эквивалентные друг другу: из любой из них все остальные можно вывести. Наиболее общая формулировка этого закона такова:

*При любых процессах, протекающих в замкнутой и адиабатически изолированной макроскопической системе, ее энтропия не убывает, т. е.  $\Delta S \geq 0$ .*

3. Из второго начала термодинамики следует принцип запрета, сформулированный Клаузиусом: *невозможен процесс, единственным результатом которого была бы передача энергии в форме тепла от холодного тела к горячему.*

Действительно, если бы такой процесс был возможен, то он сопровождался бы убылью энтропии (см. § 28.8). А это противоречит сформулированному выше второму началу термодинамики.

4. Следует обратить внимание на смысл слов «единственным результатом». Это значит, что передача энергии в форме тепла от холодного тела к горячему невозможна в том случае, когда больше никакие процессы в природе не происходят. Если же наряду с теплообменом происходит еще один процесс (называемый *компенсирующим*, см. § 29.4), то запрет, налагаемый вторым началом термодинамики, снимается и становится возможной передача энергии в форме тепла от тела с низкой температурой к телу с более высокой температурой. Условия, при которых происходит такой процесс, будут рассмотрены в § 29.7.

### § 28.10. Статистический смысл второго начала термодинамики. Флуктуации

1. Законы сохранения имеют неограниченную область применения. Они одинаково справедливы как для микрочастиц, так и для макроскопических систем. *Второе же начало термодинамики применимо только к макроскопическим системам*, состоящим из огромного числа молекул.

Как мы видели, возрастание энтропии есть следствие роста термодинамической вероятности. Но молекулярная статистика вовсе не исключает *принципиальной* возможности процесса, при котором термодинамическая вероятность некоторой системы убывает, хотя такие процессы при большом числе молекул в системе и происходят крайне редко. Следовательно, мы не можем, хотя бы в принципе, исключить возможность процессов, при которых энтропия убывает, как бы ни была мала вероятность их реализации на практике.

2. Отсюда следует необходимость уточнения формулировки второго начала термодинамики. С учетом идей молекулярной статистики его нужно формулировать так:

*В замкнутой и адиабатически изолированной макроскопической системе наиболее вероятным является процесс, сопровождающийся возрастанием энтропии.*

Для макроскопических систем, состоящих из огромного числа молекул, второе начало термодинамики здесь дает такие же надежные результаты, как и законы сохранения. Что же касается микросистем, состоящих из сравнительно малого числа молекул, то в них вполне возможны отклонения истинных значений физических величин от их средних значений, называемые *флуктуациями*.

### § 28.11. Броуновское движение и флуктуации

1. Результатом флуктуации давления является броуновское движение (см. § 25.3). Пользуясь законами динамики, нельзя объяснить, почему броуновское движение наблюдается на частицах, размеры которых составляют около 0,5—1 микрон, а частицы размерами более 5  $\mu$  уже не участвуют в этом движении.

Предположим для простоты расчета, что броуновская частица имеет форму длинной и тонкой нити  $AB$  (рис. 28.6). Масса частицы пропорциональна ее длине:  $m = \tau l$ , где  $\tau$  — масса единицы длины. Сила, действующая на частицу, равна равнодействующей сил, с которой на нее действует каждая молекула:  $F = (N_2 - N_1) f = (n_2 - n_1) l f$ , где  $f$  — сила, с которой на нить действует одна молекула,  $n_2$  и  $n_1$  — концентрация молекул по длине нити справа и слева от нее.

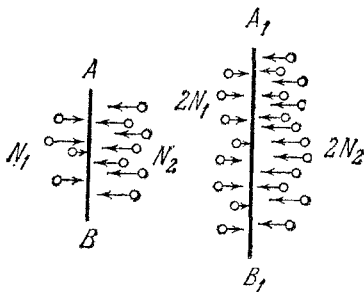


Рис. 28.6.

Ускорение частицы

$$a = \frac{F}{m} = \frac{(n_2 - n_1) l f}{\tau l} = \frac{(n_2 - n_1) f}{\tau}$$

от длины нити не зависит. Поэтому, согласно законам динамики, размер частицы не должен был бы влиять на

степень участия этой частицы в броуновском движении, что противоречит эксперименту.

2. Для правильного решения задачи следует воспользоваться идеями молекулярной статистики. Подсчитаем, какова вероятность интересующей нас флуктуации давления при различных размерах тела. Примем, что длина нити равна  $0,5 \mu = 5 \cdot 10^{-7}$  м, а расстояние между молекулами газа — около  $10 \text{ \AA} = 10^{-9}$  м. Тогда с обеих сторон нити расположится примерно 1000 молекул.

Если число молекул справа и слева одинаково, скажем,  $N_1 = N_2 = 500$ , то частица находится в равновесии. Если же слева окажется  $N_1 = 470$ , а справа  $N_2 = 530$  молекул, то давление справа окажется в  $\frac{530}{470} = 1,13$  раза больше, иными словами, возрастет на 13%. Сравним вероятность такой флуктуации с вероятностью равновесного состояния.

Термодинамическая вероятность равновесного состояния равна числу сочетаний, которое можно составить из 1000 молекул по 500 молекул с каждой стороны нити:

$$W_{\text{равн}} = C_{1000}^{500} = \frac{1000 \cdot 999 \cdot 998 \dots 503 \cdot 502 \cdot 501}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 498 \cdot 499 \cdot 500}$$

Термодинамическая же вероятность рассматриваемой флуктуации давления

$$W_{\text{флукт}} = C_{1000}^{470} = \frac{1000 \cdot 999 \dots 533 \cdot 532 \cdot 531}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 468 \cdot 469 \cdot 470}.$$

Их отношение:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{W_{\text{флукт}}}{W_{\text{равн}}} = \frac{C_{1000}^{470}}{C_{1000}^{500}} = \\ &= \frac{(1000 \cdot 999 \dots 532 \cdot 531) (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 469 \cdot 470 \cdot 471 \dots 500)}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 469 \cdot 470) (1000 \cdot 999 \dots 531 \cdot 530 \dots 501)}. \end{aligned}$$

Сократив одинаковые множители, получим

$$\omega = \frac{471 \cdot 472 \cdot 473 \dots 498 \cdot 499 \cdot 500}{501 \cdot 502 \cdot 503 \dots 528 \cdot 529 \cdot 530}.$$

3. Вычислить эту величину элементарными методами очень трудно, но можно определить ее границы. Для этого учтем, что  $\frac{471}{501} = 0,9401$  и  $\frac{500}{530} = 0,9477$ . Следовательно,

$$0,9401^{30} < \omega < 0,9477^{30},$$

откуда следует:

$$0,157 < \omega < 0,174.$$

Более точный расчет дает

$$\omega \approx 0,171 = 17\%.$$

Итак, мы получили важный результат: для броуновской частицы размером около  $0,5 \mu$  вероятность флуктуации давления на 13% составляет  $0,171 \approx 17\%$  от вероятности равновесного состояния. Следовательно, если такая частица в течение часа будет находиться в покое (равновесное состояние), то около 10 минут на нее будут действовать значительные силы, которые приведут частицу в движение. Полагая, что длительность «скачка» составляет около одной секунды, получим, что в течение часа броуновская частица совершит около 600 «скачков».

Рекомендуем читателю самостоятельно показать, что вдвое бóльшая частица, размерами  $1 \mu$ , будет совершать всего около 100 скачков в течение часа.

4. Чтобы получить аналогичный «скачок» броуновской частицы размером  $5 \mu$ , которую окружают при тех же условиях 10 000 молекул, необходимо, чтобы слева расположилось 4700 молекул, а справа 5300 молекул. Флуктуация давления опять оказалась бы равной 13%, и частица приобрела бы такое же ускорение. Для вероятности флуктуации получим

$$\omega = \frac{W_{\text{флукт}}}{W_{\text{равн}}} = \frac{C_{10000}^{4700}}{C_{10000}^{5000}} = 2,2 \cdot 10^{-8}.$$

Таким образом, вероятность флуктуации для этой частицы настолько мала, что ее практически можно положить равной нулю. Чтобы заметить только один «скачок», длящийся около секунды, за частицей следует наблюдать примерно  $4,5 \cdot 10^7$  сек, или, поскольку 1 год =  $3,16 \cdot 10^7$  сек, — около полутора лет! Совершенно ясно, почему частицы аналогичных или еще больших размеров в броуновском движении не участвуют.

Заметим, что наш расчет является весьма упрощенным, ибо на самом деле броуновские частицы имеют конечные размеры во всех трех измерениях (чаще всего микроскопические шарики) и движутся во всевозможных направлениях. Но порядок величин, полученный выше, близок к истине.

## Г Л А В А 29

### ТЕПЛОВЫЕ МАШИНЫ

#### § 29.1. Тепловые машины и развитие техники

Прогресс человечества теснейшим образом связан с развитием энергетики. Овладение новым источником энергии, открытие новых путей ее преобразования и использования — это обычно целая эпоха в истории материальной культуры.

Так, мощный расцвет промышленности в XIX в. был связан с изобретением первого теплового двигателя — паровой машины. Создание двигателя внутреннего сгорания послужило базой для развития автомобильного транспорта и самолетостроения. Газовая турбина буквально в последние два десятилетия вызвала переворот в авиации — замену тихоходных самолетов с поршневым двигателем реактивными и турбовинтовыми лайнерами, скорость которых приближается к скорости звука, а в последнее время — и сверхзвуковыми. С помощью реактивных тепловых двигателей осуществлена вековая мечта человечества — выход в космическое пространство.



Основная доля электроэнергии вырабатывается тепловыми электростанциями, генераторы которых приводятся в действие паровыми турбинами. На атомных электростанциях энергия, выделяющаяся при ядерных реакциях, также преобразуется сначала в энергию пара, который приводит в движение паровую турбину, а последняя — ротор генератора, в котором вырабатывается ток.

Из курса восьмилетней школы читатель знаком с устройством и принципом действия ряда тепловых двигателей, таких, как паровая машина, паровая турбина, двигатель внутреннего сгорания. В данной главе мы воспользуемся началами термодинамики для того, чтобы изучить общие свойства всех тепловых машин и назначение их основных узлов, а также выяснить параметры, определяющие к. п. д. этих машин и пути его повышения.

## § 29.2. Тепловой двигатель

1. Все тепловые двигатели, независимо от их конструктивных особенностей, решают одну и ту же задачу — *превращение внутренней энергии в механическую*. Для этой цели энергия, выделяющаяся при сгорании топлива или при ядерных реакциях, передается путем теплообмена какому-либо газу. Расширяясь, газ производит работу против внешних сил, приводя в движение какой-либо механизм.

2. Очевидно, что в тепловом двигателе газ не может бесконечно расширяться, ибо машина имеет конечные размеры. Следовательно, после расширения газ должен быть затем сжат так, чтобы он сам и все детали машины пришли в первоначальное состояние. После этого может быть произведено повторное расширение и т. д. Итак, мы пришли к выводу, что *тепловой двигатель должен работать циклично*; в течение цикла за процессом расширения газа следует его сжатие до первоначального состояния.

Реальные тепловые двигатели обычно работают по так называемому *разомкнутому циклу*, когда газ после расширения выбрасывается, а сжимается новая порция. Однако это существенно не влияет на термодинамику процесса, и мы будем ниже рассматривать *замкнутый цикл*, когда расширяется и сжимается та же порция газа.

3. Для того чтобы двигатель в течение цикла совершил полезную работу, необходимо, чтобы работа в процессе расширения была больше работы сжатия. В этом случае внешние тела, окружающие двигатель, получают больше механической энергии, чем отдадут при сжатии. Покажем, что для

этого температура газа при его сжатии должна быть ниже, чем при расширении. Для доказательства этого положения вновь обратимся к рис. 27.2 и 27.3 (стр. 298). Начальные и конечные состояния газа при расширении и сжатии совпадают; следовательно, работа сжатия будет меньше работы расширения лишь в том случае, если во всех промежуточных состояниях давление в процессе сжатия будет меньше,

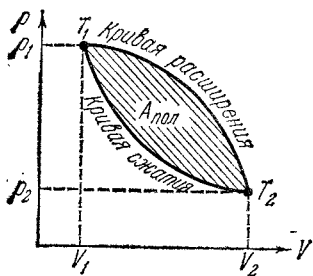


Рис. 29.1.

чем при расширении. А это возможно лишь в том случае, когда во всех промежуточных точках температура газа в процессе сжатия ниже, чем при расширении.

Обратимся к рис. 29.1. Здесь работа расширения численно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком зависимости давления от объема в процессе расширения — *кривой расширения*. Ра-

бота сжатия — площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху *кривой сжатия*. Наконец, полезная работа изображается площадью, заштрихованной на рисунке; эта площадь ограничена графиком цикла, т. е. кривыми расширения и сжатия.

### § 29.3. Схематическое устройство и энергетический баланс теплового двигателя

1. На основе предыдущих рассуждений можно рассмотреть схему устройства и энергетические процессы, характерные для любого теплового двигателя, независимо от его конструктивных особенностей.

Любой тепловой двигатель состоит из трех основных частей: рабочего тела, нагревателя и холодильника (рис. 29.2). Рабочим телом служит какой-либо газ (или пар), за счет расширения которого совершается работа. Рабочее тело получает некоторое количество теплоты  $Q_1$  от *нагревателя* — тела, у которого за счет сгорания топлива или за счет ядерных реакций поддерживается постоянная высокая температура  $T_1$ . Наконец, при сжатии газ передает некото-

рое количество теплоты  $Q_2$  холодильнику — телу, температура которого  $T_2$  постоянна и всегда ниже температуры нагревателя. За счет этого давление газа при сжатии ниже, чем при расширении, что, как показано в предыдущем параграфе, является необходимым условием успешной работы двигателя.

Заметим, что холодильником может служить и окружающая среда, как это имеет место в двигателях внутреннего сгорания и в реактивных двигателях.

2. Баланс энергии за цикл можно получить на основе первого начала термодинамики (27.6). Поскольку при завершении цикла рабочее тело приходит в первоначальное состояние, его внутренняя энергия не меняется:  $\Delta U = U_2 - U_1 = 0$ . Отсюда

$$Q_1 = Q_2 + A_{\text{пол}} + Q_{\text{потерь}}, \quad (29.1)$$

где  $Q_{\text{потерь}}$  — энергия, теряемая в процессе цикла на теплообмен с окружающей средой, на трение и т. п. Отсюда следует, что полезная работа, совершаемая двигателем за цикл,

$$A_{\text{пол}} \leq Q_1 - Q_2, \quad (29.2)$$

где случай неравенства характеризует реальные машины, а случай равенства — идеальную машину, где нет потерь энергии.

3. Коэффициентом полезного действия двигателя  $\eta$  называется отношение полезной работы к энергии, которую рабочее тело получило от нагревателя, т. е. к количеству теплоты  $Q_1$ :

$$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{Q_1} \leq \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (29.3)$$

Из (29.3) следует, что даже у идеального теплового двигателя, работающего без потерь, к. п. д. принципиально ниже 100%. Он мог бы быть равен 100% только в том

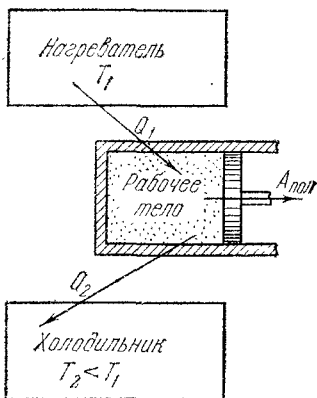


Рис. 29.2.

случае, если бы в течение цикла не отдавалась энергия холодильнику, т. е. если бы  $Q_2$  могло быть равным нулю. Но, как уже говорилось, это невозможно, ибо газ в процессе сжатия необходимо охладить, для чего необходимо передать холодильнику количество теплоты  $Q_2 \neq 0$ .

#### § 29.4. Тепловой двигатель и второе начало термодинамики

1. На основе анализа принципа работы теплового двигателя Томсон и Планк пришли к выводу, который формулируется в виде принципа запрета:

*Невозможен процесс, единственным результатом которого было бы охлаждение нагревателя и превращение полученного количества теплоты полностью в работу.*

Можно показать, что запрет Томсона — Планка является следствием второго начала термодинамики. Действительно, преобразование внутренней энергии в механическую есть процесс перехода системы из состояния с беспорядочным движением молекул в состояние их упорядоченного движения. Но при таком процессе энтропия системы должна убывать, а это противоречит второму началу термодинамики. Поэтому преобразование внутренней энергии в механическую не может быть *единственным* процессом. Параллельно с ним должен идти еще один процесс, ведущий к росту энтропии и *компенсирующий убывание энтропии* при преобразовании внутренней энергии в механическую.

2. Хотя при изотермическом расширении идеального газа работа целиком совпадает с полученным количеством теплоты (см. § 27.6), это не ведет к убыванию энтропии системы. Дело в том, что параллельно идет процесс расширения газа, сопровождающийся ростом энтропии. Этот компенсирующий процесс и снимает запрет, налагаемый вторым началом.

То же относится и к работе теплового двигателя. Действительно, здесь в течение цикла не только охлаждается нагреватель и совершается работа, но и часть энергии передается холодильнику. Вот этот компенсирующий процесс и снимает запрет, налагаемый вторым началом термодинамики на явление преобразования внутренней энергии в механическую.

3. Принцип запрета Клаузиуса (см. § 28.9), принцип запрета Томсона — Планка и принцип возрастания энтропии являются тремя равносильными формулировками второго начала термодинамики.

Часто первое и второе начала термодинамики формулируют как законы, запрещающие создание вечных двигателей.

*Первое начало:* невозможен вечный двигатель первого рода (perpetuum mobile I), т. е. машина, которая совершала бы периодически работу, не получая энергию от других источников.

*Второе начало:* невозможен вечный двигатель второго рода (perpetuum mobile II), т. е. машина, которая совершала бы периодически работу только за счет охлаждения одного источника теплоты, например земного шара или океана, имеющих колоссальный запас внутренней энергии.

### § 29.5. Цикл Карно

1. Для упрощения анализа принципа действия теплового двигателя и расчета его к. п. д. рассмотрим мысленный эксперимент, предложенный Карно.

Рабочим телом в идеализированной машине Карно является идеальный газ. В начале цикла рабочее тело имеет одинаковую температуру  $T_1$  с нагревателем. Это состояние изображено на графике точкой 1 (рис. 29.3). Находясь в контакте с нагревателем, газ изотермически расширяется, получая количество теплоты  $Q_1$ , и приходит в состояние 2. Далее он расширяется адиабатно до состояния 3. Его температура уменьшается и становится равной  $T_2$  — температуре холодильника. За расширением следует сжатие газа. Находясь в контакте с холодильником, газ под действием внешних сил изотермически сжимается из состояния 3

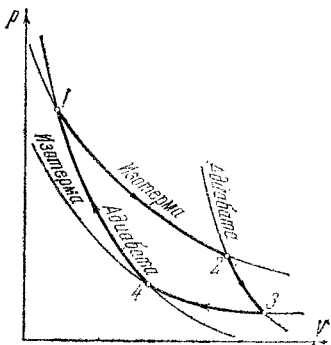


Рис. 29.3.

в состояние 4, передавая холодильнику количество теплоты  $Q_2$ . Затем путем адиабатного сжатия температура газа повышается до первоначальной. Цикл замыкается, и рабочее тело возвращается в исходное состояние.

2. Цикл Карно представляет собой идеализацию цикла реальной тепловой машины. Предполагается, что здесь нет потерь энергии на теплообмен с окружающей средой, в машине нет трения, а процессы расширения и сжатия газа идут квазистатически и, следовательно, обратимо. Отсюда следует, что общее изменение энтропии всей системы за цикл равно нулю.

Рассмотрим, как же меняется энтропия отдельных частей системы.

Естественно, что энтропия рабочего тела не меняется, ибо оно возвращается в исходное состояние. Не меняется и энтропия окружающих тел, поскольку они не участвуют в теплообмене, а механические процессы не вызывают изменения энтропии. Энтропия нагревателя, согласно (28.7), убывает на величину  $\Delta S_{\text{нагр}} = -Q_1/T_1$ , а энтропия холодильника возрастает на величину  $\Delta S_{\text{хол}} = Q_2/T_2$ . А так как изменение энтропии всей системы  $\Delta S = 0$ , то

$$\Delta S = \Delta S_{\text{нагр}} + \Delta S_{\text{хол}} = -\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0. \quad (29.4)$$

Отсюда следует, что  $Q_1/T_1 = Q_2/T_2$ , или

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (29.5)$$

3. Согласно (29.3) и (29.5) для идеальной машины, работающей по обратимому циклу Карно,

$$\eta_{\text{Карно}} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (29.6)$$

Мы получили фундаментальной важности результат: *к. п. д. идеальной машины, работающей по обратимому циклу Карно, определяется лишь температурами нагревателя и холодильника.*

### § 29.6. К. п. д. реального двигателя

1. Во всяком реальном двигателе существуют потери. Кроме того, происходящие в нем процессы необратимы. Естественно, что энтропия системы в течение этого цикла возрастает:  $\Delta S > 0$ . Выражение (29.4) превратится в неравенство:

$$\Delta S = -\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} > 0. \quad (29.7)$$

Отсюда следует, что для необратимо работающего теплового двигателя

$$\frac{Q_2}{Q_1} > \frac{T_2}{T_1}. \quad (29.8)$$

2. К. п. д. реальной машины, согласно (29.3), выражается неравенством  $\eta < 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$ . Если в этом выражении заменить вычитаемое, т. е.  $Q_2/Q_1$ , меньшей дробью  $T_2/T_1$ , то неравенство лишь усилится. Итак,

$$\eta < 1 - \frac{Q_2}{Q_1} < 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (29.9)$$

Мы видим, что *к. п. д. реального теплового двигателя всегда меньше к. п. д. машины Карно, работающей в том же температурном интервале*, т. е.

$$\eta < \eta_{\text{Карно}}. \quad (29.10)$$

3. Следует обратить внимание на принципиальное отличие тепловых двигателей от механических или электрических машин. Совершенствуя последние, мы приближаем их к. п. д. к теоретическому предельному значению 100%. И хотя этот предел недостижим в реальных условиях, можно путем уменьшения потерь приблизиться к нему. Совершенствуя тепловые двигатели, мы приближаем их к. п. д. не к 100%, а к к. п. д. машины Карно, работающей в том же температурном интервале. Отсюда следует, что решающим фактором в процессе повышения к. п. д. теплового двигателя является повышение температуры нагревателя и снижение температуры холодильника.

Естественно, что снижение всякого рода потерь также служит повышению к. п. д. теплового двигателя, но наиболее эффективным методом является увеличение разности температур нагревателя и холодильника.

### § 29.7. Обратный цикл Карно

1. Цикл Карно обратим, следовательно, его можно провести в обратном направлении. Посмотрим, какой энергетический эффект получится в этом случае.

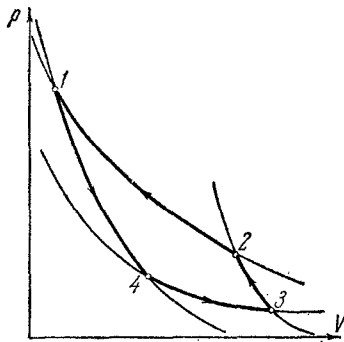


Рис. 29.4.

Пусть рабочее тело, состояние которого изображено на рис. 29.4 точкой 1, адиабатно расширяется до состояния, изображенного точкой 4. При этом температура газа снизится до температуры холодильной камеры  $T_2$ . Далее рабочее тело изотермически расширяется до состояния 3, совершая работу расширения и поглощая от холодильной камеры количество теплоты  $Q_2$ . Из состояния 3 в состояние 2 газ переходит путем адиабатного сжатия, и его температура повышается до температуры нагревателя  $T_1$ .

Наконец, из состояния 3 в состояние 1 рабочее тело переходит путем изотермического сжатия за счет работы, совершаемой внешними силами. При этом рабочее тело передает нагревателю некоторое количество теплоты  $Q_1$ .

Общая схема преобразования энергии показана на рис. 29.5.

2. Поскольку в обратном цикле сжатие рабочего тела совершается при более высокой температуре, чем расширение, работа сжатия больше работы расширения. Следовательно, за цикл внешние силы совершают положительную работу

$$A_{\text{внешн}} = A_{\text{сж}} - A_{\text{расш}} > 0. \quad (29.11)$$



Согласно (27.23)  $Q_1 = A_{\text{сж}}$ ,  $Q_2 = A_{\text{расш}}$ . Подставив в предыдущее выражение, получим, что  $A_{\text{внешн}} = Q_1 - Q_2$ , или

$$Q_1 = Q_2 + A_{\text{внешн}} \quad (29.12)$$

3. Итак, в результате данного цикла некоторое количество теплоты переходит от холодного тела к телу с более высокой температурой. Может показаться, что это противоречит второму началу термодинамики (см. § 28.9). Однако нетрудно убедиться, что это не так. Переход энергии в форме тепла от холодного тела к горячему — это процесс, ведущий к уменьшению энтропии. Второе начало термодинамики запрещает такой процесс, если он *единственный*. Однако в рассматриваемом случае обратного цикла Карно происходит еще один процесс: превращение механической энергии окружающих тел во внутреннюю энергию нагревателя. А этот процесс сопровождается *возрастанием* энтропии.

Оказывается, что процесс возрастания энтропии за счет превращения механической энергии во внутреннюю компенсирует убыль энтропии при переходе теплоты от холодильника к нагревателю. Компенсирующий процесс снимает запрет, налагаемый вторым началом термодинамики, и делает возможным обратный цикл Карно.

3. Поскольку цикл Карно обратим, то полное изменение энтропии в течение цикла равно нулю. Следовательно, соотношение (29.5) остается в силе и для обратного цикла Карно.

Если же обратный цикл провести необратимо, то выражение (29.7) несколько изменится. Взамен (29.7) получим

$$\Delta S = -\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} > 0, \quad (29.13)$$

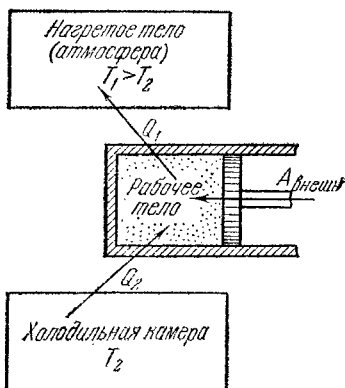


Рис. 29.5.

откуда

$$\frac{Q_2}{Q_1} < \frac{T_2}{T_1}. \quad (29.14)$$

Однако и в этом случае к. п. д. реального цикла ниже к. п. д. цикла Карно.

### § 29.8. Холодильная установка и тепловой насос

1. Если машина Карно является идеализацией теплового двигателя, то обратный цикл Карно служит идеализацией цикла двух других тепловых машин — холодильной установки и теплового насоса.

*Холодильная установка* имеет своей целью поддержание в холодильной камере температуры, которая ниже температуры окружающей среды. Это оказывается возможным, если рабочее тело тепловой машины провести по обратному циклу, аналогичному обратному циклу Карно.

Рабочим телом в холодильной установке служат обычно пары легкокипящих жидкостей — аммиак, фреон и т. п. К машине подводится энергия от электрической сети. За счет этой энергии и совершается процесс «перекачки теплоты» от холодильной камеры к более нагретым телам, — именно к окружающей среде.

2. Эффективность холодильной установки оценивается по *холодильному коэффициенту*

$$k = \frac{Q_2}{A_{\text{внешн}}}, \quad (29.15)$$

т. е. по отношению количества теплоты, отнятого за цикл от холодильной камеры, к работе внешних сил.

Пользуясь соотношениями (29.12) и (29.14), читатель сможет самостоятельно получить выражение для холодильного коэффициента

$$- k \leq \frac{T_2}{T_1 - T_2}, \quad (29.16)$$

где знак равенства относится к обратимому, а знак неравенства — к необратимому циклу.

Заметим, что чем меньше разность температур между холодильной камерой и окружающей средой, тем меньше

нужно затратить механической (или электрической) энергии для «перекачки тепла» от холодного тела к горячему. Естественно, что в этом случае повышается и холодильный коэффициент, что видно из (29.15) и (29.16).

Следует обратить внимание и на тот факт, что холодильный коэффициент может быть больше 100%. Это ни в коей мере не противоречит тому факту, что к. п. д. теплового двигателя всегда значительно меньше 100%.

3. Холодильная установка может быть использована в качестве *теплового насоса* для отопительных целей.

Если отапливать помещение с помощью обычных электронагревателей, то количество теплоты, выделенное в нагревательных элементах, в точности равно расходу электроэнергии. Если же электроэнергию использовать для приведения в действие холодильной установки, в которой нагревателем служит отапливаемое помещение, а холодильной камерой — наружная атмосфера, то отапливаемое помещение получит больше тепла, чем его выделилось бы при непосредственном преобразовании электроэнергии во внутреннюю в нагревателях типа электроплиток, электропечей и т. п.

В самом деле, при отсутствии потерь в машине количество теплоты, полученное отапливаемым помещением,

$$Q_1 = Q_2 + A,$$

где  $A$  — расход электроэнергии,  $Q_2$  — количество теплоты, перекачиваемое от наружной атмосферы в помещение.

В реальной установке благодаря потерям  $Q_1 < Q_2 + A$ . Но все же и при наличии потерь можно при хорошей конструкции теплового насоса получить  $Q_1 > A$ .

4. Эффективность теплового насоса определяется *коэффициентом перекачки тепла*

$$K = \frac{Q_1}{A}, \quad (29.17)$$

т. е. отношением количества теплоты, которое получило отапливаемое помещение, к расходу электроэнергии.

Рекомендуем читателю, пользуясь предыдущими соотношениями, самостоятельно показать, что

$$K \leq \frac{T_1}{T_1 - T_2}. \quad (29.18)$$

Заметим, что при обратимом цикле коэффициент перекочки тепла всегда больше 100%.

5. Итак, тепловой двигатель, холодильная установка и тепловой насос — это три типа тепловых машин, действие которых определяется первым и вторым началами термодинамики. В дальнейшем нам встретится еще ряд явлений, для объяснения которых мы будем пользоваться этими основными законами природы.

## ГЛАВА 30

### ОСНОВЫ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

#### § 30.1. Термодинамические параметры движущегося газа

В данной главе основные законы термодинамики будут применены для изучения явлений в движущихся газах.

Состояние движущегося газа определяется не только его давлением, плотностью и температурой, но и скоростью его движения. Следовательно, скорость  $v$ , давление  $p$ , плотность  $\rho$  и температура  $T$  — это четыре термодинамических параметра, изменением которых определяются все процессы, происходящие в газе.

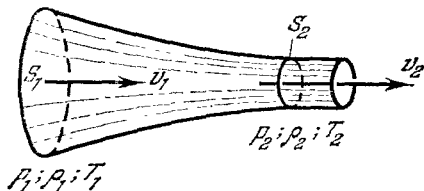


Рис. 30.1.

Пусть газ течет по некоторой трубе. Тогда в каждом его сечении

термодинамические параметры будут различными (рис. 30.1).

Если в любом сечении трубы термодинамические параметры газа не зависят от времени, то такое движение называется *установившимся* или *стационарным*. Если же параметры со временем меняются, то это движение нестационарное.

Ниже будут рассмотрены только установившиеся течения газа со скоростями, много меньшими скорости света ( $v \ll c$ ).

### § 30.2. Уравнение неразрывности

1. *Расходом* жидкости или газа называется масса вещества, которая протекает через поперечное сечение трубы в единицу времени:

$$\mu = \frac{\Delta m}{\Delta t}. \quad (30.1)$$

Если скорость потока в некотором сечении площадью  $S$  равна  $v$ , то за время  $\Delta t$  через это сечение пройдет объем газа  $\Delta V = Sv\Delta t$ . Масса этого газа  $\Delta m = \rho Sv\Delta t$ . Подставив в (30.6), получим для расхода следующее выражение:

$$\mu = \rho Sv. \quad (30.2)$$

2. Из закона сохранения массы для *стационарного потока* следует, что *расход в любом сечении трубы один и тот же*. В самом деле, если бы, например, в сечение  $S_1$  на рис. 30.1 втекало ежесекундно больше газа, чем его вытекает из сечения  $S_2$ , то масса газа внутри этого объема со временем возрастала бы. Это привело бы к возрастанию плотности и давления газа и в конечном счете к изменению скорости потока. А это означает нарушение условия стационарности.

Итак, для стационарных (установившихся) течений получается следующее уравнение:

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2. \quad (30.3)$$

Данное уравнение выражает собой закон сохранения массы вещества; оно называется *уравнением неразрывности струи*.

3. В гидродинамике и газодинамике принята следующая терминология. Вещество, протекающее по трубе, принято называть *жидкостью* независимо от того, в каком агрегатном состоянии оно находится, жидком или газообразном. Различают *сжимаемую жидкость* (обычно это газ) и *несжимаемую жидкость* — это так называемые капельные жидкости, а также газы в тех случаях, когда их сжимаемостью можно пренебречь (см. § 30.6).

3. У несжимаемой жидкости  $\rho_1 = \rho_2 = \text{const}$ , откуда следует

$$S_1 v_1 = S_2 v_2. \quad (30.4)$$

### § 30.3. Уравнение импульсов

1. При установившемся потоке импульс некоторой массы газа в данном сечении остается постоянной величиной. При переходе же в другое сечение импульс меняется за счет действия сил давления и сил внутреннего трения (вязкости).

Учет сил внутреннего трения представляет собой исключительно сложную задачу. Некоторые замечания по этому поводу будут сделаны в конце главы (см. § 30.17). Здесь же мы пренебрежем вязкостью газа и будем учитывать только силы давления. Жидкость, в которой не учитываются силы внутреннего трения, называется *идеальной*.

2. Согласно основному уравнению динамики (7.4) изменение импульса в единицу времени равно действующей силе:

$$F_1 - F_2 = \frac{\Delta m \cdot v_2 - \Delta m \cdot v_1}{\Delta t}, \quad (30.5)$$

где  $F_1 = p_1 S_1$  и  $F_2 = p_2 S_2$  — силы давления в сечениях  $S_1$  и  $S_2$ . Но согласно (30.1) и (30.2)  $\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho S v$ . Подставив в (30.5), получим

$$p_1 S_1 - p_2 S_2 = \rho_2 S_2 v_2^2 - \rho_1 S_1 v_1^2,$$

или

$$S_1 (p_1 + \rho_1 v_1^2) = S_2 (p_2 + \rho_2 v_2^2). \quad (30.6)$$

Формула (30.6) называется *уравнением импульсов* для потока идеальной сжимаемой жидкости.

### § 30.4. Уравнение Бернулли

1. Применим к потоку газа закон сохранения энергии — первое начало термодинамики (21.9). Рассматривая газ как идеальную сжимаемую жидкость, мы не будем учитывать силы внутреннего трения. Процессы, протекающие в газе, будем считать адиабатными.

В сечении  $S_1$  (см. рис. 30.1) масса газа  $\Delta m$  обладает кинетической энергией  $K_1 = \Delta m v_1^2 / 2$  и внутренней энергией  $U_1 = \Delta m c_V T_1$ ; в сечении  $S_2$  имеем соответственно  $K_2 = \Delta m v_2^2 / 2$  и  $U_2 = \Delta m c_V T_2$ . Тогда изменение полной энергии

газа при его переходе из сечения  $S_1$  в сечение  $S_2$  выразится так:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &= (K_2 + U_2) - (K_1 + U_1) = \\ &= \frac{\Delta m v_2^2}{2} + \Delta m c_V T_2 - \frac{\Delta m v_1^2}{2} - \Delta m c_V T_1. \end{aligned}$$

Работа, произведенная газом,

$$A = p_2 \Delta V_2 - p_1 \Delta V_1,$$

где  $\Delta V_1$  и  $\Delta V_2$  — объемы данной массы газа в сечениях  $S_1$  и  $S_2$  соответственно. Подставив в (21.9) и учитывая, что при адиабатном процессе теплообмена нет, т. е.  $Q=0$ , имеем

$$\frac{\Delta m v_2^2}{2} - \frac{\Delta m v_1^2}{2} + \Delta m c_V T_2 - \Delta m c_V T_1 + p_2 \Delta V_2 - p_1 \Delta V_1 = 0.$$

Разделим обе части равенства на  $\Delta m$  и учтем, что  $\Delta m/\Delta V = \rho$  есть плотность газа. Перенеся все члены с индексом 1 в одну часть, а с индексом 2 — в другую, получим

$$\frac{v_1^2}{2} + c_V T_1 + \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + c_V T_2 + \frac{p_2}{\rho_2}. \quad (30.7)$$

Формула (30.7) есть *уравнение энергии* для потока идеального газа, иначе она называется *уравнением Бернулли*.

2. Подставив в (30.7) значение давления  $p = R\rho T$  (см. (26.20)) и учитывая, что  $c_p = c_V + R$ , имеем

$$\frac{v_1^2}{2} + c_p T_1 = \frac{v_2^2}{2} + c_p T_2. \quad (30.8)$$

Используя значение  $T = p/R\rho$ , получим

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{c_p}{R} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{c_p}{R} \cdot \frac{p_2}{\rho_2}.$$

Но  $\frac{c_p}{R} = \frac{c_p}{c_p - c_V} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$ , ибо  $\frac{c_p}{c_V} = \gamma$ . Итак,

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_2}{\rho_2}. \quad (30.9)$$

Это выражение для уравнения Бернулли нам понадобится в дальнейшем.

3. При движении идеальной несжимаемой жидкости ее плотность и температура остаются неизменными. Полагая в

равенстве (30.7)  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$  и  $T_1 = T_2$ , имеем

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2. \quad (30.10)$$

Это и есть уравнение Бернулли для несжимаемой идеальной жидкости.

### § 30.5. Скорость распространения упругих возмущений

1. Представим себе, что в каком-то слое неподвижного газа внезапно повысилось давление в результате быстрого сжатия или нагревания. За счет избытка давления этот слой станет расширяться, передавая импульс давления соседним слоям. Сжатие этих слоев будет передаваться все дальше, и в газе возникнет *волна упругих возмущений*.



Рис. 30.2.

Аналогичное явление можно наблюдать, если бросить в воду камень. Здесь также возмущение передается от слоя к слою, и по воде бежит круговая волна (рис. 30.2).

*Фронтом волны* называется поверхность, во всех точках которой термодинамические параметры (скорость, плотность, давление и температура) газа имеют одинаковые значения. *Скоростью перемещения фронта волны (скоростью волны)*  $w$  называется скорость передачи упругого возмущения от слоя к слою.



2. Для вычисления скорости волны удобно перейти к системе отсчета, которая движется вместе с фронтом волны.

Действительно, в системе отсчета  $xuz$ , связанной с невозмущенным газом, процесс распространения волны является неустановившимся, ибо параметры газа меняются со временем. В системе же отсчета  $x'y'z'$ , движущейся вместе с фронтом волны, процесс установившийся, и к нему можно применить уравнения неразрывности, импульса и энергии, рассмотренные в предыдущих параграфах (рис. 30.3).

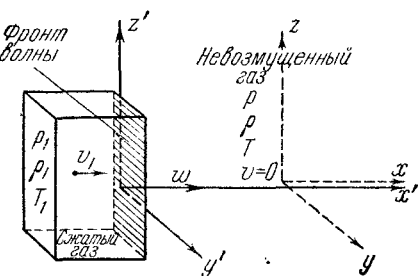


Рис. 30.3.

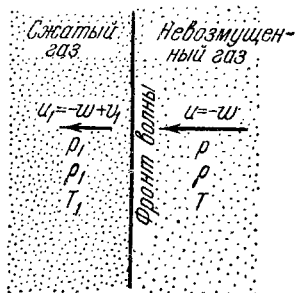


Рис. 30.4.

В движущейся системе отсчета невозмущенный газ набегаёт на фронт волны со скоростью  $u = -w$ ; сжатый газ отстает от фронта волны и движется влево со скоростью  $u_1 = v_1 - w$  (рис. 30.4). Применив к потоку уравнения неразрывности (30.4) и импульсов (30.6), получим

$$\rho u = \rho_1 u_1, \quad \rho + \rho u^2 = \rho_1 + \rho_1 u_1^2. \quad (30.11)$$

Выразив из первого равенства  $u_1 = \rho u / \rho_1$  и подставив во второе, получим для скорости распространения фронта волны выражение

$$w = |u| = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho} \cdot \frac{\rho_1 - \rho}{\rho_1 - \rho_1}}. \quad (30.12)$$

3. В газах возможны волны двух типов — ударные и звуковые.

Ударная волна характерна тем, что на фронте волны термодинамические параметры меняются скачком, и разности

давлений  $p_1—p$  и плотностей  $\rho_1—\rho$  могут быть весьма значительными. Поэтому говорят, что фронт ударной волны представляет собой скачок уплотнения.

Звуковые волны представляют собой волны слабых возмущений. Разности давлений и плотностей представляют собой очень малые величины:  $\Delta p \ll p$  и  $\Delta \rho \ll \rho$ . Поэтому можно в формуле (30.12) положить  $\rho_1 = \rho + \Delta \rho \approx \rho$ , и для скорости звуковой волны получится следующее выражение:

$$a = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta \rho}}. \quad (30.13)$$

4. Звуковые волны распространяются довольно быстро, и при прохождении фронта волны через газ процесс его сжатия следует считать адиабатным. Это позволяет вывести более удобное выражение для вычисления скорости звуковой волны.

Воспользуемся выражением для работы при квазистатическом адиабатном расширении газа на малый объем  $\Delta V$  (см. (27.25)). Полагая  $p_1 = p - \Delta p$ ,  $V_1 = V - \Delta V$ ,  $p_2 = p + \Delta p$ ,  $V_2 = V + \Delta V$ , имеем

$$A = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{\gamma - 1} = \frac{(p - \Delta p)(V - \Delta V) - (p + \Delta p)(V + \Delta V)}{\gamma - 1} = \\ = \frac{-2(V \Delta p + p \Delta V)}{\gamma - 1}.$$

С другой стороны,  $A = p_{ср}(V_2 - V_1) = 2p \Delta V$ . Приравняв эти выражения, получим

$$2p \Delta V = - \frac{2(V \Delta p + p \Delta V)}{\gamma - 1}$$

или

$$\bullet \quad \gamma \frac{\Delta V}{V} = - \frac{\Delta p}{p}. \quad (30.14)$$

Появление знака минус вызвано тем, что при расширении газа объем возрастает,  $\Delta V > 0$ , а давление уменьшается, следовательно,  $\Delta p < 0$ . Масса газа  $m = \rho V$ . При изменениях объема меняется и плотность, но масса газа сохраняется. Следовательно,

$$(\rho + \Delta \rho)(V + \Delta V) = (\rho - \Delta \rho)(V - \Delta V).$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим

$$2\Delta \rho V = -2 \Delta V \rho,$$

откуда следует, что относительное изменение объема равно относительному изменению плотности:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta V}{V}. \quad (30.15)$$

Подставив в (30.14), имеем

$$\gamma \frac{\Delta p}{\rho} = \frac{\Delta p}{\rho}. \quad (30.16)$$

Скорость звука, согласно (30.13) и (30.16), выразится следующим образом:

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}, \quad (30.17)$$

или, учитывая, что по уравнению газового состояния  $p = R \rho T$  (см. (26.20)), имеем

$$a = \sqrt{\gamma R T}. \quad (30.18)$$

Таким образом, скорость звука в идеальном газе целиком определяется его температурой.

Зная, что для воздуха  $\gamma = 7/5$  (двухатомный газ) и молекулярный вес его  $m^* = 29$  кг/кмоль, рекомендуем читателю самостоятельно показать, что здесь скорость звука

$$a = 20\sqrt{T} \text{ м/сек.}$$

## § 30.6. Учет сжимаемости газа. Число Маха

1. Выше уже говорилось, что в некоторых случаях можно сжимаемостью газа пренебречь и полагать, что его плотность является постоянной величиной. Введем критерий, позволяющий оценить те условия, когда такое упрощение задачи допустимо.

Наибольшее возрастание давления в газе, очевидно, получится в том случае, когда он полностью затормозится. Пусть его скорость до торможения равна  $v$ , давление  $p$  и плотность  $\rho$ . После торможения скорость  $v_1 = 0$ , давление  $p_1 = p + \Delta p$  и плотность  $\rho_1 = \rho + \Delta \rho$ . Согласно уравнению Бернулли (30.9)

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{p + \Delta p}{\rho + \Delta \rho} \right).$$

Или так:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( \frac{p + \Delta p}{\rho + \Delta \rho} - \frac{p}{\rho} \right) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\Delta p}{\rho + \Delta \rho} \left( \frac{\Delta p}{\Delta \rho} - \frac{p}{\rho} \right).$$

Но согласно (30.13) и (30.17)  $\frac{\Delta\rho}{\rho} = a^2$ ,  $\frac{\rho}{\rho} = \frac{a^2}{\gamma}$ . Подставив в предыдущее равенство и учитывая, что  $\Delta\rho \ll \rho$ , имеем

$$\frac{v^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{\Delta\rho}{\rho} \left( a^2 - \frac{a^2}{\gamma} \right) = a^2 \frac{\Delta\rho}{\rho}.$$

2. Итак, относительное изменение плотности газа при торможении потока

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{v}{2a^2}. \quad (30.19)$$

Отношение скорости потока  $v$  к скорости распространения звука  $a$  называется *числом Маха*:

$$M = \frac{v}{a}. \quad (30.20)$$

Число Маха служит критерием сжимаемости газа. Именно, из (30.19) следует, что если число  $M$  мало, то  $\Delta\rho \ll \rho$ , и сжимаемостью газа можно пренебречь; если же число  $M$  велико, то плотность газа меняется существенно, т. е. сжимаемостью газа пренебречь нельзя.

### § 30.7. Конус Маха

1. Источником звуковых волн является любое тело, движущееся в газе. Это тело, набегаая на неподвижный газ, создает впереди себя область повышенного давления, что и служит причиной возникновения волны упругих возмущений. Форма этой волны существенно зависит от скорости движения тела.

Для простоты рассмотрим вначале точечный источник: тело, размерами которого в данной задаче можно пренебречь.

2. Пусть скорость движения тела  $v$  меньше скорости звука,  $M = \frac{v}{a} < 1$ . Фронт звуковой волны представляет собой сферу, центр которой лежит в точке, где находился источник в тот момент, когда он возбудил волну. Пусть в начальный момент тело находилось в точке  $O_1$ , через секунду — в точке  $O_2$ , еще через секунду — в точке  $O_3$  и т. д. (рис. 30.5). Через 4 сек тело будет находиться в точке  $O_5$ . Фронт волны, вышедшей из точки  $O_1$ , есть сфера с радиу-

сом  $R_1=4a$ ; из точки  $O_2$ — сфера с радиусом  $R_2=3a$ ; из точки  $O_3$ — сфера с радиусом  $R_3=2a$  и т. д. Из рис. 30.5 видно, что в этом случае тело все время движется внутри сферической волны, которая его опережает. Путь, пройденный телом за  $t$  сек, равен  $l=vt$ ; он меньше радиуса сферической звуковой волны  $R=at$ .

Совершенно иной результат получится, если скорость точечного источника  $v$  больше скорости звука,  $M = \frac{v}{a} > 1$ . В этом

случае тело перегоняет звуковую волну: путь, пройденный телом за  $t$  сек, т. е.

$l=vt$ , больше радиуса волны  $R=at$  (рис. 30.6). Действительно, пусть тело в первую секунду, находясь в точке  $O_1$ , излучает звуковую волну;

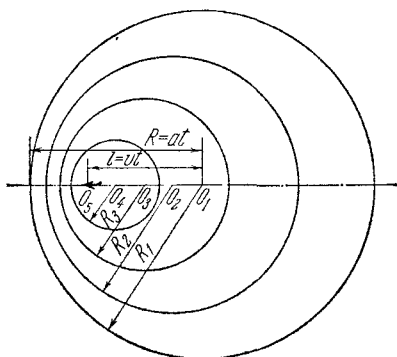


Рис. 30.5.

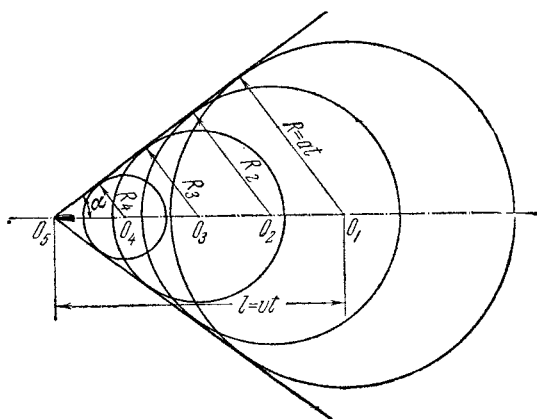


Рис. 30.6.

через секунду, перегнав фронт волны, оно окажется в точке  $O_2$  и излучает там волну и т. д. Через 4 сек оно будет находиться в точке  $O_5$ , обогнав все волны, которые оно излучило за

время движения. В этом случае волны, излучаемые телом в процессе движения, представляют собой семейство сфер, как бы вложенных в конус, в вершине которого находится движущийся точечный источник. Этот конус называется конусом слабых возмущений или *конусом Маха*, в честь ученого, который его первым описал. Угол раствора этого конуса, как видно из рис. 30.6, находится из соотношения

$$\sin \alpha = \frac{R}{l} = \frac{a}{v} = \frac{1}{M}. \quad (30.21)$$

### § 30.8. Ударная головная волна

1. Рассмотренный в предыдущем параграфе случай точечного источника представляет собой весьма упрощенную идеализацию явлений, возникающих при движении в газе

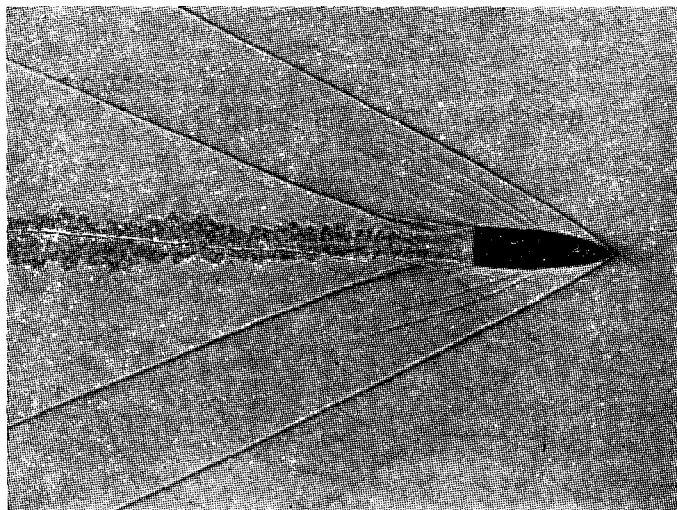


Рис. 30.7.

тела со скоростью, превосходящей скорость звука. На самом деле впереди тела, имеющего конечные размеры, возникает *ударная* головная волна, или скачок уплотнения — очень тонкий слой с размерами порядка длины свободного

пробега молекул, на котором скачком меняются термодинамические параметры газа.

2. На скачке уплотнения плотность газа резко меняется. Это приводит к значительному изменению коэффициента преломления световых лучей, что позволяет с помощью специальных установок получить фотографию ударной головной волны. На рис. 30.7 изображена фотография косога скачка уплотнения, возникающего впереди клинообразного или конусообразного тела (при числе Маха  $M \approx 2,5$ ).

3. Скорость ударной головной волны известна: она совпадает со скоростью тела. Для определения разности давлений и плотности газа до и после скачка можно воспользоваться уравнениями, выведенными в §§ 30.2—30.4.

Мы ограничимся анализом явлений только на прямом скачке уплотнения.

### § 30.9. Явления на прямом скачке уплотнения

1. В движущейся системе отсчета, связанной со скачком уплотнения,

$$\left. \begin{aligned} \rho u &= \rho_0 u_0, \\ p + \rho u^2 &= p_0 + \rho_0 u_0^2, \\ \frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} &= \frac{u_0^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0}. \end{aligned} \right\} \quad (30.22)$$

Здесь  $u_0 = -w$  — скорость набегания невозмущенного газа на скачок,  $p_0$  и  $\rho_0$  — давление и плотность невозмущенного газа,  $u = v - w$  — скорость газа за скачком,  $p$  и  $\rho$  — его давление и плотность в этой области,  $w$  — скорость тела (и головной волны) относительно Земли.

Уравнения (30.22) представляют собой уравнения неразрывности, импульса и энергии.

2. Процесс сжатия газа на скачке уплотнения является *адиабатным*, но он *не является квазистатическим*, поскольку прохождение газа через скачок происходит настолько быстро, что не успевает произойти выравнивание параметров в соседних областях. Следовательно, здесь соотношение между давлением и плотностью газа не может выражаться уравнением Пуассона, которое описывает квазистатический адиабатный процесс.

Исключив из уравнений (30.22) скорости

$$u_0 = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho - \rho_0} \right)} \quad \text{и} \quad u = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho} \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho - \rho_0} \right)},$$

получим после ряда несложных, но довольно длинных выкладок:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right) \frac{\rho}{\rho_0} - 1}{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} - \frac{\rho}{\rho_0}}. \quad (30.23)$$

Это и есть *уравнение ударной адиабаты*, или *уравнение Гюгоньо*. График этой зависимости изображен на рис. 30.8.

Для сравнения здесь же построены квазистатическая адиабата Пуассона и изотерма.

3. Ударное сжатие газа сопровождается резким возрастанием его температуры. Вследствие этого давление при ударном сжатии растет гораздо быстрее с ростом плотности, чем при квазистатическом адиабатном сжатии газа.

Так, согласно уравнению Пуассона, при квазистатическом адиабатном сжатии плотность газа может возрастать беспредельно. При ударном же сжатии есть предел для роста плотности. Действительно, в выражении (30.23) знаменатель при  $\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$  обращается в нуль, что бессмысленно. Итак,

$$\frac{\rho}{\rho_0} < \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}. \quad (30.24)$$

Плотность одноатомного газа ( $\gamma = 5/3$ ) при ударном сжатии может увеличиться не более чем в четыре раза. Плотность двухатомного газа ( $\gamma = 7/5$ ) возрастает не более чем в шесть

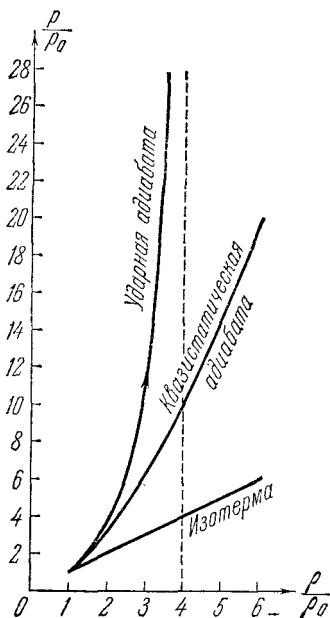


Рис. 30.8.



раз, если считать, что колебания атомов в молекуле не возбуждаются. Если же учесть, что при высоких температурах в двухатомной молекуле возбуждаются и колебания (см. § 27.9), то окажется, что  $\gamma = 9/7$ , и плотность двухатомного газа может возрасти уже в восемь раз, но не более.

4. Поскольку процесс ударного сжатия газа не является квазистатическим, то он *необратим*. Следовательно, ударное сжатие газа сопровождается возрастанием энтропии. Отсюда следует, что *невозможно получить скачок разрежения*, т. е. *ударное расширение* газа. В самом деле, ударное расширение должно было бы сопровождаться убыванием энтропии, что противоречит второму началу термодинамики.

Итак, если газ ударно сжать, то его обратное расширение происходит не по ударной адиабате, а по адиабате Пуассона (рис. 30.9). По окончании процесса расширения газ в первоначальное состояние не вернется — при одинаковой плотности его давление и температура будут значительно выше, чем в исходном состоянии.

5. Заметим, что работа, затрачиваемая на ударное адиабатное сжатие газа, значительно превосходит работу по его квазистатическому адиабатному сжатию. Причина заключается в том, что при ударном сжатии температура газа и, как следствие, его внутренняя энергия растут гораздо быстрее, чем при квазистатическом процессе.

### § 30.10. Волновое сопротивление

Так как перед телом, которое движется в газе со сверхзвуковой скоростью, возникает скачок уплотнения, то оказывается, что в этом случае тело испытывает гораздо большее сопротивление, чем при движении со скоростью, мень-

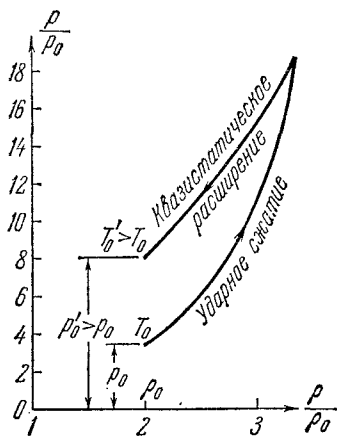


Рис. 30.9.

шей скорости звука. Одной из основных причин возникновения сопротивления является разность давлений на передней и задней кромках обтекаемого тела (см. § 11.8). Но при возникновении скачка уплотнения давление на передней

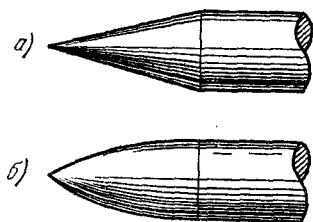


Рис. 30.10.

кромке резко возрастает, вследствие чего значительно увеличивается и сопротивление давления. Поскольку это сопротивление вызывается ударной волной, то оно называется *волновым*.

Для уменьшения волнового сопротивления передней кромке тела, движущегося со сверхзвуковой скоростью, придают заостренную форму — коническую

(а) или оживальную (б) (рис. 30.10), а реактивным самолетам — стреловидный профиль (рис. 30.11). Дело в том, что если перед тупой вершиной возникает прямой скачок уплотнения, то на заостренной кромке образуется косой скачок (рис. 30.7). На прямом скачке скорость меняется гораздо

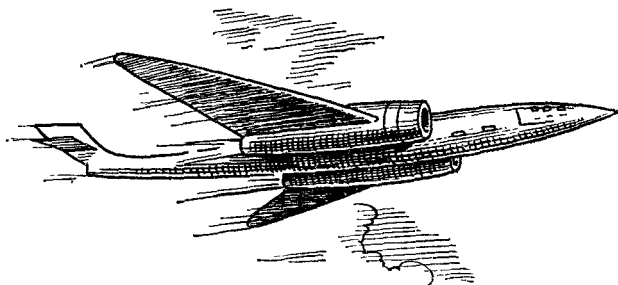


Рис. 30.11.

сильнее, чем на косом скачке. А из уравнения импульсов (30.6) следует, что чем меньше меняется скорость потока, тем меньше и разность давлений. Именно поэтому волновое сопротивление на косом скачке уплотнения значительно меньше, чем на прямом.

3. Возникновение скачка уплотнения сопровождается возрастанием энтропии, при этом кинетическая энергия движущегося тела необратимо превращается во внутреннюю

энергию газа. Это явление используется для торможения космических кораблей в атмосфере.

Именно этот принцип используется при мягкой посадке космических кораблей, возвращающихся, например, на Землю после облета Луны. Высокая точность, с которой осуществляется управление космическим кораблем, позволяет ввести его в атмосферу Земли под вполне определенным углом. Это обеспечивает нужную степень торможения и вместе с тем не вызывает недопустимых перегрузок.

При торможении космического корабля атмосфера вокруг него очень сильно нагревается, до нескольких десятков тысяч градусов. Поэтому космический корабль должен быть покрыт теплозащитным кожухом из термостойкого материала с малой теплопроводностью. Для этой цели используются специальные пластмассы.

### § 30.11. Сопло

1. Труба, в которой при расширении жидкости происходит преобразование ее внутренней энергии в кинетическую, называется *соплом*. Нас интересует, при каких условиях вытекающий из сопла поток имеет максимальную скорость. Для несжимаемой жидкости задача решается элементарно: из (30.4) следует, что максимальная скорость получится в самом узком участке трубы. Для газа же результат существенно зависит от того, является ли поток дозвуковым ( $M < 1$ ) или сверхзвуковым ( $M > 1$ ).

2. Рассмотрим два близких сечения, площади которых отличаются незначительно:  $S_1 = S - \Delta S$ ,  $S_2 = S + \Delta S$ , причем  $\Delta S \ll S$ . Соответственно и  $\Delta \rho \ll \rho$ ,  $\Delta p \ll p$ ,  $\Delta v \ll v$ . Уравнение неразрывности (30.3) для этого случая запишется так:

$$(S - \Delta S)(\rho - \Delta \rho)(v - \Delta v) = (S + \Delta S)(\rho + \Delta \rho)(v + \Delta v).$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим

$$2S\rho \Delta v + 2\rho v \Delta S + 2Sv \Delta \rho + 2\Delta S \Delta \rho \Delta v = 0.$$

Разделим обе части равенства на  $2S\rho v$  и учтем, что слагаемое  $\frac{\Delta S}{S} \frac{\Delta v}{v} \frac{\Delta \rho}{\rho}$  очень мало (так, если  $\frac{\Delta S}{S} \approx \frac{\Delta v}{v} \approx \frac{\Delta \rho}{\rho} \approx 10^{-3}$ , то их произведение

порядка  $10^{-9}$ ), а поэтому его можно отбросить. Окончательно

$$\frac{\Delta S}{S} + \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta v}{v} = 0. \quad (30.25)$$

3. Уравнение Бернулли (30.9) для нашего случая примет вид

$$\frac{(v - \Delta v)^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p - \Delta p}{\rho - \Delta \rho} = \frac{(v + \Delta v)^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p + \Delta p}{\rho + \Delta \rho}.$$

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим

$$2v \Delta v = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p \Delta \rho - \rho \Delta p}{\rho^2 - \Delta \rho^2}.$$

Но  $\Delta \rho \ll \rho$ , следовательно, слагаемое  $\Delta \rho^2$  в знаменателе можно отбросить. Имеем

$$v \Delta v = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{p}{\rho} \frac{\Delta \rho}{\rho} - \frac{\Delta p}{\rho} \right).$$

Согласно (30.13)  $\Delta p = a^2 \Delta \rho$ , а из (30.17) следует, что  $p/\rho = a^2/\gamma$ . Подставив в предыдущее выражение, получим

$$v \Delta v = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{a^2}{\gamma} \frac{\Delta \rho}{\rho} - a^2 \frac{\Delta \rho}{\rho} \right),$$

или окончательно

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = - \frac{v \Delta v}{a^2}. \quad (30.26)$$

4. Используя равенства (30.25) и (30.26), получим выражение, связывающее изменение скорости потока с изменением сечения сопла:

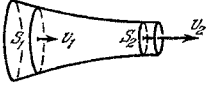
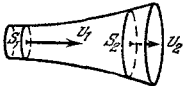
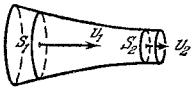
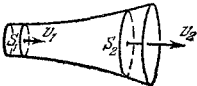
$$\frac{\Delta S}{S} + \frac{\Delta v}{v} \left( 1 - \frac{v^2}{a^2} \right) = 0$$

или

$$\frac{\Delta v}{v} \left( 1 - M^2 \right) = - \frac{\Delta S}{S}. \quad (30.27)$$

Из данного выражения вытекает важное следствие: если  $M < 1$ , то знак  $\Delta v$  противоположен знаку  $\Delta S$ ; если же  $M > 1$ , то знак  $\Delta v$  совпадает со знаком  $\Delta S$ . Это означает, что скорость дозвукового потока возрастает при сужении сопла и уменьшается при его расширении. Наоборот, сверхзвуковой поток ускоряется при расширении сопла и замедляется при его сужении (табл. 30.1).

Таблица 30.1

	Сужающееся сопло $S_2 < S_1, \Delta S < 0$	Расширяющееся сопло $S_2 > S_1, \Delta S > 0$
Дозвуковой поток $M < 1$	 <p><math>v_2 &gt; v_1, \Delta v &gt; 0.</math> Поток ускоряется</p>	 <p><math>v_2 &lt; v_1, \Delta v &lt; 0.</math> Поток замедляется</p>
Сверхзвуковой поток $M > 1$	 <p><math>v_2 &lt; v_1, \Delta v &lt; 0.</math> Поток замедляется</p>	 <p><math>v_2 &gt; v_1, \Delta v &gt; 0.</math> Поток ускоряется</p>

Максимальная скорость в наиболее узком участке сопла не превосходит скорость звука.

## § 30.12. Аналогия между соплом и тепловой машиной

1. Пусть сопло присоединено к некоторому резервуару (например, паровому котлу или камере сгорания газовой турбины), в котором поддерживаются постоянными давление  $p_0$ , плотность  $\rho_0$  и температура  $T_0$  идеального газа. Соответствующие параметры окружающей атмосферы обозначим  $p_{ат}, \rho_{ат}, T_{ат}$ . Газ, выходя из резервуара и протекая по соплу, ускоряется. Его скорость при истечении из сопла обозначим  $v$ . Эту скорость можно найти с помощью уравнения Бернулли (30.8), если учесть, что скорость газа в резервуаре  $v_0 = 0$ :

$$\frac{v^2}{2} + c_p T_{ат} = c_p T_0,$$

откуда следует выражение для кинетической энергии единичной массы газа:

$$\frac{v^2}{2} = c_p (T_0 - T_{ат}). \quad (30.28)$$

2. Максимальная скорость и соответственно максимальное значение кинетической энергии единичной массы газа было бы получено при

условии  $T_{ат}=0$ , т. е. если бы газ вырывался в вакуум, где температура равна абсолютному нулю:

$$\frac{v_{\max}^2}{2} = c_p T_0. \quad (30.29)$$

В этом случае внутренняя энергия газа полностью превратилась бы в кинетическую.

3. Найдем отношение истинного значения кинетической энергии единицы массы газа к максимальному значению этой величины:

$$\eta = \frac{v^2}{v_{\max}^2} = \frac{T_0 - T_{ат}}{T_0}. \quad (30.30)$$

Полученное отношение равно к.п.д. цикла Карно для тепловой машины, работающей в том же интервале температур. Оно выражает максимальный коэффициент использования внутренней энергии газа в резервуаре.

### § 30.13. Сопло Лавала

1. Для того чтобы из сопла вытекал сверхзвуковой поток, необходимо, чтобы оно было специальным образом профилировано. В самом деле, газ вытекает из резервуара с малой скоростью, меньшей скорости звука. Следовательно,

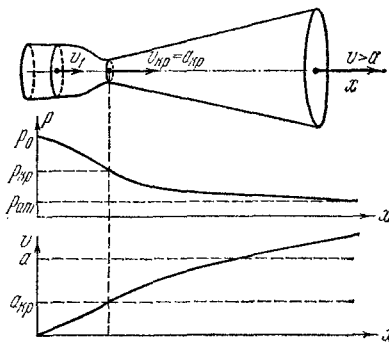


Рис. 30.12.

но, для ускорения потока, согласно (30.27), необходимо, чтобы сопло на начальном участке сужалось. При достаточно большой разности давлений скорость потока в самом узком сечении станет равной местной скорости звука. Если сопло дальше расширяется, то, согласно (30.27), поток будет продолжать ускоряться.

Сопло, работающее в данном режиме, называется соплом Лавала (рис. 30.12). Такие сопла применяются в паровых и газовых турбинах, в реактивных двигателях и ракетах.

2. Вычислим скорость газа в наиболее узком участке трубы, когда она равна скорости звука. Для этого в уравнении Бернулли (30.9)

положим, что скорость газа в резервуаре  $v_0=0$ , а скорость газа в наиболее узком участке  $v_{кр}=a_{кр}=\sqrt{\gamma p_{кр}/\rho_{кр}}$ .

Итак,

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_{кр}}{\rho_{кр}} + \frac{v_{кр}^2}{2} = \frac{v_{кр}^2}{\gamma-1} + \frac{v_{кр}^2}{2}.$$

Отсюда следует выражение для критической скорости:

$$v_{кр} = a_{кр} = \sqrt{\frac{2\gamma}{(\gamma+1)} \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1} RT_0}. \quad (30.31)$$

3. Температуру газа в критическом сечении найдем, подставив в (30.31) значение критической скорости звука  $a_{кр} = \sqrt{\gamma RT_{кр}}$  (см. (30.18)). Получим

$$T_{кр} = \frac{2T_0}{\gamma+1}. \quad (30.32)$$

Поскольку в сужающемся участке сопла скорость потока меньше скорости звука, здесь не могут возникнуть скачки уплотнения. Следовательно, давление и плотность газа в критическом сечении можно найти с помощью уравнения Пуассона:

$$p_{кр} = p_0 \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \rho_{кр} = \rho_0 \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (30.33)$$

Для двухатомного газа  $\gamma=1,4$ , откуда следует:

$$T_{кр} = 0,833 T_0; \quad p_{кр} = 0,528 p_0; \quad \rho_{кр} = 0,634 \rho_0.$$

Критические параметры газа, естественно, меньше параметров газа в резервуаре. Причина заключается в том, что часть внутренней энергии газа превратилась в кинетическую, что и привело к падению температуры газа, его давления и плотности.

4. Покажем, что давление в выходном сечении сопла Лавяля должно быть меньше критического. Для этого воспользуемся уравнением импульсов (30.6):

$$S_{кр} (p_{кр} + \rho_{кр} v_{кр}^2) = S (p + \rho v^2).$$

Раскрыв скобки и учитывая, что, согласно (30.2), расход  $\mu = S_{кр} \rho_{кр} v_{кр} = S \rho v$ , имеем

$$S_{кр} p_{кр} + \mu v_{кр} = S p + \mu v.$$

Но, согласно (30.27),  $v > v_{кр}$ , следовательно,  $\mu v > \mu v_{кр}$ . Но тогда из предыдущего равенства следует

$$S_{кр} p_{кр} > S p.$$

Окончательно, поскольку  $S > S_{кр}$ , имеем

$$p < p_{кр}. \quad (30.34)$$

Итак, при протекании газа через сопло Лавала его давление, плотность и температура непрерывно уменьшаются; соответственно уменьшается и его внутренняя энергия. За счет этого непрерывно растет кинетическая энергия струи, и ее скорость может значительно превзойти скорость звука (см. рис. 30.12).

### § 30.14. Реактивный двигатель

1. Сопло Лавала является основным элементом любого реактивного двигателя. В самом деле, для получения большой реактивной силы тяги необходимо, чтобы скорость истечения струи была максимально большой (см. (15.8)). А большую, именно сверхзвуковую скорость истечения газа можно получить только с помощью сопла Лавала.

Реактивные двигатели бывают разных конструкций. Мы ограничимся рассмотрением простейшего — прямооточного воздушно-реактивного двигателя (ПВРД). Схематически двигатель данного типа изображен на рис. 30.13.

2. Прямоточный двигатель успешно работает и дает достаточно большую реактивную силу тяги в том случае,

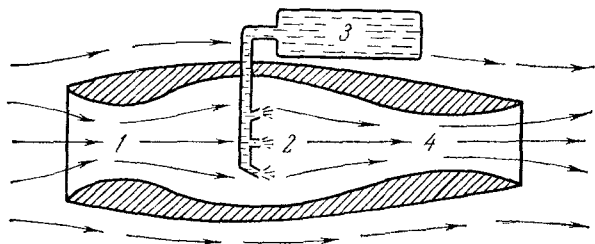


Рис. 30.13.

когда он движется со сверхзвуковой скоростью. Для простоты рассуждений перейдем к системе отсчета, связанной с двигателем. В этой системе отсчета поток воздуха набегаёт на входное сопло со скоростью, превосходящей скорость звука. В области 1, за входным соплом, образуется один или несколько скачков уплотнения, и скорость газа становится меньше скорости звука. Двигаясь вдоль расширяющегося канала, дозвуковой поток еще больше тормозится — его скорость падает, а давление, плотность и температура возрастают. В области 2, называемой камерой сгорания, в сжа-



тый воздух вбрызгивается из резервуара 3 топливо. Энергия, выделившаяся при его сгорании, идет на увеличение внутренней энергии газа. Из камеры сгорания газ поступает в сопло Лавала 4. Если правильно подобрать термодинамические параметры газа в камере сгорания, то в области наибольшего сужения сопла скорость потока станет равна местной скорости звука, и из выходного сопла начнет вытекать сверхзвуковой поток.

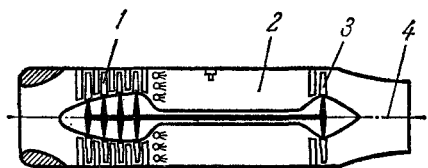


Рис. 30.14.

Заметим, что прямоточный двигатель очень прост в конструктивном отношении и весьма надежен. Однако он может работать только в том случае, если его разогнать предварительно до сверхзвуковой скорости. Для этой цели могут быть использованы стартовые ракеты.

3. На рис. 30.14 изображена схема турбокомпрессорного воздушно-реактивного двигателя (ТКВРД). Он может работать на любых, в том числе и на малых скоростях. В отличие от прямоточного двигателя, здесь сжатие воздуха достигается с помощью компрессора 1. Энергия потока за камерой сгорания 2 частично используется в газовой турбине 3, которая вращает компрессор, а иногда и пропеллер. Оставшаяся часть энергии используется для создания реактивной тяги в сопле 4, расположенном за турбиной.

### § 30.15. Крыло самолета

1. Пластина, обтекаемая жидкостью или газом, и профилированная таким образом, что подъемная сила значительно превосходит силу сопротивления, называется *крылом*. В зависимости от того, для движения с какой скоростью предназначено крыло, его форма меняется: у самолетов, скорость которых меньше скорости звука, профиль крыла имеет вид, изображенный на рис. 30.15, а и б; у сверхзвуковых

самолетов передняя кромка заостренная (рис. 30.15, в) с тем, чтобы уменьшить волновое сопротивление (см. § 30.10).

2. Причину возникновения подъемной силы можно качественно объяснить на основании уравнения Бернулли. Поток газа, обтекая крыло, разветвляется. Крыло имеет несимметричную форму: сверху оно выпуклое, снизу — слегка вогнутое или плоское. Благодаря этой несимметричности скорость потока над крылом  $v_1$  оказывается больше скорости под крылом  $v_2$ , а давление  $p_1$  соответственно меньше (рис. 30.16). Эта разность давлений и создает подъемную силу.

Подъемную силу можно увеличить разными способами.

3. Прежде всего, можно сделать крыло сверху более выпуклым, а снизу — вогнутым (см. рис. 30.15, а).

В этом случае поток под крылом замедлится, а над крылом его скорость возрастет. С увеличением разности скоростей возрастет и разность давлений, а вместе с этим и подъемная сила. Но крыло с таким профилем испытывает и большое сопротивление. Поэтому профили такого типа характерны для тихоходных самолетов.

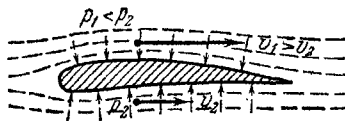


Рис. 30.16.



Рис. 30.17.

4. Можно создать некоторый угол между хордой крыла и направлением набегающего потока — так называемый *угол атаки*  $\alpha$  (рис. 30.17). Это также приведет к замедлению скорости потока под крылом и, как следствие, к росту подъемной силы. Но с увеличением угла атаки растет сила сопротивления. Кроме того, при больших углах атаки происходит отрыв потока от крыла, что ведет к уменьшению подь-

емной силы. Поэтому у современных самолетов угол атаки не превосходит 3—4°.

5. Наконец, подъемную силу можно увеличить путем увеличения скорости набегающего потока. Действительно, разность скоростей над верхней и под нижней поверхностями крыла при малых углах атаки и малой выпуклости крыла (см. рис. 30.15, б) невелика. Поэтому полусумма этих скоростей мало отличается от скорости набегающего потока,  $(v_1 + v_2)/2 \approx v$ . Это позволяет привести формулу (30.10) к виду

$$\Delta p = \frac{\rho(v_2 + v_1)(v_2 - v_1)}{2} \approx \rho v \Delta v.$$

Следовательно, при больших скоростях потока подъемная сила будет велика даже в том случае, когда крыло имеет небольшую изогнутость и малые размеры. Именно такую форму имеют крылья современных скоростных самолетов. Это позволяет существенно уменьшить силу лобового сопротивления, что безусловно выгодно.

### § 30.16. Измерение давления и скорости в потоке жидкости

1. В этом параграфе мы рассмотрим случай дозвукового потока ( $M < 1$ ), когда сжимаемостью газа можно пренебречь. Выясним, как можно измерить давление в движущейся жидкости с помощью неподвижного манометра и как по измерениям давления судить о скорости движения жидкости.

2. Поместим в поток небольшую трубку удобообтекаемой формы, у которой в боковой поверхности имеется одно или несколько отверстий (рис. 30.18). Трубка такой формы практически не искажает поток, вследствие чего его скорость, а потому и давление существенно не меняются. Благодаря силам упругости жидкость поступает в трубку и поднимается на некоторую высоту  $h$  до тех пор, пока гидростатическое давление не уравновесит давление жидкости в потоке. Величина давления может быть вычислена по формуле  $p = \rho gh$ . Если давление в жидкости мало, то манометрическая трубка устанавливается наклонно, и тогда давление рассчитывается по формуле  $p = \rho gl \sin \alpha$  (см. § 26.2).

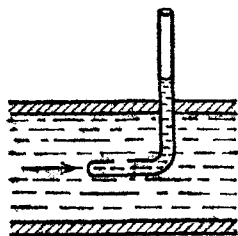


Рис. 30.18.

Для измерения давления в газе трубку с помощью шланга присоединяют к обычному манометру для газов — жидкостному или металлическому.

2. Поместим в ту же точку потока трубку, входное отверстие которой обращено навстречу потоку, — так называемую *трубку Пито*. Столбик жидкости в манометрической трубке поднимается выше, чем в предыдущем случае (рис. 30.19), что свидетельствует о росте давления. Действительно, в трубке Пито жидкость останавливается, и давление столбика жидкости в манометрической трубке уравнивается давлением *заторможенной* жидкости, а не давлением движущейся жидкости, как это имело место в предыдущем эксперименте. Давление заторможенной жидкости определяется по уравнению Бернулли (30.10), если в нем положить  $v_2 = v_{\text{торм}} = 0$ ,  $p_2 = p_{\text{торм}}$ . Итак,

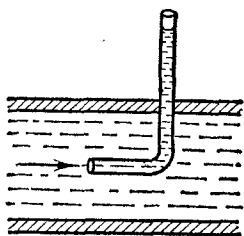


Рис. 30.19.

Часто давление заторможенной жидкости  $p_{\text{торм}}$  не совсем удачно называют *полным* давлением, давление в незаторможенной жидкости  $p$  — *статическим*, а их разность  $p_{\text{торм}} - p = \rho v^2 / 2$  — *динамическим* давлением.

3. Скорость потока в некоторой точке измеряется с помощью трубки Пито — Прандтля (рис. 30.20). Поскольку разность давлений в обоих манометрических трубках пропорциональна квадрату скорости потока, то можно манометр градуировать непосредственно в единицах скорости.

При измерении скорости газового потока трубку Пито — Прандтля присоединяют к дифференциальному манометру, который регистрирует разность давлений и тем самым, согласно (30.35), скорость потока. Шкала дифференциального манометра градуируется непосредственно в единицах скорости.

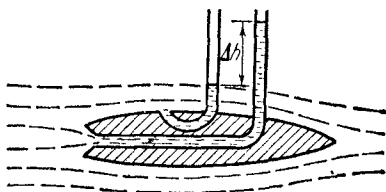


Рис. 30.20.

Из принципа относительности следует, что показания данного прибора не зависят от того, набегает ли поток жидкости на трубку или, наоборот, трубка движется в неподвижной жидкости или газе. На этом принципе основано использование трубки Пито — Прандтля для определения скорости движения самолета относительно воздуха или скорости судна относительно воды. —

### § 30.17. Учет вязкости. Сопротивление трубопроводов

1. Пусть жидкость течет по трубопроводу с постоянным сечением. Применяя к этому случаю уравнение неразрывности (30.3) и уравнение импульсов (30.6) и учитывая, что  $\rho_1 = \rho_2$  и  $S_1 = S_2$ , мы видим, что и давление одинаковы во всех сечениях,  $p_1 = p_2$ . Мы получим парадоксальный

результат: жидкость может якобы течь по трубопроводу без всякого перепада давлений, сама собой! Это полностью противоречит результатам эксперимента. Убедиться в этом можно с помощью несложной установки, схема которой изображена на рис. 30.21. Когда по трубопроводу протекает жидкость, то манометрические трубки регистрируют наличие перепада давления. Оказывается, что давление в начале трубопровода значительно больше, чем в его конце.

Причина расхождения между теорией и экспериментом заключается в том, что при выводе уравнения (30.6) мы пренебрегли силами внутреннего трения, которые в данном случае играют существенную роль.

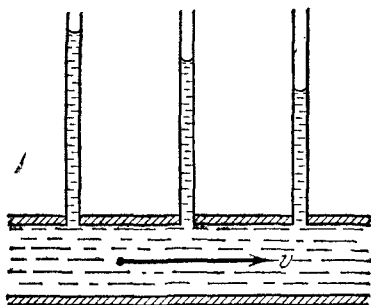


Рис. 30.21.

2. Теоретический расчет сил сопротивления может быть сделан только для относительно небольших скоростей потока, точнее — для чисел Рейнольдса  $Re = \rho v d / \eta \leq 2320$ , где  $d$  — диаметр трубы,  $\eta$  — вязкость жидкости (см. (11.14)). Заметим, что при этих числах Рейнольдса шероховатость стенок не влияет на силы сопротивления. При больших числах Рейнольдса как для гладких, так и для шероховатых труб теоретический расчет сил сопротивления до сих пор сделать не удалось, и здесь пользуются эмпирическими формулами, тщательно проверенными экспериментально.

3. Перепад давлений, т. е. разность давлений в двух сечениях, отстоящих друг от друга на расстоянии  $l$ , можно вычислить по формуле

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \cdot \frac{\rho v^2}{2}, \quad (30.36)$$

где  $\lambda$  — это коэффициент гидравлического трения.

При  $Re \leq 2320$  для любых труб — гладких и шероховатых — справедливо соотношение

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \quad (30.37)$$

Для гладких труб (например, стеклянных) при  $Re > 2320$  справедлива эмпирическая формула

$$\lambda = \frac{0,316}{\sqrt[4]{Re}}. \quad (30.38)$$

Для шероховатых труб при  $Re > 10^7$  коэффициент гидравлического трения уже перестает зависеть от вязкости, т. е. от числа Рейнольдса (квадратичный закон сопротивления). В специальной литературе приводится ряд эмпирических зависимостей коэффициента гидравлического трения от степени шероховатости трубы, которые мы здесь рассматривать не будем.

Заметим также, что переход от ламинарного режима течения, где коэффициент гидравлического трения  $\lambda$  следует формуле (30.37), к турбулентному, где справедливо соотношение (30.38), зависит не только от числа Рейнольдса, но и от ряда других факторов. Рассмотрение этого вопроса выходит за пределы возможностей данной книги.

МОЛЕКУЛЯРНЫЕ СИЛЫ И АГРЕГАТНЫЕ  
СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА

ГЛАВА 31  
МОЛЕКУЛЯРНЫЕ СИЛЫ

§ 31.1. Плотность и сжимаемость вещества

1. Как было показано в § 26.3, сравнив плотности вещества в твердом, жидком и газообразном состояниях, можно судить о расстояниях между молекулами в этих телах. При этом оказывается, что расстояния между молекулами в жидком и твердом состоянии мало отличаются — всего лишь на несколько процентов, а в газах расстояние между ними (при не очень больших давлениях) примерно в 10 раз больше. Поэтому говорят, что в жидком и твердом состоянии молекулы вещества плотно упакованы. Плотная упаковка молекул приводит к тому, что жидкости и твердые тела сжимаются значительно слабее, нежели газы.

2. Пусть тело подвергается всестороннему сжатию или растяжению. В результате этого изменится его объем и, как следствие, его плотность. Обозначим через  $\epsilon$  относительное изменение объема:

$$\epsilon = \frac{\Delta V}{V} = - \frac{\Delta \rho}{\rho}; \quad (31.1)$$

знак минус в этой формуле объясняется тем, что при возрастании объема тела его плотность при неизменной массе уменьшается.

Избыточное по сравнению с атмосферным давлением  $\sigma$  иногда называется *напряжением*:

$$\sigma = \Delta p. \quad (31.2)$$

*Сжимаемостью вещества*  $\beta$  называется частное от деления относительного изменения объема на напряжение:

$$\beta = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{\Delta V}{V \Delta p} = - \frac{\Delta \rho}{\rho \Delta p}. \quad (31.3)$$

Обратная величина называется *модулем всестороннего сжатия*:

$$K = \frac{1}{\beta}. \quad (31.4)$$

3. Как следует из (30.16), сжимаемость газа при адиабатном процессе

$$\beta_{\text{ад}} = \frac{1}{\gamma p}. \quad (31.5)$$

Рекомендуем читателю, пользуясь уравнением газового состояния, самостоятельно показать, что при изотермическом процессе

$$\beta_{\text{изот}} = \frac{1}{p}. \quad (31.6)$$

При давлениях порядка нескольких десятков атмосфер  $p \approx 20 \text{ атм} \approx 2 \cdot 10^6 \text{ н/м}^2$  изотермическая сжимаемость газов  $\beta \approx 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{н}$ .

Сжимаемость жидкостей и твердых тел примерно в  $10^3$ — $10^5$  раз меньше, чем у газов. Это видно из табл. 31.1,

Таблица 31.1

Вещество	Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	Сжимаемость $\beta$ , м <sup>2</sup> /н
Вода (0° С) . . . . .	999,9	48,9 · 10 <sup>-11</sup>
Лед (0° С) . . . . .	916,8	40 · 10 <sup>-11</sup>
Спирт этиловый (15° С) . . . . .	790	76 · 10 <sup>-11</sup>
Ртуть (20° С) . . . . .	13545,9	3,8 · 10 <sup>-11</sup>
Медь . . . . .	8930	0,73 · 10 <sup>-11</sup>
Алюминий . . . . .	2690	1,37 · 10 <sup>-11</sup>
Алмаз . . . . .	3500	0,23 · 10 <sup>-11</sup>
Графит . . . . .	2300	3,0 · 10 <sup>-11</sup>

где приведены плотности и сжимаемости некоторых жидкостей и твердых тел при аналогичных значениях избыточного давления ( $p \approx 20 \text{ атм}$ ).



## § 31.2. Молекулярные силы

1. Из анализа данных о сжимаемости жидкостей и твердых тел, а также из анализа ряда явлений, рассмотренных в начальном курсе физики (прилипание друг к другу хорошо шлифованных твердых тел, смачивание твердых тел жидкостями и т. п.), вытекает, что между молекулами действуют значительные по величине силы, называемые *молекулярными силами*. Эти силы обладают рядом интересных особенностей.

При удалении молекул друг от друга молекулярное взаимодействие проявляется в виде сил *притяжения*, при сближении на расстояния порядка линейных размеров самих молекул — в виде сил *отталкивания*. Следовательно, существует определенное расстояние  $d$  между молекулами, когда силы отталкивания и притяжения уравновешены и их равнодействующая равна нулю. Система молекул, расположенных на расстояниях  $d$  друг от друга, находится в состоянии устойчивого равновесия, а энергия взаимодействия между молекулами в этом случае должна быть минимальной (см. §§ 19.5, 19.6).

Молекулярные силы проявляются только в том случае, когда расстояния между молекулами весьма малы, порядка эффективных размеров самих молекул (см. § 25.3). При увеличении расстояния между ними в несколько раз силы становятся практически равными нулю. Именно этим и объясняется тот факт, что при анализе явлений в газах, где расстояния между молекулами примерно в 10 раз больше, чем в жидкостях или твердых телах, можно в большинстве случаев пренебречь действием молекулярных сил.

2. Величина молекулярных сил не зависит от общего числа молекул. Так, плотность или упругие свойства жидкостей и твердых тел не зависят от размеров исследуемого образца; капля воды и вода в океане при одинаковой температуре и одинаковом внешнем давлении имеют совершенно одинаковую плотность и сжимаемость, и т. п. Этим молекулярные силы принципиально отличаются от гравитационных или кулоновских сил, где равнодействующая определяется действием всех тел, входящих в систему. Причина того, что молекулярные силы действуют только между соседними молекулами, будет выяснена в следующих параграфах.

### § 31.3. Электрическое происхождение молекулярных сил

1. Тщательные исследования, проведенные рядом ученых в первой половине XX в., позволили прийти к выводу, что *молекулярные силы имеют электрическое происхождение*.

На первый взгляд такой результат может показаться странным, поскольку известно, что молекулы нейтральны, а электрическое взаимодействие характерно только для заряженных тел. Однако ранее было показано, что электрическое взаимодействие возникает и между диполями — нейтральными частицами с несимметрично расположенными зарядами, равными по величине, но противоположными по знаку (см. § 10.4). Это позволяет понять природу электрического взаимодействия между молекулами.

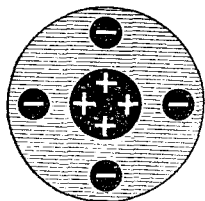


Рис. 31.1.

2. Молекулы ряда веществ имеют симметричное строение, как это схематически показано на рис. 31.1. Здесь шарик, имеющий положительный заряд, изображает ядра атомов, входящих в молекулу, а отрицательно заряженная сфера — электронное облако этих атомов.

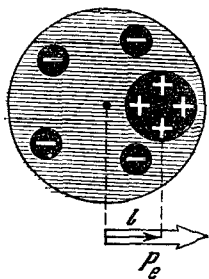


Рис. 31.2.

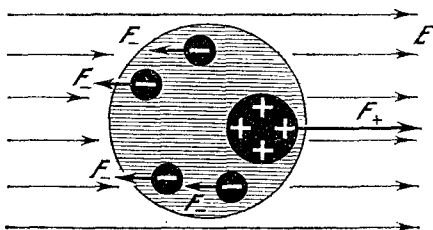


Рис. 31.3.

Допустим, что молекула деформировалась так, что ее электронное облако несколько сместилось в сторону, как это изображено на рис. 31.2. Такую деформированную молекулу можно в первом приближении рассматривать как диполь с некоторым моментом  $p_e = ql$ . В этом случае молекула

создает вне себя электрическое поле, напряженность которого

$$E \approx \frac{p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

(см. (10.10)).

3. Поле этой молекулы вызовет деформацию близлежащих молекул. На положительное ядро молекулы действует сила отталкивания, направленная вдоль вектора напряженности, а на отрицательно заряженное электронное облако — силы, направленные в противоположную сторону (рис. 31.3). Эти силы и деформируют молекулу.

Итак, молекула, имеющая дипольный момент  $p_e$ , индуцирует (наводит) у соседних молекул дипольный момент  $p'_e$ .

Нетрудно убедиться что индуцированный дипольный момент пропорционален напряженности поля. В самом деле, момент диполя  $p'_e = ql'$ , где  $l'$  — плечо индуцированного диполя. С достаточной степенью точности можно считать, что при незначительных растяжениях молекулы ее внутренние силы ведут себя наподобие упругих сил. Деформация молекулы прекратится, когда упругая внутренняя сила уравновесит внешнюю электрическую силу:

$$F_{\text{упр}} = F_{\text{эл}}$$

или

$$kl' = qE.$$

Отсюда индуцированный момент

$$p'_e = ql' = \frac{q^2}{k} E = \epsilon_0 \alpha E. \quad (31.7)$$

Величина  $\alpha$  называется *поляризуемостью молекулы*;  $\epsilon_0$  введено для удобства расчетов. В нашем случае

$$p'_e \approx \frac{\epsilon_0 \alpha \cdot p_e}{4\pi\epsilon_0 r^3} \approx \frac{\alpha p_e}{4\pi r^3}. \quad (31.8)$$

4. Если две молекулы с одинаково ориентированными дипольными моментами  $p_e$  и  $p'_e$  находятся недалеко друг от друга, то они притягиваются (см. (10.7));

$$\hat{f} = -\frac{6p_e p'_e}{4\pi\epsilon_0 r^4}.$$

Если подставить в эту формулу выражение для момента индуктированного диполя (31.8), то окончательно

$$f \approx -\frac{\alpha p_e^2}{\epsilon_0 r^3}. \quad (31.9)$$

Мы получили очень важный результат: *если молекулы индуктируют у ближайших соседей дипольный момент, то между ними возникает сила притяжения, обратно пропорциональная седьмой степени расстояния между ними.*

5. Попробуем оценить порядок сил молекулярного взаимодействия. Дипольный момент имеет величину примерно  $p_e \approx 10^{-30}$  к·м, поляризуемость  $\alpha \approx 10^{-28}$  м<sup>3</sup>, а расстояние между молекулами  $r \approx 3 \cdot 10^{-10}$  м. Подставив в (31.9), получим

$$|f| \approx \frac{10^{-28} \cdot 10^{-60} \cdot 36\pi \cdot 10^9}{2,2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-70}} \approx 5 \cdot 10^{-11} \text{ н.}$$

На первый взгляд сила кажется малой. Однако если учесть, что все тела состоят из огромного множества молекул, то ясно, что их взаимодействие даст заметный эффект.

Оценим, например, силу, которую нужно приложить, чтобы разорвать стержень с сечением 1 см<sup>2</sup>. Она равна силе взаимодействия между двумя соседними молекулами, умноженной на число молекул, укладываемых на площадке 1 см<sup>2</sup> при достаточно плотной упаковке. Поскольку расстояние между молекулами порядка  $3 \cdot 10^{-10}$  м =  $3 \cdot 10^{-8}$  см, то искомое число молекул

$$N = \left(\frac{1}{3 \cdot 10^{-8}}\right)^2 \frac{1}{\text{см}^2} = 10^{15} \frac{1}{\text{см}^2}.$$

Разрывающая сила

$$F = |f|N \approx 5 \cdot 10^{-11} \text{ н} \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{см}^2} = 5 \cdot 10^4 \text{ н/см}^2.$$

Из опыта известно, что прочность стали на разрыв равна примерно  $10^5$  н/см<sup>2</sup>. Наш ориентировочный и довольно грубый расчет дает по порядку величины правильный результат.

### § 31.4. График молекулярных сил

1. В предыдущем параграфе был рассмотрен простейший случай молекулярного притяжения — взаимодействие между индуцированными диполями. На самом деле между молекулами могут возникнуть силы притяжения и по ряду других причин, которые мы здесь рассмотреть не можем, ибо строгая теория молекулярных сил может быть создана только на базе квантовой механики. Оказывается, что во всех случаях сила молекулярного притяжения обратно пропорциональна седьмой степени расстояния между молекулами:

$$f_{\text{пр}} = -\frac{a}{r^7}. \quad (31.10)$$

Здесь знак минус свидетельствует о том, что мы имеем дело с силой притяжения,  $a$  — некоторый коэффициент, зависящий от строения молекулы и характера сил притяжения.

2. Как показывает опыт по сжатию тел, при значительном сближении молекул между ними возникают силы отталкивания. Происхождение этих сил также электрическое. Оказывается, что здесь начинают играть существенную роль силы отталкивания между положительно заряженными ядрами. Кроме того, здесь проявляются квантовомеханические эффекты, рассмотрение которых выходит за рамки данной книги.

При сближении молекул сила отталкивания меняется очень быстро, значительно быстрее силы притяжения. Приблизительно она может быть выражена в виде

$$f = \frac{b}{r^9}. \quad (31.11)$$

Здесь коэффициент  $b$  зависит от тех же причин, что и  $a$ . В квантовой механике удается получить более точную формулу, на которой мы останавливаться не будем.

3. Естественно, что на молекулу действует равнодействующая сила

$$f = -\frac{a}{r^7} + \frac{b}{r^9}. \quad (31.12)$$

Знак этой силы зависит от расстояния между молекулами. Существует некоторое расстояние  $r = d$ , при котором силы

отталкивания уравновешивают силы притяжения. Из (31.12) следует, что  $f=0$ , если  $d=\sqrt{b/a}$ . При  $r < d$  равнодействующая сила положительна, т. е. сила отталкивания превосходит притяжение; при  $r > d$  мы имеем обратную картину — притяжение оказывается сильнее отталкивания и равнодействующая станет отрицательной.

Можно показать, что при  $r_0 = d\sqrt{9/7} = 1,134d$  молекулы притягиваются с максимальной силой  $f_{\max} \approx -\frac{a}{11d^2}$  (рис. 31.4). При  $r=1,5d$  сила притяжения уменьшается

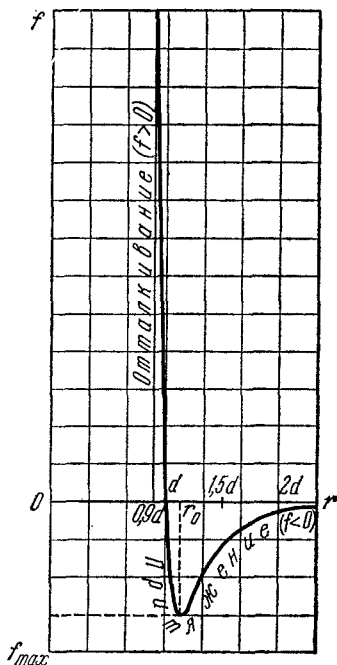


Рис. 31.4.

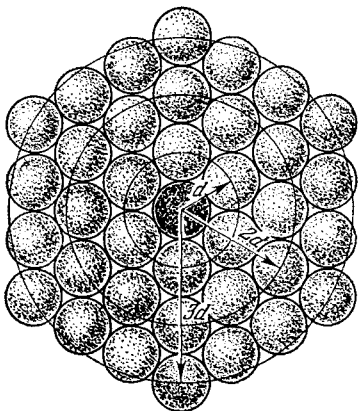


Рис. 31.5.

примерно в 3 раза, при  $r=2d$  — в 16 раз и при  $r=3d$  — почти в 250 раз. Если расстояние уменьшить до  $r=0,9d$ , то возникнет сила отталкивания  $f \approx 5 |f_{\max}|$ , при  $0,7d$  — сила отталкивания  $f \approx 140 |f_{\max}|$ .

4. Такая сильная зависимость силы от расстояния означает, что молекулярные силы являются короткодействующими — молекулы взаимодействуют только со своими ближайшими соседями. Если изобразить молекулы в виде плотно упакованных шариков (рис. 31.5), что в общем соот-

ветствует упаковке молекул во многих жидкостях и твердых телах, то зачерненная молекула взаимодействует только с первым окружающим ее слоем. С погрешностью, не превосходящей 6%, можно пренебречь взаимодействием молекулы со вторым, а тем более с третьим и далее лежащими слоями.

Этим и объясняются все особенности молекулярных сил, рассмотренные в § 31.2, в частности — независимость величины молекулярных сил от общего числа молекул в системе и отсутствие молекулярного взаимодействия в газах (кроме случая очень больших давлений).

### § 31.5. Потенциальная кривая молекулярного взаимодействия

1. Зная характер молекулярных сил, можно построить график энергии молекулярного взаимодействия — так называемую *потенциальную кривую* (см. § 19.5). При этом следует учесть рассмотренные там свойства этой кривой.

Прежде всего, согласно (19.12) потенциальная кривая при  $r < d$  должна быть наклонена к оси абсцисс под тупым углом, ибо здесь действует положительная сила отталкивания. Из этих же соображений при  $r > d$  кривая должна быть наклонена к оси абсцисс под острым углом, ибо здесь действует сила притяжения. А отсюда следует, что при  $r = d$  кривая имеет минимум.

Этим подтверждается высказанное в § 31.2 положение, что в состоянии равновесия система молекул обладает минимальной энергией.

2. Поскольку сила отталкивания меняется с расстоянием значительно сильнее силы притяжения, то потенциальная кривая оказывается *несимметричной*. Левее точки минимума, при  $r < d$ , она спадает очень круто. Правее точки минимума, при  $r > d$ , она вначале возрастает, но по более пологой кривой, а затем ее рост вообще прекращается, ибо при  $r > 2d$  сила взаимодействия практически равна нулю.

Как известно, нулевой уровень потенциальной энергии может быть выбран произвольно. Удобно положить, что потенциальная энергия равна нулю при бесконечном

удалении молекул друг от друга. Тогда практически она станет равна нулю уже при  $r > 2d$ .

3. Потенциальная кривая молекулярного взаимодей-

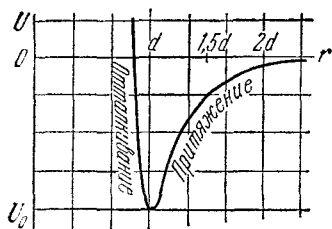


Рис. 31.6.

ствия изображена на рис. 31.6. Здесь  $U_0$  — минимальная энергия взаимодействия между молекулами, которой они бы обладали, если бы находились друг от друга на расстоянии  $d$  и покоились. Анализ этой кривой позволяет судить о многих свойствах твердых тел и жидкостей. Одно из этих свойств,

а именно причину их теплового расширения, мы рассмотрим в следующем параграфе.

### § 31.6. Тепловое расширение твердых тел и жидкостей

1. Опыт показывает, что при повышении температуры объем твердых тел и жидкостей возрастает. Выясним причину теплового расширения. При этом следует учесть, что хотя структура и свойства твердых тел и жидкостей различны, о чем речь пойдет в последующих главах, для механизма теплового расширения эти различия роли не играют.

В твердом теле или жидкости при заданной температуре молекулы находятся друг от друга на определенных расстояниях и совершают колебания около по-

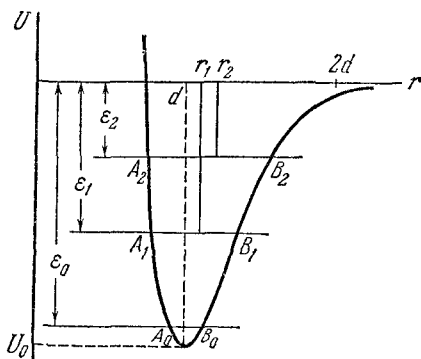


Рис. 31.7.

ложениям равновесия. Изобразим на потенциальной кривой значения полной энергии молекулы для ряда значений температуры тела (рис. 31.7). Здесь  $\epsilon_0$  — так называемая нулевая энергия — минимальная энергия колебаний молекулы при абсолютном нуле температуры (§ 26.8);  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  —



энергии колебания молекулы при температурах  $T_1$  и  $T_2$ . Из рис. 31.7 видно, что при абсолютном нуле молекулы колеблются около положений равновесия, расстояние между которыми равно  $d$ . При повышении температуры тела энергия колебаний возрастает. Следовательно, если при температуре  $T_1$  молекула колеблется между точками  $A_1$  и  $B_1$ , то при температуре  $T_2$  она станет колебаться между точками  $A_2$  и  $B_2$ . А так как потенциальная кривая имеет несимметричную форму, то точка  $B$  смещается вправо значительно сильнее, чем точка  $A$  влево. Отсюда следует, что и положение равновесия при повышении температуры тоже смещается вправо. Иными словами, расстояние между молекулами при повышении температуры увеличивается за счет несимметричной формы потенциальной кривой молекулярного взаимодействия.

2. Нам удалось качественно объяснить механизм теплового расширения твердых тел и жидкостей. Однако получить количественные зависимости из анализа потенциальной кривой молекулярного взаимодействия просто не удастся. Поэтому обратимся к результатам эксперимента.

Оказывается, что в небольшом интервале температур относительное изменение объема пропорционально изменению температуры:

$$\epsilon = \beta \Delta T, \quad (31.13)$$

где  $\epsilon = \Delta V/V = -\Delta\rho/\rho$  (см. (31.1)),  $\Delta T$  — изменение температуры и  $\beta$  — коэффициент объемного расширения, т. е. относительное изменение объема, приходящееся на один градус. Полагая  $\Delta V = V - V_0$ , где  $V_0$  — объем тела при температуре  $t_0 = 0^\circ \text{C}$ , а  $\Delta T = t - t_0 = t$  — температура тела по шкале Цельсия, имеем

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \beta t, \quad (31.14)$$

откуда

$$V = V_0 (1 + \beta t). \quad (31.15)$$

Аналогично для плотности тела получим

$$\rho = \rho_0 (1 - \beta t). \quad (31.16)$$

3. Если нагреть длинный стержень, то его длина возрастет. Совершенно аналогичные рассуждения позволяют

показать, что в небольшом интервале температур

$$l = l_0 (1 + \alpha t), \quad (31.17)$$

где  $l_0$  — длина стержня при  $0^\circ \text{C}$ ,  $l$  — его длина при температуре  $t^\circ \text{C}$ . Величина  $\alpha$  называется *коэффициентом линейного расширения* и представляет собой относительное изменение длины, приходящееся на один градус.

4. Покажем, что для твердых тел коэффициент объемного расширения втрое больше коэффициента линейного расширения.

Для этого учтем, что  $V = l^3$ . Подставив в выражение (31.15), получим

$$l_0^3 (1 + \alpha t)^3 = V_0 (1 + \beta t).$$

Сократив на  $V_0 = l_0^3$  и раскрыв скобки, имеем

$$\beta = 3\alpha + 3\alpha^2 t + \alpha^3 t^2.$$

Для всех твердых тел коэффициент линейного расширения очень мал и по порядку равен  $10^{-5}$ — $10^{-6} \frac{1}{\text{град}}$ . А это означает, что при малом интервале температур ( $t \leq 100^\circ \text{C}$ ) можно в равенстве отбросить члены, содержащие  $\alpha^2$  и  $\alpha^3$ . Отсюда следует

$$\beta = 3\alpha. \quad (31.18)$$

## Г Л А В А 32 ДАЛЬНИЙ ПОРЯДОК

### § 32.1. Монокристалл

1. Давно было замечено, что некоторые твердые тела встречаются в природе в виде *кристаллов* — тел, грани которых представляют собой правильные многоугольники. Форма возникающих многогранников зависит от условий образования кристалла, но самым характерным свойством кристалла является постоянство углов между его ребрами и соответственно между гранями.

Так, кристалл поваренной соли может иметь форму куба, параллелепипеда или призмы, а также тела неправильной конфигурации (рис. 32.1). Но всегда в его вершине встречаются три ребра, образующие между собой прямые углы. Точно так же в вершине кристалла кальцита (исландского

шпата) встречаются три ребра, образующие один острый угол  $78^{\circ}08'$  и два тупых угла по  $101^{\circ}52'$  каждый (рис. 32.2).

В ряде кристаллов, таких, как исландский шпат или кварц, имеется некоторое определенное направление, называемое *кристаллографической* или *оптической осью*. На рис. 32.3 оптическая ось — это направление, параллельное прямой  $MN$ . О значении и роли этой оси будет рассказано во втором томе.

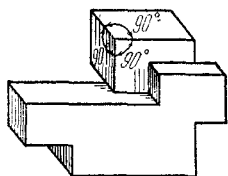


Рис. 32.1.

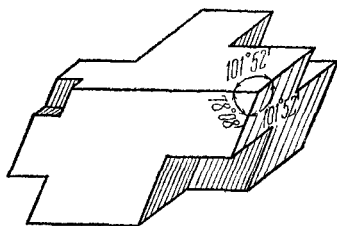


Рис. 32.2.

2. Большой одиночный кристалл, имеющий более или менее правильную форму, называется *монокристаллом* (от греческого *monos* — один). Характерной особенностью монокристалла является его *анизотропия*, т. е. различие его физических свойств в разных направлениях.

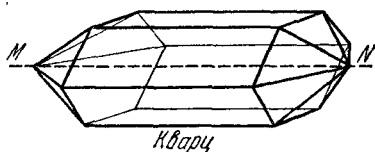
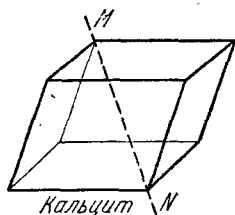


Рис. 32.3.

3. Анизотропия механических свойств монокристалла сказывается прежде всего в том, что его прочность в разных направлениях различна. Если, например, изготовить из некоторого монокристалла шар, а затем ударом разбить его, то он расколется на куски, грани которых образуют углы, характерные для данного вещества. А это и означает, что прочность монокристалла в этих направлениях минимальна.

Различной является и упругость монокристалла в разных направлениях. А так как скорость звука зависит от упругих свойств вещества и от его плотности, то, как показывает опыт, скорость распространения звука в монокристаллах в разных направлениях различна.

4. Анизотропия тепловых свойств монокристалла сказывается в том, что коэффициенты линейного расширения и теплопроводности имеют разные значения в разных направлениях. Эксперимент по измерению коэффициента теплового расширения малых образцов довольно сложен, и мы его здесь рассматривать не будем. Результаты измерений для некоторых монокристаллов представлены в табл. 32.1.

Таблица 32.1

Вещество	Коэффициент линейного расширения	
	вдоль оси	поперек оси
Кварц . . . . .	$7,5 \cdot 10^{-6}$	$13,7 \cdot 10^{-6}$
Кадмий . . . . .	$52 \cdot 10^{-6}$	$20 \cdot 10^{-6}$
Цинк (кристалл) . . . . .	$60 \cdot 10^{-6}$	$13 \cdot 10^{-6}$
Олово (кристалл) . . . . .	$30,5 \cdot 10^{-6}$	$15,5 \cdot 10^{-6}$

Экспериментально легко обнаружить различие в теплопроводности монокристалла в различных направлениях. Для этого вырежем, например, из кварца пластинку параллельно его оптической оси и покроем ее тонким слоем воска. Если прикоснуться к пластинке раскаленной иглой, то вблизи ее контакта с кварцем воск расплавится. Опыт показывает, что расплавленный участок имеет форму эллипса, большая ось которого направлена параллельно кристаллографической оси. А это означает, что теплопроводность кварца вдоль оси значительно больше, чем в перпендикулярном направлении; их отношение  $k_{\parallel}/k_{\perp}=1,72$ , где  $k_{\parallel}$  — теплопроводность вдоль оптической оси,  $k_{\perp}$  — теплопроводность в перпендикулярном направлении.

4. Точно так же можно показать, что электрическое сопротивление, скорость распространения света и ряд

других физических величин имеют различные значения для разных направлений в монокристалле. Эти явления будут рассмотрены в соответствующих разделах второго тома.

### § 32.2. Поликристалл

1. Из расплавов металлов можно получить монокристаллы, если принять специальные меры. Если же просто охладить, скажем, расплавленное железо, то полученное твердое тело не обладает анизотропией. Причину этого можно выяснить, если хорошо отшлифовать его поверхность и обработать ее кислотой, а затем изучить под микроскопом (рис. 32.4). Оказывается, что вещество состоит из отдельных зерен размерами порядка  $10^3$ — $10^4$  Å. Каждое такое зерно — это кристалл, который принял неправильную форму потому, что его росту помешали соседние кристаллики. Возникшая зернистая структура называется *поликристаллической* (от греческого poly — много).

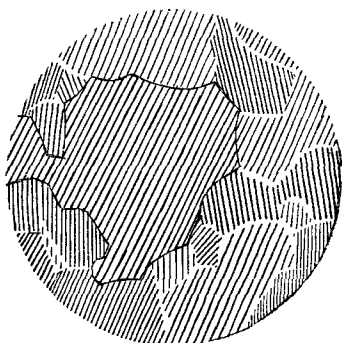


Рис. 32.4.

Поскольку кристаллографические оси всех зерен ориентированы совершенно беспорядочно, их анизотропия на больших расстояниях не может проявиться. Вследствие этого поликристалл *изотропен* — его свойства в среднем во всех направлениях одинаковы.

2. Огромное большинство твердых тел, встречающихся в природе — камни, песок, металлы, соли и т. п., — имеют поликристаллическую структуру. Возникновение крупных монокристаллов представляет собой исключительное явление, осуществляющееся при особо благоприятных условиях. Вместе с тем в природе встречаются твердые тела типа стекла, которые не имеют зернистой структуры. Они называются *аморфными*. Строение и свойства этих тел будут рассмотрены в § 34.6.

### § 32.3. Пространственная решетка. Дальний порядок

1. Еще в XVIII в. на основе изучения макроскопических свойств кристаллов было выдвинуто предположение, что кристалл состоит из ячеек правильной геометрической формы. Однако лишь в 1912 г. эта гипотеза была подтверждена М. Лауэ, открывшим явление дифракции рентгеновских лучей в кристаллах. Подробно это явление будет рассмотрено во втором томе. Здесь же мы только укажем, что на базе этого открытия был создан рентгеноструктурный анализ — область физики, позволяющая подробнейшим образом исследовать структуру любых кристаллов.

Оказалось, что частицы, из которых состоит кристалл (молекулы или атомы), образуют в пространстве правильную кристаллическую решетку. В этой решетке можно выделить некоторую ячейку минимальных размеров, характеризующуюся тем, что если ее переносить параллельно самой себе каждый раз на расстояние, равное ее ребру, то таким способом можно образовать сколь угодно большой монокристалл.

Вершина ячейки называется *узлом* кристаллической решетки; прямая, проходящая через узлы решетки, — *узловой линией*; плоскость, проходящая через узлы решетки, называется *узловой плоскостью*. Плоскости и линии, которые гуще всего усеяны узлами, образуют грани и ребра кристалла.

2. В 1881 г. Е. С. Федоров установил, что всего в природе возможны 230 различных пространственных видов симметрии (федоровские группы), которые могут быть разбиты на 7 кристаллических систем или на 32 класса. Эти классы различаются формой ячейки — углами между ребрами и гранями и соотношениями между размерами ребер.

С помощью рентгеноструктурного анализа была блестяще подтверждена классификация, предложенная Е. С. Федоровым. Оказалось, что в природе нет ни одного кристалла, который не принадлежал бы к той или иной федоровской группе.

3. Обычно в узлах кристаллической решетки размещаются центры атомов, ионов или молекул. Как мы увидим ниже, не все атомы попадают при этом в узлы. Но важно то, что в кристаллической решетке наблюдается правильное, регулярное распределение вещества, а также электрических зарядов и связанных с ними электрических полей.

Величина периодов повторяемости очень невелика — в металлах, например, она составляет от 3 до 7 Å, что соответствует нескольким атомным слоям, поскольку расстояние между двумя атомами в твердом теле равно примерно 1 Å. Но даже в поликристаллах зерна имеют размеры порядка  $10^3$ — $10^4$  Å, монокристаллы же имеют гораздо большие размеры.

Мы приходим к выводу, что в кристаллических телах регулярное расположение элементов кристаллической решетки повторяется в пределах сотен, тысяч и десятков тысяч слоев. На этом основании и говорят, что в кристалле наблюдается *дальний порядок* в упаковке атомов или других частиц (ионов, молекул и т. п.), из которых построена ячейка кристалла.

### § 32.4. Дефекты упаковки и блочная структура кристалла

1. Если бы кристалл имел идеальную структуру, то дальний порядок наблюдался бы на сколь угодно больших расстояниях. Однако такие идеальные кристаллы в

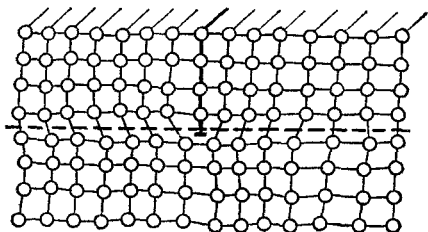


Рис. 32.5.

природе не образуются. В реальном кристалле мы встречаемся с систематическими нарушениями дальнего порядка, которые возникают в процессе кристаллизации вещества.

Одним из важнейших видов нарушения регулярной структуры кристалла является дефект, который называется *дислокацией* или *зацеплением*.

2. *Простая дислокация* заключается в том, что в каком-либо участке кристалла образуется лишняя узловая плоскость (рис. 32.5). В результате кристалл оказывается

разбитым на два блока, на линии раздела которых и лежит ядро дислокации, обозначенное знаком  $\perp$ .

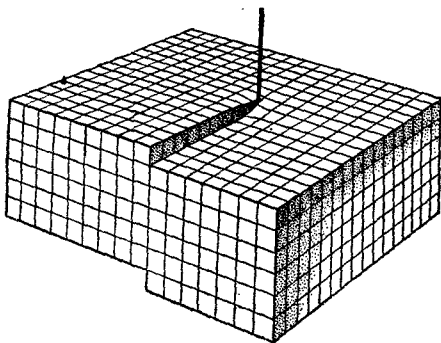


Рис. 32.6.

*Спиральная дислокация* образуется в том случае, если линия узлов одного из блоков некоторой своей частью как

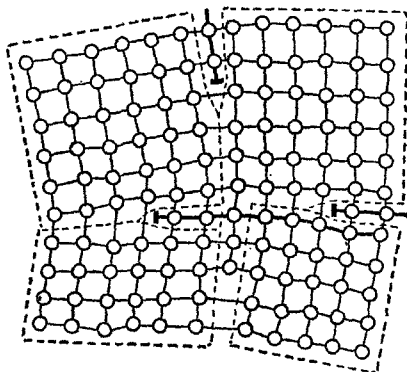


Рис. 32.7.

бы соскользнет на один период выше или ниже своего нормального направления. Наибольшие искажения здесь также возникают вдоль оси дислокации (рис. 32.6), в остальных участках, особенно вдали от оси, дальний порядок оказывается ненарушенным.



3. При наличии малого числа дислокаций образуется монокристалл, состоящий из больших блоков, в каждом из которых царит относительно идеальный дальний

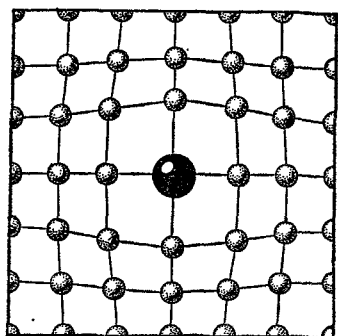


Рис. 32.8.

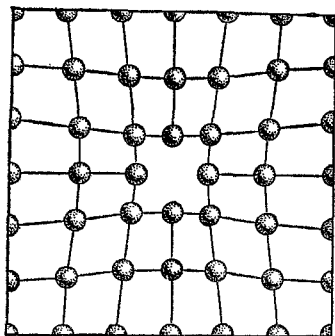


Рис. 32.9.

порядок. Часто эти блоки оказываются несколько повернутыми друг относительно друга, что изображено на рис. 32.7.

4. Нарушения дальнего порядка возможны и в том случае, если узловая точка окажется заполненной чужеродным атомом (рис. 32.8) или вакантной (рис. 32.9), а также если чужеродный атом внедрится между линиями узлов (рис. 32.10). Такие дефекты могут возникнуть как в месте возникновения дислокации, где они часто и являются причиной этого рода дефекта, так и внутри блока.

Наличие дефектов в кристалле сильно влияет на его свойства. Так, примеси в кристаллической решетке германия или кремния, составляющие всего лишь 0,1%, практически никак не влияют на структуру кристалла, но очень существенно — в тысячи

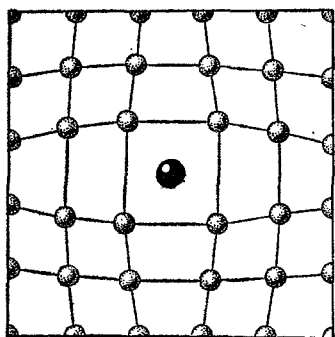


Рис. 32.10.

раз — меняют его сопротивление. Причина этого явления будет рассмотрена во втором томе.

В последующих параграфах мы рассмотрим, как влияют дефекты кристалла на некоторые его тепловые и механические свойства.

### § 32.5. Движение дефектов и диффузия

1. Опыт показывает, что при длительном контакте двух твердых тел они диффундируют друг в друга. Особенно удобно следить за явлением диффузии в твердых телах с помощью «меченых атомов» — радиоактивных изотопов данного вещества. Между тем нетрудно убедиться, что в идеальном кристалле диффузия почти невозможна. В идеальном кристалле все узловые точки заняты «своими» атомами, поэтому внедрение «чужеродного» атома в узловую точку должно сопровождаться значительной работой по вырыванию атома из узла, на что обычно энергии не хватает. Внедрение же чужеродного атома между узлами решетки также требует значительной энергии, ибо нужно «раздвинуть» соседей и преодолеть возникающие при этом весьма значительные силы отталкивания.

2. Совершенно иначе обстоит дело в реальном кристалле. Наличие дефектов типа дислокаций или вакансий в существенной мере облегчает процесс внедрения в кристалл чужеродных атомов. Эти атомы могут попасть либо в вакансию, либо в область простой или спиральной дислокации, причем энергии теплового движения оказывается вполне достаточно, чтобы атом мог попасть в дефектную область.

Аналогично обстоит дело и с дефектом типа замещения (см. рис. 32.8). Здесь при достаточно высокой температуре вполне вероятен процесс, при котором чужеродный атом и атом основного вещества меняются местами, что и приведет к перемещению чужеродного атома по кристаллу.

Итак, процесс диффузии в кристалле сводится к движению дефектов в решетке. Естественно, что чем более дефектна решетка, тем вероятнее диффузия. В частности, в поликристаллах при прочих равных условиях диффузия идет значительно быстрее, чем в монокристаллах.

3. Опыт показывает, что при повышении температуры кристалла диффузия ускоряется. Дело в том, что по мере

роста температуры молекулы начинают более интенсивно колебаться, средние расстояния между ними возрастают, и при удачном перемещении двух соседних атомов или молекул в противоположных направлениях третий атом может как бы «протолкнуться» между ними, заняв новое место в решетке. Этим объясняется и принципиальная возможность диффузии в идеальном кристалле, хотя ее вероятность мала. Тем более высокая температура будет способствовать диффузии в кристалле с дефектами.

### § 32.6. Движение дислокаций и деформация кристалла

1. Опыт показывает, что любые, даже упругие, а тем более пластические деформации кристалла связаны с перемещением (сдвигом) блоков кристалла друг относительно друга. И здесь важнейшую роль играет движение дислокаций.

Рассмотрим механизм деформации сдвига в бездефектном кристалле и в кристалле с простой дислокацией.

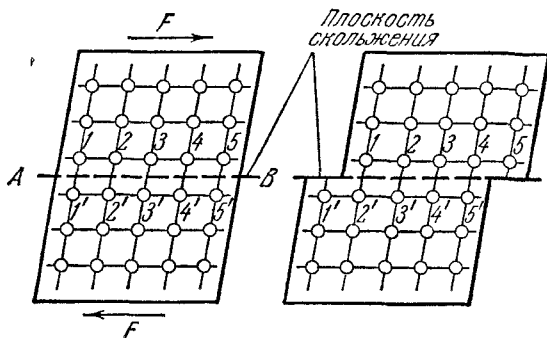


Рис. 32.11.

2. Допустим, что мы хотим вызвать сдвиг кристаллической решетки на один узел по плоскости  $AB$  идеального кристалла. Нам придется передвинуть за один прием все атомы, т. е. установить атом 1 против 2', 2 против 3' и т. д. (рис. 32.11). Для этого нужно приложить значительное усилие, равное произведению силы сцепления между двумя атомами на общее число соприкасающихся атомов по всей площади сдвига.

Пусть теперь плоскость  $AB$  совпадает с границей раздела двух блоков, на которой расположено ядро простой дислокации (рис. 32.12). Здесь под действием силы слои 3, 4 и 5 практически смещаться не будут, слой 2 сместится на половину расстояния между узлами и встанет на свое «естественное» место против узла  $3'$ . И только слою 1 придется переместиться на полное расстояние между узлами, и то после того, как слой 2 уже сдвинется и перемещению первого слоя будет мешать только притяжение к слою  $1'$ ,

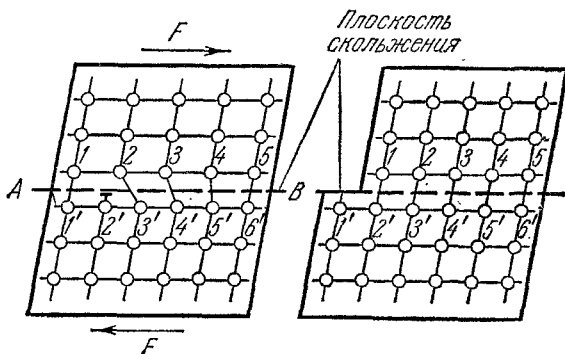


Рис. 32.12.

но не отталкивание слоя 2. Как показывает расчет, здесь на сдвиг потребуется усилие примерно в сто раз меньшее, чем при отсутствии дислокаций.

3. Как мы убедились, при деформации кристалла частично увеличивается порядок в расположении атомных плоскостей и уменьшается число простых дислокаций. Отсюда следует, что по мере того как кристалл подвергается деформациям, его прочность должна возрастать. Опыт показывает, что действительно такие деформации, как ковка, прокат и т. п., приводят к упрочнению материала, но далеко не в сто раз, как это следует из теории. Оказывается, что здесь важную роль играют спиральные дислокации, которые далеко не всегда исчезают при деформациях.

4. Прочность кристаллов резко понижается за счет трещин, возникающих на его поверхности, по-видимому, в месте выхода дислокаций. Эти трещины снижают прочность на разрыв. Например, для кристаллов каменной соли раз-

рывное напряжение падает с теоретического значения порядка  $2 \cdot 10^9$  н/м<sup>2</sup> до  $4,5 \cdot 10^6$  н/м<sup>2</sup>, т. е. примерно в 450 раз; для монокристалла цинка — с  $2 \cdot 10^{10}$  н/м<sup>2</sup> до  $5 \cdot 10^7$  н/м<sup>2</sup> и т. п. Это подтвердили опыты акад. А. Ф. Иоффе. Он показал, что если все время растворять поверхность кристалла, снимая тем самым возникающие трещины и другие поверхностные дефекты, то прочность образца возрастает. Так, производя растяжение кристалла каменной соли в горячей воде, он наблюдал разрыв при напряжениях примерно  $(1,5—1,6) \cdot 10^9$  н/м<sup>2</sup>, что весьма близко к теоретическому значению.

## Г Л А В А 33

### ПЛОТНАЯ УПАКОВКА ЧАСТИЦ

#### § 33.1. Типы кристаллических связей

1. До сих пор мы рассматривали в основном геометрические характеристики кристалла, не вникая ни в природу частиц, образующих кристалл, ни в характер сил, удерживающих эти частицы на определенных расстояниях друг от друга. Между тем именно анализ физической природы этих сил позволяет понять как геометрию кристаллических решеток, так и различие в свойствах различных типов кристаллов. С точки зрения сил, действующих между частицами, образующими кристаллы, их можно условно разбить на четыре типа: *ионные*, *атомные*, *молекулярные* и *металлические* кристаллы. Ниже будет дан анализ характерных свойств этих типов кристаллов. Но предварительно мы должны сделать следующее замечание.

Как уже говорилось, условием устойчивого состояния любой системы частиц является минимальное значение ее энергии в данных условиях (см. §§ 19.5, 19.6). Это полностью относится к системе молекул, атомов или ионов, образующих кристалл: частицы расположатся на таких расстояниях друг от друга, чтобы их энергия была минимальной, — иными словами, на расстояниях, где сила притяжения равна силе отталкивания.

2. *Ионные кристаллы.* К их числу относится большинство неорганических соединений, например соли.

В пространственной решетке этих кристаллов размещаются поочередно ионы противоположных знаков.

Механизм образования ионного кристалла объясним на примере поваренной соли  $\text{NaCl}$ . Атом натрия легко теряет один электрон, который присоединяется к атому хлора. Так возникают два иона с противоположными по знаку электрическими зарядами.

Образовавшиеся ионы имеют сферически симметричное электрическое поле, вследствие чего силы кулоновского притяжения, возникающие между ними, имеют одинаковую величину в любом направлении. Это позволяет рассматривать структуру ионного кристалла как систему шариков определенного радиуса, плотно упакованных в некоторую пространственную решетку. Центры этих шаров располагаются на таком расстоянии, чтобы энергия взаимодействия ионов была минимальной, — иными словами, чтобы сила притяжения уравновешивалась силами отталкивания.

3. *Атомные кристаллы.* Пространственная решетка в кристаллах данного типа образуется путем плотной упаковки атомов, чаще всего одинаковых. При взаимодействии одинаковых атомов ионы не образуются. Типичными примерами таких кристаллов являются алмаз и графит — два разных состояния углерода, а также некоторые неорганические соединения (сернистый цинк  $\text{ZnS}$ , окись бериллия  $\text{BeO}$  и т. п.).

Атомы, расположенные в пространственной решетке, связаны *ковалентными* (иначе — гомеополлярными) силами квантовомеханического происхождения. Эти силы имеют резко выраженную пространственную направленность, вследствие чего взаимодействие между атомами будет зависеть от характера их ориентации друг относительно друга. Поэтому геометрию кристалла данного типа нельзя получить из анализа характера упаковки шаров.

4. *Молекулярные кристаллы.* К ним относится ряд неорганических, а также большинство органических соединений, у которых в процессе кристаллизации молекулы сохраняют свою индивидуальность. В узлах кристаллической решетки здесь находятся молекулы. Примерами могут служить кристаллы брома  $\text{Br}_2$ , йода  $\text{I}_2$ , сухого льда — твердой углекислоты  $\text{CO}_2$ , а также нафталина, парафинов, жирных кислот и т. п. Характерным признаком кристаллов данного типа является то, что расстояние между частицами внутри моле-

кулы значительно меньше межмолекулярных расстояний в кристалле. Поэтому здесь можно каждую молекулу изобразить в виде тела, ограниченного частями сферических поверхностей, а сам кристалл — как плотную упаковку молекул, построенных из срезанных шаров (рис. 33.1).

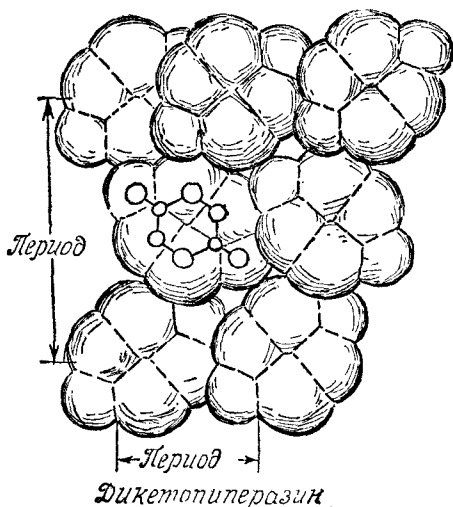


Рис. 33.1.

Между молекулами действуют ван-дер-ваальсовы силы типа сил взаимодействия между индуцированными диполями (см. §31.3). Вследствие того, что эти силы довольно слабые, молекулярные кристаллы легко разрушаются за счет теплового движения молекул — они плавятся при очень низких температурах, а также легко испаряются. Так, кристаллы йода при нормальном атмосферном давлении испаряются (возгоняются) при  $+39,6^{\circ}\text{C}$ , а кристаллы сухого льда — при  $-78,5^{\circ}\text{C}$ .

5. *Металлические кристаллы.* Как говорит само их наименование, данный тип связи представляет собой способ упаковки атомов металлов в кристаллическую решетку. При кристаллизации металлов их атомы сближаются и между ними возникают большие силы квантовомеханического происхождения. За счет этих сил электроны, находящиеся

на внешних орбитах (валентные электроны), отделяются от атомов. Однако, в отличие от случая ионной связи, здесь электроны не могут присоединиться к другому атому и образовать отрицательный ион, ибо все атомы металла одинаковы. Поэтому *валентные электроны коллективизируются* — они уже принадлежат не одному атому, как в случае ионной связи, и не паре соседних атомов, как при ковалентном взаимодействии, а всему кристаллу в целом. Металлическая связь обеспечивается притяжением между ионной решеткой, образованной положительно заряженными ионами, и отрицательно заряженным электронным облаком, так называемым *электронным газом*.

Заметим, что наличие свободных электронов, способных под действием электрического поля перемещаться по кристаллу, обеспечивает хорошую электропроводность металлов.

В общем случае упаковка ионов в металлическом кристалле не может быть сведена к упаковке шаров, как это может быть сделано в случае ионной или молекулярной связи. Однако в некоторых случаях вполне целесообразно рассматривать металлические кристаллы как систему плотнейшим образом упакованных шаров одинакового радиуса.

### § 33.2. Плотнейшая упаковка одинаковых шаров

1. Рассмотрим, как можно плотнейшим образом упаковать шары одинакового радиуса. На плоскости это будет фигура, изображенная на рис. 33.2. Здесь каждый шарик окружен шестью соседями — это так называемая симметрия шестого порядка. Если мы начнем шары упаковывать в пространстве, то нам нужно такую же плоскую решетку несколько повернуть и сместить так, чтобы шары второго слоя уложились в лунки первого слоя. Но при этом шары заполняют только половину лунок. В оставшиеся лунки шары попасть не могут. На рис. 33.3 показано, как укладываются друг на друга два слоя одинаковых шаров. Центры верхних шаров разместились над лунками, которые на рис. 33.2 отмечены черными точками.

Аналогично может быть наложен сверху третий слой. Однако здесь возможны два варианта упаковки.

2. Центры шаров третьего слоя могут быть расположены над центрами первого слоя. В этом случае третий слой повто-



ряет первый. Если теперь уложить четвертый слой над вторым, пятый — над третьим, шестой — над четвертым и т. д., то получится двухслойная плотнейшая упаковка одинаковых шаров — так называемая *гексагональная упаковка*.

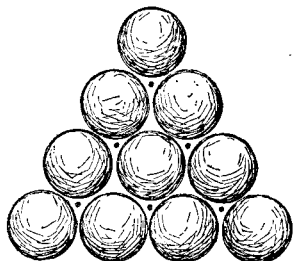


Рис. 33.2.

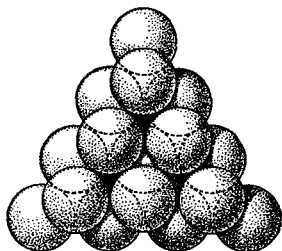


Рис. 33.3.

На рис. 33.4 изображена модель такой упаковки. Символически повторяемость слоев записывается так: *АВАВАВ...* Ячейка представляет собой прямую призму, в основании которой лежит правильный шестиугольник. Высота призмы

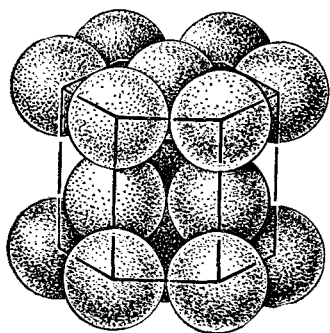


Рис. 33.4.

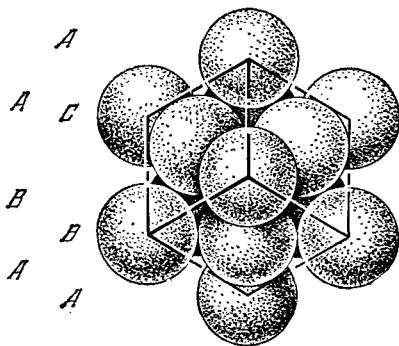


Рис. 33.5.

больше сторон оснований. Заметим, что не все атомы расположены в узлах решетки.

Плотнейшая гексагональная упаковка характерна для кристаллов бериллия, магния, скандия, цинка, кадмия и ряда других металлов, а также многих неорганических соединений.

3. Во втором варианте упаковки третий слой располагается так, что центры его шаров размещены над лунками первого слоя, не отмеченными точками, четвертый слой повторяет первый, пятый — второй, шестой — третий и т. д. Символически повторяемость слоев записывается так: *ABC ABC ABC...* На рис. 33.5 изображена упаковка данного типа. Ее ячейка представляет собой куб. Частицы находятся как в вершинах куба (узлах решетки), так и в центрах граней. Поэтому упаковка данного типа называется *кубической гранецентрированной*. По данному типу строится решетка таких металлов, как никель, платина, медь, золото, серебро, алюминий, свинец, при высоких температурах — железо. Кобальт, например, встречается в виде кристаллов как с гексагональной, так и кубической гранецентрированной решеткой. Такой *полиморфизм* характерен для ряда металлов и других веществ.

Возможны и более сложные многослойные комбинации плотнейших шаровых упаковок, но мы их рассматривать не будем.

### § 33.3. Плотнейшие упаковки шаров с разными радиусами

1. Мы ограничимся рассмотрением только одного примера — кристалла поваренной соли. Это, как уже говорилось, ионный кристалл. Рентгеноструктурный анализ позволил определить радиусы ионов: у хлора это  $1,81 \text{ \AA}$ , у натрия  $0,98 \text{ \AA}$ . Крупные ионы хлора образуют плотнейшую трехслойную упаковку, у которой большие пустоты заполнены меньшими по размеру ионами натрия (рис. 33.6). Оказывается, что каждый ион натрия окружен шестью ионами хлора и, наоборот, каждый ион хлора — шестью ионами натрия. При такой упаковке ионов образуется *простая*

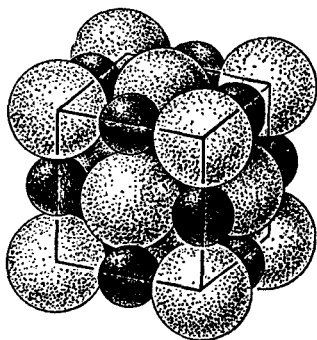


Рис. 33.6.

*кубическая* решетка. Ее ячейка представляет собой куб, у которого в вершинах (узлах) и в центрах граней располо-

жены ионы одного знака, а в серединах ребер — ионы противоположного знака.

Как видно из рисунка, в кристалле нет молекул  $\text{NaCl}$  — весь кристалл представляет собой одну гигантскую молекулу.

### § 33.4. Решетки, которые нельзя представить как упаковку шаров

1. При высокой температуре атомы железа упакованы в плотнейшую трехслойную структуру — гранецентрированный куб. Оказывается, что при комнатных температурах атомы железа упакованы иначе. Как показывает рентгеноструктурный анализ, здесь возникает кубическая решетка, у которой атомы железа располагаются в вершинах куба и в его центре; такая решетка называется

*объемноцентрированным кубом* (рис. 33.7). Такая же кристаллическая решетка характерна для всех щелочных металлов: лития, натрия, калия, рубидия и цезия, а также для бария, хрома, молибдена, вольфрама.

Структура такого рода не может быть представлена в виде плотной упаковки шаров, ибо шары одинакового радиуса нельзя плотно уложить в куб, в центре которого

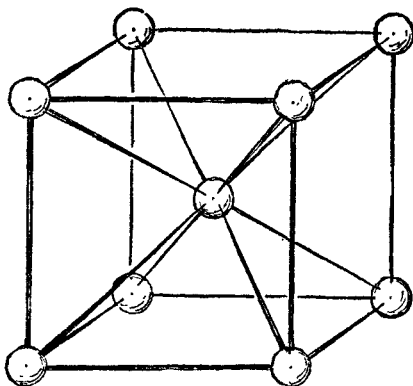


Рис. 33.7.

находился бы шар такого же радиуса. По-видимому, здесь электронное облако положительного иона, возникшего после потери атомом валентного электрона, не имеет сферически симметричной структуры. Это не должно нас удивлять. Скорее, наоборот, удивительно то, что такие сложные системы, как атомы, могут во многих случаях вести себя как шары, плотно упакованные в пространственную решетку.

2. Физические свойства железа при разных типах упаковки его атомов различны. При плотнейшей гранецентри-

рованной упаковке, когда каждый атом имеет 12 соседей, получается твердое, упругое железо; при объемноцентрированной упаковке, когда каждый атом имеет только 8 соседей, возникает мягкое, пластичное железо. Закалка стали заключается как раз в том, чтобы путем быстрого охлаждения раскаленного железа не дать атомам перегруппироваться и таким образом сохранить при комнатной температуре плотнейшую упаковку, кото-

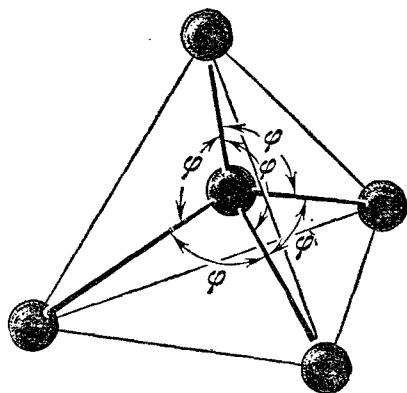


Рис. 33.8.

рая характерна для более высоких температур. 3. Четырехвалентные атомы, например углерод, могут связываться друг с другом ковалентными силами, имеющими резко выраженную пространственную направленность. Атомы углерода могут образовывать два типа пространственных решеток. В первой из них, характерной для алмаза, четыре атома располагаются по вершинам правильного тетраэдра, в центре которого находится пятый атом. Ковалентные силы направлены от центрального атома к вершинам тетраэдра (на рис. 33.8 эти силы изображены жирной линией). Как нетрудно подсчитать, угол между связями равен  $\varphi = 109^{\circ}29'$ . Длина связи по данным рентгеноструктурного анализа 1,54 Å. Ясно, что такой характер упаковки атомов не может быть получен по типу плотной упаковки одинаковых шаров.

Аналогичную с алмазом структуру имеют кристаллы кремния, германия и белого олова. Ячейка имеет форму куба, где атомы расположены не только в вершинах, но и в центрах граней и внутри куба (рис. 33.9).

Второй тип упаковки атомов углерода, характерный для графита, изображен на рис. 33.10. Здесь каждый атом углерода также связан с четырьмя соседями, но силы и направленность связей разные. Сильная связь возникает с тремя атомами, лежащими с ним в одном слое под углами

120°; слабая связь — с четвертым атомом, лежащим в соседнем слое. Направление этой связи составляет 90° с плоскостью слоя. Ячейка имеет форму прямой шестиугольной призмы; длина ребер 1,42 Å и 3,35 Å. Поскольку расстояние между слоями в 2,36 раза больше расстояния между атомами внутри слоя, сила связи между слоями мала.

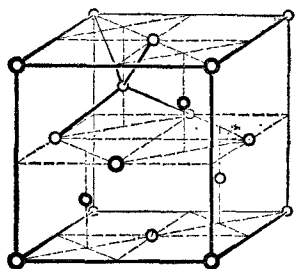


Рис. 33.9.

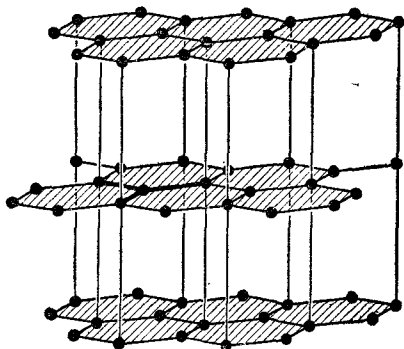


Рис. 33.10.

4. Разница в строении кристаллических решеток алмаза и графита и объясняет резкое различие их физических свойств. Алмаз является одним из самых твердых веществ в природе — он режет стекло, а также любые твердые породы типа гранита, базальта и т. п. Графит очень мягок, он пишет на бумаге, ибо его слои могут легко скользить друг относительно друга. Алмаз — изолятор, в нем нет свободных электронов, графит является проводником электрического тока. Алмаз прозрачен, графит сильно поглощает свет. Плотность алмаза  $3500 \text{ кг/м}^3$ , графита —  $2100 \text{ кг/м}^3$ .

Как показали исследования, при давлении порядка  $60\,000 \text{ ат}$  и температуре выше  $1500^\circ \text{С}$  кристаллическая решетка графита путем сближения и перегруппировки атомов может перейти в решетку алмаза. Практически эту проблему решили ученые Института физики высоких давлений АН СССР под руководством акад. Л. Ф. Верещагина. Разработанные в этом институте «алмазные» прессы позволили получить искусственные алмазы с твердостью примерно такой же как и у естественных.

### § 33.5. Структура льда

1. Рентгеноструктурный анализ показывает, что кристаллы льда имеют весьма рыхлую структуру, изображенную на рис. 33.11. Здесь большие шарики с дырками условно изображают атомы кислорода, маленькие перешейки между ними — атомы водорода. Каждый атом кислорода окружен

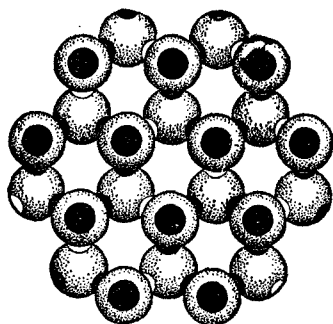


Рис. 33.11.

четырьмя атомами водорода, атом водорода служит связующим звеном между двумя соседними атомами кислорода. Формула для молекулы воды  $H_2O$ , конечно, сохраняется, но выделить в кристалле отдельную молекулу невозможно.

Структура льда, естественно, не является плотной упаковкой, в решетке имеются большие «дыры». При плавлении льда, когда кристалл распадается на отдельные молекулы, вещество

уплотняется. Поэтому плотность воды при  $0^\circ C$  и нормальном давлении больше плотности льда при этих же условиях:

$$\rho_{\text{воды}} = 999,9 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_{\text{льда}} = 916,8 \text{ кг/м}^3.$$

### § 33.6. Полимеры

1. Высокополимерные вещества (кратко — *полимеры*) состоят из очень длинных молекул вида цепей. В каждой цепи имеется правильно повторяющаяся группа атомов, связанных ковалентными силами; эти же силы обеспечивают сцепление между группами атомов в цепи. Так, например, молекула газа этилена  $C_2H_4$  имеет строение, изображенное на рис. 33.12. При высокой температуре и высоком давлении возникает полимерное вещество — *полиэтилен*, молекулярная цепочка которого может состоять из тысяч мономеров (рис. 33.13).

Упаковка таких длинных молекул в плотную структуру является довольно сложной задачей. Здесь имеются две возможности: либо цепи сворачиваются в плотный клубок

(глобулу), либо они вытягиваются в длину и укладываются в пачку. Сами же глобулы или пачки образуют плотную упаковку аналогично плотной упаковке шаров.

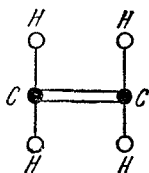


Рис. 33.12.

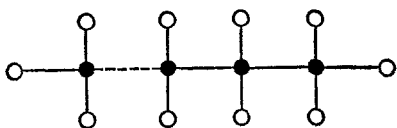


Рис. 33.13.

2. Глобулы имеют размеры примерно от 100 до 300 Å, так что их можно наблюдать с помощью электронного микроскопа. На рис. 33.14 изображена электронная фотография

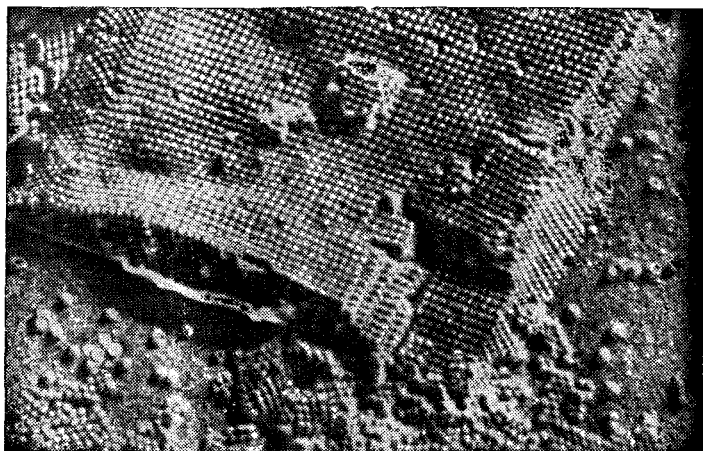


Рис. 33.14.

глобулярного кристалла — вируса мозаичной болезни табака. Аналогичную форму имеют кристаллы многих белков.

Мы видим, что глобулы упакованы по принципу плотной упаковки шаров. Вместе с тем рентгеноструктурный анализ дает несколько «размазанную» картину. Дело в том,

что, в отличие от рассмотренных выше кристаллов, где все частицы, образующие кристалл, совершенно одинаковы, в глобулярном кристалле частицы обладают индивидуальностью. Глобулы различаются как длиной молекулярной

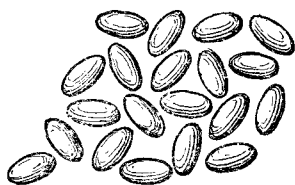
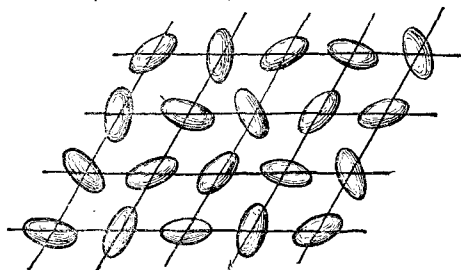
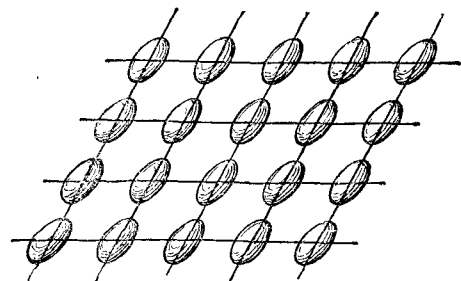


Рис 33.15.

второй пачке порядок характерен только для центров цепей, ориентировка же самих цепей беспорядочная. Такая упаковка называется газокристаллической. Наконец, в третьей пачке нет дальнего порядка — такая пачка называется жидкостной.

цепи, которая у разных комплексов различна, так и характером свернутости этой цепи. Таким образом, хотя глобулярный кристалл и характеризуется дальним порядком, внутри каждой глобулы этот порядок нарушается.

3. Пачечные полимеры имеют иногда дальний порядок внутри пачки. Однако это довольно своеобразный порядок. Если изобразить молекулярную цепь в виде вытянутого эллипсоида, то эти эллипсоиды внутри пачки могут уложиться тремя способами (рис. 33.15). В первой пачке дальний порядок характерен как для ориентировки центров цепей, так и для ориентировки их направлений в пространстве. Это — кристалл. Во



Сами пачки могут легко загигаться и сворачиваться. Этим объясняется высокая эластичность резины. По-видимому, пачки каучуковых молекул свернуты, и при растяжении происходит разворот пачечного клубка. После снятия внешней нагрузки клубок опять сворачивается, возвращаясь к состоянию с минимальной энергией.

4. При упаковке макромолекул часто образуется жесткая система типа сетки, поэтому данные полимеры называются *сетчатыми*. Сплошная сетка, охватывающая весь полимер, делает материал твердым и термостойким, неспособным течь или плавиться. Такие термореактивные пластики применяются для изготовления изделий, способных выдерживать относительно высокие температуры и большие механические нагрузки.

Здесь нет возможности подробно осветить свойства полимеров. Полимерами является огромное множество материалов, от природных (древесина, каучук, белок, нуклеиновые кислоты) до синтетических (нейлон, капрон, плексиглас и т. п.). В настоящее время ведется интенсивное изучение гигантских молекул, их свойств, методов получения и применения. Новые открытия, которые назревают в этой области, имеют отношение не только к задачам химии, но и к проблемам биофизики и биологии, в частности к проблемам наследственности.

## Г Л А В А 34

### БЛИЖНИЙ ПОРЯДОК

#### § 34.1. Особенности жидкого состояния

1. В предыдущих главах были рассмотрены два предельных случая пространственной упаковки частиц — газ и кристалл. Идеальный газ характеризуется большой степенью разрежения и полным беспорядком в пространственном распределении частиц. Идеальный кристалл, наоборот, характерен более или менее плотной упаковкой частиц и полностью упорядоченным их расположением в некоторой пространственной решетке (дальний порядок).

Жидкость занимает некоторое промежуточное положение между кристаллом и газом. Молекулы (или другие частицы) упакованы в жидкости достаточно плотно, в особенности

вблизи точки плавления, вследствие чего плотность жидкости всего лишь на 9—10% меньше плотности твердого тела, а у расплавленных металлов — всего лишь на 3%. Плотность воды даже больше плотности льда на 9%.

В то же время жидкости полностью изотропны, и обнаружить у них анизотропные зерна, такие, как у поликристаллов, не удастся. Естественно, что это означает отсутствие в жидкости дальнего порядка.

2. До тридцатых годов текущего столетия считали, что структура жидкости полностью не упорядочена и по своему строению жидкость аналогична очень сильно уплотненному газу. Распространению этой точки зрения способствовала возможность применения в ряде случаев одинаковых законов в гидро- и газодинамике (см. гл. 30). Однако эта аналогия оказалась весьма поверхностной, основанной на сходстве только одного свойства — текучести жидкостей и газов. Рентгеноструктурный анализ жидкостей (и аморфных тел) показал, что имеется определенный порядок в расположении частиц в жидкости, особенно вблизи точки затвердевания. Но этот порядок соблюдается только на небольших расстояниях, порядка двух-трех молекулярных слоев. Это позволяет говорить о *ближнем порядке* в жидкостной упаковке частиц. Оказывается, что на этой основе можно качественно объяснить многие свойства жидкостей, что будет сделано ниже. В то же время строго количественная теория жидкого состояния до сих пор в полной мере еще не создана.

3. Выдающуюся роль в развитии нового взгляда на структуру жидкостей сыграли работы Я. И. Френкеля. Он не только высказал идею о близости свойств жидкости и кристалла (вдали от критической точки, см. § 35.5), но и сумел получить отсюда ряд количественных зависимостей для процессов диффузии, вязкости и теплопроводности, а также для анализа процесса кристаллизации и свойств сплавов. Некоторое понятие о его идеях будет дано ниже.

## § 34.2. Структура жидкости и ее свойства

1. Несколько лет назад Дж. Д. Бернал выдвинул идею о том, что в жидкостях мы встречаемся с так называемой симметрией пятого порядка. Это означает, что в плоской модели (рис. 34.1) каждая частица имеет в среднем около пяти

ближайших соседей, а в пространственной упаковке — около одиннадцати. Отсюда вытекает ряд интересных следствий.

Легко убедиться, что в такого рода упаковке может осуществиться только ближний порядок; дальний порядок здесь невозможен, так как плоскость можно покрыть сеткой, состоящей из правильных треугольников, квадратов

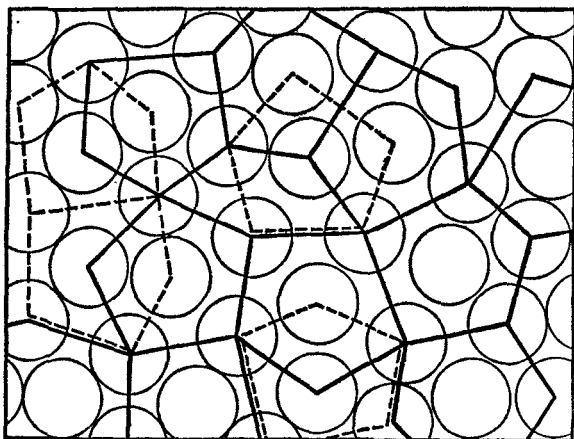


Рис. 34.1.

и шестиугольников, но не пятиугольников. Точно так же пространство нельзя заполнить многогранниками, у которых грани были бы правильными пятиугольниками.

2. Отсюда следует, что пятиугольники, которые характеризуют упаковку частиц в жидкости, имеют несколько различных ребра. Если в кристаллах все частицы находятся друг от друга на расстоянии  $d$ , где силы притяжения между ними уравновешены силами отталкивания (см. § 31.4), то в жидкостях расстояния между молекулами на одних ребрах несколько больше  $d$ , на других — меньше  $d$ , и лишь в среднем они близки к  $d$ .

Энергия взаимодействия между частицами зависит от расстояния между ними (см. § 31.5). Она имеет минимальное значение при  $r = d$ , а при  $r > d$  или  $r < d$  энергия взаимодействия возрастает. Следовательно, *при одной и той же температуре внутренняя энергия кристалла меньше, чем энергия его расплава*. Это позволяет понять, почему при плавлении

кристалла к нему нужно подвести *теплоту плавления*  $Q_{\text{пл}} = M\lambda$ . Здесь  $M$  — масса вещества,  $\lambda$  — удельная теплота плавления, т. е. энергия, которую нужно сообщить единице массы вещества, находящегося при температуре плавления, чтобы перевести его из кристаллического в жидкое состояние.

Сравнение внутренней энергии кристалла и его расплава позволяет объяснить причину того, почему при низких температурах жидкости, как правило, кристаллизуются. Здесь проявляется общий закон: стремление любой системы частиц к состоянию с минимальной энергией.

3. Многогранники, имеющие симметрию пятого порядка, при плотной упаковке не могут образовать правильную кристаллическую решетку. Они образуют некоторые компактные пространственные образования, плотность которых может быть даже больше плотности кристалла. Эти образования Бернал назвал *псевдоядрами*, т. е. ложными ядрами. Между этими ядрами обязательно должны возникнуть большие отверстия, или *дырки* по терминологии Френкеля. Наличие этих «дырок» компенсирует избыточную плотность ядер и приводит к тому, что плотность жидкостей обычно меньше плотности кристалла.

4. Псевдоядра не являются достаточно стабильными образованиями. Благодаря большому числу «дырок» частицы могут легко переходить от одного ядра к другому, образуя при этом многогранники различной формы. В результате жидкость, в отличие от кристалла, имеет не одну определенную структуру, а большое число эквивалентных, сходных друг с другом структур, соответствующих одному и тому же значению энергии системы. Поскольку энтропия системы определяется числом различных структур, соответствующих данному состоянию (см. § 28.7), то мы видим, что *при одной и той же температуре энтропия кристалла значительно меньше энтропии его расплава*.

### § 34.3. Среднее время оседлой жизни

1. Структура жидкости непрерывно меняется. Причина заключается в том, что большое число «дырок» в жидкостной упаковке частиц способствует их перемещению. Частица жидкости колеблется около мгновенного положения рав-

новесия в течение некоторого времени, которое Френкель образно назвал *временем оседлой жизни*. Затем она перескакивает на место дырки и присоединяется к другому псевдоядру. Эти процессы происходят случайным образом, разные частицы переходят из одного состояния в другое в течение разных промежутков времени, но при огромном числе частиц можно ввести понятие о *среднем времени оседлой жизни*  $\tau$  как о промежутке времени, в течение которого не меняется структурная конфигурация псевдоядер, характеризующая ближний порядок.

Среднее время оседлой жизни обратно пропорционально вероятности перехода частицы на место дырки, а дырки — на место частицы. Вероятность «переселения» можно подсчитать следующим образом.

2. Для того чтобы частица оторвалась от псевдоядра, она должна обладать кинетической энергией, превосходящей работу, которую нужно затратить на преодоление молекулярных сил притяжения. Эта энергия называется *энергией активации*; обозначим ее  $\epsilon$ . Чем больше энергия активации, тем меньше вероятность переселения частицы.

С другой стороны, при повышении температуры жидкости вероятность переселения возрастает. Температура характеризует *среднюю* кинетическую энергию молекул, но благодаря максвелловскому закону распределения частиц по скоростям всегда найдется некоторое число частиц, кинетическая энергия которых больше средней. При повышении температуры процент таких более быстрых молекул возрастает, следовательно, возрастает и процент частиц, энергия которых окажется большей, чем энергия активации. Тем самым возрастает и вероятность переселения.

3. Обозначим, как и в § 26.11, через  $x$  отношение энергии активации к средней кинетической энергии частицы:

$$x = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_{\text{кин}}} \approx \frac{\epsilon_0}{kT}$$

(так как  $\epsilon_{\text{кин}} \approx kT$ ). Вероятность переселения  $\omega$  будет некоторой функцией этого отношения:

$$\omega = f\left(\frac{\epsilon_0}{kT}\right) = f(x).$$

Если  $x=x_1+x_2$ , то  $f(x)=f(x_1+x_2)$ . Но вероятность сложного события, состоящего из двух независимых событий, равна произведению вероятностей каждого из событий:  $\omega=\omega_1\omega_2$ . Таким образом,

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2). \quad (34.1)$$

Как уже указывалось (см. § 26.11), единственная функция, удовлетворяющая этому уравнению — это показательная функция вида  $f(x)=a^{-ax}$ . Знак минус в показателе появляется по следующим соображениям. С ростом энергии активации или с понижением температуры вероятность переселения должна уменьшаться, как было показано ранее. Следовательно, функция  $\omega=f(x)$  должна быть убывающей. А при основании степени  $a>1$  показательная функция убывает, если показатель степени является отрицательным числом.

4. Итак, вероятность «переселения» частицы

$$\omega = a^{-\frac{\alpha \varepsilon_0}{kT}}. \quad (34.2)$$

При низких температурах показатель степени по модулю очень велик; при этом он будет отрицательным числом, и вероятность переселения будет близка к нулю ( $a^{-\infty}=0$ ).

При высоких температурах показатель степени стремится к нулю, а вероятность переселения частицы стремится к единице ( $a^0=1$ ).

5. Среднее время оседлой жизни частицы обратно пропорционально вероятности ее переселения, так что  $\tau \sim 1/\omega$ . Из (34.2) следует

$$\tau = \tau_0 a^{\frac{\alpha \varepsilon_0}{kT}}, \quad (34.3)$$

где  $\tau_0$  — время оседлой жизни при  $\varepsilon_0=0$  (или при неограниченном возрастании температуры  $T \rightarrow \infty$ ). Графики зависимости вероятности переселения и среднего времени оседлой жизни частицы от температуры изображены на рис. 34.2. Видно, что с ростом температуры среднее время оседлой жизни очень быстро убывает, а вероятность переселения частицы на место дырки растет.

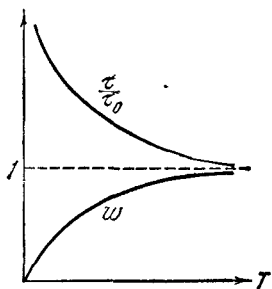


Рис. 34.2.

## § 34.4. Диффузия в жидкостях

1. Наличие «дырок» между псевдоядрами позволяет качественно объяснить механизм явления диффузии и внутреннего трения в жидкости и выяснить характер зависимости коэффициента диффузии и вязкости от температуры.

Механизм диффузии в газах был выяснен в § 25.5. Там же было получено выражение для коэффициента диффузии:

$D = \frac{1}{3} \lambda v$ , где  $\lambda$  — средняя длина свободного пробега молекулы,  $v$  — средняя скорость беспорядочного поступательного движения молекул (теплового движения).

2. Диффузия в жидкостях происходит гораздо медленнее, чем в газах. Но с повышением температуры коэффициент диффузии возрастает очень быстро. Опыты, проведенные с мечеными атомами, приводят к выводу, что коэффициент диффузии в жидкостях (а также в кристаллах) меняется с ростом температуры по закону

$$D = Aa^{-\frac{\alpha \epsilon_0}{kT}}. \quad (34.4)$$

Здесь  $A$  — некоторая постоянная, характерная для данного вещества,  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура,  $\epsilon_0$  — энергия активации. Для жидких металлов  $\epsilon_0$  имеет величину примерно 1—3 эв. График зависимости коэффициента диффузии от температуры изображен на рис. 34.3.

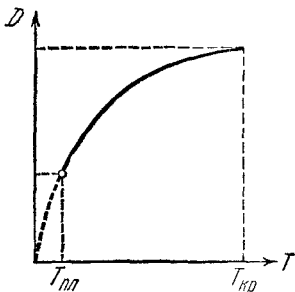


Рис. 34.3.

3. Механизм диффузии в жидкостях, следуя идеям Френкеля, можно объяснить следующим образом. Обозначим среднюю длину свободного пробега частицы в жидкости через  $\delta$  (это по существу расстояние между псевдоядрами). Тогда средняя скорость перемещения частицы внутри жидкости  $u \approx \delta/\tau$ , где  $\tau$  — среднее время ее оседлой жизни. По аналогии с (25.10) имеем

$$D = \frac{1}{3} \delta u = \frac{\delta^2}{3\tau} = \frac{\delta^2}{3\tau_0} a^{-\frac{\alpha \epsilon_0}{kT}}. \quad (34.5)$$

Этот результат соответствует данным эксперимента (см. (34.4)).

### § 34.5. Вязкость жидкостей

1. Сопоставим размерности плотности  $[\rho]=\text{кг}/\text{м}^3$ , коэффициента диффузии  $[D]=\text{м}^2/\text{сек}$  и вязкости  $[\eta]=\text{кг}/\text{м}\cdot\text{сек}$ . Мы увидим, что

$$\frac{[\eta]}{[\rho]} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^3}{\text{м}\cdot\text{сек}\cdot\text{кг}} = \frac{\text{м}^2}{\text{сек}} = [D], \quad (34.6)$$

откуда следует

$$\eta = K\rho D,$$

где  $K$  — некоторый безразмерный коэффициент.

Соотношение (34.6) хорошо выполняется для газов. Здесь, как следует из эксперимента,  $K \approx 1$  и

$$\eta \approx \rho D \approx \frac{1}{3} \lambda v \rho. \quad (34.7)$$

С ростом температуры вязкость газов возрастает. В самом деле, подставив в (34.7) значения  $\rho = mn$ ,  $\lambda = 1/n\sigma$  и  $v = \sqrt{3kT/m}$ , получим

$$\eta = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{mkT}{3}}.$$

Итак, вязкость газов пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры.

2. Что касается жидкостей, то для них соотношение (34.7) оказывается несправедливым. Оно не выполняется даже качественно: в отличие от газов, вязкость жидкостей с ростом температуры не только не возрастает, но резко падает.

3. На этот факт впервые обратил внимание Френкель, который показал, что *вязкость жидкостей должна быть обратно пропорциональна коэффициенту диффузии*. Для доказательства воспользуемся уравнением (11.12), которое выражает зависимость силы сопротивления трения от вязкости, относительной скорости и характерных размеров тела, движущегося в жидкости.

При возникновении в жидкости градиента скоростей (см. § 11.7) псевдоядра скользят друг относительно друга. Возникающее при этом взаимодействие сводится к сопротивлению трения, которое испытывает «дырка», переходя от



одного псевдодрова к другому. Следовательно, в формуле (11.12) можно заменить скорость  $v$  средней скоростью перемещения дырок  $u$ , а характерный размер  $L$  — размером дырки  $\sigma$ . Итак, сопротивление трения

$$F = B\eta u \delta, \quad (34.8)$$

где  $B$  — некоторый числовой коэффициент. Но согласно (34.5)  $u\delta = 3D$ , следовательно,

$$F = 3B\eta D.$$

Последнее выражение можно записать так:

$$\eta = \frac{f}{D}, \quad (34.9)$$

где  $f = F/3B$  — некоторая постоянная величина, имеющая размерность силы. Тем самым показано, что вязкость жидкостей обратно пропорциональна коэффициенту диффузии. Подставив в (34.9) значение коэффициента диффузии из (34.4), получим

$$\eta = \eta_0 a^{\frac{\alpha \varepsilon_0}{kT}}, \quad (34.10)$$

где  $\eta_0$  — значение коэффициента вязкости при  $\varepsilon_0 = 0$ , т. е. при отсутствии энергии активации. Таким образом, как видно из (34.10), вязкость жидкостей действительно резко падает с ростом температуры. График этой зависимости показан на рис. 34.4. Такая зависимость коэффициента вязкости от температуры хорошо согласуется с экспериментальными данными.

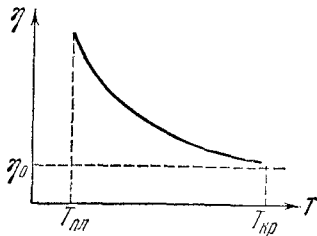


Рис. 34.4.

4. Заметим, что выведенные выше выражения для зависимости коэффициента диффузии (34.5) и вязкости (34.10) от температуры имеют смысл лишь в определенном интервале температур: от точки плавления до так называемой *критической температуры*  $T_{кр}$ , выше которой жидкость существовать не может (см. § 35.5). Это и показано на рис. 34.3 и рис. 34.4.

### § 34.6. Аморфные тела

1. В природе встречаются тела, которые по своим механическим свойствам близки к твердым, но у которых, по данным рентгеноструктурного анализа, молекулы имеют жидкостную упаковку, т. е. ближний порядок. К ним относятся, например, стекло, а также разные смолы, вар, загустевший расплав сахара (леденец) и ряд других веществ. Особенностью этих веществ является отсутствие у них определенной точки плавления. При повышении температуры эти тела постепенно размягчаются, их вязкость падает и они начинают вести себя как обычные вязкие жидкости.

Отсутствие у этих веществ определенной точки плавления и дальнего порядка в упаковке молекул приводит нас к выводу, что аморфные тела — это не твердые тела, а переохлажденные и следствие этого очень вязкие жидкости.

2. Причина образования аморфных тел может быть понята, если воспользоваться идеей о существовании в жидкости компактных псевдоядер, между которыми имеются скважины — «дырки». Может оказаться, что внутренняя энергия хорошо упакованных псевдоядер меньше внутренней энергии кристалла, и только благодаря наличию дырок, обладающих избытком энергии, суммарная внутренняя энергия жидкости оказывается больше, чем энергия кристалла.

При образовании кристалла часть молекул должна продиффундировать в дырки и тем самым образовать регулярную структуру — дальний порядок. Но при низкой температуре вероятность диффузии очень мала, ибо время оседлой жизни молекулы стремится к бесконечности (см. рис. 34.2). Поэтому при быстром охлаждении некоторых расплавов более вероятным оказывается образование аморфного тела, а не упорядоченной кристаллической решетки.

3. Заметим, что при аморфном состоянии тело обладает некоторым избытком энергии по сравнению с устойчивым кристаллическим состоянием. Поэтому аморфное состояние — это так называемое *метастабильное*, т. е. не вполне устойчивое состояние.

Естественно, что со временем аморфные тела кристаллизуются. Так, в леденце через некоторое время образуются кристаллики сахара. Этим объясняется, почему при

длительном хранении варенья оно может «засахариться». Точно так же стекло «стареет» — в нем образуются поликристаллические зерна. При этом оно теряет прозрачность и становится хрупким.

### § 34.7. Энергия поверхностного слоя и поверхностное натяжение жидкости

1. Частицы, находящиеся в поверхностном слое жидкости, обладают избытком энергии по сравнению с частицами, находящимися внутри жидкости. Внутри жидкости

частица окружена в среднем  $Z$  ближайшими соседями ( $Z \approx 11$ ), а в поверхностном слое она имеет вдвое меньше соседей (рис. 34.5). При температурах, близких к температуре плавления, энергия взаимодействия между двумя ближайшими молекулами  $\epsilon \approx U_0$ , где

$U_0$  — глубина потенциальной ямы молекулярного взаимодействия (см. рис. 31.7). Отсюда следует, что энергия частицы внутри жидкости  $\epsilon_{\text{внутри}} = Z\epsilon \approx ZU_0$ , а энергия этой же частицы на поверхности  $\epsilon_{\text{пов}} = \frac{1}{2}Z\epsilon \approx \frac{1}{2}ZU_0$ . А так как  $U$  — отрицательное число, то  $\epsilon_{\text{пов}} > \epsilon_{\text{внутри}}$ . Итак, избыток энергии, которой обладает частица, находящаяся в поверхностном слое, по сравнению с энергией этой же частицы внутри жидкости, выразится так:

$$\Delta\epsilon_{\text{пов}} = \epsilon_{\text{пов}} - \epsilon_{\text{внутри}} \approx -\frac{1}{2}ZU_0 = \frac{1}{2}Z|U_0|.$$

2. Пусть на единице площади поверхностного слоя содержится  $n'$  частиц. Поверхностный слой площадью  $S$  будет обладать избытком энергии

$$\mathcal{E}_{\text{пов}} = \Delta\epsilon_{\text{пов}} n' S \approx \frac{1}{2} Z n' S |U_0|. \quad (34.11)$$

На единицу площади приходится энергия

$$\alpha = \frac{\mathcal{E}_{\text{пов}}}{S} \approx \frac{1}{2} Z n' |U_0|. \quad (34.12)$$

Эта величина называется *поверхностной энергией* жидкости.

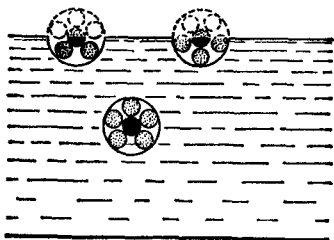


Рис. 34.5.

3. Всякая система частиц стремится перейти в состояние с минимальной энергией. Для жидкости это сводится к тому, что при отсутствии внешних сил она будет принимать такую форму, чтобы при заданном объеме она имела наименьшую поверхность. В геометрии доказывается, что такой формой является сфера. Этим и объясняется, что в состоянии невесомости, условия которого рассмотрены в § 7.3, капля жидкости имеет строго сферическую форму.

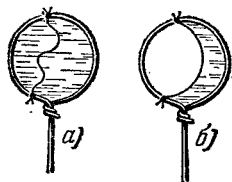


Рис. 34.6.

Стремление жидкости уменьшить свою поверхность приводит к тому, что на границе между поверхностной пленкой и твердым телом возникают силы *поверхностного натяжения*. В этом позволяет убедиться простой опыт. Привяжем к проволочному кольцу нить, как это показано на рис. 34.6, а, и окунем кольцо в мыльный раствор. В образовавшейся мыльной пленке нить расположится случайным образом. Если теперь разрушить пленку по одну сторону нити, то оставшаяся пленка сократится так, чтобы ее поверхность стала минимальной (рис. 34.6, б). Нить удерживается в натянутом состоянии силами поверхностного натяжения, направленными внутрь пленки по касательным к ее поверхности.

4. *Поверхностным натяжением*  $\sigma$  называется отношение силы, с которой пленка действует на ограничивающий ее контур, к длине этого контура  $l$ :

$$\sigma = \frac{F}{l}. \quad (34.13)$$

### § 34.8. Давление под искривленной поверхностью жидкости

1. При контакте жидкости с твердым телом возможны случаи, когда жидкость либо смачивает, либо не смачивает это тело. Так, ртуть хорошо смачивает чистые поверхности металлов и не смачивает чистое стекло; вода смачивает чистое стекло и не смачивает жирные поверхности и т. д.

Свободная поверхность жидкости на границе с твердым телом искривляется; в зависимости от характера смачивания образуется *мениск* той или иной формы. Смачивающие

жидкости образуют вогнутый, несмачивающие — выпуклый мениск. Угол между смоченной поверхностью твердого тела и касательной к мениску в точке его пересечения с твердым телом называется *краевым углом*  $\theta$ .

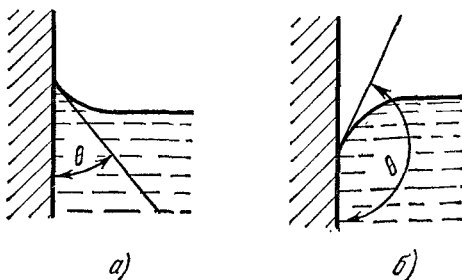


Рис. 34.7.

Если жидкость смачивает поверхность твердого тела, то краевой угол оказывается острым (рис. 34.7, а):  $0 \leq \theta < \pi/2$ . Если жидкость не смачивает поверхность твердого тела, то краевой угол тупой (рис. 34.7, б):  $\pi/2 < \theta \leq \pi$ . Величина краевого угла зависит от химического состава твердого тела, жидкости и окружающего газа, от чистоты этих веществ и от их температуры. При идеальном смачивании  $\theta = 0$ , при идеальном несмачивании  $\theta = \pi$ .

2. Искривленная поверхность оказывает на жидкость избыточное давление. Для расчета этого давления ограничимся случаем, когда жидкость находится в трубке, радиус канала которой равен  $r$  (рис. 34.8). Искривленная поверхность жидкости образует сферический сегмент, поверхность которого составляет с поверхностью трубки краевой угол  $\theta$ .

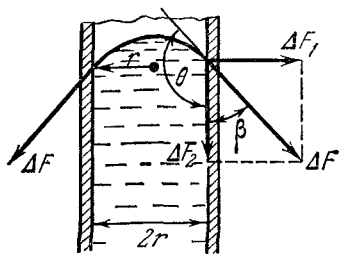


Рис. 34.8.

На участок границы контакта жидкости с твердой стенкой длиной  $\Delta l$  действует сила поверхностного натяжения

На участок границы контакта жидкости с твердой стенкой длиной  $\Delta l$  действует сила поверхностного натяжения

$\Delta F = \sigma \Delta l$ . Эта сила направлена по касательной к поверхности жидкости. Разложим эту силу на две компоненты:  $\Delta F_1$ , направленную внутрь стенки, и  $\Delta F_2 = \Delta F \cos \beta = -\sigma \Delta l \cos \theta$ , направленную внутрь жидкости. Компонента  $\Delta F_2$  вызывает давление, избыточное по сравнению с атмосферным.

3. Для вычисления избыточного давления следует силу  $F_2 = -\sigma \cdot 2\pi r \cos \theta$  разделить на площадь круга  $S = \pi r^2$ . Имеем

$$p = \frac{F_2}{S} = -\frac{2\sigma \cos \theta}{r}. \quad (34.14)$$

Мы видим, что избыточное давление оказывается отрицательным, если краевой угол острый: при  $0 \leq \theta < \pi/2$  имеем  $\cos \theta > 0$ . Если же краевой угол тупой, т. е.  $\pi/2 < \theta \leq \pi$ , то  $\cos \theta < 0$  и избыточное давление оказывается положительным.

### § 34.9. Капиллярные явления

1. Трубки с узким каналом, диаметром около миллиметра и менее, называются *капиллярами* (от латинского *capillus* — волос). Если такую трубку опустить в жидкость,

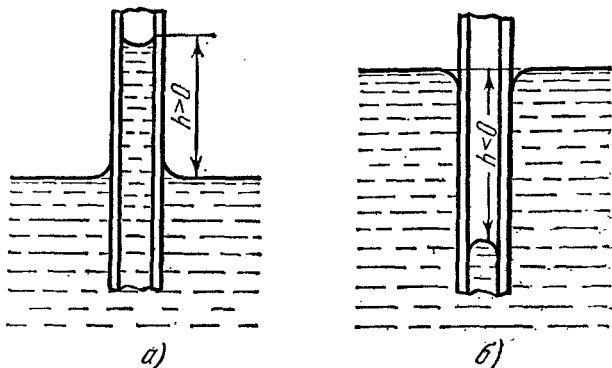


Рис. 34.9.

которая ее смачивает, то жидкость внутри трубки поднимется выше свободной поверхности жидкости в широком сосуде (рис. 34.9, а). Несмачивающая жидкость, наоборот, опустится ниже ее уровня в сосуде (рис. 34.9, б).

Для вычисления высоты капиллярного подъема (или опускания) жидкости следует учесть, что жидкость в трубке будет находиться в равновесии, если сумма гидростатического давления  $\rho gh$  и давления под искривленной поверхностью  $p = -(2\sigma \cos \theta)/r$  будет равна нулю:

$$\rho gh - \frac{2\sigma \cos \theta}{r} = 0;$$

отсюда следует

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{r\rho g}. \quad (34, 15)$$

Мы видим, что в случае смачивающей жидкости, когда краевой угол острый ( $\cos \theta > 0$ ), высота подъема положительна; в случае несмачивающей жидкости краевой угол тупой ( $\cos \theta < 0$ ) и высота капиллярного подъема отрицательна. Уровень несмачивающей жидкости в капиллярной трубке будет ниже ее уровня в широком сосуде.

2. Капиллярные явления часто встречаются в природе. Ими объясняется гигроскопичность ряда тел, т. е. их способность впитывать влагу. Такова причина гигроскопичности ваты, тканей, почвы, бетона. Последнее учитывается в строительной практике: между фундаментом здания и стенами прокладывается слой толя, смолы или другого вещества, что препятствует проникновению влаги по стенам в жилые помещения.

Подпочвенная влага по капиллярам почвы поднимается на поверхность и испаряется. Для сохранения влаги в почве следует капилляры разрушить. Это достигается путем ее вспашки и боронования.

### § 34.10. Адсорбция. Эффект Ребиндера

1. Все рассуждения и расчеты, которые приводят к выводу о наличии у жидкости избытка энергии в поверхностном слое (см. § 34.7), справедливы и для твердых тел — как аморфных, так и кристаллов. Имеется, правда, одно принципиальное отличие, вызванное анизотропией кристалла. На разных гранях кристалла находится разное число частиц (атомов, молекул или ионов), расстояния между этими частицами также различны. Отсюда следует, что поверхностная энергия и поверхностное натяжение различны на разных гранях монокристалла. Естественно, что в поликристаллах и аморфных телах нет анизотропии поверхностного натяжения. При отсутствии внешних сил форма жидкости полностью определяется силами поверхностного натяжения, и свободная

жидкость принимает форму шара. У кристаллов, благодаря их ничтожной текучести, это не происходит. Однако отсюда вовсе не следует, что силы поверхностного натяжения не играют в кристаллах никакой роли. Оказывается, что они существенно влияют на такие механические свойства кристаллов, как твердость и прочность.

2. Некоторые вещества, называемые *поверхностно-активными*, легко концентрируются на поверхности другого вещества, образуя на нем очень тонкий слой, чаще всего мономолекулярный, т. е. слой толщиной в одну молекулу. Такое явление называется *адсорбцией*. Например, на поверхности воды хорошо адсорбируется бутиловый спирт, на поверхности цинка — ртуть и олово, на поверхности ртути — щелочные металлы цезий, калий, натрий. Оказывается, что адсорбция сопровождается резким уменьшением поверхностной энергии и тем самым — уменьшением поверхностного натяжения.

Если в литре ртути растворить 0,48 г цезия, то поверхностное натяжение ртути уменьшится с 0,470 н/м до 0,228 н/м, т. е. более чем в два раза. А ведь концентрация

цезия в ртути составляет при этом  $\frac{0,48 \cdot 10^{-3} \text{ кг}}{13,6 \text{ кг}}$ , т. е. всего

$3,5 \cdot 10^{-3} \%$ ! Точно так же при 4%-ной концентрации бутилового спирта в воде ее поверхностное натяжение уменьшится вдвое.

3. Оказывается, что при адсорбции поверхностно-активных жидкостей на поверхности твердых тел механические свойства последних резко меняются, в частности, существенно уменьшается их прочность. Об этом свидетельствует следующий опыт.

Цинк при комнатных температурах очень пластичен, поэтому цинковую пластинку толщиной 2—3 мм можно легко согнуть под прямым углом, и при этом она не ломается. Если

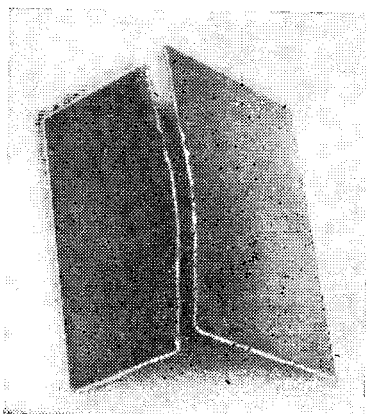


Рис. 34.10.

перед изгибанием очистить поверхность цинка от окислов и нанести на нее капельку ртути массой даже в несколько миллиграммов, то характер деформации существенно изменится. Из-под капли ртути побегут тонкая трещина, и пластина развалится на два куска (рис. 34.10).

Подобные явления наблюдались давно. В инженерной практике было известно немало случаев, когда прочность некоторых конструкций существенно снижалась, если эти конструкции работали не в воздухе, а в других средах. Иногда даже сорт смазки существенно влияет на прочность конструкции. Однако теории этого явления не было.

4. В 1928 г. академик П. А. Ребиндер выдвинул идею, что изменение прочности твердых тел при их взаимодействии с поверхностно-актив-



ными веществами вызвано именно снижением поверхностного натяжения. В самых общих чертах это явление можно объяснить так.

Дефекты кристалла типа дислокации, границ зерен и микротрещин обладают избыточной поверхностной энергией. Поскольку при адсорбции поверхностно-активных веществ поверхностное натяжение уменьшается, то соответственно возрастает поверхность этих дефектов, так что полная энергия поверхностного слоя, равная произведению поверхностной энергии на площадь поверхности (см. (34.12)), остается неизменной. Рост поверхностей дефектов, естественно, приводит к уменьшению прочности тела.

5. Явление облегчения деформации и разрушения твердых тел в результате снижения поверхностной энергии этих тел при адсорбции ими поверхностно-активных веществ называется *эффектом Ребиндера*. Данный эффект имеет многочисленные практические применения.

Оказалось, что при обработке металлов давлением или резанием во многих случаях применение поверхностно-активных веществ в качестве добавки к смазочно-охлаждающим жидкостям дает значительный выигрыш в скорости резания (иногда до 30—40%). Другим примером является метод адсорбционного понижения прочности при бурении скважин. Нефтяные скважины имеют глубину в несколько километров и проходят часто через скальные породы, обладающие высокой твердостью. Для того чтобы облегчить работу бура, в скважину закачивают растворы поверхностно-активных веществ. При этом процесс бурения заметно облегчается.

В настоящее время, особенно в связи с использованием в реакторах жидких металлов в качестве теплоносителей, возникла проблема изучения прочности металлов в присутствии расплавов других металлов. Аналогичные проблемы возникают в ракетной технике. Правильный подбор металлических пар с учетом того, чтобы жидкая фаза по возможности менее адсорбировалась на твердой, позволяет избежать уменьшения прочности конструкций.

Наконец, недавно начали проводить интенсивные исследования с целью продления срока службы катализаторов. Катализаторы участвуют в химических реакциях лишь косвенно, сами они в реакцию не вступают. Казалось бы, что они должны быть вечными. Между тем они интенсивно изнашиваются и потому в современной химической промышленности расходуются в огромных количествах. Устранить у катализаторов адсорбцию принципиально невозможно, иначе они перестанут быть катализаторами. Следовательно, здесь нужны иные пути повышения прочности. Один из них — устранение внутренних напряжений в гранулах этих материалов, что достигается путем вибрационного прессования катализаторов из порошков. Второй путь — подбор оптимального температурного режима в процессе их термической обработки.

Эффект Ребиндера представляет собой чрезвычайно общее явление, характеризующее физико-химию поверхностных явлений в твердых телах и дисперсных средах. Дальнейшая разработка теории поверхностных явлений и экспериментальные исследования в этой области позволят решить проблему создания материалов с заранее заданными свойствами, в частности материалов с повышенной прочностью.

## ГЛАВА 35

## ПАРЫ

## § 35.1. Испарение

1. Как известно из опыта, жидкости способны испаряться, т. е. переходить в газообразное состояние. Скорость испарения оценивается числом молекул, переходящих с единицы поверхности в пар за единицу времени. У разных жидкостей она различна: эфир, налитый в блюдце, испарится при комнатной температуре в течение нескольких минут, вода при тех же условиях сохранится в течение нескольких часов, а ртуть — несколько лет. Испарение жидкостей происходит при любой температуре, но с ростом температуры скорость испарения очень быстро возрастает. Этим пользуются на практике: если нужно быстро высушить какую-либо вещь, то ее помещают рядом с нагретым телом, например с печкой или батареей отопления.

2. Испаряются не только жидкости, но и твердые тела; например, нафталин или камфара испаряются при комнатной температуре и нормальном давлении, минуя жидкое состояние. Точно так же испаряются кристаллы брома или йода, особенно если их подогреть. Испаряется также лед. Если влажное белье развесить на морозе, то вода замерзает, а затем лед испаряется, и белье становится сухим.

Испарение кристаллических тел называется *сублимацией* или *возгонкой*.

Скорость сублимации также зависит от температуры и химической природы вещества. Молекулярные кристаллы, как бром или йод, испаряются легко, так как силы молекулярного притяжения, связывающие молекулы в кристаллической решетке, являются весьма слабыми. Легко испаряется лед, имеющий очень рыхлую кристаллическую решетку. Наоборот, плотно упакованные ионные, ковалентные или металлические кристаллы испаряются очень плохо.

3. Механизм испарения можно объяснить следующим образом. Молекула (или атом), находящаяся на поверхности жидкости или кристалла, втягивается внутрь силами молекулярного взаимодействия и тем самым удерживается

на поверхности. Для того чтобы эта частица могла покинуть вещество, ее кинетическая энергия должна быть больше энергии испарения  $u_0$ , которая равна той работе, которую нужно совершить, чтобы преодолеть силы молекулярного притяжения и удалить молекулу на такое расстояние от поверхности, где молекулярные силы уже не проявляются. Следовательно, условием испарения будет  $\epsilon_k \geq u_0$  или

$$\frac{mv^2}{2} \geq u_0. \quad (35.1)$$

Отсюда следует, что покинуть поверхностный слой могут не любые молекулы, а только более быстрые, скорость которых удовлетворяет условию (35.1). Это позволяет понять, почему при испарении происходит охлаждение жидкости. Мы знаем, что температура тела определяется средней кинетической энергией движения молекул. Естественно, что если из жидкости улетают наиболее быстрые молекулы, то средняя энергия оставшихся молекул уменьшается, что и означает понижение температуры.

4. Вероятность испарения можно найти с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые в § 34.3 позволили определить вероятность «переселения» частицы в «дырку». Получим, заменив  $\epsilon_0$  на  $u_0$ :

$$\omega_{\text{испар}} = a \frac{\alpha u_0}{kT}. \quad (35.2)$$

Скорость испарения пропорциональна вероятности испарения, ибо чем вероятнее переход молекул с поверхности тела в пар, тем больше будет число молекул, переходящих в пар с единицы площади в единицу времени. Итак, скорость испарения  $G \sim \omega_{\text{испар}}$  или

$$G = G_0 a \frac{\alpha u_0}{kT}. \quad (35.3)$$

В этом выражении  $G_0$  пропорционально числу молекул, способных покинуть поверхностный слой, т. е. молекул, скорости которых удовлетворяют условию (35.1). Естественно, что с повышением температуры тела число таких молекул возрастает. Можно показать, что  $G_0 = B \sqrt{T}$ , где  $B$  — постоянная, зависящая от химического состава

вещества. Подставив в (35.3), получим окончательное выражение для скорости испарения

$$G = B \sqrt{T} a^{-\frac{\alpha u_0}{kT}}. \quad (35.4)$$

### § 35.2. Насыщенный пар

1. Если достаточно большое количество жидкости поместить в закрытый сосуд, то часть ее испарится, и далее количество жидкости будет оставаться неизменным сколько угодно долго. Но процесс испарения прекратиться не может — молекулы, энергия которых соответствует условию (35.1), будут все время покидать поверхность жидкости. Следовательно, наряду с процессом испарения непрерывно происходит компенсирующий его процесс *конденсации* пара в жидкость. Скорость конденсации определяется числом молекул, переходящих из пара в жидкость через единицу поверхности в единицу времени.

Таким образом, в закрытом сосуде через некоторое время устанавливается *динамическое равновесие* между процессами испарения и конденсации. Скорость конденсации становится равной скорости испарения, и начиная с этого момента времени количество жидкости перестает уменьшаться.

Пар, находящийся в состоянии динамического равновесия со своей жидкостью (или кристаллом), называется *насыщенным (насыщающим) паром*.

2. Вычислим, от каких параметров зависит концентрация молекул насыщенного пара. Для этого следует учесть, что скорость испарения, согласно (35.4), не зависит от концентрации молекул пара над жидкостью, а скорость конденсации пропорциональна концентрации молекул пара — чем больше молекул содержится в единице объема над жидкостью, тем вероятнее, что молекула приблизится к поверхностному слою и будет им поглощена. Итак, скорость конденсации

$$g = \beta n, \quad (35.5)$$

где  $\beta$  — некоторый коэффициент,  $n$  — концентрация молекул пара.

При динамическом равновесии скорость конденсации равна скорости испарения. Приравняв правые части равенств (35.4) и (35.5), получим выражение для концентрации молекул насыщенного пара

$$n_{\text{нас}} = \frac{B}{\beta} \sqrt{T} a^{-\frac{\alpha u_0}{kT}} = A \sqrt{T} a^{-\frac{\alpha u_0}{kT}}. \quad (35.6)$$

3. Плотность насыщенного пара получим, умножив концентрацию на массу молекулы:

$$\rho_{\text{нас}} = m n_{\text{нас}} = A m \sqrt{T} a^{-\frac{\alpha u_0}{kT}}. \quad (35.7)$$

График этой зависимости изображен на рис. 35.1. Мы видим, что с ростом температуры плотность насыщенного пара резко возрастает.

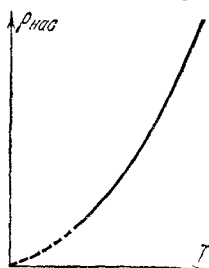


Рис. 35.1.

### § 35.3. Давление насыщенного пара

1. Подставив в формулу (26.10) выражение для концентрации молекул (35.6), получим выражение давления насыщенного пара

$$p_{\text{нас}} = n_{\text{нас}} kT = A k T^{3/2} a^{-\frac{\alpha u_0}{kT}}. \quad (35.8)$$

График этой зависимости изображен на рис. 35.2. Для сравнения здесь же вычерчен график зависимости давления идеального газа от температуры (при постоянном объеме). Давление идеального газа растет линейно с ростом температуры, давление насыщенного пара возрастает значительно быстрее. Причина заключается в том, что у газа рост давления обусловлен только ростом кинетической энергии молекул, а у насыщенного пара с ростом температуры возрастает не только кинетическая энергия молекул, но и их концентрация.

2. Следует отметить, что выражение (35.8) не является вполне строгим, поскольку при его выводе мы воспользовались формулой (26.10) для давления идеального газа, у которого силами

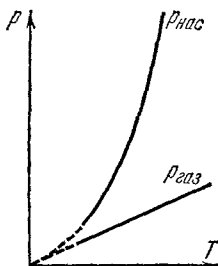


Рис. 35.2.

молекулярного взаимодействия пренебрегают вследствие большого расстояния между молекулами. Между тем концентрация молекул насыщенного пара может оказаться довольно большой, расстояния между ними — достаточно малыми, и влияние молекулярных сил может оказаться существенным. И все же выражение (35.8) в основном правильно передает свойства насыщенного пара. Об этом свидетельствует табл. 35.1, а также рис. 35.3, на

Таблица 35.1

## Давление и плотность насыщенного водяного пара

$t$ °C	$p$ , мм рт. ст.	$\rho$ , г/м <sup>3</sup>	$t$ °C	$p$ , мм рт. ст.	$\rho$ , г/м <sup>3</sup>	$t$ °C	$p$ , мм рт. ст.	$\rho$ , г/м <sup>3</sup>
-30	0,28	0,33	0	4,58	4,84	30	31,82	30,3
-29	0,31	0,37	1	4,93	5,22	31	33,70	32,1
-28	0,35	0,41	2	5,29	5,60	32	35,66	33,9
-27	0,38	0,46	3	5,69	5,98	33	37,73	35,7
-26	0,43	0,51	4	6,10	6,40	34	39,90	37,6
-25	0,47	0,55	5	6,54	6,84	35	42,18	39,6
-24	0,52	0,60	6	7,01	7,3	36	44,56	41,8
-23	0,58	0,66	7	7,51	7,8	37	47,07	44,0
-22	0,64	0,73	8	8,05	8,3	38	49,69	46,3
-21	0,70	0,80	9	8,61	8,8	39	52,44	48,7
-20	0,77	0,88	10	9,21	9,4	40	55,32	51,2
-19	0,85	0,96	11	9,84	10,0	45	71,88	65,4
-18	0,94	1,05	12	10,52	10,7	50	92,5	83,0
-17	1,03	1,15	13	11,23	11,4	55	118,0	104,3
-16	1,13	1,27	14	11,99	12,1	60	149,4	130
-15	1,24	1,38	15	12,79	12,8	65	187,5	161
-14	1,36	1,51	16	13,63	13,6	70	133,7	198
-13	1,49	1,65	17	14,53	14,5	75	189,1	242
-12	1,63	1,80	18	15,48	15,4	80	355,1	293
-11	1,78	1,96	19	16,48	16,3	85	433,6	354
-10	1,95	2,14	20	17,54	17,3	90	525,8	424
-9	2,13	2,33	21	18,65	18,3	95	633,9	505
-8	2,32	2,54	22	19,83	19,4	100	760,0	598
-7	2,53	2,76	23	21,07	20,6	120	1489	1091
-6	2,76	2,99	24	22,38	21,8	140	2710	1890
-5	3,01	3,24	25	23,76	23,0	160	4636	3084
-4	3,28	3,51	26	25,21	24,4	180	7521	4782
-3	3,57	3,81	27	26,74	25,8	200	11664	7099
-2	3,88	4,13	28	28,35	27,2			
-1	4,22	4,47	29	30,04	28,7			

котором изображен график зависимости давления насыщенных паров воды от температуры, построенный по данным этой таблицы. Видно, что характер этой зависимости в общем совпадает с тем, что дает теоретическая кривая (35.2).

3. Из выражения (35.8) следует, что давление насыщенного пара зависит только от его химического состава и температуры, но не зависит от величины свободного от жидкости объема сосуда, где находится пар. Опыт подтверждает

этот вывод, и его легко объяснить следующим образом.

Допустим, что мы увеличим свободное пространство

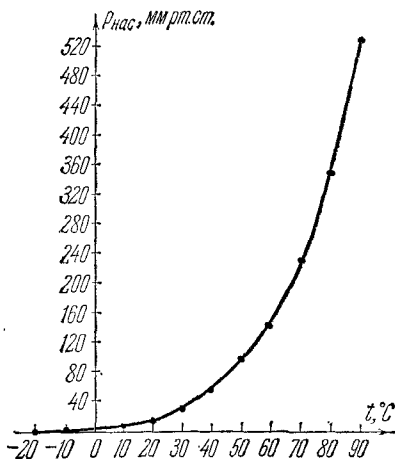


Рис. 35.3.

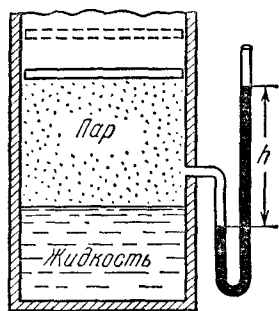


Рис. 35.4.

над жидкостью, подняв поршень в установке, изображенной на рис. 35.4. Вначале манометр регистрирует некоторое уменьшение давления, что свидетельствует об уменьшении концентрации молекул пара. Но при этом уменьшится скорость конденсации (см. (35.5)) и состояние динамического равновесия нарушится. А так как скорость испарения, которая зависит только от температуры, останется неизменной, то это приведет к частичному испарению какой-то части жидкости и к восстановлению состояния динамического равновесия между паром и жидкостью. При этом манометр покажет, что восстановится первоначальное значение давления насыщенного пара.

Аналогичный процесс будет наблюдаться при опускании поршня. При сжатии пара его концентрация возрастет

и скорость конденсации превысит скорость испарения. Нарушенное динамическое равновесие восстановится за счет того, что часть пара конденсируется. При этом восстановится первоначальное значение концентрации молекул и давления пара, которые зависят только от температуры.

### § 35.4. Изотерма пара

1. В установке, изображенной на рис. 35.4, будем непрерывно выдвигать поршень. При этом жидкость будет все время испаряться, и при некотором объеме  $V_1$  жидкости в сосуде не станет. Давление насыщенного пара вплоть до объема  $V_1$ , естественно, будет оставаться неизменным.

Если продолжать выдвижение поршня так, чтобы объем пара стал больше  $V_1$ , то давление пара станет уменьшаться. В самом деле, если жидкость в сосуде исчезнет, то уменьшение концентрации молекул при расширении пара уже не будет компенсироваться испарением жидкости. Такой пар называется *ненасыщенным* или *перегретым*. При неизменной температуре его давление уменьшается при увеличении объема примерно по закону Бойля — Мариотта, как и у любого газа.

2. Проведем теперь обратный процесс: опуская поршень, станем сжимать перегретый пар. Его давление будет возрастать, и при  $V = V_1$  оно станет вновь равно давлению насыщенного пара. Если продолжать дальше уменьшать объем, то часть пара конденсируется, а давление будет оставаться равным давлению насыщенного пара.

Наконец, при некотором объеме  $V_2 < V_1$  весь пар конденсируется и поршень вплотную придвинется к поверхности жидкости. Дальнейшее уменьшение объема потребует колоссальных давлений, поскольку частицы в жидкости упакованы достаточно плотно и ее сжимаемость мала.

3. Графически весь описанный процесс изображен на рис. 35.5. Участок  $0-1$  соответствует перегретому пару, участок  $1-2$  — насыщенному пару и участок  $2-3$  — жидкости. Вся кривая называется *изотермой пара* или изотермой Эндрюса в честь ученого, который первый получил и исследовал изотермы такого рода.

Заметим, что процесс расширения и сжатия пара следует проводить достаточно медленно. Испарение жидкости со-



проводится ее охлаждением (см. § 35.1), а конденсация пара — нагреванием жидкости. Постоянство температуры обеспечивается теплообменом установки с окружающей средой. А так как теплообмен протекает довольно медленно, то столь же медленно следует перемещать поршень.

4. Произведем процесс сжатия пара при более высокой температуре  $T_1 > T$ . Мы заметим, что состояние насыщенного

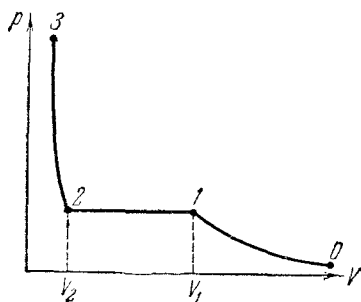


Рис. 35.5

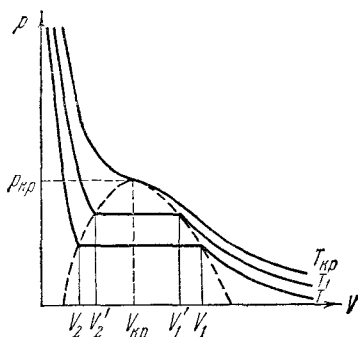


Рис. 35.6.

пара получится при новом объеме  $V'_1 < V_1$  (рис. 35.6). Это легко объяснить: с ростом температуры давление насыщенного пара быстро нарастает (см. § 35.3), и для того, чтобы давление перегретого пара сравнялось с ним, следует объем пара существенно уменьшить.

В то же время полная конденсация насыщенного пара и касание поршнем поверхности жидкости произойдет при объеме  $V'_2 > V_2$ . Причина заключается в тепловом расширении жидкости, которая при более высокой температуре занимает больший объем.

### § 35.5. Критическое состояние вещества

1. При повышении температуры область насыщенного пара уменьшается. Поэтому можно высказать предположение, что при некоторой температуре  $T_{кр}$  насыщенный пар вообще не образуется и перегретый пар при определенном объеме  $V_{кр}$  и давлении  $p_{кр}$  будет непрерывно переходить

в жидкое состояние (см. рис. 35.6). Опыт подтверждает это предположение.

Температура  $T_{кр}$ , соответствующая такому состоянию вещества, называется *критической температурой*, давление  $p_{кр}$  — *критическим давлением*, а плотность  $\rho_{кр} = m/V_{кр}$  — *критической плотностью*. Для воды, например,  $t_{кр} = 374^\circ \text{C}$ ,  $p_{кр} = 218 \text{ атм}$ ,  $\rho_{кр} = 329 \text{ кг/м}^3$ .

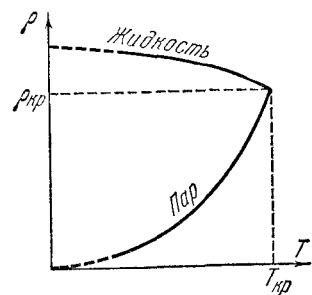


Рис. 35.7.

2. К понятию о критическом состоянии вещества можно подойти и из несколько иных соображений. Как было показано, с ростом температуры плотность насыщенного пара очень быстро возрастает (см. § 35.2). Плотность жидкости при повышении температуры убывает за счет ее теплового расширения. Построив график зависимости плотности пара и жидкости от температуры (рис. 35.7), мы увидим, что при некоторой температуре они пересекаются. Это позволяет дать такое определение: *критической* называется *температура, при которой плотность насыщенного пара равна плотности жидкости*.

Критическое состояние вещества можно наблюдать на опыте, предложенном М. П. Авенариусом (рис. 35.8). В запаянной стеклянной колбочке находится некоторое количество эфира. При низкой температуре видна резкая граница между жидкостью и насыщенным паром. Если сосуд нагреть, то уровень жидкости повышается, несмотря на то, что часть ее при нагревании испарилась. Это свидетельствует о существенном уменьшении плотности жидкости и возрастании плотности пара. При критической температуре граница между жидкостью и паром исчезает и

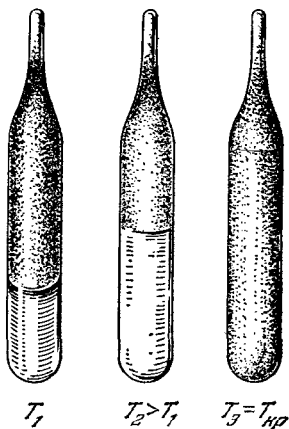


Рис. 35.8.

весь объем вещества внутри сосуда становится мутным. Это вызвано тем, что при критической температуре за счет флуктуаций плотности во всем объеме непрерывно возникают и тут же испаряются микроскопические капельки жидкости. Они-то и рассеивают свет.

3. Выше критической температуры жидкость, а тем более кристалл не образуются даже при больших давлениях. Причина заключается в том, что здесь интенсивность теплового движения молекул (или атомов) оказывается настолько большой, что даже при относительно плотной их упаковке, вызванной большим давлением, молекулярные силы не могут обеспечить создание даже ближнего, а тем более дальнего порядка.

Это значит, что при сверхкритических температурах даже при очень больших давлениях возможно только газообразное состояние вещества, характеризующееся полной неупорядоченностью движения частиц, из которых оно состоит.

4. При очень высоких температурах и чудовищных давлениях, вызванных сильным гравитационным полем, в некоторых типах звезд, называемых «белыми карликами», вещество переходит в особое сверхплотное состояние. При этом электроны отрываются от ядер, образуя электронный газ, наподобие тому, как это имеет место в металлических кристаллах. Однако между этими состояниями имеется существенное отличие.

В металлах атомы теряют только внешние (валентные) электроны, а возникшие ионы образуют пространственную кристаллическую решетку. В сверхплотном состоянии атомы лишаются *всех* электронов, и оставшиеся голые ядра, размеры которых примерно в 10 тысяч раз меньше размеров атомов, образуют очень плотную, но совершенно неупорядоченную упаковку. Плотность вещества при этом оказывается колоссальной, порядка  $10^7$ — $10^8$  кг/м<sup>3</sup>. Стакан такого вещества (200 см<sup>3</sup>) имел бы массу около 20 т (стакан ртути имеет массу около 3 кг).

И тем не менее данное состояние вещества, называемое сверхплотной плазмой, по своей структуре и свойствам ближе к газу, чем к кристаллу или жидкости. Но этот газ по своим свойствам резко отличается от идеального.

### § 35.6. Влажность воздуха

1. Абсолютную влажность воздуха  $f$  оценивают по массе водяных паров, содержащихся в  $1 \text{ м}^3$  воздуха при данных условиях, т. е. по плотности водяного пара. Для удобства вычислений плотность выражают не в единицах системы СИ, а в граммах на кубический метр:

$$f = \rho_{\text{пар}} \text{ (г/м}^3\text{)}. \quad (35.9)$$

В метеорологии обычно абсолютную влажность оценивают не по плотности пара, а по его давлению, выраженному в миллиметрах ртутного столба, т. е. полагают  $f = p$  (мм рт. ст.). Покажем, что численные значения этих величин при температурах, близких к комнатной, мало отличаются.

Согласно уравнению идеального газа  $p = \rho RT$  (см. (26.20)). Для водяного пара, молекулярный вес которого  $m^* = 18 \text{ кг/кмоль}$ , удельная газовая постоянная  $R = 8,316 \cdot 10^3 / 18 = 463 \text{ Дж/кг} \cdot \text{град}$ . Если давление выразить в миллиметрах ртутного столба ( $1 \text{ мм рт. ст.} = 133,3 \text{ н/м}^2$ , см. § 26.2), а плотность — в граммах на  $1 \text{ м}^3$  ( $1 \text{ г/м}^3 = 10^{-3} \text{ кг/м}^3$ ), то уравнение газового состояния для пара примет вид

$$133,3p = 463 \frac{\rho T}{1000},$$

откуда

$$p \text{ (мм рт. ст.)} = \frac{T}{288} \rho \text{ (г/м}^3\text{)}.$$

А так как комнатные температуры  $T \approx 300^\circ \text{ К}$ , то

$$p \text{ (мм рт. ст.)} \approx \rho \text{ (г/м}^3\text{)}.$$

2. Абсолютную влажность можно определить по *точке росы*. Так называется температура, при которой пары, не насыщавшие ранее воздух, станут насыщающими. Так, из табл. 35.1 следует, что если абсолютная влажность воздуха равна  $5,60 \text{ г/м}^3$ , то при  $2^\circ \text{ С}$  пары станут насыщенными и выпадет роса.

Точку росы определяют с помощью *гигрометров* (от греческого *hugros* — влажный). Гигрометр Ламберта изображен (схематично) на рис. 35.9. В сосуд  $A$  наливается эфир, и через него грушей продувается воздух. При интенсивном испарении эфира температура понижается; когда она станет равна точке росы, стенки сосуда запотевают. Кольцо  $K$  отделено от сосуда шайбой из материала, который плохо проводит тепло, поэтому оно не охлаждается. Контраст между бле-

стящим кольцом и запотевшим сосудом облегчает регистрацию момента запотевания. Точку росы определяют по термометру  $T$ , ртутный шарик которого погружен в эфир.

3. Введенное выше понятие абсолютной влажности является недостаточным, ибо нас интересует не только абсолютное содержание влаги в воздухе, но и то, в какой степени влажность близка к состоянию насыщения. Поэтому вводится понятие относительной влажности  $B$ . *Относительной*

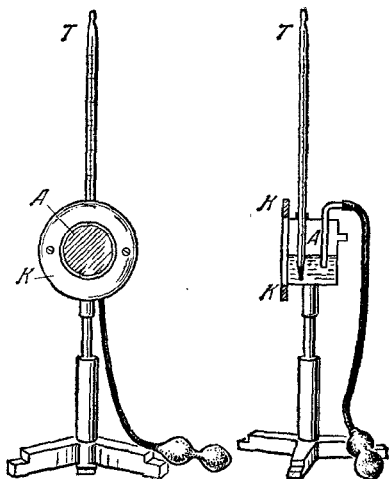


Рис. 35.9.

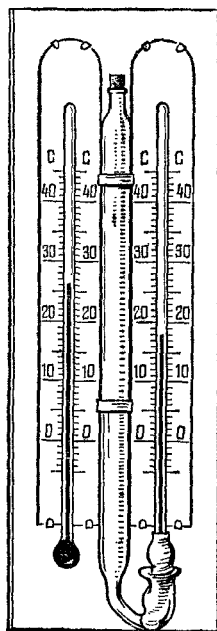


Рис. 35.10.

*влажностью называется отношение абсолютной влажности к плотности (в метеорологии — к давлению) насыщенного пара при данной температуре:*

$$B = \frac{f}{\rho_{\text{нас}}} \approx \frac{f}{p_{\text{нас}}}. \quad (35.10)$$

4. Измерив с помощью гигрометра точку росы и зная температуру воздуха, можно с помощью табл. 35.1 определить относительную влажность. Например, если точка

росы равна  $8^{\circ}\text{C}$ , а температура воздуха  $19^{\circ}\text{C}$ , то относительная влажность

$$B = \frac{8,3}{16,3} \approx \frac{8,05}{16,48} \approx 50\%.$$

Однако обычно относительную влажность определяют другими приборами — волосяными, пленочными или полупроводниковыми гигрометрами, а также с помощью *психрометров*. Так называется прибор, состоящий из двух термометров; шарик одного из них обмотан батистом, конец которого опущен в сосуд с дистиллированной водой (рис. 35.10). Сухой термометр регистрирует температуру воздуха, влажный — температуру испаряющейся воды. Мы уже говорили о том, что при испарении жидкости ее температура понижается (см. § 35.1). Очевидно, что чем суше воздух, т. е. меньше его относительная влажность, тем интенсивнее идет процесс испарения воды с влажного батиста и тем больше он охлаждается. Наоборот, если воздух содержит много паров и его относительная влажность велика, то испарение воды с батиста будет идти медленно и он будет слабо охлаждаться. Таким образом, разность показаний сухого и влажного термометров (так называемая *психрометрическая разность*) зависит от относительной влажности воздуха. С помощью специальных таблиц можно легко найти влажность воздуха по психрометрической разности.

## Г Л А В А 36

### ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

#### § 36.1. Изменение агрегатного состояния

1. Опыт показывает, что при нагревании твердых тел они плавятся, а затем испаряются; охлаждение вещества приводит к обратному процессу. Возможны случаи, когда при повышении температуры кристалла он не плавится, а сразу испаряется (сублимирует). Оказывается, что существенную роль здесь играет не только температура, но и величина давления над поверхностью вещества.

Агрегатное состояние вещества зависит от его температуры и давления над его поверхностью.

Переходы вещества из одного агрегатного состояния в другое, сопровождающиеся изменением характера упаковки частиц (дальний порядок, ближний порядок или полная неупорядоченность), называются *фазовыми переходами первого рода*.

2. Как показал акад. Л. Д. Ландау, существуют и *фазовые переходы второго рода*. При этих переходах меняются некоторые свойства вещества, но характер упаковки частиц не меняется, о чем свидетельствует рентгеноструктурный анализ. Некоторые фазовые переходы второго рода будут рассмотрены во втором томе.

### § 36.2. Диаграмма перехода жидкость — газ

1. Рассмотрим несколько подробнее график функции

(35.8)  $p = AkT^{3/2} a^{-\frac{\alpha u_0}{kT}}$ , выражающей зависимость давления насыщенного пара от температуры (рис. 36.1). Здесь точка  $A$ , лежащая на графике, соответствует *двухфазному* состоянию — насыщенному пару, расположенному над жидкостью и находящемуся с ней в состоянии динамического равновесия. Выясним, каким состояниям соответствуют точки  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $E$ , расположенные вне кривой.

2. Переход из состояния  $A$  в состояние  $B$  происходит путем изотермического повышения давления. Но мы уже выяснили в § 35.4, что при изотермическом сжатии насыщенного пара он переходит в жидкость. Следовательно, точка  $B$  соответствует жидкости, сжатой до давления, которое больше давления насыщенного пара при данной температуре. Легко убедиться, что точка  $C$  соответствует состоянию жидкости, температура которой ниже температуры насыщенного пара при данном давлении.

Таким образом, точки, лежащие над кривой, соответствуют жидкому состоянию вещества.

3. Переход из состояния  $A$  в состояние  $D$  совершается путем изотермического понижения давления. Как было

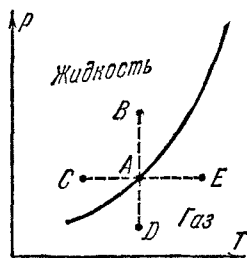


Рис. 36.1.

показано в § 35.4, изотермическое расширение насыщенного пара приводит к испарению жидкости и дальнейшему превращению насыщенного пара в ненасыщенный, т. е. в газообразное состояние. Точка  $D$  соответствует газу, давление которого ниже давления насыщенного пара при данной температуре.

Точно так же нетрудно убедиться, что точка  $E$  соответствует газообразному состоянию вещества, температура которого выше температуры насыщенного пара при данном давлении, т. е. перегретому пару.

Таким образом, точки, лежащие под кривой, соответствуют газообразному состоянию вещества.

### § 36.3. Диаграмма перехода кристалл — газ

1. Давление насыщенного пара над кристаллом при его сублимации может быть выражено той же функцией (35.8), что и давление пара над жидкостью, если заменить энергию испарения  $u_0$  энергией сублимации  $w_0$  и постоянную  $A$  — новой постоянной  $B$ , характеризующей это вещество. Мы получим такую же кривую, как на рис. 36.1, но с несколько другим наклоном. Оказывается, что в некоторой точке, соответствующей температуре  $\Theta$ , эти кривые пересекаются (рис. 36.2).

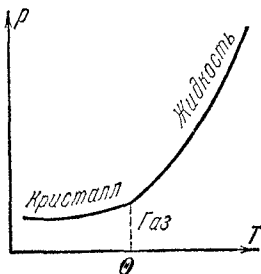


Рис. 36.2.

2. При повышении температуры кристалл превращается в газ. При повышении давления газ превращается в кристалл, поскольку упаковка частиц в кристаллах значительно более плотная, чем в газах.

Таким образом, диаграмма фазового перехода кристалл — газ совершенно аналогична диаграмме перехода жидкость — газ. И здесь точки, лежащие ниже и правее кривой (меньшее давление и высокая температура), соответствуют газообразному состоянию вещества; точки, лежащие выше и левее кривой (высокое давление и низкая температура), — кристаллическому состоянию.



### § 36.4. Диаграмма перехода кристалл — жидкость

1. Оба рассмотренных выше случая — переходы вещества из газообразного в жидкое или кристаллическое состояние и наоборот — имеют много общего. В обоих случаях повышение температуры способствует переходу в газообразное состояние, так как повышение температуры приводит к росту неупорядоченности молекулярного движения, что характерно именно для газа.

Точно так же повышение давления способствует переходу в более конденсированное состояние — жидкое или кристаллическое, так как при возрастании давления молекулы сближаются и возникающие при этом силы притяжения способствуют наведению какого-то порядка в их упаковке: ближнего при высокой температуре и дальнего при более низкой. В результате диаграммы, характеризующие оба этих перехода, очень похожи (рис. 36.2). Кривые, разделяющие области с разными агрегатными состояниями, наклонены здесь к оси абсцисс под острым углом.

2. Несколько сложнее обстоит дело с диаграммой фазового перехода жидкость — кристалл.

Повышение температуры и здесь способствует переходу от более упорядоченного в менее упорядоченное состояние, т. е. от кристалла к жидкости. Поэтому на диаграмме область жидкого состояния лежит правее кристаллического. Что же касается влияния давления, то здесь возможны два случая.

3. У большинства веществ частицы в кристаллическом состоянии упакованы более плотно, чем в жидком. Следовательно, у этих веществ повышение давления будет способствовать переходу от более «рыхлой» жидкостной упаковки частиц к более плотной кристаллической. Это значит, что в данном случае точки, соответствующие жидкому состоянию вещества, будут расположены правее и ниже кривой фазового перехода (более высокие температуры и меньшие давления), а точки, соответствующие кристаллическому состоянию, — левее и выше кривой (более низкие температуры и высокие давления). Диаграмма состояния и фазовых переходов такого вещества изображена на рис. 36.3.

4. Вместе с тем встречаются и вещества, у которых кристаллическая упаковка более «рыхлая», чем жидкостная.

У этих веществ плотность кристалла меньше плотности жидкости.

Примером может служить вода, а также некоторые металлы и сплавы (висмут, серый чугун). Увеличение давления способствует уплотнению молекулярной упаковки и тем самым плавлению этих веществ. К такому же результату приводит и повышение температуры. В данном случае точки, соответствующие жидкому состоянию, располагаются правее и выше кривой фазового перехода (более высокие температуры и большие давления), а точки,

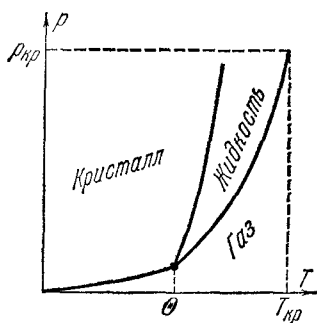


Рис. 36.3.

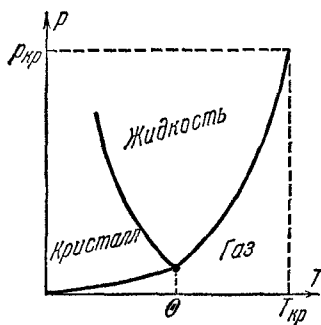


Рис. 36.4.

соответствующие кристаллическому состоянию, — левее и ниже кривой (низкие температуры и малые давления).

Диаграмма состояния и фазовых переходов такого вещества изображена на рис. 36.4. Здесь кривая плавления наклонена к оси абсцисс под тупым углом.

### § 36.5. Диаграмма перехода кристалл — кристалл

1. У любого вещества имеется только одно жидкое и одно газообразное состояние, но кристаллических состояний может быть несколько. Причина заключается в разной степени упорядоченности молекулярной упаковки в этих трех агрегатных состояниях.

Газообразному состоянию вещества соответствует полный молекулярный беспорядок. Такому распределению

молекул (или атомов) соответствует очень большое число всевозможных перегруппировок молекул в пространстве. Однако физические свойства вещества при всех этих перегруппировках остаются неизменными. Поэтому им всем соответствует одно газообразное состояние.

Жидкое состояние характеризуется ближним порядком в молекулярной упаковке (гл. 34). Однако и здесь пространственная перегруппировка частиц не отражается на физических свойствах вещества. Поэтому у вещества имеется лишь одно жидкое состояние.

Совершенно иначе обстоит дело с кристаллическим состоянием вещества. Здесь оказываются вполне возможными различные способы пространственной упаковки частиц, различающиеся своими свойствами. Примеры такого рода были подробно рассмотрены в гл. 33.

2. Тот или иной порядок упаковки частиц в кристаллической решетке определяется условиями, при которых происходит кристаллизация, а именно — температурой вещества и внешним давлением. При изменении этих условий меняется и характер упаковки частиц.

Таким образом, процессы перекристаллизации вещества, т. е. процессы перестройки кристаллической решетки при изменении внешних условий, являются также примерами фазовых переходов первого рода, и их можно изобразить с помощью диаграмм состояния.

3. Рассмотрим в качестве примера серу. При давлении 1 мм рт. ст. и температуре  $95,5^{\circ}\text{C}$  из паров серы выделяются как желтые, так и красные кристаллы. При меньших давлениях и более низких температурах — только желтые кристаллы, при более высоких давлениях и температурах — только красные.

Аналогичная картина наблюдается при кристаллизации из расплава. При температуре  $151^{\circ}\text{C}$  и давлении 1288 ат из расплава одновременно выделяются кристаллы обоих сортов, при давлении свыше 1288 ат — только желтые, а при меньшем давлении — только красные кристаллы.

Диаграмма состояния и фазовых переходов изображена на рис. 36.5. Заметим, что масштаб на осях координат не выдержан из-за большого диапазона давлений и температур.

### § 36.6. Тройная точка

1. На всех диаграммах состояния имеются характерные точки, где пересекаются три графика, соответствующие фазовым переходам. На рис. 36.3 и 36.4 это точки  $\Theta$ , где встречаются кривые, соответствующие переходам газ — жидкость, газ — кристалл и жидкость — кристалл, т. е. процессам кипения, сублимации и плавления. На рис. 36.5

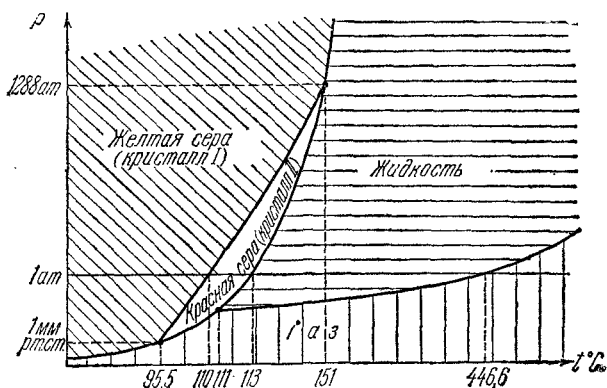


Рис. 36.5.

это точка  $\Theta_1 = 95,5^\circ \text{C}$ , соответствующая переходам газ — кристалл I, газ — кристалл II и кристалл I — кристалл II; точка  $\Theta_2 = 151^\circ \text{C}$ , соответствующая переходам кристалл I — кристалл II, кристалл I — жидкость и кристалл II — жидкость; точка  $\Theta_3 = 111^\circ \text{C}$ , соответствующая переходам газ — кристалл II, газ — жидкость и жидкость — кристалл II. При этих температурах и соответствующих им вполне определенных давлениях возможно сосуществование трех фаз, например газа, жидкости и кристалла.

Точка на диаграмме состояния, соответствующая условиям, при которых возможно сосуществование трех фаз (трех различных агрегатных состояний вещества), называется *тройной точкой*.

2. Поскольку тройная точка является вполне определенной постоянной для данного вещества, то она может служить эталонной (реперной) точкой при построении темпера-

турной шкалы. В Международной системе единиц СИ тройная точка воды принята в качестве реперной точки для построения абсолютной шкалы температур. Именно, тройной точке воды приписывается температура точно  $273,16^\circ \text{K}$ .

### § 36.7. Изменение внутренней энергии при фазовых переходах первого рода

1. Фазовые переходы первого рода сопровождаются изменением внутренней энергии системы частиц, из которых построено тело. Рассмотрим с этой точки зрения процессы плавления и парообразования.

При кристаллической упаковке частицы колеблются около положений равновесия, расстояния между которыми соответствуют минимальному значению энергии взаимодействия при данной температуре вещества. При плавлении кристалла пространственная решетка разрушается и дальний порядок в упаковке частиц переходит в ближний. Обычно в этом случае происходит разрыхление упаковки, расстояние между частицами возрастает, что ведет к возрастанию энергии взаимодействия между ними. Если же жидкостная упаковка оказывается более компактной, чем кристаллическая (как у воды), то расстояние между молекулами становится меньше расстояния, соответствующего минимуму энергии взаимодействия, что также приводит к возрастанию внутренней энергии.

Итак, *плавление кристалла сопровождается возрастанием его внутренней энергии* за счет увеличения энергии взаимодействия между частицами. Естественно, что при этом процессе телу необходимо сообщить некоторую энергию — так называемую *теплоту плавления*.

2. С помощью аналогичных рассуждений читатель самостоятельно убедится, что *процессы сублимации и парообразования также сопровождаются возрастанием внутренней энергии системы*. Для этого следует учесть, что согласно условию, сформулированному в § 31.5, энергия взаимодействия частиц в газах считается равной нулю, а при плотной упаковке она отрицательна. Следовательно, при сублимации кристалла и при испарении жидкости требуется подвести к телу некоторую энергию — *теплоту фазового перехода* (теплоту сублимации, теплоту парообразования).

При фазовых переходах изменяется энергия каждой молекулы. Чем из большего числа молекул состоит тело, тем больше энергии следует затратить на теплоту фазового перехода. Обозначив изменение энергии одной молекулы при этом процессе через  $\varepsilon_0$  и число молекул через  $N$ , имеем

$$Q = \varepsilon_0 N. \quad (36.1)$$

Умножив и разделив правую часть равенства на массу молекулы  $m$ , получим

$$Q = \frac{\varepsilon_0}{m} mN = \lambda M. \quad (36.2)$$

Здесь  $Q$  — теплота фазового перехода,  $M = mN$  — масса вещества,  $\lambda = \varepsilon_0/m$  — удельная теплота фазового перехода.

3. Расстояния между частицами при плавлении вещества меняются незначительно по сравнению с расстояниями между ними в кристалле. При испарении или сублимации расстояния между молекулами становятся примерно в 10 раз большими, чем в жидком или твердом состоянии. Отсюда следует, что удельная теплота парообразования должна быть значительно больше, чем теплота плавления. Так, для льда при нормальном атмосферном давлении удельная теплота плавления  $\lambda_{\text{плавл}} = 80 \text{ ккал/кг} = 3,35 \cdot 10^5 \text{ дж/кг}$ , а удельная теплота парообразования при этом же давлении  $\lambda_{\text{пар}} = 539 \text{ ккал/кг} = 2,26 \cdot 10^6 \text{ дж/кг}$ .

Из закона сохранения энергии вытекает, что при обратном процессе (конденсации пара в жидкое или кристаллическое состояние или при кристаллизации расплава) внутренняя энергия соответственно уменьшается и теплота фазового перехода выделяется. Этот вывод подтверждается экспериментально.

Тело может получить теплоту фазового перехода за счет теплообмена с окружающей средой. В этом случае фазовый переход происходит при постоянной температуре, которая зависит от давления, при котором находится вещество. Температура фазового перехода может быть найдена с помощью диаграммы состояния. Так, из рис. 36.5 видно, что при нормальном атмосферном давлении сера плавится при  $113^\circ \text{ С}$  и кипит при  $446,6^\circ \text{ С}$ .

4. Из приведенных графиков видно, что с ростом давления температура кипения жидкости и сублимации кристалла возрастает, ибо здесь всегда из  $p_2 > p_1$  следует, что

и  $T_2 > T_1$ . Что же касается точки плавления, то при возрастании давления она повышается у тех тел, где кристаллическая упаковка компактнее жидкостной (см. рис. 36.3). Тела типа льда, у которых кристаллическая упаковка более «рыхлая», чем жидкостная, ведут себя иначе. Здесь с ростом давления точка плавления понижается. В самом деле, здесь из  $p_2 > p_1$  следует  $T_2 < T_1$  (см. рис. 36.4).

5. Если поступление энергии за счет теплообмена недостаточно, то теплота фазового перехода может быть получена только за счет изменения энергии молекулярного движения. Это сопровождается изменением температуры тела.

Такой процесс делает возможным, например, хранение сжиженных газов в сосуде Дьюара. Здесь теплообмен с окружающей средой сведен к минимуму (§ 21.5). Жидкость интенсивно испаряется, что приводит к ее охлаждению. По этой причине сосуд Дьюара со сжиженным газом нельзя закупоривать. Закупорка приведет к прекращению испарения и тем самым — к нагреванию жидкости до температуры окружающей среды. А так как эта температура выше критической, то жидкость при этом сразу же перейдет в газообразное состояние, что приведет к взрыву.

Благодаря интенсивной сублимации сохраняется при атмосферном давлении твердая углекислота — сухой лед. Его температура составляет  $-75^\circ \text{C}$ , хотя температура окружающей среды значительно выше.

## § 36.8. Метастабильные состояния

1. Не следует думать, что как только изменится температура или давление, тело сразу же перейдет в новое агрегатное состояние, соответствующее диаграмме состояния. Только два фазовых перехода осуществляются при изменении температуры или давления без задержек — это сублимация или плавление кристалла. Все остальные фазовые превращения часто задерживаются. Хотя температура и давление тела могут соответствовать новому агрегатному состоянию, фазовый переход может и не произойти.

Если тело находится в агрегатном состоянии, которое, согласно фазовой диаграмме, не соответствует его температуре и давлению, то говорят, что оно находится в *метастабильном состоянии*.

Один из примеров метастабильного состояния был рассмотрен в § 34.6. Это аморфное состояние вещества, которое представляет собой *переохлажденную жидкость*. Возможно также состояние *перегретой жидкости*, *переохлажденного пара*, а также существование кристаллической решетки некоторого типа при условиях, когда более устойчивой является иной вид кристаллической упаковки.

2. Рассмотрим более подробно последний процесс. Перестройка кристаллической решетки при изменении внешних условий происходит при наличии сильной связи между частицами, плотно упакованными в пространственную решетку. Молекулам «тесно», им очень трудно перегруппироваться в новую кристаллическую решетку, которая лучше соответствует изменившимся условиям. В результате переход из одного кристаллического состояния в другое, как правило, задерживается. Так, если желтую серу при нормальном атмосферном давлении нагреть до  $110^{\circ}\text{C}$ , то она, согласно фазовой диаграмме (см. рис. 36.5), должна превратиться в красную. На самом деле это не происходит, и дальнейший нагрев до  $113^{\circ}\text{C}$  приведет к ее плавлению. При охлаждении расплавленной серы ниже  $113^{\circ}\text{C}$  она образует красные кристаллы, однако при их дальнейшем охлаждении ниже  $110^{\circ}\text{C}$  до комнатных температур они сразу в желтую серу не перейдут. Потребуется значительное время, порядка суток, пока красные кристаллы превратятся в желтый порошок.

3. Процесс перекристаллизации резко ускорится, если привести в контакт с красными кристаллами, находящимися в метастабильном состоянии, небольшой желтый кристаллик. Оказывается, что в этом случае частицам гораздо легче укладываться на готовые грани кристаллической решетки, стабильной при новых условиях.

В процессе возникновения новой кристаллической решетки из метастабильного кристалла существенную роль играют флуктуации. Именно они и образуют микроскопические зародыши стабильной кристаллической упаковки, вокруг которых начинается рост нового кристалла.

Так как микроскопические зародыши возникают одновременно в разных точках и ориентированы они беспорядочно, то более вероятным является образование поликристаллической структуры, а не монокристалла.



4. Наличие зародышей, которые служат центрами кристаллизации, облегчает переход переохлажденной жидкости в кристаллическое состояние. Так, расплавленный гипосульфит можно осторожно охладить до комнатной температуры, и в таком переохлажденном состоянии он может находиться сутками. Но достаточно бросить в него маленький кристаллик, как жидкость почти мгновенно кристаллизуется. Заметим, что при этом температура гипосульфита возрастает благодаря выделению теплоты плавления.

Что касается перегретой жидкости и переохлажденного пара, то о них речь пойдет в следующих параграфах.

### § 36.9. Конденсация. Пересыщенный пар

1. Если при неизменном давлении понизить температуру пара ниже точки росы, то должна образоваться двухфазная смесь жидкость — насыщенный пар. Однако опыт показывает, что образование капелек жидкости возможно лишь в том случае, если в газе имеются *центры конденсации* — пылинки, ионы, острия на поверхности твердых тел и т. п. Если же центры конденсации отсутствуют, то капли жидкости не образуются и возникает метастабильное состояние — *пересыщенный (переохлажденный) пар*.

Пересыщенный пар можно получить и путем изотермического сжатия пара до давления, которое превосходит давление насыщенного пара при данной температуре. График зависимости давления пересыщенного пара от его объема показан на рис. 36.6.

2. Способность ионов играть роль центров конденсации используется в камере Вильсона (рис. 36.7). Камера Вильсона представляет собой стеклянный цилиндрический сосуд 1, покрытый сверху стеклом 2. Снизу сосуд покрыт

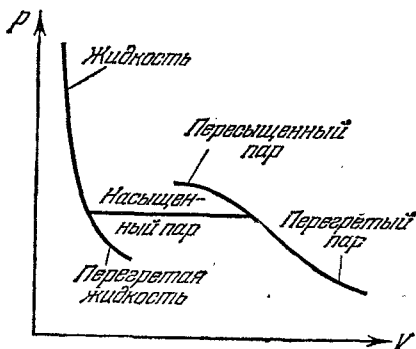


Рис. 36.6.

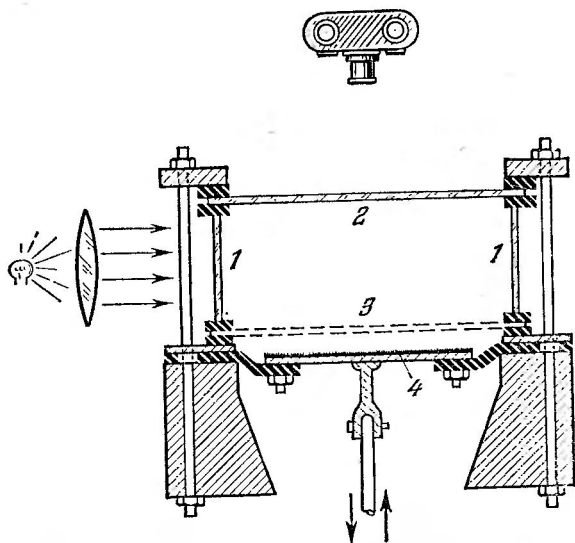


Рис. 36.7.



Рис. 36.8.



Рис. 36.9.

слоем черного влажного бархата или сукна (на сетке 3), над поверхностью которого образуется насыщенный пар. При быстром опускании поршня 4 происходит адиабатное расширение газа, что сопровождается понижением его температуры. За счет охлаждения пар становится переохлажденным (пересыщенным).

Заряженные частицы, образующиеся при радиоактивном распаде, например  $\alpha$ -,  $\beta$ - или  $\gamma$ -частицы, пролетая в газе, создают на своем пути цепочку ионов. На этих ионах как на центрах конденсации образуются капельки жидкости. Таким образом, при полете частица оставляет за собой след (трек), который хорошо виден и может быть сфотографирован. На рис. 36.8 показаны фотографин треков  $\alpha$ -частиц (короткие и жирные); на рис. 36.9 — треки  $\beta$ -частиц (прерывистые и длинные).

### § 36.10. Кипение. Перегретая жидкость

1. Испарение жидкости происходит с ее свободной поверхности при любой температуре. Чем выше температура, тем быстрее идет испарение.

*Кипением* называется процесс бурного парообразования не только с поверхности жидкости, но и по всему ее объему. Для этого жидкость должна быть нагрета до достаточно высокой температуры. При кипении важную роль играют пузырьки газа, имеющиеся в жидкости. Такие пузырьки образуются на границе жидкости и твердого тела. Пузырьки заполнены насыщенным паром жидкости.

При повышении температуры жидкости давление пара в пузырьке возрастает и его объем увеличивается. Выталкивающая сила, действующая на пузырек по закону Архимеда, возрастает с ростом его объема. При определенных условиях она станет больше силы сцепления между пузырьками и твердой стенкой. В этом случае пузырек отрывается от стенки, всплывает и лопається, выбрасывая пар.

2. Давление насыщенного пара  $p_{\text{нас}}$  внутри пузырька, находящегося у поверхности жидкости, равно сумме внешнего давления на жидкость  $p_{\text{внешн}}$  и давления под искривленной поверхностью:

$$p_{\text{нас}} = p_{\text{внешн}} + \frac{2\sigma}{r}, \quad (36.3)$$

где  $r$  — радиус пузырька,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения (§ 34.8). Если пузырек имеет размеры порядка нескольких миллиметров и больше, то вторым слагаемым в (36.3) можно пренебречь. Например, для воды при температуре  $100^\circ\text{C}$  величина  $\sigma = 58,8 \cdot 10^{-3}$  н/м, и если  $r = 1$  мм, то  $\frac{2\sigma}{r} = \frac{2 \cdot 58,8 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}} = 118$  н/м<sup>2</sup>. В то же время нормальное атмосферное давление равно  $1,01 \cdot 10^5$  н/м<sup>2</sup>, что примерно в 1000 раз больше. Следовательно, для достаточно больших пузырьков условие всплывания пузырька и его разрыва у поверхности жидкости запишется так:

$$P_{\text{нас}} \geq P_{\text{внешн}} \quad (36.4)$$

Это и есть *условие кипения*.

Итак, кипение жидкости возможно в том случае, если в ней имеются пузырьки достаточно больших размеров (для воды — порядка миллиметра). Кипение начнется в том случае, когда давление насыщенного пара станет равно внешнему давлению над поверхностью жидкости.

Как мы уже установили, давление насыщенного пара определяется только температурой жидкости. Из условия (36.4) следует, что точка кипения зависит от внешнего давления — с ростом внешнего давления растет и точка кипения. Точка кипения воды при разных давлениях может быть найдена с помощью табл. 35.1 (стр. 430).

3. Если в жидкости нет пузырьков, способствующих процессу кипения, то ее можно перегреть без того, чтобы кипение началось. Возникающее при этом метастабильное состояние называется *перегретой жидкостью*.

Перегретую жидкость можно также получить, если уменьшить внешнее давление над жидкостью так, чтобы оно стало меньше давления насыщенного пара при данной температуре. График зависимости давления перегретой жидкости от ее объема показан на рис. 36.6 (стр. 449).

4. Перегретая жидкость используется в *пузырьковых камерах* для визуализации треков релятивистских заряженных частиц, т. е. частиц, движущихся со скоростями, близкими к скорости света. Такие частицы создают в газах очень мало ионов, и их трек в камере Вильсона не виден. В жидкостях, где молекулы плотно упакованы, такие частицы

создадут значительно больше ионов, чем в газах, и трек может быть зарегистрирован.

Принцип действия пузырьковой камеры аналогичен принципу действия камеры Вильсона. Релятивистская частица, проходя через нагретую жидкость, создает на своем пути цепочку ионов. Если резко понизить давление над жидкостью, то она переходит в перегретое состояние. Ионы служат центрами для вскипания. Возникшие пузырьки образуют трек вдоль пути следования частицы. Этот трек фотографируется (рис. 36.10). В качестве рабочей жидкости в пузырьковых камерах используются сжиженные водород, пропан или ксенон.

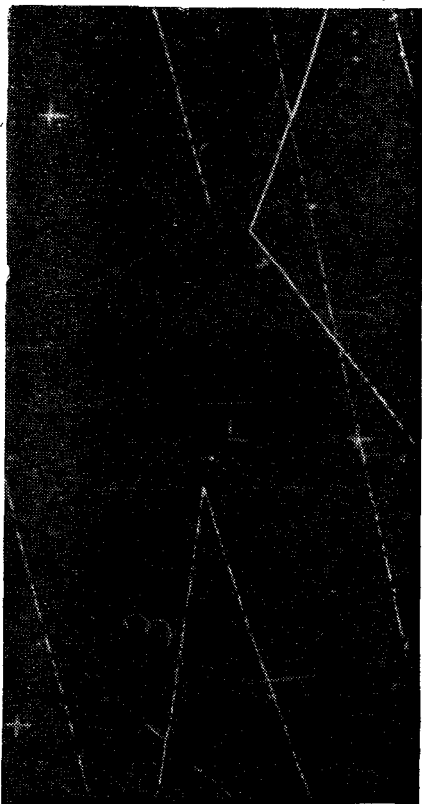


Рис. 36.10.

## § 36.11. Сжижение газов

1. Для того чтобы газ превратился в жидкость, его температура должна стать ниже критической. Для таких газов, как хлор ( $t_{кр} = 144^\circ \text{C}$ ), аммиак ( $t_{кр} = 132,4^\circ \text{C}$ ), углекислый газ ( $t_{кр} = 31,1^\circ \text{C}$ ), ксенон ( $t_{кр} = 16,7^\circ \text{C}$ ) и некоторые другие, критическая температура

которых порядка комнатных, проблема сжижения решается довольно просто. Снизив их температуру ниже критической, их изотермически сжимают и получают жидкость. Гораздо труднее получить жидкий кислород ( $t_{кр} = -118,8^\circ \text{C}$ ),

азот ( $t_{кр} = -147,1^\circ \text{C}$ ), водород ( $t_{кр} = -239,9^\circ \text{C}$ ) и в особенности жидкий гелий ( $t_{кр} = -267,9^\circ \text{C}$ ). Здесь нужны специальные установки, позволяющие получить столь низкие температуры, зачастую, как у гелия, близкие к абсолютному нулю.

Имеется ряд методов, позволяющих решить проблему сжижения газов. Остановимся на одном из них — охлаждении газов при совершении ими полезной работы путем адиабатического расширения. Холодильные машины, работающие на основе этого принципа, называются *детандерами*. Акад. П. Л. Капица разработал весьма производительный *турбодетандер* — миниатюрную турбину, ротор которой приводится во вращение предварительно сжатым газом.

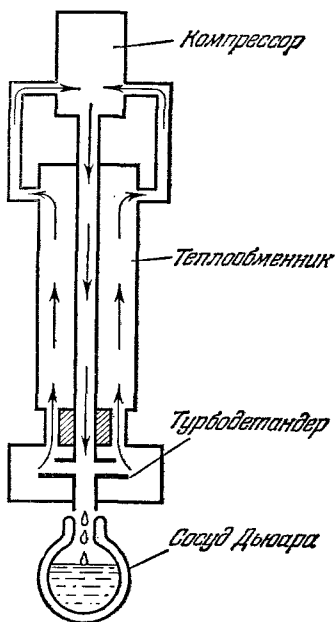


Рис. 36.11.

2. Рассмотрим принцип действия установки для сжижения газа. Она состоит из компрессора, теплообменника и детандера (рис. 36.11).

Компрессор представляет собой поршневую машину, которая сжимает газ. Избыток тепла, возникающий при сжатии газа, отводится с помощью водяной системы охлаждения. Сжатый газ проходит по внутренней трубе теплообменника, у которого по наружной трубе большего диаметра навстречу течет охлажденный газ. Пройдя через теплообменник и охладившись, он проходит через сопло Лавала и попадает на лопасти ротора турбины, приводя последний в быстрое вращение. При адиабатном расширении газа совершается работа за счет уменьшения его внутренней энергии. При этом температура падает столь сильно, что часть газа сжижается и стекает в сосуд Дьюара. Другая часть охлаж-

денного, но не успевшего ожижиться газа идет в теплообменник, где охлаждает вновь поступающую порцию сжатого газа, а затем поступает в компрессор и вновь сжимается.

3. Развитие методов получения сжиженных газов и, в связи с этим, низких температур привело к созданию *криогенной техники*. Сжиженные газы находят в настоящее время широкое применение как в физических исследованиях, где необходимы низкие температуры, так и в технике. Так, при испарении жидкого воздуха сперва улетучивается азот и остается чистый кислород. В настоящее время это самый дешевый метод получения чистого кислорода, широко применяемого в медицине, для автогенной сварки, для ускорения доменного процесса и для выплавки стали. Жидкий кислород в смеси с органическими горючими веществами (вата, хлопок, опилки) образует взрывчатые вещества (оксидквиты), которые применяются в горнорудной промышленности. Их преимущество заключается в том, что если взрыва не произошло, то через некоторое время кислород испарится и взрывчатый патрон станет совершенно безопасным.

Некоторые вопросы, связанные с исследованием свойств сжиженных газов и их применением, будут рассмотрены во втором томе.