

В. И. КРЫЛОВ

# ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ

*Издание второе,  
дополненное*



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1967

В книге рассмотрены вопросы нахождения численных значений интегралов как однократных, так и многократных. Наибольшее внимание уделено правилам, часто применяемым в практике вычислений. В частности, значительное место отведено задачам численного гармонического анализа и обращению преобразования Лапласа.

Книга рассчитана на лиц, занимающихся теорией вычислений, работников вычислительных учреждений, студентов и преподавателей вузов. Она может быть полезным справочником для всех, кто по роду работы соприкасается с научными и техническими расчетами.

*Владимир Иванович Крылов*

Приближенное вычисление интегралов

Москва, 1967 г., 500 стр. с илл.

Редактор *А. Ф. Лапко*

Техн. редакторы *Л. Ю. Плакше* и *Л. А. Пыжова*

Корректор *О. А. Бутусова*

Сдано в набор 25/1 1967 г. Подписано к печати 5/VII 1967 г. Бумага 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Физ. печ. л. 31,25. Условн. печ. л. 31,25. Уч.-изд. л. 30,66. Тираж 16 000 экз. Т-07018.

Цена книги 2 р. 13 к. Заказ № 662.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы.

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома  
Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию . . . . .	7
Предисловие к первому изданию . . . . .	8

### ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

#### ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Глава 1. Числа и многочлены Бернулли . . . . .	9
§ 1. Числа Бернулли . . . . .	9
§ 2. Многочлены Бернулли . . . . .	11
§ 3. Периодические функции, связанные с многочленами Бернулли . . . . .	19
§ 4. Разложение произвольной функции по многочленам Бернулли . . . . .	20

Глава 2. Ортогональные многочлены . . . . .	23
§ 1. Некоторые общие теоремы об ортогональных многочленах . . . . .	23
§ 2. Многочлены Якоби и Лежандра . . . . .	28
§ 3. Многочлены Чебышёва . . . . .	31
§ 4. Многочлены Чебышёва — Эрмита . . . . .	37
§ 5. Многочлены Чебышёва — Лягерра . . . . .	38

Глава 3. Интерполирование функций . . . . .	40
§ 1. Конечные разности и разностные отношения . . . . .	40
§ 2. Интерполирование по значениям функции . . . . .	44
§ 3. Интерполирование с кратными узлами . . . . .	48
§ 4. Тригонометрическое интерполирование . . . . .	52

Глава 4. Линейные нормированные пространства. Линейные операторы . . . . .	57
§ 1. Линейные нормированные пространства . . . . .	57
§ 2. Линейные операторы . . . . .	61
§ 3. Сходимость последовательности линейных операторов . . . . .	64

### ЧАСТЬ ВТОРАЯ

#### ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Глава 5. Квадратурные суммы и задачи, с ними связанные. Остаток приближенной квадратуры . . . . .	67
§ 1. Квадратурные суммы . . . . .	67
§ 2. Об остатке приближенной квадратуры и его представлении . . . . .	74

<b>Глава 6. Интегрирование функций, для которых известна таблица значений. Интерполяционные квадратуры</b>	79
§ 1. О содержании задачи	79
§ 2. Интерполяционные квадратурные формулы и их остаточные члены	80
§ 3. Формулы Ньютона — Котеса	83
§ 4. Некоторые простейшие формулы Ньютона — Котеса	95
§ 5. Правила квадратур, имеющие степень точности ниже интерполяционной	101
§ 6. Об отбрасывании узлов при построении правил интегрирования	105
§ 7. Правила интегрирования, использующие значения функции и производных	107
§ 8. Некоторые результаты общей теории интерполяционных квадратур	111
<b>Глава 7. Квадратуры наивысшей алгебраической степени точности</b>	116
§ 1. Общие теоремы	116
§ 2. Постоянная весовая функция	123
§ 3. Интегралы вида $\int_a^b (b-x)^\alpha (x-a)^\beta f(x) dx$	129
§ 4. Интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) dx$	140
§ 5. Интегралы вида $\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} f(x) dx$	142
<b>Глава 8. Интегрирование периодических функций</b>	148
§ 1. О задаче интегрирования периодической функции и форме интеграла	148
§ 2. Интерполяционные правила интегрирования	149
§ 3. Правило наивысшей степени точности	151
§ 4. Остаток квадратуры периодической функции и его оценка	164
<b>Глава 9. Квадратурные формулы, содержащие наперед заданные узлы</b>	168
§ 1. Некоторые общие теоремы	168
§ 2. Формулы частного вида	174
§ 3. Замечание о вычислении интегралов со знакопеременной весовой функцией	183
§ 4. Уточнение правил гауссова типа	187
<b>Глава 10. Квадратурные формулы с равными коэффициентами</b>	191
§ 1. Нахождение узлов	191
• § 2. Единственность квадратурной формулы наивысшей алгебраической степени точности с равными коэффициентами	195
§ 3. Интегралы с постоянной весовой функцией	199
<b>Глава 11. Квадратуры с наименьшей оценкой остатка</b>	209
§ 1. О задаче минимизации остатка квадратуры	209
§ 2. Минимизация остатка в классах $L_q^{(r)}$	210



§ 3. Минимизация остатка в классах $C_r$ . . . . .	225
§ 4. Задача минимизации оценки остатка квадратуры с закрепленными узлами . . . . .	228
<b>Глава 12. Сходимость квадратурного процесса</b> . . . . .	236
§ 1. О проблеме сходимости квадратурного процесса . . . . .	236
§ 2. Сходимость интерполяционных квадратур для аналитических функций . . . . .	237
§ 3. Сходимость общего квадратурного процесса . . . . .	257
<b>Глава 13. Увеличение точности квадратуры и ускорение сходимости квадратурного процесса</b> . . . . .	267
§ 1. О двух направлениях в задаче увеличения точности . . . . .	267
§ 2. Ослабление особенности интегрируемой функции . . . . .	270
§ 3. Эйлеровы методы разложения остатка квадратуры . . . . .	274
§ 4. Увеличение точности квадратуры при наличии короткого главного участка интегрирования в интегральном представлении остатка . . . . .	296
§ 5. Увеличение скорости сходимости квадратурного процесса . . . . .	307
<b>Глава 14. Численное преобразование Фурье</b> . . . . .	315
§ 1. Преобразование Фурье на конечном отрезке и вычисление коэффициентов Фурье гладкой периодической функции . . . . .	315
§ 2. О вычислении вспомогательных интегралов, содержащих тригонометрические множители . . . . .	321
§ 3. Применение алгебраического интерполирования к вычислению коэффициентов Фурье . . . . .	328
§ 4. Увеличение точности вычисления коэффициентов Фурье путем предварительной подготовки функции . . . . .	331
§ 5. Интегральные преобразования Фурье и интерполяционные методы их численного осуществления . . . . .	336
§ 6. Правила наивысшей степени точности . . . . .	341
§ 7. Увеличение точности вычисления интегралов Фурье при помощи предварительной подготовки функции . . . . .	344
<b>Глава 15. Численное обращение преобразования Лапласа</b> . . . . .	352
§ 1. Преобразование Лапласа, задача его обращения и связь ее с преобразованием Фурье . . . . .	352
§ 2. Интерполяционные правила . . . . .	358
§ 3. Правило наивысшей степени точности . . . . .	364
§ 4. Квадратурное правило с равными коэффициентами . . . . .	369
§ 5. Замечания об увеличении точности вычислений при помощи предварительной подготовки изображения . . . . .	372

## ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

### ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

<b>Глава 16. Введение</b> . . . . .	377
§ 1. Предварительные замечания . . . . .	377
§ 2. Погрешность вычислений . . . . .	382
§ 3. Сходимость и устойчивость вычислительного процесса . . . . .	388
<b>Глава 17. Интегрирование функции, заданной таблицей значений</b> . . . . .	398
§ 1. Содержание задачи и один из методов ее решения . . . . .	398
§ 2. Остаток . . . . .	402

<b>Глава 18. Вычисление неопределенного интеграла с малым числом значений интегрируемой функции . . . . .</b>	<b>403</b>
§ 1. Содержание задачи и некоторые общие теоремы о расчетной формуле . . . . .	403
§ 2. Расчетные формулы частного вида . . . . .	409
<b>Глава 19. Методы вычисления, использующие несколько предшествующих значений интеграла . . . . .</b>	<b>419</b>
§ 1. Содержание задачи . . . . .	419
§ 2. Условия, которые должны выполняться при достижении наивысшей степени точности . . . . .	422
§ 3. Существование и число интерполирований наивысшей степени точности . . . . .	425
§ 4. Остаток интерполирования и минимизация его оценки . . . . .	426
§ 5. Условия положительности коэффициентов $a_j$ . . . . .	428
§ 6. Связь с задачей решения дифференциального уравнения при помощи многочлена . . . . .	430
§ 7. Формулы частного вида . . . . .	432
 <b>ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ</b>	
<b>ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ</b>	
<b>Глава 20. О методах вычисления, основанных на приведении многократного интеграла к однократным . . . . .</b>	<b>435</b>
§ 1. Предварительные замечания о «проблеме большого числа узлов» . . . . .	435
§ 2. Влияние формы области на выбор правил интегрирования . . . . .	437
<b>Глава 21. Интерполяционные кубатурные формулы . . . . .</b>	<b>442</b>
§ 1. Алгебраическое интерполирование функций многих переменных . . . . .	442
§ 2. Интерполяционные кубатурные формулы . . . . .	447
§ 3. Примеры построения кубатурных формул . . . . .	453
<b>Глава 22. Кубатурные формулы с наименьшим числом узлов . . . . .</b>	<b>462</b>
§ 1. Кубатурная формула, точная для многочленов первой степени . . . . .	462
§ 2. Кубатурные формулы, точные для многочленов второй степени . . . . .	463
§ 3. Кубатурные формулы, точные для многочленов третьей степени . . . . .	467
§ 4. Кубатурная формула Радона . . . . .	471
<b>Глава 23. Кубатурные формулы для областей частного вида . . . . .</b>	<b>488</b>
§ 1. Гиперкуб . . . . .	488
§ 2. Гиперсфера . . . . .	489
§ 3. Гипершар . . . . .	492
§ 4. Симплекс . . . . .	495

## ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Второе издание книги значительно расширено сравнительно с первым, но общее ее направление осталось прежним: книга посвящена проблеме построения правил вычисления интегралов. При этом главное внимание уделено правилам, которые могут применяться в практике вычислений.

От изложения в книге других вопросов теории квадратур я принужден был отказаться, чтобы не увеличивать объема книги больше намеченной границы.

Сожалею о том, что не мог включить в книгу изложение работ о точных оценках как сверху, так и снизу порядка погрешности кубатуры. С ними связан вопрос о построении кубатурных процессов, для которых погрешность имеет такой же порядок малости, как и оценка порядка снизу. Он также не освещен в книге. Все эти вопросы рассматривались другими авторами в книгах по теории кубатур, имеющих более теоретический характер. Наконец, в книге отведено мало места вопросу о неустойчивости некоторых вычислительных процессов, таких, например, как процесс наивысшего порядка точности для обращения преобразования Лапласа, квадратурный процесс Котеса и др.

Главнейшие изменения, сделанные в книге, состоят в следующем:

1. Во вторую часть книги, где рассматривается задача о вычислении определенного интеграла, введены новые главы о численном преобразовании Фурье, об обращении преобразования Лапласа и об интегрировании периодических функций.

2. Добавлена четвертая часть книги, содержащая четыре главы, в которых излагаются основы теории вычисления кратных интегралов. Главы 21, 22 и 23, по просьбе автора, были написаны И. П. Мысовских, много занимавшимся проблемой численного интегрирования в многомерных пространствах. Содержание этих глав излагалось им в лекциях по теории численного интегрирования, которые он читал в течение нескольких последних лет в Ленинградском университете.

3. Кроме того, внесены некоторые менее значительные изменения в другие разделы книги.

В конце помещен список исправлений, которые следует внести в вышедшую в 1966 году в издательстве «Наука» книгу: В. И. Крылов и Л. Т. Шульгина, Справочная книга по численному интегрированию.

Август 1966 г. Минск, Академия Наук БССР

*В. И. Крылов*

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Автор стремился к тому, чтобы книга могла ввести читателя в круг главных идей и результатов современной теории приближенного интегрирования и, кроме того, была бы полезным пособием для тех, кто имеет дело с вычислениями.

В книге рассматриваются вопросы вычисления только однократных интегралов. Более трудная и значительно менее исследованная задача вычисления многократных интегралов в ней почти совсем не затрагивается. Лишь в одном месте книги говорится о двойном и тройном интегралах в связи с приведением их к простым интегралам.

Но даже для простого интеграла автор отказался от изложения многих интересных тем. Так, например, в стороне остались задачи интегрирования быстро колеблющихся функций, вычисления контурных интегралов от аналитических функций, применение метода случайных испытаний и др. Книга посвящена преимущественно методу механических квадратур, когда интеграл находится как линейная комбинация конечного числа значений интегрируемой функции.

По содержанию своему книга разделяется на три части. В первой из них излагаются понятия и теоремы, встречающиеся в теории квадратур, но выходящие, по крайней мере частично, за рамки программы высших учебных заведений.

Вторая часть посвящена задаче вычисления определенного интеграла. По существу дела, здесь рассмотрены три следующие основные темы: теория построения формул механических квадратур при предположении достаточной гладкости интегрируемой функции, задача увеличения точности квадратуры и проблема сходимости квадратурного процесса.

В третьей части книги исследуется вопрос о вычислении неопределенного интеграла. Здесь автор ограничился преимущественно изучением проблемы построения расчетных формул. Кроме того, указаны признаки устойчивости и сходимости вычислительного процесса.

Мои товарищи по работе М. К. Гавурин и И. П. Мысовских просмотрели большую часть рукописи, и я очень благодарен им за ряд замечаний и советов.

АН БССР. Октябрь 1957 г.

*Автор*

## ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В первой части книги содержится изложение следующих частных вопросов математики, необходимых для построения теории отдельных задач приближенного интегрирования функций: числа и многочлены Бернулли, ортогональные многочлены, интерполирование, линейные операторы и проблема сходимости последовательности таких операторов. Результаты, приведенные здесь, можно найти в специальной литературе, но мы считали полезным изложить их в настоящей книге и освободить читателя от многочисленных и часто нелегко проверяемых литературных ссылок.

Все перечисленные вопросы рассмотрены только в той мере, как это нужно для чтения последующих глав.

### ГЛАВА 1

#### ЧИСЛА И МНОГОЧЛЕНЫ БЕРНУЛЛИ

##### § 1. Числа Бернулли

Многочлены и числа Бернулли ниже (в § 6 главы 6 и в § 3 главы 7) потребуются для построения формулы Эйлера — Маклорена и других сходных с ней формул, служащих для увеличения точности приближенных квадратур.

Числа Бернулли могут быть определены при помощи следующей производящей функции. Пусть  $t$  — комплексная переменная. Рассмотрим функцию

$$g(t) = \frac{t}{e^t - 1}. \quad (1.1.1)$$

Точки  $t = 2k\pi i$ , где  $k$  — любое целое число, являются нулями знаменателя. Все они простые, ибо производная знаменателя равна  $e^t$  и отлична от нуля при всяких конечных  $t$ . Точка  $t = 0$  не является особой для  $g(t)$ , так как при  $t = 0$  обращается в нуль и числитель отношения. В круге  $|t| < 2\pi$  функция  $g(t)$  регулярна и может быть там разложена в степенной ряд по степеням  $t$ . Запишем разложение

в форме

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n, \quad |t| < 2\pi. \quad (1.1.2)$$

Числа  $B_n$ , определенные этим равенством, носят название *чисел Бернулли*. Если в (1.1.2) обе части умножить на  $e^t - 1 = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{t^v}{v!}$ ,

то получится следующее равенство

$$\left( \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n = t,$$

верное при всяких  $t$  из круга  $|t| < 2\pi$ . Оно говорит о том, что после перемножения степенных рядов, стоящих в левой части, сохраняется только первая степень  $t$  с коэффициентом, равным единице, коэффициенты же при степенях  $t$  выше первой все должны обратиться в нуль:  $B_0 = 1$  и при  $n = 2, 3 \dots$  должно быть

$$\frac{B_0}{n!} + \frac{B_1}{(n-1)! 1!} + \frac{B_2}{(n-2)! 2!} + \dots + \frac{B_{n-1}}{1! (n-1)!} = 0.$$

Последнее равенство позволяет последовательно вычислить все числа Бернулли. Ему можно придать другую форму, более удобную для записи. Умножив его на  $n!$  и прибавив к обеим частям  $B_n$ , получим

$$\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} B_k = B_n.$$

Аналогия левой части с известным выражением для степени двучлена позволяет последнее равенство записать условно в виде

$$(B + 1)^n = B_n, \quad (1.1.3)$$

если считать, что, после возведения двучлена  $B + 1$  в степень, показатели степени у  $B$  переходят в индексы чисел Бернулли.

Легко можно проверить, что все числа Бернулли с нечетными индексами, большими единицы, равны нулю:

$$B_{2k+1} = 0, \quad k > 0. \quad (1.1.4)$$

Для этого в (1.1.2) заменим  $t$  на  $-t$ :

$$\frac{-t}{e^{-t} - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n}{n!} t^n.$$

С другой стороны,

$$\frac{-t}{e^{-t}-1} = \frac{e^t t}{e^t - 1} = t + \frac{t}{e^t - 1} = t + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n,$$

и поэтому должно быть

$$t + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n B_n}{n!} t^n.$$

Сравнение коэффициентов при  $t^n$  для  $n > 1$  дает  $B_n = (-1)^n B_n$ . При  $n = 2k + 1$  ( $k > 0$ ) отсюда следует  $B_{2k+1} = -B_{2k+1}$ , что равносильно (1.1.4). Значения нескольких первых чисел Бернулли таковы:

$$\begin{aligned} B_0 &= 1, & B_1 &= -\frac{1}{2}, & B_2 &= \frac{1}{6}, & B_4 &= -\frac{1}{30}, & B_6 &= \frac{1}{42}, \\ B_8 &= -\frac{1}{30}, & B_{10} &= \frac{5}{66}, & B_{12} &= -\frac{691}{2730}, & B_{14} &= \frac{7}{6}, & B_{16} &= -\frac{3617}{510}, \\ B_{18} &= \frac{43\,867}{798}, & B_{20} &= -\frac{174\,611}{330}, & B_{22} &= \frac{854\,513}{138}, & B_{24} &= -\frac{236\,364\,091}{2730}, \\ B_{26} &= \frac{8\,553\,103}{6}, & B_{28} &= -\frac{23\,749\,461\,029}{870}, & B_{30} &= \frac{8\,615\,841\,276\,005}{14\,322}. \end{aligned}$$

Числа Бернулли четных номеров связаны с суммами четных отрицательных степеней натуральных чисел следующими замечательными равенствами:

$$B_{2k} = \frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{2^{2k-1} \pi^{2k}} (1 + 2^{-2k} + 3^{-2k} + 4^{-2k} + \dots). \quad (1.1.5)$$

Из них видно, что при неограниченном росте  $k$  бернуллиевы числа  $B_{2k}$  будут весьма быстро возрастать и при больших  $k$  будет иметь малую относительную погрешность следующее приближенное равенство

$$B_{2k} \approx 2 (-1)^{k-1} (2k)! (2\pi)^{-2k}. \quad (1.1.6)$$

Равенства (1.1.5) сразу следуют из полученных ниже разложений (1.3.1) многочленов Бернулли в тригонометрические ряды на отрезке  $[0, 1]$ .

## § 2. Многочлены Бернулли

Многочлены Бернулли можно определить различными способами. Для наших целей достаточно удобным является определение их при помощи производящей функции. Введем функцию

$$g(x, t) = e^{xt} \frac{t}{e^t - 1}. \quad (1.2.1.)$$

Она отличается от (1.1.1) множителем  $e^{xt}$ , не обращающимся в нуль, и имеет те же особые точки, что и  $g(t)$ . В частности, она регулярна в круге  $|t| < 2\pi$  и может быть в нем разложена в ряд по степеням  $t$ :

$$g(x, t) = e^{xt} \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n. \quad (1.2.2)$$

Несколькими строками ниже мы убедимся в том, что функция  $B_n(x)$  есть многочлен степени  $n$ . Он называется *многочленом Бернулли*.

Если в  $g(x, t)$  множитель  $e^{xt}$  заменить рядом  $\sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^v t^v}{v!}$  и  $\frac{t}{e^t - 1}$  разложением (1.1.2), то получим тождество

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^v t^v}{v!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n, \quad |t| < 2\pi.$$

Сравнение коэффициентов при  $t^n$  приводит к равенству

$$\frac{B_n(x)}{n!} = \frac{x^n B_0}{n!} + \frac{x^{n-1} B_1}{(n-1)! 1!} + \dots + \frac{B_n}{n!}.$$

После умножения на  $n!$  отсюда получается следующее выражение для  $B_n(x)$

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} B_{n-k} x^k, \quad (1.2.3)$$

показывающее, что  $B_n(x)$  действительно есть многочлен, старший член которого равен  $x^n$ . Выражение (1.2.3) может быть записано в весьма простой условной форме

$$B_n(x) = (x + B)^n, \quad (1.2.4)$$

если согласиться считать, что, после возведения двучлена  $x + B$  в степень, показатели степени у  $B$  должны перейти в индексы чисел Бернулли.

Нам потребуется знакомство с некоторыми свойствами многочленов Бернулли.

1. Начальные значения многочленов Бернулли при  $x=0$  равны соответствующим числам Бернулли:

$$B_n(0) = B_n, \quad (1.2.5)$$

что видно из (1.2.3).

2. Дифференцирование и интегрирование  $B_n(x)$ . Вычисляя производную по  $x$  от (1.2.2), найдем

$$t e^{xt} \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B'_n(x)}{n!} t^n.$$



Левая часть отличается от  $g$  только множителем  $t$  и поэтому должно быть

$$te^{xt} \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^{n+1}.$$

Ввиду единственности степенного разложения, из двух последних равенств вытекает  $\frac{B'_n(x)}{n!} = \frac{B_{n-1}(x)}{(n-1)!}$  или

$$B'_n(x) = nB_{n-1}(x). \quad (1.2.6)$$

Отсюда и из (1.2.5) сразу же следует правило интегрирования бернуллиевых многочленов

$$B_n(x) = B_n + n \int_0^x B_{n-1}(t) dt. \quad (1.2.7)$$

3. Теорема об умножении аргумента. Пусть  $m$  — любое целое положительное число; тогда

$$e^{mxt} \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(mx)}{n!} t^n.$$

Весьма простыми преобразованиями может быть получено другое разложение

$$\begin{aligned} e^{mxt} \frac{t}{e^t - 1} &= \frac{1}{m} e^{mxt} \frac{mt(1 + e^t + \dots + e^{(m-1)t})}{e^{mt} - 1} = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{m-1} \frac{e^{(x + \frac{s}{m})mt}}{e^{mt} - 1} = \frac{1}{m} \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x + \frac{s}{m}) m^n}{n!} t^n. \end{aligned}$$

Из двух построенных разложений и следует теорема об умножении аргумента:

$$B_n(mx) = m^{n-1} \sum_{s=0}^{m-1} B_n\left(x + \frac{s}{m}\right). \quad (1.2.8)$$

4. Теоремы о представлении многочленов  $B_n(x)$ . Чтобы изучить поведение  $B_n(x)$ , удобно вместо  $x$  ввести новую переменную  $z = x(1-x)$ . Покажем, что верны следующие утверждения о представлении бернуллиевых многочленов в переменной  $z$ .

Всякий многочлен  $B_n(x)$  четного номера  $n = 2k$  может быть разложен по степеням  $z$ :

$$(-1)^k [B_{2k}(x) - B_{2k}] = \sum_{v=0}^{k-2} F_{k,v} z^{k-v}, \quad (1.2.9)$$

причем  $F_{k,0} = 1$  и  $F_{k,v} > 0$  ( $v = 1, 2, \dots, k-2$ ). Всякий бернуллиев многочлен нечетного номера  $n = 2k-1$  может быть представлен в форме

$$(-1)^k B_{2k-1}(x) = (1-2x) \sum_{v=0}^{k-2} H_{k,v} z^{k-1-v}, \quad (1.2.10)$$

где все коэффициенты  $H_{k,v}$  ( $v = 0, 1, \dots, k-2$ ) положительны.

Проверим сначала утверждение о многочлене четной степени  $B_{2k}(x)$ . Для упрощения записи введем вспомогательную переменную  $\xi$ , положив  $x = 0,5 + \xi$ . Переменные  $\xi$  и  $z$  связаны между собой соотношением  $z = x(1-x) = 0,25 - \xi^2$ .

Чтобы убедиться в том, что  $B_{2k}(x)$  есть целый многочлен от переменной  $z$ , достаточно установить, что в разложении  $B_{2k}(x)$  по степеням  $\xi$  будут содержаться только четные степени  $\xi$ .

Производящая функция (1.2.1) относительно переменной  $\xi$  будет иметь следующее выражение

$$g = e^{(0,5+\xi)t} \frac{t}{e^t - 1} = e^{\xi t} \frac{e^{0,5t} \cdot t}{e^t - 1} = e^{\xi t} \frac{t}{e^{0,5t} - e^{-0,5t}} = e^{\xi t} \frac{0,5t}{\operatorname{sh} 0,5t}.$$

$\frac{B_{2k}(x)}{(2k)!}$  есть коэффициент при  $t^{2k}$  в разложении  $g$  по степеням  $t$ .

Множитель  $\frac{0,5t}{\operatorname{sh} 0,5t}$  — четная функция  $t$  и в ряде для него по степеням  $t$  будут содержаться только четные степени  $t$ . Чтобы получить,

после умножения его на  $e^{\xi t} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\xi^v t^v}{v!}$ , член с  $t^{2k}$ , мы должны из

ряда для  $e^{\xi t}$  брать члены только с четными степенями  $t$ . Но все они содержат также лишь четные степени  $\xi$ , и  $B_{2k}(x)$  будет содержать только четные степени  $\xi$ .

Так как при  $x = 0$  переменная  $z$  также обращается в нуль, то разность  $B_{2k}(x) - B_{2k}$  будет многочленом от  $z$  без свободного члена и должно иметь место равенство

$$(-1)^k [B_{2k}(x) - B_{2k}] = \sum_{v=0}^{k-1} F_{k,v} z^{k-v}.$$

Нам осталось только проверить утверждения об  $F_{k,v}$ . Коэффициент в  $B_{2k}(x)$  при старшей степени  $x^{2k}$  равен единице и поэтому должно

быть  $F_{k,0} = 1$ . Кроме того, коэффициент при  $x$  в  $B_{2k}(x)$  есть  $2k B_{2k-1} = 0$ , и так как первая степень  $x$  в правой части может содержаться только в члене, отвечающем  $v = k - 1$ , то  $F_{k,k-1} = 0$ . Для нахождения остальных  $F_{k,v}$  может быть построено рекуррентное соотношение. Вычислим от обеих частей (1.2.9) вторую производную по  $x$ . Так как  $B_{2k}''(x) = 2k(2k-1)B_{2k-2}(x)$  и так как операторы вычисления производных по  $x$  и по  $z$  связаны между собой следующими легко проверяемыми равенствами

$$\frac{d}{dx} = \frac{dz}{dx} \frac{d}{dz} = (1-2x) \frac{d}{dz},$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = (1-2x)^2 \frac{d^2}{dz^2} - 2 \frac{d}{dz} = (1-4z) \frac{d^2}{dz^2} - 2 \frac{d}{dz},$$

то после вычислений получим:

$$\begin{aligned} (-1)^k 2k(2k-1) B_{2k-2}(x) &= \sum_{v=1}^{k-1} F_{k,v-1} (k+1-v)(k-v) z^{k-1-v} - \\ &- \sum_{v=0}^{k-2} F_{k,v} (2k-2v)(2k-2v-1) z^{k-1-v}. \end{aligned}$$

Сравнение его с разложением вида (1.2.9) для  $B_{2k-2}(x)$ :

$$(-1)^{k-1} [B_{2k-2}(x) - B_{2k-2}] = \sum_{v=0}^{k-2} F_{k-1,v} z^{k-1-v},$$

позволяет сказать, что при  $v = 0, 1, \dots, k-2$  должно выполняться равенство:

$$\begin{aligned} (2k-2v)(2k-2v-1) F_{k,v} &= \\ &= 2k(2k-1) F_{k-1,v} + (k+1-v)(k-v) F_{k,v-1}. \end{aligned}$$

Отсюда, зная, что  $F_{k,0} = 1$  и  $F_{k,k-1} = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), мы сможем найти последовательно  $F_{k,v}$  ( $k = 3, 4, \dots$ ;  $v = 1, 2, \dots, k-2$ ) и все они окажутся положительными.

Для доказательства верности утверждения о представлении  $B_{2k-1}(x)$  достаточно вычислить производную по  $x$  от обеих частей (1.2.9):

$$(-1)^k 2k B_{2k-1}(x) = \sum_{v=0}^{k-2} F_{k,v} (1-2x)(k-v) z^{k-1-v}.$$

Отсюда видно, что равенство (1.2.10) является верным и

$$H_{k,v} = \frac{(k-v) F_{k,v}}{2k} > 0.$$

5. Симметрия распределения значений  $B_n(x)$ . Рассмотрим точку  $x=0,5$  на оси  $x$ . Точки  $x$  и  $1-x$  расположены симметрично относительно нее. Переменная  $z=x(1-x)$  не изменит своего значения при замене  $x$  на  $1-x$ . Отсюда и из (1.2.9) вытекает, что  $B_{2k}(x)$  в точках  $x$  и  $1-x$  принимает одинаковые значения

$$B_{2k}(1-x) = B_{2k}(x). \quad (1.2.11)$$

График многочлена  $B_{2k}(x)$  будет линией, симметричной относительно прямой  $x=0,5$ .

В (1.2.10) множитель  $\sum_{v=0}^{k-2} H_{k,v} z^{k-1-v}$  принимает одинаковые значения в точках  $x$  и  $1-x$ . Множитель  $(1-2x)$  при замене  $x$  на  $1-x$  сохраняет абсолютную величину, но изменяет знак. Поэтому

$$B_{2k-1}(1-x) = -B_{2k-1}(x). \quad (1.2.12)$$

График многочлена  $B_{2k-1}(x)$  имеет центр симметрии в точке  $x=0,5$ .

При  $x=0$  из (1.2.11) получается  $B_{2k}(1) = B_{2k}$  и из (1.2.12) при  $k \geq 2$  следует  $B_{2k-1}(1) = -B_{2k-1}$ . Каждый бернуллиев многочлен, кроме  $B_1(x)$ , на концах отрезка  $[0, 1]$  принимает одинаковые значения

$$B_n(1) = B_n(0) = B_n. \quad (1.2.13)$$

6. Характер изменения многочленов Бернулли на отрезке  $[0, 1]$ . Нам потребуются значения  $B_n(0,5)$ , которые легко могут быть вычислены, например, при помощи теоремы об умножении аргумента. Если в (1.2.8) положить  $m=2$  и  $x=0,5$ , то получим

$$B_n(1) = 2^{n-1} [B_n(0,5) + B_n(1)].$$

Но так как  $B_n(1) = B_n$  ( $n > 1$ ), то при всяких  $n$

$$B_n(0,5) = -(1 - 2^{-n+1}) B_n. \quad (1.2.14)$$

Для дальнейшего потребуется рассмотреть многочлены

$$y_n(x) = B_n(x) - B_n,$$

несущественно отличающиеся от  $B_n(x)$  и более удобные для записи. Возьмем сначала многочлен четного номера  $n=2k$ . Ввиду (1.2.9), имеем

$$(-1)^k y_{2k}(x) = \sum_{v=0}^{k-2} F_{k,v} z^{k-v}. \quad (1.2.15)$$

Точки  $x = 0$  и  $x = 1$  являются нулями  $y_k(x)$ :

$$y_{2k}(0) = B_{2k}(0) - B_{2k} = B_{2k} - B_{2k} = 0,$$

$$y_{2k}(1) = B_{2k}(1) - B_{2k} = B_{2k} - B_{2k} = 0.$$

Легко проверить, что при  $k \geq 2$ , оба нуля имеют вторую кратность, так как, например, для  $x = 0$

$$y'_{2k}(0) = 2kB_{2k-1}(0) = 0,$$

$$y''_{2k}(0) = 2k(2k-1)B_{2k-2}(0) = 2k(2k-1)B_{2k-2} \neq 0.$$

Ввиду (1.2.11), аналогичное имеет место для  $x = 1$ . При  $0 < x < 1$  переменная  $z$  будет лежать в границах  $0 < z \leq 0,25$  и, так как  $F_{k,v} > 0$ , то  $(-1)^k y_{2k}(x) > 0$ ,  $0 < x < 1$ . Внутри отрезка  $0 < x < 1$  многочлен  $y_{2k}(x)$  не обращается в нуль и имеет знак такой же, как  $(-1)^k$ . Когда  $x$  изменяется от нуля до 0,5, функция  $z = x(1-x)$  будет возрастать от нуля до 0,25 и при изменении  $x$  от 0,5 до 1, функция  $z$  будет убывать от 0,25 до нуля.

Как видно из (1.2.15) при изменении  $x$  от 0 до 0,5 многочлен  $(-1)^k y_{2k}(x)$  будет возрастать от нуля до  $(-1)^k y_{2k}(0,5) = |B_{2k}(0,5) - B_{2k}| = (2 - 2^{-2k+1})|B_{2k}|$ . Когда же  $x$  изменяется от 0,5 до 1,  $(-1)^k y_{2k}(x)$  будет убывать от указанного только что значения до нуля. Каждое значение  $\alpha$  [ $0 < \alpha < (2 - 2^{-2k+1})|B_{2k}|$ ] многочлен  $y_{2k}(x)$  на отрезке  $[0, 1]$  будет принимать два раза, в точках, расположенных симметрично относительно  $x = 0,5$ .

Рассмотрим теперь многочлен  $y_n(x)$  нечетного номера  $n = 2k - 1$ . Будем считать  $k \geq 2$ , тогда

$$\left. \begin{aligned} & y_{2k-1}(x) = B_{2k-1}(x) \\ & \text{и} \\ & (-1)^k y_{2k-1}(x) = (1-2x) \sum_{v=0}^{k-2} H_{k,v} z^{k-1-v}. \end{aligned} \right\} \quad (1.2.16)$$

Точки  $x = 0$  и  $x = 1$  будут нулями  $y_{2k-1}(x)$ . Можно проверить, что обе эти точки есть однократные нули. Действительно,

$$y'_{2k-1}(0) = (2k-1)B_{2k-2}(0) \neq 0 \text{ и } y'_{2k-1}(1) = (2k-1)B_{2k-2}(1) \neq 0.$$

Кроме того, из (1.2.16) следует, ввиду  $H_{k,v} > 0$ , что  $x = 0,5$  есть простой нуль  $y_{2k-1}(x)$  и никаких других нулей при  $0 < x < 1$  этот многочлен не имеет. Знак  $y_{2k-1}(x)$  определяется неравенствами

$$(-1)^k y_{2k-1}(x) > 0 \quad \text{при } 0 < x < 0,5,$$

$$(-1)^k y_{2k-1}(x) < 0 \quad \text{при } 0,5 < x < 1.$$

Ниже приведена таблица нескольких первых многочленов Бернулли

$$B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \quad B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30},$$

$$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x,$$

$$B_6(x) = x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42},$$

$$B_7(x) = x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{1}{6}x,$$

$$B_8(x) = x^8 - 4x^7 + \frac{14}{3}x^6 - \frac{7}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{30},$$

$$B_9(x) = x^9 - \frac{9}{2}x^8 + 6x^7 - \frac{21}{5}x^5 + 2x^3 - \frac{3}{10}x,$$

$$B_{10}(x) = x^{10} - 5x^9 + \frac{15}{2}x^8 - 7x^6 + 5x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{66}.$$

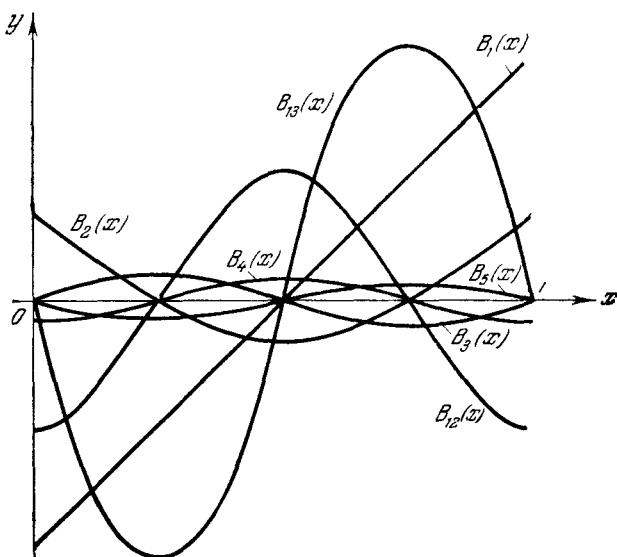


Рис. 1.

Рис. 1 позволяет составить представление о поведении на отрезке  $[0, 1]$  многочленов  $B_n(x)$ .

### § 3. Периодические функции, связанные с многочленами Бернулли

При исследовании некоторых вопросов, наряду с многочленами Бернулли, вводят 1-периодические функции  $B_n^*(x)$ , определенные равенствами

$$B_n^*(x) = B_n(x), \quad 0 \leq x < 1, \quad B_n^*(x+1) = B_n^*(x);$$

$B_0^*(x)$  есть постоянная, равная 1,  $B_1^*(x)$  — разрывная функция и имеет скачок  $-1$  в целых точках,  $B_n^*(x)$  при  $n > 1$  — непрерывные функции.

Построим тригонометрические ряды Фурье для  $B_n^*(x)$ . С этой целью построим ряд Фурье для производящей функции

$$g(x, t) = e^{xt} \frac{t}{e^t - 1}.$$

Воспользуемся записью ряда с помощью показательной функции:

$$g(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{i2\pi m x};$$

$$C_m = \int_0^1 g e^{-i2\pi m x} dx = \frac{t}{e^t - 1} \int_0^1 e^{xt} e^{-i2\pi m x} dx = \frac{t}{t - i2\pi m}.$$

Выделяя слагаемое  $C_0 = 1$  и объединяя члены ряда, отвечающие значениям индекса  $m$  и  $-m$ , получим

$$g(x, t) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{t}{t - i2\pi m} e^{i2\pi m x} + \frac{t}{t + i2\pi m} e^{-i2\pi m x} \right].$$

Можно показать, что для любых значений  $x$  на отрезке  $0 \leq x \leq 1$  ряд, стоящий в правой части равенства, будет сходиться при всяких  $t$ , отличных от  $i2k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \dots$ ). При этом, если взять любую ограниченную часть  $\sigma$  плоскости  $t$  и исключить из ряда несколько первых членов, имеющих полюсы в этой части плоскости, то оставшийся после исключения ряд будет сходиться равномерно относительно  $t$  в  $\sigma$ .

Опираясь на это, легко можно оправдать возможность изменения порядка суммирования, которое, по ходу вычислений, сделано несколькими строками ниже при построении степенного ряда для  $g$ .

Если считать  $|t| < 2\pi$  и разложить правую часть по степеням  $t$ , то коэффициентом при  $t^n$  будет тригонометрический ряд для  $\frac{B_n(x)}{n!}$ .

Он и будет давать представление  $\frac{B_n^*(x)}{n!}$  при всех  $x$

$$\frac{t}{t-i2\pi m} = -\frac{t}{i2\pi m} \frac{1}{1-\frac{t}{i2\pi m}} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{t}{i2\pi m}\right)^n,$$

$$\frac{t}{t+i2\pi m} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{t}{i2\pi m}\right)^n,$$

$$\begin{aligned} g(x, t) &= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n-1}}{(i2\pi m)^n} t^n e^{-i2\pi m x} - \frac{1}{(i2\pi m)^n} t^n e^{i2\pi m x} \right] = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(i2\pi)^n} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n-1}}{m^n} e^{-i2\pi m x} - \frac{1}{m^n} e^{i2\pi m x} \right], \end{aligned}$$

$$n > 1, \quad B_n^*(x) = \frac{n!}{(2\pi i)^n} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n-1}}{m^n} e^{-i2\pi m x} - \frac{1}{m^n} e^{i2\pi m x} \right].$$

Для четных и нечетных индексов вычисления дают следующие результаты

$$B_{2k}^*(x) = \frac{(-1)^{k-1} (2k)!}{2^{2k-1} \pi^{2k}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi m x}{m^{2k}}, \quad (1.3.1)$$

$$B_{2k+1}^*(x) = \frac{(-1)^{k-1} (2k+1)!}{2^{2k} \pi^{2k+1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi m x}{m^{2k+1}}. \quad (1.3.2)$$

При  $x=0$  отсюда получаются указанные выше ряды (1.1.5) для бернуллиевых чисел.

#### § 4. Разложение произвольной функции по многочленам Бернулли

**Теорема 1.** Если  $f(x)$   $v$ -кратно непрерывно дифференцируема на  $[0, 1]$ , то при любом  $x \in [0, 1]$  имеет место равенство

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^1 f(t) dt + \sum_{k=1}^{v-1} \frac{B_k(x)}{k!} [f^{(k-1)}(1) - f^{(k-1)}(0)] - \\ &\quad - \frac{1}{v!} \int_0^1 f^{(v)}(t) [\dot{B}_v(x-t) - B_v^*(x)] dt. \quad (1.4.1) \end{aligned}$$



Доказательство. Рассмотрим интеграл

$$\rho_v(x) = \rho_v = \frac{1}{v!} \int_0^1 f^{(v)}(t) B_v^*(x-t) dt.$$

Считая  $v > 1$ , выполним интегрирование по частям. Так как

$$\frac{d}{dt} B_v^*(x-t) = -v B_{v-1}^*(x-t), \quad B_v^*(x-1) = B_v^*(x) = B_v(x),$$

то

$$\begin{aligned} \rho_v &= \frac{B_v^*(x)}{v!} [f^{(v-1)}(1) - f^{(v-1)}(0)] + \\ &+ \frac{1}{(v-1)!} \int_0^1 f^{(v-1)}(t) B_{v-1}^*(x-t) dt = \\ &= \frac{B_v(x)}{v!} [f^{(v-1)}(1) - f^{(v-1)}(0)] + \rho_{v-1}. \end{aligned}$$

Выполним это преобразование  $v-1$  раз:

$$\rho_v = \sum_{k=2}^v \frac{B_k(x)}{k!} [f^{(k-1)}(1) - f^{(k-1)}(0)] + \rho_1.$$

Функция  $B_1^*(x)$  имеет в целых точках скачок  $-1$ , в остальных же точках имеет производную, равную  $+1$

$$B_1^*(+0) - B_1^*(-0) = -1, \quad \frac{d}{dt} B_1^*(x-t) = -1.$$

Для вычисления  $\rho_1$  положим сначала  $0 < x < 1$

$$\begin{aligned} \rho_1(x) &= \int_0^x f'(t) B_1^*(x-t) dt + \int_x^1 f'(t) B_1^*(x-t) dt = \\ &= B_1^*(+0) f(x) - B_1^*(x) f(0) + \int_0^x f(t) dt + \\ &+ B_1^*(x-1) f(1) - f(x) B_1^*(-0) + \int_x^1 f(t) dt = \\ &= [B_1^*(+0) - B_1^*(-0)] f(x) + B_1(x) [f(1) - f(0)] + \int_0^1 f(t) dt. \end{aligned}$$

Для  $\rho_v$  ( $v = 1, 2, \dots$ ) окончательно получаем

$$\begin{aligned}\rho_v &= \frac{1}{v!} \int_0^1 f^{(v)}(t) B_v^*(x-t) dt = \\ &= \sum_{k=1}^v \frac{B_k(x)}{k!} [f^{(k-1)}(1) - f^{(k-1)}(0)] - f(x) + \int_0^1 f(t) dt.\end{aligned}$$

Этот результат только формой записи отличается от (1.4.1). Доказательство было проведено для открытого отрезка  $0 < x < 1$ , но, по непрерывности, равенство (1.4.1) верно и для замкнутого отрезка  $0 \leq x \leq 1$ .

Если  $f(x)$  задана на произвольном конечном отрезке  $[a, b]$  и  $v$ -кратно непрерывно дифференцируема там, то ее разложение на  $[a, b]$  по многочленам Бернулли получается из (1.4.1) при помощи линейного преобразования аргумента ( $h = b - a$ ):

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{h} \int_a^b f(t) dt + \sum_{k=1}^{v-1} \frac{h^{k-1} B_k\left(\frac{x-a}{h}\right)}{k!} [f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)] - \\ &- \frac{h^{v-1}}{v!} \int_a^b f^{(v)}(t) \left[ B_v^*\left(\frac{x-t}{h}\right) - B_v^*\left(\frac{x-a}{h}\right) \right] dt.\end{aligned}\quad (1.4.2)$$

## Л и т е р а т у р а

Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, гл. IV, изд. 3, М., «Наука», 1967.

Стефенсен И. Ф., Теория интерполяции, гл. XII, М.—Л., Гостехиздат, 1935.

Харди Г., Расходящиеся ряды, гл. XIII, М., ИЛ, 1951.

## ГЛАВА 2

### ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

#### § 1. Некоторые общие теоремы об ортогональных многочленах

В книге будет уделено много места изучению интегралов вида

$$\int_a^b p(x) f(x) dx, \quad (2.1.1)$$

где  $p(x)$  — определенная функция и  $f$  — произвольная функция некоторого широкого класса. Теория приближенного вычисления таких интегралов тесно связана с теорией ортогональных многочленов.

Функция  $p(x)$  называется *дифференциальной весовой функцией* или, коротко, *весом*. Мы остановимся почти исключительно на случае неотрицательного веса, отступая от этого в редких случаях, которые каждый раз будут оговариваться.

Теория ортогональных многочленов для неотрицательного веса развита с большою степенью совершенства. Мы почерпнем из нее лишь небольшой запас сведений, необходимый для построения квадратурных формул некоторого частного вида.

Пусть  $[a, b]$  — любой конечный или бесконечный отрезок. Для наших ближайших целей достаточно считать, что вес  $p(x)$  подчиняется следующим двум ограничениям\*):

1)  $p(x)$  — неотрицательная, измеримая на  $[a, b]$  и неэквивалентная нулю функция,

2) произведение  $p(x)x^m$  при любом целом неотрицательном значении  $m$  есть суммируемая функция на  $[a, b]$ .

---

\*) Читатели, не знакомые с интегралом Лебега, могут считать вес неотрицательной функцией, могущей обращаться в нуль лишь в конечном числе точек и такой, что интеграл  $\int_a^b p(x)|x|^m dx$  имеет конечное значение при  $m = 0, 1, 2, \dots$





**Теорема 1.** Если многочлен  $P_n(x)$  степени  $n$  ортогонален на отрезке  $[a, b]$  ко всевозможным многочленам степени меньшей  $n$ , то все его корни — действительные, простые и лежат внутри  $[a, b]$ .

**Доказательство.** Рассмотрим те корни  $P_n(x)$ , которые имеют нечетную кратность и лежат внутри  $[a, b]$ . Пусть это будут  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ . Достаточно показать, что число  $m$  таких корней не меньше  $n$ .

Допустим противоположное:  $m < n$  и покажем, что это не совместимо с предположением об ортогональности. Составим многочлен степени  $m$ :

$$\rho(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_m).$$

Он имеет те же точки перемены знака внутри  $[a, b]$ , что и  $P_n(x)$ . Произведение  $P_n(x)\rho(x)$  не изменяет знак на  $[a, b]$  и поэтому интеграл

$\int_a^b \rho(x) P_n(x) \rho(x) dx$  отличен от нуля. Так как степень  $\rho(x)$  меньше  $n$ , это противоречит условию ортогональности  $P_n(x)$  ко всякому многочлену меньшей степени.

Систему многочленов

$$P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots \quad (2.1.8)$$

называют *ортogonalной* и *нормированной*, коротко, *ортонормальной*, если выполняются требования:

1)  $P_n(x)$  есть многочлен степени  $n$ ,

$$2) \int_a^b \rho(x) P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ 1 & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Условимся в дальнейшем многочлены ортонормальной системы обозначать так

$$P_n(x) = A_n x^n + B_n x^{n-1} + \dots \quad (2.1.9)$$

Покажем сейчас, что между тремя многочленами трех смежных номеров ортонормальной системы существует рекуррентное соотношение:

$$x P_n(x) = \frac{A_n}{A_{n+1}} P_{n+1}(x) + \left( \frac{B_n}{A_n} - \frac{B_{n+1}}{A_{n+1}} \right) P_n(x) + \frac{A_{n-1}}{A_n} P_{n-1}(x). \quad (2.1.10)$$

Действительно, произведение  $x P_n(x)$  есть многочлен степени  $n+1$  и поэтому может быть представлено в виде

$$x \cdot P_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{n,k} P_k(x).$$

Коэффициенты  $c_{n,k}$  будут коэффициентами Фурье:

$$c_{n,k} = \int_a^b p(x) x \cdot P_n(x) P_k(x) dx.$$

Если  $k < n-1$ , то  $xP_k(x)$  будет многочленом степени  $k+1 < n$  и  $c_{n,k} = 0$ , так как  $P_n(x)$  ортогонален ко всякому многочлену степени меньшей  $n$

$$xP_n(x) = c_{n,n+1}P_{n+1}(x) + c_{n,n}P_n(x) + c_{n,n-1}P_{n-1}(x).$$

Подставим сюда вместо многочленов  $P_s(x)$  ( $s = n-1, n, n+1$ ) их разложения (2.1.9). Сравнение коэффициентов при старших степенях сразу же дает  $c_{n,n+1} = \frac{A_n}{A_{n+1}}$ . Кроме того, так как  $c_{n,k} = c_{k,n}$  при любых  $n$  и  $k$ , то  $c_{n,n-1} = \frac{A_{n-1}}{A_n}$ .

Значение  $c_{n,n}$  мы получим, если сравним коэффициенты при  $x^n$  в предыдущем соотношении:

$$c_{n,n} = \frac{B_n}{A_n} - \frac{B_{n+1}}{A_{n+1}}.$$

Формулу (2.1.10) мы доказали для  $n = 1, 2, \dots$ , но она остается верной и для  $n = 0$ , если считать, что  $A_{-1} = 0$  и  $P_{-1}(x) \equiv 0$ . Для вычисления коэффициентов квадратурных формул полезным является тождество Кристоффеля — Дарбу, которое мы сейчас получим. Умножим рекуррентное равенство (2.1.10) на  $P_n(t)$

$$\begin{aligned} xP_n(x)P_n(t) &= \frac{A_n}{A_{n+1}}P_{n+1}(x)P_n(t) + \left(\frac{B_n}{A_n} - \frac{B_{n+1}}{A_{n+1}}\right)P_n(x)P_n(t) + \\ &+ \frac{A_{n-1}}{A_n}P_{n-1}(x)P_n(t). \end{aligned}$$

Возьмем сходное равенство, поменяв местами  $x$  и  $t$  и вычтем его почленно отсюда. Средние члены правых частей при этом сократятся

$$\begin{aligned} (x-t)P_n(x)P_n(t) &= \frac{A_n}{A_{n+1}}[P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)] - \\ &- \frac{A_{n-1}}{A_n}[P_n(x)P_{n-1}(t) - P_{n-1}(x)P_n(t)]. \end{aligned}$$

Запишем такие равенства, заменяя  $n$  последовательно на  $n-1, n-2, \dots, 0$ . Складывая их все почленно, мы получим тождество Кристоффеля — Дарбу:

$$(x-t) \sum_{k=0}^n P_k(x)P_k(t) = \frac{A_n}{A_{n+1}}[P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)]. \quad (2.1.11)$$

## § 2. Многочлены Якоби и Лежандра

Многочлены Якоби образуют ортогональную систему на отрезке  $[-1, +1]$  по весу  $p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ . Они зависят от двух параметров, которые мы обозначили  $\alpha, \beta$  и при любых значениях этих параметров могут быть определены равенством:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}], \quad (2.2.1)$$

которое часто называют *формулой Родрига*. Обычно берут те ветви многозначных функций, входящих в эту формулу, для которых  $\arg(1-x) = \arg(1+x) = 0$  при  $-1 < x < +1$ . В том, что (2.2.1) есть многочлен, степень которого не больше  $n$ :  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = a_n x^n + \dots$ , можно убедиться, если  $\frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}]$  вычислить по правилу Лейбница и внести в (2.2.1)

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} (\alpha+n) \dots (\alpha+n-k+1) (-1)^k (1-x)^{n-k} (\beta+n) \dots (\beta+k+1) (1+x)^k.$$

Старший член  $a_n x^n$  можно найти, если в множителях  $(1-x)^{n-k}$  и  $(1+x)^k$  взять старшие члены, соответственно  $(-1)^{n-k} x^{n-k}$  и  $x^k$

$$a_n x^n = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} (\alpha+n) \dots (\alpha+n-k+1) x^{n-k} (\beta+n) \dots (\beta+k+1) x^k.$$

Такой же результат получится, если применить правило Лейбница к вычислению производной порядка  $n$ , входящей в функцию

$$\frac{1}{2^n n!} x^{-\alpha} x^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} (x^{\alpha+n} x^{\beta+n}) = \frac{1}{2^n n!} x^{-\alpha-\beta} \frac{d^n}{dx^n} (x^{\alpha+\beta+2n}).$$

Поэтому

$$a_n = \frac{1}{2^n n!} (\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-1) \dots (\alpha+\beta+n+1) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{2^n n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}. \quad (2.2.2)$$

Будем считать параметры  $\alpha, \beta$  действительными и  $\alpha, \beta > -1$  \*) и покажем, что многочлены Якоби  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) образуют

\*) При построении квадратурных формул для вычисления интегралов от аналитических функций комплексного переменного, достаточно считать  $\operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta > -1$ .



ортogonalную систему на отрезке  $[-1, +1]$  по весу  $p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$

$$I_{n,m} = \int_{-1}^{+1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x) dx = 0 \quad (m \neq n). \quad (2.2.3)$$

Обозначим, для сокращения записи,  $y_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}$ ,  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} y_n^{(n)}$ . Считая, для определенности,  $n \geq m$ , заменим в  $I_{n,m}$  многочлен  $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$  его выражением через  $y_n$

$$I_{n,m} = \int_{-1}^{+1} y_n^{(n)} P_m^{(\alpha,\beta)}(x) dx.$$

Интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} I_{n,m} &= y_n^{(n-1)} P_m^{(\alpha,\beta)}(x) \Big|_{-1}^{+1} - \int_{-1}^{+1} y_n^{(n-1)} [P_m^{(\alpha,\beta)}(x)]' dx = \\ &= - \int_{-1}^{+1} y_n^{(n-1)} [P_m^{(\alpha,\beta)}(x)]' dx. \end{aligned}$$

Внеинтегральный член исчезает, ввиду  $\alpha, \beta > -1$ .  $n$ -кратное интегрирование по частям приведет к равенству

$$I_{n,m} = (-1)^n \int_{-1}^{+1} y_n [P_m^{(\alpha,\beta)}(x)]^{(n)} dx. \quad (2.2.4)$$

При  $m < n$  имеем  $[P_m^{(\alpha,\beta)}(x)]^{(n)} \equiv 0$  и, следовательно,  $I_{n,m} = 0$ , что доказывает ортогональность двух многочленов Якоби разных степеней.

При  $m = n$  равенство (2.2.3) дает

$$\begin{aligned} \delta_n &= I_{n,n} = \int_{-1}^{+1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta [P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2 dx = \\ &= (-1)^n \int_{-1}^{+1} y_n n! a_n dx = \frac{n!}{2^n n!} a_n \int_{-1}^{+1} (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} dx. \end{aligned}$$

Последний интеграл приводится к эйлерову интегралу первого рода.

Положим  $x = 2t - 1$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} (1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} dx &= 2^{\alpha+\beta+2n+1} \int_0^1 t^{\beta+n} (1-t)^{\alpha+n} dt = \\ &= 2^{\alpha+\beta+2n+1} B(\alpha+n+1, \beta+n+1). \end{aligned}$$

Так как  $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ , то

$$\delta_n = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1) n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}. \quad (2.2.5)$$

Если  $n=0$  и  $\alpha+\beta+1=0$ , то

$$\delta_0 = \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1).$$

Из (2.2.4) и (2.2.5) видно, что ортонормальную систему на  $[-1, +1]$  по весу  $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$  образуют многочлены

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{\sqrt{\delta_n}}. \quad (2.2.6)$$

Старшие коэффициенты их равны

$$A_n = \frac{a_n}{\sqrt{\delta_n}}. \quad (2.2.7)$$

Многочлены Лежандра являются якобиевыми многочленами частного вида. Они отвечают значениям параметров  $\alpha=0$ ,  $\beta=0$ . Формула (2.2.1) для них имеет вид

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}. \quad (2.2.8)$$

При помощи ее легко может быть найдено разложение  $P_n(x)$  по степеням  $x$

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n (n-1)! (n-2)!} x^{n-2} + \dots$$

Вес  $p(x)$  для них равен единице и многочлены Лежандра ортогональны на  $[-1, +1]$  с постоянным весом. Равенства (2.2.4) и (2.2.5) имеют вид:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1} & \text{при } m = n. \end{cases} \quad (2.2.9)$$

Ортонормальную систему на  $[-1, +1]$  с постоянным весом образуют многочлены

$$p_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x). \quad (2.2.10)$$

Старшие коэффициенты их равны

$$A_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}. \quad (2.2.11)$$

### § 3. Многочлены Чебышёва

Ниже будет показано, что многочлены первого рода Чебышёва ортогональны на отрезке  $[-1, +1]$  по весу  $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . Они могут быть определены следующей формулой

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (2.3.1)$$

Убедимся, прежде всего, в том, что функция (2.3.1) есть многочлен степени  $n$ , старший коэффициент которого есть  $2^{n-1}$ :

$$T_n(x) = 2^{n-1} x^n + \dots \quad (n > 0). \quad (2.3.2)$$

Будем исходить из элементарного тригонометрического равенства  $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2 \cos \theta \cos n\theta$ . Положив в нем  $\theta = \arccos x$ , найдем следующее рекуррентное соотношение для функций  $T_n(x)$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Для  $T_0(x) = 1$  и  $T_1(x) = x$  равенство (2.3.2), очевидно, верно. Рекуррентное же соотношение позволяет доказать его индуктивно для любых  $n$ .

Покажем, что для многочленов  $T_n(x)$  верны равенства ( $n, m > 0$ ):

$$I_{n,m} = \int_{-1}^{+1} \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } m = n. \end{cases} \quad (2.3.3)$$

Из них, в частности, видно, что  $T_n(x)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) образуют на отрезке  $[-1, +1]$  ортогональную систему многочленов по весу  $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . Заменим в  $I_{n,m}$  переменную интегрирования, положив  $x = \cos \theta$ ,  $\theta = \arccos x$ . Можно считать, что при изменении  $x$  от  $-1$  до  $+1$ , угол  $\theta$  будет изменяться от  $\pi$  до  $0$ . Так как

$T_n(x) = \cos n\theta$ ,  $T_m(x) = \cos m\theta$  и  $dx = -\sin \theta \cdot d\theta$ , то

$$I_{m,n} = \int_0^\pi \cos n\theta \cos m\theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } m = n \end{cases} \quad (n, m > 0).$$

Вес  $p(x) = (1-x^2)^{-0,5}$  ( $-1 \leq x \leq +1$ ) есть частный случай якобиева веса  $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$  при  $\alpha = \beta = -0,5$ . При заданном весе многочлены ортогональной системы определяются с точностью до постоянных множителей. Поэтому якобиевы многочлены  $P_n^{(-0,5; -0,5)}(x)$  могут отличаться от  $T_n(x)$  только численными множителями

$$P_n^{(-0,5; -0,5)}(x) = c_n T_n(x). \quad (2.3.4)$$

Для нахождения  $c_n$  достаточно сравнить старшие коэффициенты

$$\frac{\Gamma(2n)}{2^n n! \Gamma(n)} = c_n 2^{n-1}, \quad c_n = \frac{\Gamma(2n)}{2^{2n-1} \Gamma(n) \Gamma(n+1)}.$$

Многочлены  $T_n(x)$  были введены П. Л. Чебышёвым в связи с решением следующей задачи.

*Среди всех многочленов степени  $n$ , имеющих старший коэффициент, равный единице,  $P(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots$ , найти тот, который на отрезке  $[-1, +1]$  наименее отклоняется от нуля по абсолютной величине, т. е. такой, для которого  $\max_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)|$  имеет наименьшее значение.*

Покажем, что таким многочленом будет

$$\dot{T}_n(x) = 2^{-n+1} T_n(x) = 2^{-n+1} \cos(n \arccos x).$$

В самом деле,  $\max_{[-1, +1]} |\dot{T}_n(x)| = 2^{-n+1}$  и имеют место равенства

$$\dot{T}_n\left(\cos \frac{m\pi}{n}\right) = 2^{-n+1} (-1)^m \quad (m = 0, 1, \dots, n).$$

Если бы существовал многочлен  $P(x)$ , удовлетворяющий условию  $|P(x)| < 2^{-n+1}$  ( $-1 \leq x \leq +1$ ), то разность  $R(x) = \dot{T}_n(x) - P(x)$  была бы многочленом степени меньшей  $n$ , и такой, что  $(-1)^m R\left(\cos \frac{m\pi}{n}\right) > 0$  ( $m = 0, 1, \dots, n$ ). На  $[-1, +1]$  многочлен  $R(x)$  должен был бы иметь по меньшей мере  $n$  корней, что невозможно, так как его степень меньше  $n$ .

Докажем теперь единственность многочлена, имеющего наименьшее отклонение. Пусть  $P(x)$  — любой многочлен указанного вида, для которого  $\max_{[-1, +1]} |P(x)| = \max_{[-1, +1]} |\dot{T}_n(x)| = 2^{-n+1}$ . Разность

$S(x) = P(x) - \dot{T}_n(x)$  будет иметь степень меньшую  $n$ . В точке  $x_m = \cos \frac{m\pi}{n}$

$$S(x_m) = (-1)^m 2^{-m+1} - P(x_m)$$

и, ввиду  $|P(x_m)| \leq 2^{-n+1}$ ,

$$(-1)^m S(x_m) \geq 0 \quad (m = 0, 1, \dots, n).$$

Отсюда вытекает, что  $S(x)$  имеет не меньше нежели  $n$  нулей, различных или совпадающих. Но так как степень  $S(x)$  меньше  $n$ , то  $S(x)$  есть тождественный нуль и  $P(x) = T_n(x)$ .

*Многочленами второго рода Чебышёва* называются многочлены вида

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (2.3.5)$$

Можно показать, что функции  $U_n(x)$  — действительно многочлены степени  $n$ , имеющие старшим коэффициентом  $2^n$ . Будем исходить из простого тригонометрического тождества

$$\sin(n+2)\theta + \sin n\theta = 2 \cos \theta \sin(n+1)\theta.$$

Если положить в нем  $\cos \theta = x$ ,  $\theta = \arccos x$  и обе части разделить на  $\sqrt{1-x^2}$ , то получим рекуррентную формулу для  $U_n$

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x). \quad (2.3.6)$$

Заметим, что  $U_0(x) = 1$  и  $U_1(x) = 2x$  имеют желаемую форму. На основании (2.3.6), при помощи индукции легко показать, что  $U_n(x)$  — действительно многочлен вида  $U_n(x) = 2^n x^n + \dots$ .

Для  $U_n(x)$  имеют место равенства

$$I_{n,m} = \int_{-1}^{+1} U_n(x) U_m(x) \sqrt{1-x^2} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } m = n. \end{cases} \quad (2.3.7)$$

Многочлены  $U_n(x)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) образуют на отрезке  $[-1, +1]$  ортогональную систему по весу  $p(x) = \sqrt{1-x^2}$ .

Если в интеграле

$$I_{n,m} = \int_{-1}^{+1} \frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\sin(m+1)\arccos x \cdot \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

заменить переменную интегрирования, положив  $x = \cos \theta$ , то он примет вид

$$I_{n,m} = \int_0^\pi \sin(n+1)\theta \sin(m+1)\theta d\theta$$

и равенства (2.3.7) проверяются без затруднений.

Вес  $p(x) = \sqrt{1-x^2}$  есть также якобиев вес при  $\alpha = \beta = 0,5$ . Поэтому многочлен  $U_n(x)$  может только постоянным множителем отличаться от многочлена Якоби  $P_n^{(0,5; 0,5)}(x)$

$$P_n^{(0,5; 0,5)}(x) = E_n U_n(x). \quad (2.3.8)$$

Сравнение старших коэффициентов дает

$$E_n = \frac{(2n+1)!}{2^{2n} n! (n+1)!}.$$

Многочлены  $U_n(x)$  обладают следующим минимальным свойством.

*Среди всех многочленов  $P(x)$  степени  $n$  со старшим коэффициентом, равным единице,  $\frac{1}{2^n} U_n(x)$  доставляет наименьшее значение интегралу:  $\int_a^b |P(x)| dx$ .*

Для доказательства нам нужно будет установить некоторые вспомогательные теоремы.

1. Ниже нам потребуется тригонометрический ряд для функций \*)  $\sin x \operatorname{sign} \sin px$ , где  $p$  — целое число. В теории рядов Фурье известно следующее разложение

$$\operatorname{sign} \sin x = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

Отсюда видно, что

$$\operatorname{sign} \sin px = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)px}{2k+1}. \quad (2.3.9)$$

Если последнее равенство умножить на  $\sin x$  и принять во внимание, что

$$2 \sin x \sin(2k+1)px = \cos[(2k+1)p-1]x - \cos[(2k+1)p+1]x,$$

---

\*) Функция  $\operatorname{sign} x$  есть знак  $x$  и определяется равенствами

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ +1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

то сразу же получим нужный тригонометрический ряд

$$\sin x \operatorname{sign} \sin px =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{-1} \{ \cos [(2k+1)p - 1]x - \cos [(2k+1)p + 1]x \}.$$

2. Если  $n$  — целое положительное число, то при  $r=0, 1, \dots, n-1$  выполняется равенство:

$$\int_{-1}^{+1} x^r \operatorname{sign} U_n(x) dx = 0. \quad (2.3.10)$$

После замены  $x = \cos \theta$  (2.3.10) перейдет в

$$\int_0^{\pi} \cos^r \theta \sin \theta \operatorname{sign} \sin(n+1)\theta d\theta = 0.$$

Степени косинуса  $\cos^r x$  ( $r=0, 1, \dots, n-1$ ) линейно выражаются через косинусы кратных дуг  $\cos m\theta$  ( $m=0, 1, \dots, n-1$ ) и наоборот. Поэтому последние равенства равносильны таким

$$\int_0^{\pi} \cos m\theta \sin \theta \operatorname{sign} \sin(n+1)\theta d\theta = 0 \quad (m=0, 1, \dots, n-1)$$

или, ввиду четности функций, стоящих под знаком интеграла,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos m\theta \sin \theta \operatorname{sign} \sin(n+1)\theta d\theta = 0. \quad (2.3.11)$$

Тригонометрический ряд для  $\sin \theta \operatorname{sign} \sin(n+1)\theta$  получится из (2.3.9) при  $p=n+1$ . Наименьшая частота, содержащаяся в ряду, появится в (2.3.9) при  $k=0$ ; она равна  $(n+1)-1=n$ . Поэтому при  $m=0, 1, \dots, n-1$  равенство (2.3.11) заведомо выполняется.

На основании (2.3.10) легко доказывается правильность высказанного выше утверждения о минимальном свойстве  $U_n(x)$ .

Обозначим, для сокращения записи,  $2^{-n}U_n(x) = P(x)$  и возьмем любой многочлен  $P^*(x)$  степени  $n$  со старшим коэффициентом, равным единице:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} |P(x)| dx &= \int_{-1}^{+1} P(x) \operatorname{sign} U_n(x) dx = \\ &= \int_{-1}^{+1} P^*(x) \operatorname{sign} U_n(x) dx + \int_{-1}^{+1} (P(x) - P^*(x)) \operatorname{sign} U_n(x) dx. \end{aligned}$$

Последний из интегралов равен нулю, ввиду (2.3.10) и ввиду того, что разность  $P(x) - P^*(x)$  есть многочлен, степени меньшей  $n$

$$\int_{-1}^{+1} P^*(x) \operatorname{sign} U_n(x) dx \leq \int_{-1}^{+1} P^*(x) \operatorname{sign} P^*(x) dx = \int_{-1}^{+1} |P^*(x)| dx.$$

Следовательно,

$$\int_{-1}^{+1} |P(x)| dx \leq \int_{-1}^{+1} |P^*(x)| dx. \quad (2.3.12)$$

Это доказывает утверждение. Сделаем еще два замечания. Из проведенных рассуждений видно, что равенство в (2.3.12) возможно только в том случае, когда  $\operatorname{sign} P^*(x) = \operatorname{sign} U_n(x)$  при  $-1 < x < 1$ . Многочлен

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1) \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sin(n+1) \theta}{\sin \theta},$$

где  $x = \cos \theta$ , имеет при  $-1 < x < +1$   $n$  корней  $x_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Если  $\operatorname{sign} P^*(x) = \operatorname{sign} U_n(x)$ ,  $-1 < x < +1$ , то указанные точки  $x_k$  должны быть одновременно корнями  $P^*(x)$ . Многочлен  $P^*(x)$  имеет степень  $n$  и потому кратности этих корней равны единице и других корней у  $P^*(x)$  нет. Кроме того, так как  $P^*(x)$  и  $P(x) = 2^{-n} U_n(x)$  имеют одинаковые старшие коэффициенты, то должно быть  $P^*(x) = P(x)$ . Равенство в (2.3.12) возможно только в том случае, когда  $P^*(x) = P(x) = 2^{-n} U_n(x)$ .

Вычислим еще минимальное значение интеграла (2.3.8)

$$\begin{aligned} 2^{-n} \int_{-1}^{+1} |U_n(x)| dx &= 2^{-n} \int_0^{\pi} |\sin(n+1) \theta| d\theta = \\ &= 2^{-n} (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{n+1}} \sin(n+1) \theta d\theta = \\ &= 2^{-n} (n+1) - \frac{\cos(n+1) \theta}{n+1} \Big|_0^{\frac{\pi}{n+1}} = \frac{1}{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает

**Теорема 2.** Для любых многочленов степени  $n$ , имеющих старший коэффициент равный единице,

$$P(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_0,$$



верно неравенство:

$$\int_{-1}^{+1} |P(x)| dx \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Равенство возможно в том и только в том случае, когда

$$P(x) = 2^{-n} U_n(x).$$

#### § 4. Многочлены Чебышёва — Эрмита

Многочлены Чебышёва — Эрмита ортогональны на всей числовой оси  $-\infty < x < \infty$  с весом  $p(x) = e^{-x^2}$ . Мы определим их формулой \*):

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \quad (2.4.1)$$

Положим  $\varphi = e^{-x^2}$ . Тогда  $\varphi^{(n)} = (-1)^n e^{-x^2} H_n(x)$ . Вычисление производной дает  $\varphi^{(n+1)} = (-1)^n [-2xH_n(x) + H'_n(x)] e^{-x^2}$  и так как  $\varphi^{(n+1)} = (-1)^{n+1} e^{-x^2} H_{n+1}(x)$ , то

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x). \quad (2.4.2)$$

Отсюда и из  $H_0(x) = 1$ , с помощью индукции, легко можно получить, что  $H_n(x)$  есть многочлен степени  $n$  вида

$$H_n(x) = 2^n x^n + \dots$$

Для многочленов  $H_n(x)$  верны равенства:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ 2^n \sqrt{\pi} n! & \text{при } m = n, \end{cases}$$

из которых видно, что  $H_n(x)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) образуют на всей оси  $(-\infty, +\infty)$  ортогональную систему по весу  $e^{-x^2}$ .

---

\*) Иногда рассматривают другие многочлены Чебышёва — Эрмита:

$$H_n^*(x) = (-1)^n e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Они связаны с многочленами (2.4.1) равенством  $H_n^*(x) = 2^{-\frac{n}{2}} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ .

Пусть  $m \leq n$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n H_m dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(n)} H_m dx = \\ &= (-1)^n \varphi^{(n-1)} H_m \Big|_{-\infty}^{+\infty} + (-1)^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(n-1)} H'_m dx = \\ &= (-1)^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(n-1)} H'_m dx = \dots = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi H_m^{(n)} dx. \end{aligned}$$

При  $m < n$ ,  $H_m^{(n)} \equiv 0$  и  $I = 0$ . Если же  $m = n$ , то

$$I = 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi dx = 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Ортонормальную систему образуют многочлены

$$h_n(x) = \frac{H_n(x)}{2^{\frac{n}{2}} (n!)^{\frac{1}{2}} (\pi)^{\frac{1}{4}}}. \quad (2.4.3)$$

Старшие коэффициенты их равны

$$A_n = 2^{\frac{n}{2}} (n!)^{-\frac{1}{2}} (\pi)^{-\frac{1}{4}}. \quad (2.4.4)$$

## § 5. Многочлены Чебышёва — Лягерра

Эти многочлены ортогональны на полуоси  $0 \leq x < \infty$  с весом  $p(x) = x^\alpha e^{-x}$ . Пусть  $\alpha$  — любое число. Выбор ветви многозначной функции  $x^\alpha$  определим условием:  $\arg x = 0$  при  $x > 0$  и положим

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-i)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{\alpha+n} e^{-x}). \quad (2.5.1)$$

Вычислив производную по правилу Лейбница, найдем разложение  $L_n^{(\alpha)}$  по степеням  $x$

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha)}(x) &= x^n - \frac{n}{1!} (n + \alpha) x^{n-1} + \\ &+ \frac{n(n-1)}{2!} (n + \alpha)(n + \alpha - 1) x^{n-2} - \dots \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Определенные равенством (2.5.1) или (2.5.2) функции называются *многочленами Чебышёва — Лягерра*. Будем считать  $\alpha$  действительным

числом и  $\alpha > -1$ . Покажем, что  $L_n^{(\alpha)}(x)$  обладают следующими свойствами:

$$I = \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ n! \Gamma(n + \alpha + 1) & \text{при } m = n. \end{cases} \quad (2.5.3)$$

Обозначим, для сокращения,  $x^{\alpha+n} e^{-x} = \varphi_n$ ;  $L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} \varphi_n^{(n)}$ . Считая  $n \geq m$ , заменим в  $I$  многочлен  $L_n^{(\alpha)}$  его выражением через  $\varphi_n$

$$\begin{aligned} I &= (-1)^n \int_0^{\infty} \varphi_n^{(n)} L_m^{(\alpha)} dx = \\ &= (-1)^n \varphi_n^{(n-1)} L_m^{(\alpha)} \Big|_0^{\infty} + (-1)^{n-1} \int_0^{\infty} \varphi_n^{(n-1)} [L_m^{(\alpha)}]' dx = \\ &= (-1)^{n-1} \int_0^{\infty} \varphi_n^{(n-1)} [L_m^{(\alpha)}]' dx = \int_0^{\infty} \varphi_n [L_m^{(\alpha)}]^{(n)} dx. \end{aligned}$$

Внеинтегральный член исчезает, ввиду  $\alpha > -1$ .

При  $m < n$ ,  $[L_m^{(\alpha)}]^{(n)} \equiv 0$  и  $I = 0$ . Когда  $m = n$ ,

$$I = n! \int_0^{\infty} \varphi_n dx = n! \int_0^{\infty} x^{\alpha+n} e^{-x} dx = n! \Gamma(\alpha + n + 1).$$

Ортонормальными многочленами Чебышёва — Лягерра будут

$$l_n^{(\alpha)}(x) = \frac{L_n^{(\alpha)}(x)}{\sqrt{n! \Gamma(\alpha + n + 1)}}. \quad (2.5.4)$$

Коэффициент при  $x^n$  в них равен

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{(n!) \Gamma(\alpha + n + 1)}}. \quad (2.5.5)$$

## Л и т е р а т у р а

- Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, гл. III и IV, М., Гостехиздат, 1954.  
 Натансон И. П., Конструктивная теория функций, ч. I и II, М. — Л., Гостехиздат, 1949.  
 Джексон Д., Ряды Фурье и ортогональные полиномы, гл. II, VII — X, ИЛ, 1948.  
 Чебышёв П. Л., Теория механизмов, известных под названием параллелограммов, Собр. соч. т. 2, Изд. АН СССР, 1947.  
 Коркин А. Н. и Золотарев Е. И., Sur un certain minimum, Собр. соч. Е. И. Золотарева, 1, 138—153.  
 Сегё Г., Ортогональные многочлены, М., Физматгиз, 1962.

## ГЛАВА 3

### ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

#### § 1. Конечные разности и разностные отношения

При интерполировании функций, имеющем большое значение для приближенного вычисления интегралов, широко используется аппарат конечных разностей и разностных отношений. Мы приведем лишь начальные и самые необходимые сведения из теории разностей.

Будем считать, что мы рассматриваем функцию  $f(x)$  и предположим, что известны ее значения для равноотстоящих значений аргумента  $x_k = x_0 + kh$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) с шагом  $h$

$$f_0 = f(x_0), f_1 = f(x_0 + h), \dots, f_k = f(x_0 + kh), \dots$$

*Конечными разностями первого порядка* от  $f$  называются величины:

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0, \Delta f_1 = f_2 - f_1, \dots, \Delta f_n = f_{n+1} - f_n, \dots$$

Величины

$$\Delta^2 f_0 = \Delta f_1 - \Delta f_0, \Delta^2 f_1 = \Delta f_2 - \Delta f_1, \dots, \Delta^2 f_n = \Delta f_{n+1} - \Delta f_n, \dots$$

называются *разностями второго порядка* и т. д.

*Разности порядка  $n$*  определяются через разности предыдущего порядка равенствами

$$\Delta^n f_0 = \Delta^{n-1} f_1 - \Delta^{n-1} f_0, \Delta^n f_1 = \Delta^{n-1} f_2 - \Delta^{n-1} f_1, \dots$$

Мы привели рекуррентное определение конечных разностей всех порядков. Можно найти выражение разности любого порядка непосредственно через значения функции

$$\begin{aligned} \Delta^n f_0 = f_n - \frac{n}{1!} f_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} f_{n-2} - \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} f_{n-3} + \dots + (-1)^n f_0. \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Для  $n=1$  это равенство очевидно и, при помощи индукции, легко доказывается для любых  $n$ .

Если ввести оператор увеличения аргумента на шаг  $h$ :  $Ef(x) = f(x+h)$ , так что  $Ef_k = f_{k+1}$ , то (3.1.1) можно записать в следующей простой символической форме:

$$\Delta^n f_0 = (E - 1)^n f_0. \quad (3.1.2)$$

Полезно также отметить, что значение функции  $f_n$  любого номера  $n$  может быть выражено через начальное значение  $f_0$  и разности  $\Delta f_0$ ,  $\Delta^2 f_0$ , ... в виде

$$f_n = f_0 + \frac{n}{1!} \Delta f_0 + \frac{n(n-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \dots + \Delta^n f_0. \quad (3.1.3)$$

При  $n=1$  это равенство верно, ввиду  $f_1 - f_0 = \Delta f_0$ . Справедливость же его при всяких  $n$  может быть без труда доказана индуктивным путем. В символической форме, через степени оператора конечной разности, (3.1.3) записывается в форме

$$f_n = (1 + \Delta)^n f_0. \quad (3.1.4)$$

Равноотстоящие значения аргумента не всегда являются наиболее целесообразными для исследования функции. Более того, в наблюдениях они не всегда возможны. Например, астрономические наблюдения связаны с погодой и их не всегда удастся проводить через равные промежутки времени.

Для неравноотстоящих значений аргумента конечные разности заменяют другими величинами, которые чаще всего называют *разделенными разностями* или *разностными отношениями*.

Пусть  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  — любые значения аргумента. Разностные отношения первого порядка определяются равенствами:

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \dots$$

Дроби

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0},$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_2, x_3) - f(x_1, x_2)}{x_3 - x_1}, \dots$$

называются разностными отношениями второго порядка; дроби

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_1, x_2, x_3) - f(x_0, x_1, x_2)}{x_3 - x_0}, \dots$$

есть разностные отношения третьего порядка и т. д. Величина  $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$  есть линейная функция  $f(x_0), \dots, f(x_n)$ . Можно показать, что

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{v=0}^n \frac{f(x_v)}{(x_v - x_0) \dots (x_v - x_{v-1})(x_v - x_{v+1}) \dots (x_v - x_n)}. \quad (3.1.5)$$

При  $n = 1$  это равенство очевидно, так как

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}.$$

Допустив, что (3.1.5) верно для разностных отношений порядка  $n$ , проверим его для порядка  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} f(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) &= \\ &= (x_{n+1} - x_0)^{-1} [f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) - f(x_0, x_1, \dots, x_n)] = \\ &= (x_{n+1} - x_0)^{-1} \left[ \sum_{v=1}^{n+1} \frac{f(x_v)}{(x_v - x_1) \dots (x_v - x_{n+1})} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{v=0}^n \frac{f(x_v)}{(x_v - x_0) \dots (x_v - x_n)} \right] = \sum_{v=0}^{n+1} \frac{f(x_v)}{(x_v - x_0) \dots (x_v - x_{n+1})}. \end{aligned}$$

Равенство (3.1.5) можно записать более кратко, если ввести многочлен  $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ . Тогда

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{v=0}^n \frac{f(x_v)}{\omega'(x_v)}. \quad (3.1.6)$$

При любой перестановке  $x_0, x_1, \dots, x_n$  в правой части (3.1.5) переменится лишь порядок слагаемых и, поэтому,  $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$  есть симметричная функция своих аргументов  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

При помощи индукции может быть также проверена следующая формула, дающая выражение любого значения функции  $f(x_n)$  через начальное значение  $f(x_0)$  и разностные отношения  $f(x_0, x_1, \dots, x_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ):

$$\begin{aligned} f(x_n) = & f(x_0) + (x_n - x_0)f(x_0, x_1) + \\ & + (x_n - x_0)(x_n - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \dots \\ & \dots + (x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Когда значения аргумента равноотстоящие, разностные отношения весьма просто выражаются через конечные разности функции

[illegible]

Для приложений часто полезно бывает знать, как связаны конечные разности и разностные отношения с производными. Пусть точки  $x_0, x_1, \dots, x_n$  лежат на отрезке  $[a, b]$ .

**Теорема 1.** Если  $f$  имеет на  $[a, b]$  непрерывную производную порядка  $n$ , то верно равенство:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n f^{(n)} \left[ x_0 + \sum_{v=1}^n t_v (x_v - x_{v-1}) \right]. \quad (3.1.9)$$

**Доказательство.** Для  $n=1$  оно просто проверяется:

$$\int_0^1 dt_1 f' [x_0 + t_1 (x_1 - x_0)] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_0, x_1).$$

Допустив, что оно верно для разностных отношений порядка  $n-1$ , покажем, что оно будет верным для отношений порядка  $n$ . Обозначим интеграл, стоящий справа в (3.1.9), знаком  $I(x_0, x_1, \dots, x_n)$  и выполним в нем интегрирование по переменной  $t_n$ :

$$\begin{aligned} I(x_0, x_1, \dots, x_n) &= \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-2}} dt_{n-1} (x_n - x_{n-1})^{-1} \times \\ &\times \{ f^{(n-1)} [x_0 + t_1 (x_1 - x_0) + \dots + t_{n-2} (x_{n-2} - x_{n-3}) + t_{n-1} (x_n - x_{n-2})] - \\ &- f^{(n-1)} [x_0 + t_1 (x_1 - x_0) + \dots + t_{n-1} (x_{n-1} - x_{n-2})] \} = \\ &= (x_n - x_{n-1})^{-1} [f(x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_n) - f(x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1})] = \\ &= (x_n - x_{n-1})^{-1} [f(x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_n) - f(x_{n-1}, x_0, x_1, \dots, x_{n-2})] = \\ &= f(x_{n-1}, x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_n) = f(x_0, x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n). \end{aligned}$$

Этим теорема доказана.

Из (3.1.9), как следствие, может быть получено другое, более простое, соотношение между  $f(x_0, x_1, \dots, x_n)$  и  $f^{(n)}$ . Областью интегрирования в (3.1.9) является пирамида  $n$ -мерного пространства  $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ , определяемая неравенствами:

$$0 \leq t_n \leq t_{n-1} \leq \dots \leq t_1 \leq 1. \quad (3.1.10)$$

Объем ее имеет значение

$$\int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n = \frac{1}{n!}.$$

Рассмотрим величину

$$\begin{aligned}\xi &= x_0 + \sum_{v=1}^n t_v (x_v - x_{v-1}) = \\ &= (1 - t_1) x_0 + (t_1 - t_2) x_1 + \dots + (t_{n-1} - t_n) x_{n-1} + t_n x_n.\end{aligned}$$

Ввиду (3.1.10), множители при всех  $x_k$  будут неотрицательными. Так как сумма множителей равна единице,  $\xi$  будет средним взвешенным значением всех абсцисс  $x_k$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ), а потому, наверное, принадлежит отрезку  $[a, b]$ . Кроме того, точке, лежащей внутри пирамиды (3.1.10):  $0 < t_n < t_{n-1} < \dots < t_1 < 1$ , будет отвечать точка  $\xi$ , лежащая внутри  $[a, b]$ .

Применение теоремы о среднем значении к интегралу (3.1.9) позволяет высказать следующее утверждение.

**Теорема 2.** Если  $f$  имеет на  $[a, b]$  непрерывную производную порядка  $n$ , то внутри  $[a, b]$  существует такая точка  $\xi$ , что имеет место равенство

$$f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}. \quad (3.1.11)$$

Связь между конечной разностью и производной сразу же вытекает из (3.1.8), (3.1.9) и (3.1.11):

$$\begin{aligned}\Delta^n f_0 &= n! h^n \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n f^{(n)} \left( x_0 + h \sum_{v=1}^n t_v \right) = h^n f^{(n)}(\xi), \\ x_0 &< \xi < x_0 + nh.\end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Отсюда, в частности, видно, что если уменьшить шаг  $h$  в  $\lambda$  раз, то можно ожидать, что конечная разность  $\Delta^n f_0$  уменьшается, как правило, приблизительно в  $\lambda^n$  раз.

## § 2. Интерполирование по значениям функции

Допустим, что в  $n+1$  произвольно расположенных точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , которые всюду ниже мы будем называть узлами интерполирования, даны значения  $f(x_k)$  функции  $f(x)$ . Нужно построить многочлен, степени не больше  $n$ :

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = \sum_{v=0}^n a_v x^{n-v}, \quad (3.2.1)$$

который в узлах  $x_k$  принимал бы заданные значения  $f(x_k)$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ):

$$P_n(x_k) = f(x_k). \quad (3.2.2)$$



Для определения коэффициентов  $a_n$  многочлена получится линейная система  $n+1$  уравнений

$$\sum_{v=0}^n a_v x_k^{n-v} = f(x_k) \quad (k=0, 1, \dots, n).$$

Определитель ее есть определитель Вандермонда

$$W(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Он отличен от нуля, так как среди узлов  $x_k$  нет совпадающих. Поэтому, при любых значениях  $f(x_k)$ , может быть построен и только один многочлен  $P_n(x)$ , удовлетворяющий условиям (3.2.2).

В зависимости от целей, для которых предназначается  $P_n(x)$ , его можно представить в различных формах. Ниже приведены два наиболее часто применяемые представления  $P_n(x)$ .

Для узла  $x_k$  построим вспомогательный многочлен  $\omega_k(x)$ , определяемый условиями

$$\omega_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k. \end{cases} \quad (3.2.3)$$

Как сразу же видно, такой многочлен может быть записан в форме

$$\omega_k(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}$$

или, если воспользоваться многочленом  $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$ ,

$$\omega_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)}. \quad (3.2.4)$$

Многочлены  $\omega_k(x)$  называют *многочленами влияния узлов  $x_k$  или лагранжевыми коэффициентами*.

Интерполирующий многочлен  $P_n(x)$  при помощи их запишется в следующей форме, принадлежащей Лагранжу

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} f(x_k). \quad (3.2.5)$$

Так как  $\omega_k(x)$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ) есть многочлен степени  $n$ , то (3.2.5) будет многочленом степени не выше  $n$ . На основании (3.2.3) легко проверить, что он удовлетворяет условиям (3.2.2).

В некоторых вопросах вычислений лагранжево представление  $P_n(x)$  является неудобным. Часто нельзя бывает заранее сказать, сколько нужно взять узлов  $x_k$ , чтобы достигнуть требуемой точности интерполирования. Допустим, что при принятом числе узлов нужная точность не была достигнута. Тогда вводят в вычисления дополнительно еще один или несколько узлов. При введении же хотя бы одного дополнительного узла будут изменяться все члены формулы (3.2.5). Было бы желательно так изменить представление  $P_n(x)$ , чтобы, при введении нового узла, ранее вычисленные члены сохранялись и нужно было бы добавить еще один новый член.

Такому требованию удовлетворяет ньютоново представление интерполяционного многочлена:

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n). \quad (3.2.6)$$

Правая часть (3.2.6) есть многочлен степени не большей  $n$ . На основании (3.1.7) можно проверить, что он действительно удовлетворяет условиям (3.2.2). Непосредственно видно, что при  $x = x_0$  правая часть приводится к  $f(x_0)$ . Для  $x = x_1$  правая часть равна  $f(x_0) + (x_1 - x_0)f(x_0, x_1) = f(x_1)$  и т. д.

Разность между  $f(x)$  и интерполирующим многочленом  $P_n(x)$  называют *остатком интерполирования* или *дополнительным членом интерполяционной формулы*:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{\omega(x)f(x_k)}{(x - x_k)\omega'(x_k)}. \quad (3.2.7)$$

Значение  $R_n(x)$  зависит от свойств функции  $f(x)$  и от расположения  $x$  и узлов  $x_k$ . Можно ожидать тем меньшей погрешности  $R_n(x)$  интерполирования, чем более гладкой будет  $f(x)$ , в частности, чем более высоким порядком дифференцируемости она будет обладать. Когда же  $f(x)$  есть аналитическая функция, то можно ожидать, что  $R_n(x)$  будет тем меньше, чем дальше от  $x$  и  $x_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) будут лежать особые точки  $f(x)$ .

В представлении (3.2.7) для  $R_n(x)$  часто трудно бывает увидеть, какое влияние на значение остатка оказывают свойства  $f(x)$ , и было бы полезно получить другие представления  $R_n(x)$ , более удобные для оценки величины  $R_n(x)$  в различных классах функций. Во многих случаях такие представления  $R_n(x)$  построены\*). Мы ограничимся тем, что приведем две простейшие теоремы о представлениях такого рода для остатка.

1) Пусть точка  $x$  и узлы  $x_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) лежат на отрезке  $[a, b]$ .

\*) См. литературу к гл. 3.

**Теорема 3.** Если  $f(x)$  имеет производную порядка  $n+1$  на  $[a, b]$ , то для остатка  $R_n(x)$  интерполирования имеет место равенство:

$$R_n(x) = \omega(x) \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_n} dt_{n+1} f^{(n+1)} \left[ x + \sum_{v=0}^n t_{v+1} (x_v - x_{v-1}) \right], \quad (3.2.8)$$

$$x_{-1} = x.$$

**Доказательство.** Высказанное утверждение может быть получено как следствие теоремы о представлении разностного отношения через производную и соответствующие ей равенства (3.1.9). Рассмотрим значения  $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n), f(x)$  функции  $f$ . На основании (3.1.7), последнее из них имеет следующее выражение через разностные отношения:

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) + \dots \\ & \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) f(x_0, x_1, \dots, x_n) + \\ & + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) f(x_0, x_1, \dots, x_n, x). \end{aligned}$$

Сумма всех членов правой части равенства, кроме последнего, есть не что иное, как интерполяционный многочлен  $P_n(x)$  в ньютоновой форме. Поэтому последний член правой части должен совпадать с остатком интерполирования:

$$R_n(x) = \omega(x) f(x_0, x_1, \dots, x_n, x) = \omega(x) f(x, x_0, x_1, \dots, x_n). \quad (3.2.9)$$

Если к  $f(x, x_0, x_1, \dots, x_n)$  применить указанную выше теорему и равенство (3.1.9), то получим (3.2.8).

Применение теоремы о среднем значении к интегралу (3.2.8) позволяет высказать приводимую ниже теорему, дающую более простое представление остатка.

**Теорема 4.** Если  $f(x)$  имеет на  $[a, b]$  непрерывную производную порядка  $n+1$ , то внутри  $[a, b]$  существует такая точка  $\xi$ , что имеет место равенство:

$$R_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \quad (3.2.10)$$

Его часто называют формулой Лагранжа для  $R_n(x)$ .

2) Допустим, что  $f(z)$  — аналитическая функция комплексного переменного  $z$ , регулярная в некоторой области  $B$ , содержащей

внутри себя  $x$  и  $x_k$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ). Для простоты, будем область  $B$  считать односвязной.

**Теорема 5.** *Остаток интерполирования  $f(z)$  в точке  $x$  может быть представлен в форме контурного интеграла*

$$R_n(x) = \frac{\omega(x)}{2\pi i} \int_l \frac{f(z)}{\omega(z)(z-x)} dz, \quad (3.2.11)$$

где  $l$  — любая замкнутая линия, лежащая внутри  $B$  и содержащая  $x, x_k$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ) внутри себя.

Утверждение легко доказывается проверкой равенства (3.2.10). Для функции  $\frac{f(z)}{\omega(z)(z-x)}$ , стоящей под знаком интеграла, точки  $z=x, z=x_k$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ) являются простыми полюсами. Если интеграл, стоящий справа в (3.2.11), вычислить при помощи вычетов, то сразу же получится представление (3.2.7) для остатка  $R_n(x)$ .

### § 3. Интерполирование с кратными узлами

Будем считать, что нам дано  $m$  различных узлов  $x_1, x_2, \dots, x_m$ . Рассмотрим некоторую функцию  $f(x)$  и предположим, что в первом узле  $x_1$  даны значения самой функции и всех производных от нее до порядка  $\alpha_1 - 1$ :  $f(x_1), f'(x_1), \dots, f^{(\alpha_1-1)}(x_1)$ , во втором узле  $x_2$  даны значения  $f$  и производных до порядка  $\alpha_2 - 1$ :  $f(x_2), f'(x_2), \dots, f^{(\alpha_2-1)}(x_2)$  и т. д. Числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  называются *кратностями узлов*  $x_1, x_2, \dots, x_m$ .

Общее число указанных исходных данных о функции  $f(x)$  обозначим  $n+1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$ .

Нужно построить многочлен  $P_n(f; x)$ , степени не выше  $n$ , который удовлетворял бы условиям \*) ( $i=0, 1, \dots, \alpha_k-1; k=1, 2, \dots, m$ ):

$$P_n^{(i)}(f; x_k) = f^{(i)}(x_k). \quad (3.3.1)$$

Существование  $P_n(f; x)$  мы установим, построив этот многочлен. Единственность  $P_n(f; x)$  будет видна из построения. Она может быть также легко доказана на основании известных теорем алгебры. Допустив, что существуют два многочлена  $P_n(f; x)$ , удовлетворяющих условиям (3.3.1), рассмотрим разность между ними и обозначим ее  $\Phi(x)$ ;  $\Phi(x)$  есть многочлен, степени не выше  $n$ , и в узлах  $x_k$  будет удовлетворять условиям

$$\Phi^{(i)}(x_k) = 0 \quad (i=0, 1, \dots, \alpha_k-1; k=1, 2, \dots, m).$$

---

\*) При записи условий, производная порядка нуль принимается равной самой функции  $f$ .

Каждый узел  $x_k$  будет нулем  $\varphi(x)$  кратности не меньше  $\alpha_k$ . Сумма кратностей таких нулей будет не меньше  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = n + 1$ . Но известно, что сумма кратностей нулей может быть больше степени многочлена только в том случае, когда он тождественно равен нулю:  $\varphi = 0$ , что доказывает единственность.

Интерполирующий многочлен  $P_n(f; x)$  может быть, очевидно, записан в форме

$$P_n(f; x) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^{\alpha_k-1} L_{k,i}(x) f^{(i)}(x_k), \quad (3.3.2)$$

где  $L_{k,i}(x)$  есть некоторые многочлены степени  $n$ . Для построения многочлена рассмотрим сначала случай аналитической функции  $f$ .

Будем считать  $f(z)$  функцией комплексного переменного  $z$ , регулярной в некоторой области  $B$ , содержащей внутри себя точку  $x$  и узлы  $x_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ). Как и выше, для простоты будем считать область  $B$  односвязной. Возьмем любую замкнутую линию  $l$ , лежащую внутри  $B$  и содержащую  $x$  и  $x_k$  внутри себя. Всюду внутри  $l$  функция  $f$  может быть представлена интегралом Коши:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(z)}{z-x} dz. \quad (3.3.3)$$

Равенство (3.3.3) позволяет изучение  $f$  свести к изучению элементарной функции  $\frac{1}{z-x}$ , которую часто называют ядром Коши.

Для нашей цели удобнее рассмотреть не интерполяционный многочлен для  $\frac{1}{z-x}$ , а остаток интерполирования

$$\begin{aligned} R_n\left(\frac{1}{z-x}; x\right) &= \frac{1}{z-x} - P_n\left(\frac{1}{z-x}; x\right) = \\ &= \frac{1}{z-x} - \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^{\alpha_k-1} L_{k,i}(x) \frac{i!}{(z-x_k)^{i+1}}. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Будем рассматривать (3.3.4) как функцию параметра  $z$ . Это — правильная рациональная дробь, для которой (3.3.4) есть разложение на сумму простых дробей. Заметим, попутно, что точка  $z = x$  есть простой полюс  $R_n\left(\frac{1}{z-x}; x\right)$  с вычетом, равным единице.

Приведем дроби в правой части (3.3.4) к общему знаменателю. Если обозначить  $A(z) = \prod_{k=1}^m (z-x_k)^{\alpha_k}$ , то в результате приведения для  $R_n$  получим дробное представление вида:

$$R_n\left(\frac{1}{z-x}; x\right) = \frac{B(z, x)}{A(z)(z-x)}. \quad (3.3.5)$$

Так как дробь (3.3.5) — правильная, числитель  $B(z, x)$  должен быть многочленом от  $z$ , степени не выше  $n+1$ . Убедимся в том, что  $B(z, x)$  не зависит от  $z$  и равен  $A(x)$ . Для этой цели найдем разложение (3.3.5) при  $z$ , больших по модулю. Если  $|z|$  есть боль-

шая величина, то  $\frac{1}{z-x} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^v}{z^{v+1}}$ . Так как операция остатка  $R_n$  линейная, можно видеть, что

$$R_n\left(\frac{1}{z-x}; x\right) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{z^{v+1}} R_n(x^v; x).$$

Здесь  $R_n(x^v; x)$  есть остаток интерполирования  $x^v$ . Но, когда интерполируемая функция есть многочлен, степень которого не больше  $n$ , интерполирование будет точным и, поэтому,

$$R_n(x^v; x) = 0 \quad (v = 0, 1, \dots, n),$$

$$R_n\left(\frac{1}{z-x}; x\right) = \sum_{v=n+1}^{\infty} \frac{1}{z^{v+1}} R_n(x^v; x).$$

Наименьшая степень  $\frac{1}{z}$ , входящая в разложение (3.3.5) при больших  $|z|$ , должна быть  $\frac{1}{z^{n+2}}$ . Значит числитель  $B(z, x)$  должен иметь степень, относительно  $z$ , на  $n+2$  единицы меньше степени знаменателя и не должен, следовательно, зависеть от  $z$ :  $B(z, x) = B(x)$ . Кроме того, так как вычет (3.3.5) в полюсе  $z = x$  равен единице, должно быть  $B(x) = A(x)$  и

$$R_n\left(\frac{1}{z-x}; x\right) = \frac{A(x)}{A(z)(z-x)}. \quad (3.3.6)$$

Умножим теперь (3.3.4) на  $\frac{f(z)}{2\pi i}$  и выполним интегрирование по  $l$ . Ввиду (3.3.3) и (3.3.6), получим выражение остатка интерполирования функции  $f$  в точке  $x$  в форме

$$R_n(f; x) = f(x) - \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{\alpha_k-1} L_{k,i}(x) f^{(i)}(x_k) = \frac{A(x)}{2\pi i} \int_l \frac{f(z)}{A(z)(z-x)} dz. \quad (3.3.7)$$

Вычисляя интеграл (3.3.7) при помощи вычетов, можно найти интерполирующий многочлен (3.3.4):  $P_n(f; x) = f(x) - R_n(f; x)$ .

Вычет  $\frac{A(x)f(z)}{A(z)(z-x)}$  в полюсе  $z=x$  равен  $f(x)$ . Найдем вычет той же функции в полюсе  $z=x_k$ . При  $z$  близком к  $x_k$  будем иметь следующие степенные разложения по степеням  $z-x_k$ :

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{f^{(s)}(x_k)}{s!} (z-x_k)^s,$$

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{(z-x_k) - (x-x_k)} = - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(z-x_k)^s}{(x-x_k)^{s+1}},$$

$$\frac{(z-x_k)^{\alpha_k}}{A(z)} = \sum_{s=0}^{\infty} c_s^{(k)} (z-x_k)^s.$$

Вычет функции

$$\frac{f(z)}{A(z)(z-x)} = \frac{1}{(z-x_k)^{\alpha_k}} \cdot \frac{(z-x_k)^{\alpha_k}}{A(z)} \cdot \frac{1}{z-x} \cdot f(z)$$

мы получим, если перемножим три выписанных ряда и найдем коэффициент при  $(x-x_k)^{\alpha_k-1}$ . Простые вычисления покажут, что этот коэффициент равен

$$- \sum_{i=0}^{\alpha_k-1} f^{(i)}(x_k) \frac{1}{i!} \sum_{s=0}^{\alpha_k-1-i} c_s^{(k)} (x-x_k)^{-\alpha_k+i+s}.$$

Для получения вычета  $\frac{A(x)f(z)}{A(z)(z-x)}$ , его мы должны умножить на  $A(x)$ . Все эти вычисления дадут для  $P_n(f; x)$  следующую формулу, принадлежащую Эрмиту

$$P_n(f; x) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=0}^{\alpha_k-1} f^{(i)}(x_k) \frac{1}{i!} \frac{A(x)}{(x-x_k)^{\alpha_k}} \sum_{s=0}^{\alpha_k-1-i} c_s^{(k)} (x-x_k)^{i+s}. \quad (3.3.8)$$

Если  $f$  задана на действительной оси и не является аналитической функцией, то представление (3.3.8) интерполяционного многочлена для нее, очевидно, остается верным, но представление остатка  $P_n(f; x)$  контурным интегралом — теряет свою силу.

В случае неаналитической функции  $f$  мы укажем другое представление остатка  $R_n$ , рассчитанное на функции достаточно высокого класса дифференцируемости.

Пусть точки  $x$  и  $x_k$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) лежат на некотором отрезке  $[a, b]$ .

**Теорема 6.** Если функция  $f$  имеет на  $[a, b]$  производную порядка  $n+1$ , то внутри  $[a, b]$  существует такая точка  $\xi$ , что для остатка  $R_n(f; x)$  имеет место равенство:

$$R_n(f; x) = \frac{A(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi). \quad (3.3.9)$$

Теорема эта доказывается при помощи рассуждений, вполне сходных с теми, которые были проведены при получении (3.2.8), если к функции  $F(z) = f(z) - P_n(f; z) - \frac{A(z)}{A(x)} [f(x) - P_n(f; x)]$  применить следующую измененную теорему Ролля.

Пусть  $a_1 < a_2 < \dots < a_m$  и  $f$  удовлетворяет условиям  $f^{(i)}(a_k) = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ;  $i = 0, 1, \dots, \alpha_k - 1$ ),  $\sum \alpha_k = r$ . Тогда, если  $f$  имеет на отрезке  $[a_1, a_m]$  производную порядка  $r$ , между  $a_1$  и  $a_m$  существует такая точка  $\xi$ , что  $f^{(r)}(\xi) = 0$ .

#### § 4. Тригонометрическое интерполирование

Предположим, что на отрезке  $0 \leq x < 2\pi$  заданы  $n$  точек  $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n < 2\pi$ . Пусть, кроме того, рассматривается  $2\pi$ -периодическая функция  $f(x)$  и известны ее значения в точках  $x_j$ . Задача тригонометрического интерполирования  $f$  зависит от четности или нечетности  $n$ . Мы остановимся сначала на случае нечетного числа узлов  $x_j$ :  $n = 2m + 1$ . Нужно построить тригонометрический многочлен степени  $m$

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (3.4.1)$$

удовлетворяющий условиям

$$T(x_j) = f(x_j) \quad (j = 1, 2, \dots, 2m + 1). \quad (3.4.2)$$

Для вычислений, связанных с нахождением  $T(x)$ , удобнее пользоваться выражением тригонометрического многочлена через показательную функцию, равносильным (3.4.1):

$$T(x) = \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikx}. \quad (3.4.3)$$

Условия (3.4.2) дадут для определения коэффициентов  $c_k$  линейную систему  $2m + 1$  уравнений. При записи ее мы ввели, для сокращения, обозначения  $z = e^{ix}$ ,  $z_j = e^{ix_j}$

$$\sum_{k=-m}^m c_k z_j^k = f(x_j) \quad (j = 1, \dots, 2m + 1)$$



или, после умножения на  $z_j^m$

$$c_m z_j^{2m} + c_{m-1} z_j^{2m-1} + \dots + c_{-m+1} z_j + c_{-m} = z_j^m f(x_j). \quad (3.4.4)$$

Определитель системы есть определитель Вандермонда от  $z_1, z_2, \dots, z_{2m+1}$ . Так как все  $z_j$  различны между собой, то определитель отличен от нуля, система имеет решение и только одно. Для нахождения  $T(x)$  достаточно обратить внимание на то, что система (3.4.4) получится, если выполнять алгебраическое интерполирование функции  $F(z) = z^m f(x)$  по значениям  $F$  в узлах  $z_j$  ( $j = 1, \dots, 2m+1$ ) при помощи многочлена  $P(z) = c_m z^{2m} + c_{m-1} z^{2m-1} + \dots + c_{-m} = z^m T(x)$ . Условия интерполирования  $P(z_j) = z_j^m f(x_j)$  совпадают с системой (3.4.4). Поэтому для построения  $P(z)$  может быть применена формула Лагранжа (3.2.5).

Применительно к нашей задаче она будет следующей:

$$P(z) = \sum_{j=1}^n \frac{(z - z_1) \dots (z - z_{j-1})(z - z_{j+1}) \dots (z - z_n)}{(z_j - z_1) \dots (z_j - z_{j-1})(z_j - z_{j+1}) \dots (z_j - z_n)} z_j^m f(x_j).$$

Если обе части равенства разделить на  $z^m$  и возвратиться к старым переменным  $x, x_j$ , после несложных вычислений получим представление

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{j=1}^n \frac{\sin \frac{x-x_1}{2} \dots \sin \frac{x-x_{j-1}}{2} \sin \frac{x-x_{j+1}}{2} \dots \sin \frac{x-x_n}{2}}{\sin \frac{x_j-x_1}{2} \dots \sin \frac{x_j-x_{j-1}}{2} \sin \frac{x_j-x_{j+1}}{2} \dots \sin \frac{x_j-x_n}{2}} f(x_j) = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\Omega(x)}{2 \sin \frac{x-x_j}{2} \Omega'(x_j)} f(x_j) = \sum_{j=1}^n L_j(x) f(x_j); \quad (3.4.5) \\ &\quad \prod_{k=1}^n \sin \frac{x-x_k}{2} = \Omega(x). \end{aligned}$$

Это и есть нужное нам выражение для интерполирующего многочлена  $T(x)$ .

Рассмотрим теперь случай четного числа узлов:  $n = 2m$ . Так как в тригонометрическом многочлене какой-либо степени всегда содержится нечетное число коэффициентов, он менее естествен, чем случай нечетного  $n$ . Но мы не станем исключать его из рассмотрения, так как в некоторых вопросах интегрирования периодических функций, например, при построении правил квадратур, имеющих наивысшую тригонометрическую степень точности, случаи четного и нечетного  $n$  являются равноправными.



Условием возможности и единственности интерполирования при всяких значениях  $f(x_j)$  будет соблюдение неравенства  $z_1 \dots z_n \neq e^{-2i\delta}$  или, в прежних переменных  $x_j$ :

$$x_1 + \dots + x_n \neq -2\delta + 2p\pi, \quad (3.4.10)$$

где  $p$  есть целое число.

Если к уравнениям (3.4.7) присоединить равенство, определяющее многочлен  $T(x)$ :

$$\frac{1}{2} A(\alpha z^n + \bar{\alpha}) + c_{m-1} z^{n-1} + \dots + c_{-m+1} z = T(x) z^m,$$

которое мы записали в переменной  $z$ , то полученную систему  $n+1$  равенств можно будет рассматривать как однородную систему уравнений с неизвестными  $\frac{1}{2} A, c_{m-1}, \dots, c_{-m+1}, -1$ . Определить ее должен быть равен нулю. Из этого равенства может быть найдено выражение  $T(x)$ :

$$\begin{aligned} z^m T(x) &= - \frac{1}{\Delta(z_1, \dots, z_n)} \begin{vmatrix} 0 & \alpha z^n + \bar{\alpha} & z^{n-1} & \dots & z \\ f(x_1) z_1^m & \alpha z_1^n + \bar{\alpha} & z_1^{n-1} & \dots & z_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x_n) z_n^m & \alpha z_n^n + \bar{\alpha} & z_n^{n-1} & \dots & z_n \end{vmatrix} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\Delta(z, z_1, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n)}{\Delta(z_k, z_1, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n)} f(x_k) z_k^m. \end{aligned}$$

Наконец, если оба входящие сюда определителя  $\Delta$  вычислить по правилу (3.4.9) и возвратиться к переменным  $x$  и  $x_k$ , для интерполяционного многочлена  $T(x)$  получится приводимое ниже выражение:

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{\sin \frac{1}{2}(x + \sigma - x_k + 2\delta) \Omega(x)}{2 \sin \frac{1}{2}(\sigma + 2\delta) \sin \frac{1}{2}(x - x_k) \Omega'(x_k)} \cdot f(x_k) = \\ &= \sum_{k=1}^n L_k^*(x) f(x_k), \quad \sigma = x_1 + \dots + x_n. \quad (3.4.11) \end{aligned}$$

Непосредственно можно без труда проверить, что правая часть есть действительно многочлен вида (3.4.1), удовлетворяющий условиям (3.4.2).

## Литература

Уиттекер и Робинсон, Математическая обработка результатов наблюдений, М. — Л., Гостехиздат, 1935.

Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, гл. I и V, М., Гостехиздат, 1954, изд. 2.

Ремез Е. И., ДАН СССР **26** (1940), 2.

Hermite Ch., Sur la formule d'interpolation de Lagrange, Journ. für reine und angew. Math. **84** (1878).

## ГЛАВА 4

# ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

### § 1. Линейные нормированные пространства

Для изучения некоторых задач теории квадратур большое значение имеет функциональный анализ. Он позволяет с единой точки зрения исследовать многие вопросы и получать большое число результатов из одного источника. Для целей, которые преследуются в дальнейшем изложении, потребуются лишь немногие понятия и теоремы функционального анализа. Им будут посвящены три ближайших параграфа.

Пусть  $X = \{x\}$  — множество некоторых «элементов»  $x$ . Природа таких элементов может быть любой: это могут быть точки, линии, функции и т. п.

Множество  $X$  называется *линейным*, если над элементами этого множества определены две операции — сложение  $x + y$  и умножение  $\lambda x$  на число  $\lambda$  (действительное, или комплексное) такие, что результаты операций приводят снова к элементам множества  $X$  и выполняются аксиомы:

- 1) ассоциативность сложения  $(x + y) + z = x + (y + z)$ ;
- 2) коммутативность сложения  $x + y = y + x$ ;
- 3) существует элемент  $\theta$ , называемый *нулевым*, такой, что при всяком  $x \in X$   $x + \theta = x$ ;
- 4) для каждого  $x$  из  $X$  существует элемент  $-x$ , называемый *противоположным*, такой, что  $x + (-x) = \theta$ ;
- 5) ассоциативность умножения  $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ ;
- 6) верны два распределительных закона  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ ,  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ ;
- 7)  $1 \cdot x = x$ ;
- 8)  $0 \cdot x = \theta$ ;
- 9) если  $\lambda x = \theta$  и  $x \neq \theta$ , то  $\lambda = 0$ .

Линейное множество  $X$  называется *линейным нормированным*, или *векторным* пространством, если для каждого элемента  $x \in X$

определена норма  $\|x\|$  — вещественное число, обладающее свойствами длины вектора:

- 1)  $\|x\| \geq 0$  и  $\|x\| = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = 0$ ,
- 2)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ,
- 3)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ .

При помощи нормы может быть определена сходимость элементов: говорят, что  $x_n \rightarrow x$ , или  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , если  $\|x_n - x\| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Со сходимостью тесно связана полнота пространства. Если последовательность  $x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) сходится к некоторому элементу  $x$ , то для такой последовательности выполняется признак Больцано — Коши: для всякого  $\varepsilon > 0$  существует такое  $N(\varepsilon)$ , что при  $n > N(\varepsilon)$  и любых  $m > 0$  будет  $\|x_{n+m} - x_n\| < \varepsilon$ . Обратное может быть неверным: если для последовательности  $x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) выполняется признак Больцано — Коши, то еще нельзя быть уверенным в том, что в  $X$  существует такой элемент  $x$ , к которому сходится  $x_n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Пространство  $X$  называется *полным* или типа  $B$  (по имени С. Банаха), если из выполнения для  $x_n$  признака Больцано — Коши следует существование в  $X$  такого элемента  $x$ , к которому сходится  $x_n$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Приведем некоторые примеры банаховых пространств.

1. Пространство  $C$ . Пусть  $[a, b]$  — любой конечный отрезок. Элементами  $C$  являются всевозможные непрерывные функции на  $[a, b]$ . Сложение элементов и умножение их на число есть обычное сложение функций и умножение на число. За норму функции  $x = x(t)$  принимают

$$\|x\| = \max_t |x(t)|. \quad (4.1.1)$$

Сходимость элементов есть равномерная сходимость последовательности функций. Пространство  $C$  полное. Из  $\|x_{n+m} - x_n\| = \max_t |x_{n+m}(t) - x_n(t)| < \varepsilon$  следует сходимость последовательности функций  $x_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) при всяком  $t$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t)$  и так как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций есть также непрерывная функция, то  $x(t) \in C$ .

2. Пространство  $L_p$  ( $p \geq 1$ ) есть пространство измеримых на  $[a, b]$  функций, суммируемых со степенью  $p$ . Сложение и умножение на число есть также обычное сложение функций и умножение их на число. Норма определяется равенством

$$\|x\| = \left\{ \int_a^b |x(t)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}. \quad (4.1.2)$$

Функции эквивалентные, т. е. различающиеся между собой лишь на множестве точек, имеющем меру нуль, отождествляются.

Условия, которым должна удовлетворять норма, для (4.1.2) проверяются без труда. Выполнение условий 1 и 3 очевидно. Условие же 2 есть следствие известного неравенства Минковского для интегралов \*):

$$\left\{ \int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{ \int_a^b |x(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_a^b |y(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Пространство  $L_p$  полное \*\*).

3. Пространство  $L_2$  суммируемых с квадратом функций есть частный случай  $L_p$  при  $p = 2$ . Норма в  $L_2$  есть

$$\|x\| = \left\{ \int_a^b x^2(t) dt \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (4.1.3)$$

Сходимость элементов здесь означает сходимость функций в смысле среднего квадратического отклонения.

4. Пространство  $L$  суммируемых на  $[a, b]$  функций есть также частный случай  $L_p$  при  $p = 1$ . Норма в  $L$  определяется так:

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)| dt \quad (4.1.4)$$

и имеет геометрический смысл площади между осью  $x$  и графиком функции  $x(t)$ .

5.  $V$  есть пространство функций ограниченного изменения на  $[a, b]$  и обращающихся в нуль в точке  $a$ . За норму в  $V$  принимают полное изменение  $x(t)$  на  $[a, b]$

$$\|x\| = \text{Var}_a^b x(t). \quad (4.1.5)$$

Сразу же видно, что условия 1 и 3 для нормы здесь выполняются. Выполнение второго условия следует из неравенства

$$\text{Var}_a^b [x(t) + y(t)] \leq \text{Var}_a^b x(t) + \text{Var}_a^b y(t).$$

\*) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, М.—Л., Физматгиз, 1959, V, п°63, или Л. А. Люстерник и В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, М., «Наука», 1965, дополнение 1, 347—348.

\*\*) См., например, Л. А. Люстерник и В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, М., «Наука», 1965, 35—37.

Пространство  $V$  полное. В самом деле, пусть для последовательности элементов  $x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) условие Больцано — Коши выполняется.

$$|x_{n+m}(t) - x_n(t)| = \left| \int_a^t d[x_{n+m}(t) - x_n(t)] \right| \leqslant \\ \leqslant \text{Var}_a^b [x_{n+m}(t) - x_n(t)] = \|x_{n+m} - x_n\| < \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon).$$

Отсюда видно, что последовательность функций  $x_n(t)$  сходится при всяких  $t \in [a, b]$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t)$ . Из выполнения условия Больцано — Коши следует, что нормы  $\|x_n\|$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ограничены сверху некоторым числом \*)  $\|x_n\| \leqslant M$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Разделим  $[a, b]$  на части точками  $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b$ . Для функции  $x_n(t)$  выполняется неравенство

$$\sum_{i=0}^{k-1} |x_n(t_{i+1}) - x_n(t_i)| \leqslant \text{Var}_a^b x_n(t) = \|x_n\| \leqslant M.$$

Если перейти здесь к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , то получим

$$\sum_{i=0}^{k-1} |x(t_{i+1}) - x(t_i)| \leqslant M,$$

откуда вытекает, что  $\text{Var}_a^b x(t) \leqslant M$  и, следовательно,  $x(t)$  есть элемент пространства  $V$ .

Пусть  $\varepsilon > 0$  и число  $N$  таково, что при  $n, m > N$  будет  $\rho(x_m, x_n) \leqslant \varepsilon$ . Если в неравенствах

$$\sum_{i=0}^{k-1} |[x_m(t_{i+1}) - x_n(t_{i+1})] - [x_m(t_i) - x_n(t_i)]| \leqslant \\ \leqslant \text{Var}_a^b [x_m(t) - x_n(t)] = \rho(x_m, x_n) \leqslant \varepsilon$$

перейти к пределу при  $m \rightarrow \infty$ , то легко получить следующее неравенство

$$\sum_{i=0}^{k-1} |[x(t_{i+1}) - x_n(t_{i+1})] - [x(t_i) - x_n(t_i)]| \leqslant \varepsilon.$$

---

\*) Возьмем  $\varepsilon > 0$  и выберем  $N$  так, чтобы при  $n, m > N$  было  $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ . Фиксируем какое-либо значение  $m > N$ ;  $\|x_n\| \leqslant \|x_m\| + \|x_m - x_n\| < \|x_m\| + \varepsilon$ . Пусть  $M$  — наибольшее из чисел  $\|x_1\|, \dots, \|x_N\|, \|x_m\| + \varepsilon$ . Тогда при всяких  $n$  будет  $\|x_n\| \leqslant M$ .



Так как это верно при любом выборе точек  $t_i$  ( $i=0, 1, \dots, k$ ), то отсюда вытекает:  $\text{Var}_b[x(t) - x_n(t)] = \rho(x, x_n) \leq \varepsilon$ , и последовательность функций  $x_n^a(t)$  сходится к  $x(t)$  при норме (4.1.5).

## § 2. Линейные операторы

Пусть  $X = \{x\}$  и  $Y = \{y\}$  — два любых множества элементов  $x$  и  $y$ . Если каждому элементу  $x$  соответствует, по какому-либо правилу, некоторый элемент  $y$ :  $y = H(x)$ , то мы будем говорить, что задан оператор  $H$ . Множество  $X$  есть область его задания, а область значений  $H$  принадлежит  $Y$ .

В частном случае, когда  $Y$  есть множество действительных или комплексных чисел, и каждому элементу  $x$  соответствует некоторое число, оператор  $H$  называют *функционалом*.

Понятие оператора является прямым и далеко идущим обобщением понятия функции.

Если в множествах  $X$  и  $Y$  известны правила предельного перехода, то может быть определена непрерывность оператора. Оператор  $H$  называется *непрерывным*, если из  $x_n \rightarrow x$  (в множестве  $X$ ) следует  $H(x_n) \rightarrow H(x)$  (в множестве  $Y$ ).

Далее мы будем считать, что  $X$  и  $Y$  — линейные нормированные пространства. Оператор  $H$  называется *аддитивным*, если для любых двух элементов  $x_1$  и  $x_2$  из  $X$  будет \*):  $H(x_1 + x_2) = Hx_1 + Hx_2$ .

Оператор называется *линейным*, если он аддитивен и непрерывен.

Если существует число  $M$  такое, что при всяких  $x$  выполняется неравенство  $\|Hx\| \leq M\|x\|$ , тогда  $H$  называют *ограниченным* оператором. Докажем утверждение:

*Для того чтобы аддитивный оператор был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он был ограниченным.*

Необходимость. Допустим, что линейный оператор  $H$  неограничен и покажем, что это приводит к противоречию. Найдется последовательность элементов  $x_n$  такая, что  $\|Hx_n\| \geq n\|x_n\|$ . По-

строим элементы  $x'_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$ . Очевидно,  $x'_n \rightarrow \theta$  при  $n \rightarrow \infty$ . С дру-

гой стороны  $Hx'_n = \frac{1}{n\|x_n\|} Hx_n$  и  $\|Hx'_n\| = \frac{1}{n\|x_n\|} \|Hx_n\| \geq 1$ ;  $\|Hx'_n\| \not\rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  и оператор  $H$  не непрерывен в нулевом элементе  $\theta$ .

Достаточность. Будем считать оператор  $H$  аддитивным и ограниченным и возьмем любой элемент  $x$ . Если  $x_n \rightarrow x$ , т. е.

\*) Скобки, в которых записан аргумент оператора, часто будут опускаться.

$\|x_n - x\| \rightarrow 0$ , то  $\|Hx_n - Hx\| = \|H(x_n - x)\| \leq M\|x_n - x\| \rightarrow 0$ ,  
 $n \rightarrow \infty$ .  $Hx_n \rightarrow Hx$  и оператор  $H$  непрерывен.

Если  $H$  — линейный оператор, то наименьшая из постоянных  $M$ , удовлетворяющих неравенству  $\|Hx\| \leq M\|x\|$ , называется *нормой оператора  $H$*  и обозначается  $\|H\|$ :

$$\|H\| = \min M.$$

Для нахождения нормы в некоторых случаях может быть полезным следующее просто доказываемое равенство

$$\|H\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Hx\|. \quad (4.2.1)$$

Действительно, при  $\|x\| \leq 1$ ,  $\|Hx\| \leq \|H\|\|x\| \leq \|H\|$ . Следовательно,

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Hx\| \leq \|H\|. \quad (4.2.2)$$

По определению нормы, для всякого  $\varepsilon > 0$  существует элемент  $x'$  такой, что  $\|Hx'\| > (\|H\| - \varepsilon)\|x'\|$ . Положим

$$x = \frac{x'}{\|x'\|},$$

$$\|Hx\| = \frac{1}{\|x'\|} \|Hx'\| > \frac{1}{\|x'\|} (\|H\| - \varepsilon)\|x'\| = \|H\| - \varepsilon.$$

Так как  $\|x\| = 1$ , то  $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Hx\| > \|H\| - \varepsilon$ . Ввиду произвола в выборе  $\varepsilon$ , отсюда и из (4.2.2) следует (4.2.1).

Найдем норму некоторых линейных функционалов, с которыми нам придется встретиться позже.

1.  $X$  — есть пространство  $C[a, b]$ . Рассмотрим функционал

$$Fx = \int_a^b f(t) x(t) dt, \quad (4.2.3)$$

где  $f(t)$  — измеримая и суммируемая на  $[a, b]$  функция. Имеем,

$$\begin{aligned} \|F\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \left| \int_a^b f(t) x(t) dt \right| = \\ &= \sup_{\|x(t)\| \leq 1} \int_a^b |f(t)| |x(t)| dt \leq \int_a^b |f(t)| dt. \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию  $\text{sign } f(t)$ . Она измерима и  $|\text{sign } f(t)| \leq 1$ . Для нее

$$\int_a^b f(t) \text{sign } f(t) dt = \int_a^b |f| dt.$$

Так как  $\text{sign } f$  есть измеримая функция, наверное существует такая непрерывная функция  $x^*(t)$ , для которой  $|x^*(t)| \leq 1$  и которая отличается от  $\text{sign } f$  на множестве сколь угодно малой меры. Такую

функцию всегда можно выбрать так, чтобы  $\int_a^b f x^* dt$  отличался бы от  $\int_a^b f \text{sign } f dt$  сколь угодно мало. Поэтому

$$\sup_{|x(t)| \leq 1} \int_a^b f x dt \geq \int_a^b |f| dt,$$

и, следовательно,

$$\|F\| = \int_a^b |f| dt. \quad (4.2.4)$$

2.  $X$  есть  $L[a, b]$

$$Fx = \int_a^b f(t) x(t) dt. \quad (4.2.5)$$

Здесь  $f$  — непрерывная на  $[a, b]$  функция. Норма в  $L$  определяется равенством (4.1.4). Имеем

$$|Fx| = \left| \int_a^b f x dt \right| \leq \max_t |f(t)| \int_a^b |x(t)| dt = \max_t |f(t)| \cdot \|x\|.$$

Отсюда видно, что  $\|F\| \leq \max_t |f(t)|$ .

Убедимся в том, что в полученной оценке для  $\|F\|$  правая часть не может быть уменьшена. Пусть  $\varepsilon$  есть любое малое положительное число. Обозначим  $M = \max_t |f(t)|$  и допустим, что этот максимум достигается в точке  $\xi$ . Для определенности записи будем считать  $f(\xi)$  положительным числом:  $f(\xi) = M > 0$ . Ввиду непрерывности  $f(t)$ , около  $\xi$  существует такой отрезок  $\alpha < t < \beta$ , в котором  $f(t) > M - \varepsilon$ . Определим функцию  $x(t)$  равенствами

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \text{при } t \in (\alpha, \beta), \\ 0 & \text{при } t \notin (\alpha, \beta). \end{cases}$$

Очевидно

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)| dt = 1,$$

$$|Fx| = \left| \int_a^b f(t)x(t) dt \right| = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_a^\beta f(t) dt > \frac{1}{\beta - \alpha} (M - \varepsilon)(\beta - \alpha) = M - \varepsilon.$$

Поэтому  $\|F\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |Fx| > M - \varepsilon$  и, так как  $\varepsilon$  есть произвольное число, отсюда и из раньше полученной оценки сверху для  $\|F\|$  следует

$$\|F\| = M = \max_t |f(t)|. \quad (4.2.6)$$

3. Пусть  $X$  есть пространство  $V$ . Рассмотрим функционал

$$Fx = \int_a^b f(t) dx(t), \quad (4.2.7)$$

где  $f(t)$  — непрерывная на  $[a, b]$  функция, и покажем, что

$$\|F\| = \max_t |f(t)|, \quad (4.2.8)$$

$$|Fx| = \left| \int_a^b f dx \right| \leq \max_t |f(t)| \operatorname{Var} x(t) = \max_t |f(t)| \|x\|.$$

Будем считать, что  $\max |f(t)|$  достигается в некоторой точке  $t_0$  и предположим, что  $t_0$  лежит внутри  $[a, b]$ . Взяв

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0, \\ 0,5 & \text{при } t = t_0, \\ 1 & \text{при } t > t_0, \end{cases}$$

можно убедиться, что полученная верхняя оценка для  $|F(x)|$  достигается. Этим (4.2.8) доказано.

### § 3. Сходимость последовательности линейных операторов

Пусть  $X$  и  $Y$  — банаховы пространства. Рассмотрим последовательность линейных операторов  $H_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), заданных на  $X$ , значения которых принадлежат  $Y$ . Последовательность  $H_n$  будет называться *сходящейся*, если при всяком  $x \in X$  будет сходиться последовательность элементов  $y_n = H_n x$  (в пространстве  $Y$ ). Обозначим  $\lim H_n x = y = Hx$ . Оператор  $H$  — аддитивный. Действительно,

если в равенстве  $H_n(x_1 + x_2) = H_n x_1 + H_n x_2$  перейти к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , то получим  $H(x_1 + x_2) = Hx_1 + Hx_2$ . Но можно показать, что оператор  $H$  будет линейным. Докажем предварительную лемму.

**Лемма.** Если последовательность операторов  $H_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) сходится, то нормы их  $\|H_n\|$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ограничены в совокупности:

$$\|H_n\| \leq M. \quad (4.3.1)$$

**Доказательство.** Допустим противоположное. Множество элементов  $x$ , удовлетворяющих условию  $\|x - x_0\| \leq \varepsilon$ , назовем *замкнутым шаром* радиуса  $\varepsilon$  с центром  $x_0$  и обозначим  $S(x_0, \varepsilon)$ . Покажем, что  $\|H_n x\|$  не могут быть ограничены в совокупности ни в каком замкнутом шаре. Действительно, пусть

$$\|H_n x\| \leq K \quad (4.3.2)$$

для  $n = 1, 2, \dots$  и при всяких  $x$  из шара  $S(x_0, \varepsilon)$ . Для любого  $x$  из  $X$  элемент  $x' = \frac{\varepsilon}{\|x\|} x + x_0$  принадлежит  $S(x_0, \varepsilon)$ . Поэтому

$$\|H_n x'\| = \left\| \frac{\varepsilon}{\|x\|} H_n x + H_n x_0 \right\| \leq K \quad \text{и} \quad \frac{\varepsilon}{\|x\|} \|H_n x\| - \|H_n x_0\| \leq K.$$

Отсюда

$$\|H_n x\| \leq \frac{K + \|H_n x_0\|}{\varepsilon} \|x\|.$$

Последовательность элементов  $H_n x_0$  сходится и нормы их  $\|H_n x_0\|$  ограничены в совокупности. Должно, следовательно, существовать число  $K_1$ , не зависящее от  $n$  и  $x$ , такое, что  $\|H_n x\| \leq K_1 \|x\|$ . Поэтому

$$\|H_n\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|H_n x\| \leq K_1,$$

а это противоречит допущению и неравенство (4.3.2) не может быть верным.

Возьмем любой замкнутый шар  $S_0(x_0, \varepsilon)$ . В нем последовательность  $\|H_n x\|$  неограничена. Найдется, следовательно, такой оператор  $H_{n_1}$  и такой элемент  $x_1 \in S_0$ , что  $\|H_{n_1} x_1\| > 1$ . Ввиду непрерывности оператора  $H_{n_1}$  это неравенство будет выполняться в некотором замкнутом шаре  $S_1(x_1, \varepsilon_1)$ , содержащемся в  $S_0$ . По аналогичной причине найдется оператор  $H_{n_2}$  и элемент  $x_2 \in S_1$  такие, что  $\|H_{n_2} x_2\| > 2$  и т. д. Можно считать, что  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Для построенной последовательности элементов  $x_1, x_2, \dots$  будет выполняться признак Больцано — Коши. Пространство  $X$  полное и последовательность будет сходиться к некоторому элементу  $x^* \in X$ :  $x_n \rightarrow x^*$ ,  $n \rightarrow \infty$ ;  $x^*$  будет принадлежать всем сферам  $S_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). При этом для элемента  $x^*$   $\|H_{n_k} x^*\| > k$ . Последнее же противоречит тому, что последовательность  $H_n x$  сходится для любого  $x \in X$ .

На основании леммы просто доказывается линейность предельного оператора  $H$ . Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$  в неравенстве  $\|H_n x\| \leq M \|x\|$ , получим  $\|Hx\| \leq M \|x\|$ . Оператор  $H$  ограничен и, ввиду аддитивности, непрерывен и линеен.

Условия, которым должны удовлетворять операторы последовательности  $H_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) для того, чтобы она была сходящейся, указываются в следующей теореме С. Банаха.

**Теорема 1.** *Для того чтобы последовательность линейных операторов  $H_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) была сходящейся, необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

- 1) *нормы операторов  $\|H_n\|$  ограничены в совокупности,*
- 2) *сходимость  $H_n x$  имеет место для всякого  $x$  из множества  $E$ , всюду плотного в  $X^*$ ).*

Доказательство. Необходимость второго условия очевидна, необходимость же первого вытекает из леммы.

Достаточность условий может быть проверена следующим путем. Пусть  $\|H_n\| \leq M$ . Возьмем произвольный  $x \in X$  и найдем такой элемент  $\bar{x} \in E$ , что  $\|x - \bar{x}\| < \frac{\varepsilon}{3M}$ . Последовательность  $H_n \bar{x}$  сходится по условию 2 и для больших  $n$  будет  $\|H_{n+m} \bar{x} - H_n \bar{x}\| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|H_{n+m} x - H_n x\| &\leq \|H_{n+m} x - H_{n+m} \bar{x}\| + \|H_{n+m} \bar{x} - H_n \bar{x}\| + \\ &+ \|H_n \bar{x} - H_n x\| \leq 2M \|x - \bar{x}\| + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Поэтому последовательность  $H_n x$  выполняет условие Больцано — Коши и, ввиду полноты  $Y$ , существует при каждом  $x \in X$  предел  $y = Hx = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n x$ .

Как показано выше, предельный оператор  $H$  линейный.

## Литература

Люстерник Л. А., Основные понятия функционального анализа, Усп. матем. наук, вып. I, 1936.

Люстерник Л. А. и Соболев В. И., Элементы функционального анализа, М., «Наука» (1965).

Канторович Л. В., Функциональный анализ и прикладная математика, Усп. матем. наук 3, вып. 6 (28) (1948).

---

\*) Множество  $E$  называется *всюду плотным* в  $X$ , если каждый элемент  $x \in X$  может быть приближен по норме сколь угодно точно элементами из  $E$ .

# ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

## ГЛАВА 5

### КВАДРАТУРНЫЕ СУММЫ И ЗАДАЧИ, С НИМИ СВЯЗАННЫЕ. ОСТАТОК ПРИБЛИЖЕННОЙ КВАДРАТУРЫ

#### § 1. Квадратурные суммы

Задачу нахождения численного значения однократного интеграла, ввиду известного ее геометрического значения, часто называют, для сокращения речи, квадратурой. В книге изучаются такие методы квадратур, которые позволяют приближенно вычислить интеграл при помощи конечного числа значений интегрируемой функции и производных от нее. Эти методы являются универсальными и могут применяться там, где другие методы вычисления интегралов оказываются бессильными. Кроме того, применение этих методов во многих случаях требует затраты меньшего вычислительного труда, сравнительно с другими методами.

Рассмотрим интеграл вида

$$\int_a^b p(x) f(x) dx;$$

$[a, b]$  — любой конечный или бесконечный отрезок числовой оси,  $f$  — произвольная функция некоторого класса. Для упрощения изложения допустим, в границах этой главы, что все функции  $f$  непрерывны,  $p(x)$  есть некоторая фиксированная функция. Ее мы будем предполагать измеримой на  $[a, b]$ , неэквивалентной нулю и такой, что произведение ее на любую функцию  $f$  суммируемо на  $[a, b]$ . Какое-либо предположение о знаке  $p(x)$  в ближайшем изложении нам не потребуется.

Наиболее распространенными в приложениях являются квадратурные формулы, позволяющие приближенно находить значение интеграла в форме линейной комбинации нескольких значений функции

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (5.1.1)$$

Сумма  $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$  ниже будет называться *квадратурной суммой*.

Равенства вида (5.1.1) получили название формул механических квадратур\*). Они содержат следующие  $2n+1$  параметров, которыми можно распорядиться при их построении:  $n$  абсцисс, или «узлов»  $x_k$ ,  $n$  коэффициентов  $A_k$  и число узлов  $n$ . Все эти параметры надлежит выбрать так, чтобы формула (5.1.1) давала бы «достаточно малую погрешность» для всех функций  $f$  из некоторого широкого класса. При описании идей, связанных с построением квадратурных сумм, мы не будем точно определять, что следует понимать под «малой погрешностью» и сколь широким должен быть класс функций  $f$ . Точное содержание этих слов будет выяснено ниже.

Непосредственно ясно, что чем большее значение имеет  $n$ , тем большей точности можно достигнуть в равенстве (5.1.1) за счет выбора  $x_k$  и  $A_k$ . Поэтому, при построении формул приближенных квадратур,  $n$  считают произвольным, но фиксированным натуральным числом.

При применении (5.1.1) наибольшее количество труда, обычно, затрачивается на нахождение значений  $f(x_k)$  ( $k=1, \dots, n$ ). После того, как  $f(x_k)$  найдены, составление квадратурной суммы  $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$ , если  $n$  не будет очень большим, выполняется сравнительно легко. Поэтому естественно стремиться к тому, чтобы достигнуть нужной точности вычислений с возможно малым числом  $n$  узлов  $x_k$ . Для построения же квадратурных сумм это равносильно тому, чтобы при заданном  $n$  постараться возможно лучшим образом воспользоваться выбором  $x_k$  и  $A_k$  для повышения точности формулы (5.1.1). До настоящего времени исследования проводились преимущественно в следующих направлениях.

\*) Формуле (5.1.1) легко придать механический смысл. Введем величину

$$P = \int_a^b p dx \text{ и запишем (5.1.1) в виде } P^{-1} \int_a^b p f dx \approx \sum_{k=1}^n B_k f(x_k). \text{ Здесь}$$

коэффициенты  $B_k$  будут отвлеченными числами. Условимся толковать их как «веса», приписываемые соответствующим значениям  $f(x_k)$ . Если требовать, чтобы равенство было верным, когда  $f$  есть величина постоянная,

то  $B_k$  должны быть подчинены условию  $\sum_{k=1}^n B_k = 1$ . Сумма  $\sum_{k=1}^n B_k f(x_k)$  тогда

будет иметь смысл среднего взвешенного значения, составленного из  $f(x_k)$ . Задача построения равенства приводится к такому нахождению весов  $B_k$ , чтобы среднее взвешенное значение из  $f(x_k)$  было приближенно равно сред-

нему интегральному значению  $f$  на отрезке  $[a, b]$ :  $P^{-1} \int_a^b p f dx$ .



1. Допустим, что нам заранее задан некоторый класс  $F$  функций  $f$ . Наряду с ним рассмотрим систему функций

$$\omega_m(x) \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (5.1.2)$$

таких, что произведения  $p(x)\omega_m(x)$  суммируемы на  $[a, b]$ . Образует линейную комбинацию

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \omega_k(x).$$

При вычислении интеграла  $\int_a^b p f dx$  за «расстояние» между  $f$  и  $s_n$  можно принять величину

$$\rho(f, s_n) = \int_a^b |p(f - s_n)| dx. \quad (5.1.3)$$

Систему (5.1.2) будем считать полной в классе  $F$ , т. е. такой, что для каждой функции  $f \in F$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует такая линейная комбинация  $s_n$ , для которой  $\rho(f, s_n) < \varepsilon$ .

Ввиду неравенства

$$\left| \int_a^b p f dx - \int_a^b p s_n dx \right| \leq \int_a^b |p(f - s_n)| dx = \rho(f, s_n),$$

отсюда вытекает, что интеграл  $\int_a^b p f dx$  может быть вычислен со сколь угодно высокой точностью, если интегрируемую функцию  $f$  заменить надлежаще выбранной линейной комбинацией  $s_n$ .

При этом, очевидно, можно достигнуть тем большей точности вычислений, чем большее число первых функций  $\omega_k$  брать при образовании  $s_n$ .

Можно ожидать, что если мы выбором узлов  $x_k$  и коэффициентов  $A_k$  в формуле (5.1.1) достигнем хорошей точности в интегрировании функций  $\omega_n$ , то тогда формула (5.1.1) должна будет также дать хороший по точности результат при вычислении интеграла от всякой функции  $f \in F$ . Эти несложные соображения имеют, разумеется, только наводящее значение и погрешность построенной формулы должна быть подвергнута точному анализу и оценке. Но они позволяют указать простой принцип выбора  $x_k$  и  $A_k$ : будем стремиться выбором  $x_k$  и  $A_k$  добиться того, чтобы формула (5.1.1) давала точный результат для возможно большего числа первых функций  $\omega_n(x)$ .

Говорят, что равенство (5.1.1) имеет *степень точности*  $m$  относительно функций (5.1.2), если оно верно для  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ :

$$\int_a^b p \omega_i dx = \sum_{k=1}^n A_k \omega_i(x_k) \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

и не верно для  $\omega_{m+1}$ . Указанный выше путь выбора  $x_k$  и  $A_k$  есть путь повышения степени точности равенства (5.1.1). С этой точки зрения, особый интерес имеют формулы приближенных квадратур, которые обладают наивысшей возможной степенью точности. Такие формулы мы и будем иметь в виду в ближайшем изложении.

Если класс  $F$  задан, то при построении равенства (5.1.1), служащего для интегрирования функций  $f$ , остается еще произвол в выборе системы функций  $\omega_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Требование полноты, которому должна удовлетворять система, не вполне определяет ее и оставляет еще широкие возможности выбора  $\omega_n$ .

Приближенные квадратурные формулы, которые имеются в виду сейчас, учитывают свойства функций  $\omega_n$ . Если мы хотим, чтобы такие формулы давали хорошую точность, нужно  $\omega_n$  выбрать так, чтобы свойства  $\omega_n$  были согласованы со свойствами  $f$ , и можно думать, что погрешность (5.1.1) будет тем меньше чем более точное приближение при помощи линейной комбинации  $s_n$  будет допускать функция  $f$  для фиксированного  $n$ .

Приведем теперь примеры выбора  $\omega_n$ . Пусть  $[a, b]$  есть любой конечный отрезок. Известно, что какова бы ни была функция  $f$ , непрерывная на  $[a, b]$ , для всякого  $\varepsilon > 0$  существует многочлен  $P(x)$ , отличающийся от  $f(x)$  при любых  $x \in [a, b]$  меньше чем на  $\varepsilon$ :

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Это и есть свойство полноты алгебраических многочленов в пространстве непрерывных функций  $C$ . Отсюда сразу же следует полнота системы многочленов и в смысле метрики (5.1.3).

Примем систему степеней  $x$ :  $1, x, x^2, \dots$  — за функции  $\omega_n$  и будем говорить, что равенство (5.1.1) имеет *алгебраическую степень точности*  $m$ , если оно верно для всевозможных многочленов степени  $m$  и не верно для многочленов степени  $m+1$ . Это равносильно тому, что равенство

$$\int_a^b p x^i dx = \sum_{k=1}^n A_k x_k^i$$

выполняется для  $i = 0, 1, \dots, m$  и не выполняется для  $i = m+1$ .

Можно ожидать, что (5.1.1) будет иметь тем меньшую погрешность для многих непрерывных на  $[a, b]$  функций, чем выше будет его алгебраическая степень точности.

Система степеней  $x^n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) является достаточно удобным основанием для построения квадратурных формул наивысшей степени точности для любого конечного отрезка  $[a, b]$ .

Допустим теперь, что отрезок интегрирования бесконечный, например, пусть это есть отрезок  $0 \leq x < \infty$ . Возьмем какое-нибудь подмножество  $F$  функций  $f$ , непрерывных на  $[0, \infty)$ . На каждом конечном отрезке  $0 \leq x \leq b < \infty$  можно построить многочлен  $P(x)$ , приближающий  $f$  равномерно с любой наперед заданной точностью. Но  $P(x)$  может не давать равномерного приближения  $f$  на всей полуоси и разность  $f - P$  при больших  $x$  может иметь большие значения. Несмотря на это, если вес  $p(x)$  достаточно быстро убывает при  $x \rightarrow \infty$ , может оказаться, что для любой  $f \in F$  интеграл

$$\int_0^{\infty} |p(f - P)| dx$$
 может быть сделан сколь угодно малым, и система

степеней  $x^n$  тогда будет полной в классе  $F$  по метрике (5.1.3). В этом случае квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности также могут применяться для приближенного вычи-

сления интегралов вида 
$$\int_0^{\infty} p f dx.$$
 С формулами такого рода мы ознакомимся ниже более подробно.

В связи с этим мы хотим остановить внимание читателя на одном примере, более отчетливо выясняющем, как при выборе функций  $\omega_n$  их свойства следует согласовать с классом  $F$  интегрируемых функций.

Рассмотрим функции  $f$ , непрерывные на отрезке  $0 \leq x < \infty$ , ограниченные там и имеющие предельное значение при  $x \rightarrow \infty$ . Каждый многочлен  $P(x)$ , степень которого больше нуля, неограниченно возрастает при  $x \rightarrow \infty$ , при этом порядок роста тем выше, чем старше степень многочлена. Поведение многочлена на полуоси  $[0, \infty)$  существенно отличается от поведения ограниченных функций, и многочлены, по-видимому, нельзя признать удачным орудием для приближения таких функций на  $[0, \infty)$ . Для некоторых весовых функций  $p(x)$  может оказаться, что приближенные квадратуры наивысшей степени точности, в основание которых положена система степеней  $x^k$ , будут иметь медленную сходимость при  $n \rightarrow \infty$  к точному значению интеграла и для достижения требуемой точности может потребоваться большое число узлов.

Для приближения функций рассматриваемого типа более подходят не многочлены, а рациональные функции, ограниченные на  $[0, \infty)$ . Можно взять, например, рациональные дроби  $\omega_k(x) = (1 + x)^{-k}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ). Весьма вероятно, что если построить правила квадратур наивысшей степени точности с указанными  $\omega_k(x)$ , то они должны, вообще говоря, дать лучший результат при таком же числе узлов  $n$

и обладать более быстрой сходимостью к точному значению интеграла.

Остановимся, наконец, еще на одном случае выбора  $\omega_n(x)$ . Возьмем  $2\pi$ -периодические функции и допустим, что вычислению подлежат интегралы вида  $\int_0^{2\pi} f(x) dx$ . За функции  $\omega_n$  тогда естественно выбрать тригонометрические функции  $\cos kx$ ,  $\sin kx$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

2. Допустим, что задан класс  $F$  функций  $f$ . Постараемся построить квадратурную формулу (5.1.1), которую можно было бы признать в смысле, выясняемом несколькими строками ниже, «наилучшей» для заданного класса. Для каждой функции  $f$  погрешность формулы (5.1.1) имеет значение

$$R(f) = \int_a^b p f dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

За величину, характеризующую точность квадратурной формулы для всех функций  $f$ , может быть взята верхняя грань  $|R(f)|$

$$R = \sup_f |R(f)|.$$

Здесь  $R$  зависит от  $x_k$  и  $A_k$ . Желая достигнуть возможно лучшей точности для всех функций  $f \in F$ , можно выбирать  $x_k$  и  $A_k$  так, чтобы  $R$  имело бы наименьшее возможное значение. Такую формулу ниже будем называть *формулой с наименьшей оценкой остатка в классе  $F$* .

3. Указанные сейчас два направления в проблеме выбора узлов и коэффициентов, разумеется, не являются единственными. Можно строить квадратурные формулы, подчиняя выбор узлов и коэффициентов другим целям. Укажем еще на одну задачу такого рода. Предварительно заметим, что сделать формулу (5.1.1) верной для функции, сохраняющей постоянное значение на  $[a, b]$ , можно только за счет выбора коэффициентов  $A_k$ . Если потребовать, чтобы (5.1.1) была верной для  $f \equiv 1$ , то получится следующее условие:

$$\sum_{k=1}^n A_k = \int_a^b p(x) dx. \quad (5.1.4)$$

Предположим, что значения  $f(x_k)$  функции  $f$ , входящие в квадратурную сумму, находятся из измерений и содержат случайные погрешности. Допустим, кроме того, что все  $f(x_k)$  получены в результате измерений одинаковой точности.

Значение квадратурной суммы также будет содержать случайную погрешность. Можно поставить себе задачей так выбрать коэффици-

циенты  $A_k$ , чтобы квадратурная сумма  $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$ , при выполнении условия (5.1.4), имела бы наименьшую квадратичную погрешность. Известно, что если аргументы  $z_1, \dots, z_n$  линейной функции  $y = a_1 z_1 + \dots + a_n z_n$  есть случайные величины, подчиняющиеся нормальным законам распределения с одной и той же квадратичной погрешностью, и если коэффициенты линейной функции подчинены условию  $\sum_{k=1}^n a_k = 1$ , то средняя квадратичная погрешность суммы будет иметь наименьшее значение в том случае, когда все коэффициенты равны между собой \*). Поэтому квадратурная формула с равными коэффициентами

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx C [f(x_1) + \dots + f(x_n)] \quad (5.1.5)$$

будет иметь наименьшую квадратичную погрешность. Вместе с тем такие формулы особенно удобны при графических вычислениях, так как сумма ординат может быть снята с чертежа при помощи простейших графических приборов.

Упомянем еще об одном требовании, которое должно быть обязательно предъявлено к квадратурным суммам и имеет большое значение в приложениях. При вычислениях, почти всегда, приходится иметь дело с приближенными значениями  $f(x_k)$ , верными на некоторое число значащих цифр.

Пусть все значения  $f(x_k)$  известны с погрешностями, не превосходящими по абсолютной величине числа  $\varepsilon$ . Вычисляя при помощи приближенных значений  $f(x_k)$  квадратурную сумму  $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$ , мы получим ее значение с погрешностью, которая должна быть оценена величиной  $\varepsilon \sum_{k=1}^n |A_k|$ . Такая оценка является точной и не может быть уменьшена. Если сумма  $\sum_{k=1}^n |A_k|$  велика, то даже малые погрешности

---

\*) Если случайные переменные  $z_1, \dots, z_n$  подчиняются нормальным законам распределения со средними квадратичными погрешностями  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  и  $y$  есть линейная функция от них:  $y = a_1 z_1 + \dots + a_n z_n$ , то  $y$  также подчиняется нормальному закону распределения со средней квадратичной погрешностью  $\Sigma = (a_1^2 \sigma_1^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2)^{1/2}$  (см., например, С. Н. Бернштейн, Теория вероятностей, Гостехиздат, 1946, стр. 269—272). Для  $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_n = \sigma$  будем иметь  $\Sigma = \sigma(a_1^2 + \dots + a_n^2)^{1/2}$  и, при условии  $a_1 + \dots + a_n = 1$ ,  $\Sigma$  будет иметь минимум в том случае, когда все  $a_k$  одинаковы,

в значениях  $f(x_k)$  могут вызвать большую погрешность в приближенном значении интеграла. При построении квадратурных формул, поэтому, всегда стремятся к тому, чтобы сумма абсолютных величин ее коэффициентов имела бы возможно малое значение.

В одном важном частном случае легко указать условие, при котором  $\sum_{k=1}^n |A_k|$  будет иметь наименьшее возможное значение. Будем считать вес  $p(x)$  неотрицательной функцией  $p(x) \geq 0$ ,  $x \in [a, b]$ . Кроме того, предположим, что квадратурная формула верна для  $f \equiv 1$ , что равносильно равенству (5.1.4) для коэффициентов  $A_k$ . Тогда, очевидно,  $\sum_{k=1}^n |A_k|$  будет иметь наименьшее значение в том случае, когда все коэффициенты  $A_k$  будут положительными  $A_k > 0$ . Этот факт является одной из причин, в силу которых квадратурные формулы с положительными коэффициентами имеют особо важное значение для приложений.

## § 2. Об остатке приближенной квадратуры и его представлении

Значение остатка квадратуры

$$R(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (5.2.1)$$

зависит как от выбора квадратурной формулы, которая определяется узлами  $x_k$  и коэффициентами  $A_k$ , так и от свойств интегрируемой функции  $f$ . Формула (5.2.1) есть одно из возможных представлений остатка, но оно недостаточно в том отношении, что при помощи него часто бывает весьма трудно проследить, какое влияние на  $R(f)$  оказывают те или иные структурные \*) свойства  $f$ . Выражение (5.2.1) рассчитано на весьма широкий класс функций. Оно верно при любой

функции  $f$ , для которой имеет смысл  $\int_a^b p f dx$  и которая имеет конечные значения в узлах  $x_k$ . Ввиду своей общности, оно не учитывает других свойств  $f$ .

Чтобы упростить задачу исследования  $R(f)$ , полезно построить иные представления остатка, которые позволяли бы легко проследить влияние, оказываемое на величину  $R(f)$  такими свойствами функции  $f$ .

---

\*) Под «структурными свойствами» функции понимаются такие свойства, как ограниченность изменения, абсолютная непрерывность, выполнение условия Липшица, принадлежность к тому или иному классу дифференцируемости и т. п.

как порядок ее дифференцируемости, степень удаленности от  $[a, b]$  особых точек  $f$  и т. п. Среди представлений этого вида особое значение имеют представления, характерные для тех или иных структурных классов функций.

Будем считать, что нам задано множество  $F$  интегрируемых функций  $f$ . Остаток  $R(f)$  есть функционал, определенный на множестве  $F$ . В функциональном анализе известны теоремы об общих формах линейных функционалов, определенных на некоторых конкретных линейных пространствах. Этими теоремами можно было бы воспользоваться для построения представления остаточных членов  $R(f)$  во многих случаях множеств  $F^*$ ).

Для задач, которые будут рассматриваться в дальнейшем, чтобы найти нужные представления остатка  $R(f)$ , достаточно было прибегнуть к простым средствам классического анализа, более быстро приводящим к цели.

Если рассматривается класс  $F$  функций, обладающих каким-либо структурным свойством, то часто можно указать такую формулу, которая способна представить всякую функцию класса  $F$  и может представлять функции только этого класса. Такую формулу называют *характерным представлением класса  $F$*  или его *структурной формулой*.

Если структурная формула класса  $F$  известна, то при помощи нее, принципиально говоря, могут быть получены все нужные сведения о классе  $F$ , в частности, может быть построено представление остатка квадратуры, характерное для функций класса  $F$ . Такие представления остатка будут ниже строиться каждый раз, когда это потребуется по ходу рассуждений.

Сейчас же мы ограничимся только одним примером, поясняющим все сказанное выше.

Говорят, что функция  $f$  принадлежит классу  $C_r[a, b]$ , если она  $r$  раз непрерывно дифференцируема на  $[a, b]$ . Характерное представление функций этого класса доставляет формула Тейлора. Если  $f \in C_r[a, b]$  и  $\alpha$  — любая точка отрезка  $[a, b]$ , то

$$f(x) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(\alpha)}{i!} (x - \alpha)^i + \int_{\alpha}^x f^{(r)}(t) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt. \quad (5.2.2)$$

Для дальнейшего удобно заменить интеграл с переменной границей на определенный интеграл по отрезку  $[a, b]$ . Это можно сделать, если ввести «гасящую» функцию, позволяющую уничтожить в определенном интеграле лишние участки интегрирования. Определим

---

\*) См. литературу, указанную в конце главы.

$E(x)$  равенствами

$$E(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0,5 & \text{при } x = 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Легко проверить, что равенство (5.2.2) может быть записано в форме

$$f(x) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i + \int_a^b f^{(r)}(t) \{E(x-t) - E(a-t)\} \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt. \quad (5.2.3)$$

В правую часть (5.2.3) входят  $r$  численных параметров  $f^{(i)}(a)$  ( $i=0, 1, \dots, r-1$ ) и функциональный параметр  $f^{(r)}(t)$ , являющийся непрерывной функцией на  $[a, b]$ .

Всякая функция  $f$  из  $C_r[a, b]$  представима в форме (5.2.3). Наоборот, каковы бы ни были численные параметры  $f^{(i)}(a)$  ( $i=0, 1, \dots, r-1$ ) и какова бы ни была непрерывная на  $[a, b]$  функция  $f^{(r)}(t)$ , функция  $f(x)$ , определенная равенством (5.2.3), принадлежит  $C_r[a, b]$ .

Если промежуток интегрирования не совпадает со всей числовой осью, то часто, чтобы не вводить лишний параметр, за  $a$  принимают один из концов  $[a, b]$ . Например, если за  $a$  принять левый конец  $a$ , то формула (5.2.3) упростится и примет вид:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i + \int_a^b f^{(r)}(t) E(x-t) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt, \quad (5.2.4)$$

$$r \geq 1.$$

Если это не будет вызывать неясности, в обозначениях классов функций знак отрезка  $[a, b]$  будет опускаться. Возвратимся к остатку квадратуры (5.2.1);  $R(f)$  является аддитивным функционалом, определенным на некотором множестве функций.

Пусть интегрируемая функция  $f$  принадлежит классу  $C_r$ . Ниже мы попытаемся определить, какое влияние на величину остатка и на сходимость квадратурного процесса может оказать  $r$ -кратная дифференцируемость  $f$ . Для этой цели целесообразно получить представление  $R(f)$ , характерное для класса  $C_r$ . Оно может быть найдено,



если в (5.2.1) вместо  $f$  внести ее выражение (5.2.3):

$$R(f) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} R[(x-a)^i] + \\ + R \left[ \int_a^b f^{(r)}(t) \{E(x-t) - E(a-t)\} \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt \right]. \quad (5.2.5)$$

Будем считать, что в двукратном интеграле

$$\int_a^b p(x) \int_a^b f^{(r)}(t) \{E(x-t) - E(a-t)\} \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt dx,$$

входящем в последний член правой части равенства, допустима переменная порядка интегрирования. При принятых предположениях о весовой функции  $p(x)$ , это, наверное, возможно, если  $[a, b]$  конечный отрезок. Тогда (5.2.5) преобразуется и примет форму

$$R(f) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} R[(x-a)^i] + \int_a^b f^{(r)}(t) K(t) dt, \quad (5.2.6)$$

где ядро остатка  $K(t)$  имеет вид

$$K(t) = \int_a^b p(x) \{E(x-t) - E(a-t)\} \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dx - \\ - \sum_{k=1}^n A_k \{E(x_k-t) - E(a-t)\} \frac{(x_k-t)^{r-1}}{(r-1)!} \dots \quad (5.2.7)$$

Если считать  $t \neq a$  и  $t \neq x_k$  ( $k=1, \dots, n$ ), то для  $K(t)$  легко получить следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} t < a, \quad K(t) &= - \int_a^t p(x) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dx + \sum_{x_k < t} A_k \frac{(x_k-t)^{r-1}}{(r-1)!}, \\ t > a, \quad K(t) &= \int_t^b p(x) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dx - \sum_{x_k > t} A_k \frac{(x_k-t)^{r-1}}{(r-1)!}. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.8)$$

Аналогично может быть построено представление остатка для других классов функций, когда известны характерные их представления, например, для аналитических функций.

В главах 11 и 12 мы увидим, что специализированные представления остатка, о которых говорилось выше, позволяют достаточно просто решить задачу о нахождении точных оценок  $R(f)$  и о сходимости квадратурных процессов для некоторых классов функций.

### Л и т е р а т у р а

Radon, Restausdrücke bei Interpolations- und Quadraturformeln durch bestimmte Integrale, Monatshefte für Mathematik und Physik **42** (1935), 389—396.

Ремез Е. Я., 1) О некоторых классах ... Труды Инст. матем. АН УССР **4** (1940), 47—82. 2) Об остаточных членах некоторых формул приближенного анализа, ДАН СССР **26** (1940), 130—134.

Sard A., Integral Representations of Remainders, Duke Math. Journ. **15**, 333—345.

Kneschke A., Theorie der genäherten Quadratur, Journ. reine und angew. Math. **187**, 115—128.

## ГЛАВА 6

# ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, ДЛЯ КОТОРЫХ ИЗВЕСТНА ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ. ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ КВАДРАТУРЫ

### § 1. О содержании задачи

Настоящая глава посвящена теории интерполяционных квадратур и изложению некоторых путей их улучшения. В практике вычислений нередко возникает потребность нахождения численного значения интеграла в том случае, когда заранее известна или по каким-либо причинам предварительно составляется таблица значений  $f(x_k)$  интегрируемой функции  $f$  в некоторой системе точек  $x_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). В такой задаче при построении или выборе правила интегрирования (5.1.1) мы сильно стеснены в возможности избирать узлы  $x_k$  формулы: мы можем только либо взять все табличные узлы, либо часть из них опустить. Последнее равносильно тому, что некоторые из  $A_k$  мы заранее считаем равными нулю. После того как узлы нами указаны, можно рассмотреть вопрос о выборе численных значений коэффициентов  $A_k$ . Будем иметь в виду сначала тот случай, когда берутся все табличные узлы без пропусков.

Задачу выбора  $A_k$  следует, по-видимому, рассмотреть в первую очередь в предположении, что на  $A_k$  не наложено никаких ограничений и мы имеем право вполне произвольно распорядиться их численными значениями.

Если  $A_k$  выбирать так, чтобы правило (5.1.1) имело наивысшую возможную степень точности, то мы придем к интерполяционным квадратурам. Теория их излагается в последующих параграфах настоящей главы. Сейчас мы заранее укажем, что интерполяционные правила интегрирования далеко не всегда способны давать хорошую точность. Условия, при которых ими можно успешно пользоваться, будут выясняться ниже.

Если мы хотим построить правила интегрирования, свободные от недостатков интерполяционных квадратур, мы можем, во-первых, сделать степень точности правила (5.1.1) меньше интерполяционной и оставить некоторые коэффициенты  $A_k$  произвольными, а затем их

выбрать так, чтобы улучшить свойства правила, например, пытаться сделать все коэффициенты  $A_k$  положительными или по возможности уменьшить их абсолютные величины и т. д.

Во-вторых, мы можем, как говорилось выше, пропустить некоторые из табличных узлов  $x_k$  и выполнить интегрирование с более короткой таблицей значений  $f$ . Это позволяет, по крайней мере в частных случаях, построить правила интегрирования, свободные от некоторых недостатков интерполяционных квадратур. Если встать на этот путь, то следует указать способ выбора табличных узлов, который позволил бы надеяться на получение удовлетворительной точности интегрирования.

Выбор  $x_k$  тесно связан с вопросом о сходимости квадратурного процесса и о нем мы будем говорить в § 6 этой главы.

На практике наиболее часто приходится встречаться с таблицами значений функции  $f$  в равноотстоящих точках. Этому случаю и будет преимущественно посвящено все последующее изложение.

## § 2. Интерполяционные квадратурные формулы и их остаточные члены

Для построения квадратурных сумм часто пользуются интерполированием функции. Во многих случаях построенные таким путем квадратурные формулы обладают хорошей точностью и достаточно удобны для применений.

Выберем на отрезке интегрирования  $[a, b]$   $n$  произвольных точек  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и интерполируем функцию  $f$  по ее значениям в этих точках \*)

$$f(x) = P(x) + r(x), \quad (6.2.1)$$

$$P(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} f(x_k), \quad \omega(x) = (x-x_1)\dots(x-x_n). \quad (6.2.2)$$

Здесь  $r(x)$  — остаток интерполирования.

Точное значение интеграла  $\int_a^b p f dx$  будет

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \int_a^b p(x) P(x) dx + \int_a^b p(x) r(x) dx.$$

---

\*) Мы считаем, что функция  $f$  определена только в точках отрезка  $[a, b]$  и должны поэтому предполагать  $x_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) принадлежащими  $[a, b]$ . Если  $f$  известна и вне отрезка интегрирования, то  $x_k$  не обязательно все должны принадлежать  $[a, b]$ . Квадратурные суммы, содержащие узлы, расположенные вне  $[a, b]$ , особенно часто применяются при интегрировании аналитических функций.

Если интерполирование (6.2.1) было достаточно точным и остаток  $r(x)$  имел малые значения всюду на отрезке  $[a, b]$ , то вторым членом в предыдущем равенстве можно пренебречь. После этого получится приближенное равенство

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (6.2.3)$$

где

$$A_k = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} dx. \quad (6.2.4)$$

Квадратурные формулы (6.2.3), коэффициенты которых имеют значения (6.2.4), называются *интерполяционными*. Они могут быть охарактеризованы следующей простой теоремой.

**Теорема 1.** *Для того чтобы квадратурная формула (5.1.1) была интерполяционной, необходимо и достаточно, чтобы она была точной для всевозможных многочленов степени не выше  $n-1$ .*

**Доказательство.** Действительно, всякий многочлен  $P(x)$  степени  $\leq n-1$  может быть представлен в форме  $P(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} P(x_k)$ .

Если коэффициенты  $A_k$  имеют значения (6.2.4), то равенство (6.2.3), очевидно, будет точным для  $P(x)$ .

Заметим, что в указанном выше представлении  $P(x)$  значения  $P(x_k)$  могут быть любыми числами. Требование, чтобы (6.2.3) было точным для всех многочленов степени  $\leq n-1$ , равносильно тому, что при всяких  $P(x_k)$  должно быть

$$\int_a^b p(x) \sum_{k=1}^n \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} P(x_k) dx = \sum_{k=1}^n A_k P(x_k).$$

Но тогда коэффициенты  $A_k$  должны иметь значения (6.2.4) и формула (6.2.3) будет интерполяционной.

Как видно из приведенной теоремы, коэффициенты  $A_k$  квадратурной формулы вполне определяются условием, чтобы формула давала точный результат всякий раз, когда  $f$  есть многочлен степени  $\leq n-1$ . Узлы же  $x_k$  квадратурной формулы при этом остаются произвольными и возможностью их выбора можно воспользоваться для достижения тех или иных целей.

Для остатка интерполяционной квадратуры верно все, что говорилось в § 2 главы 5 об остатке общей квадратурной формулы (5.1.1), но, кроме того, могут быть получены другие, немного более глубокие результаты.

Остаток квадратуры (6.2.3) равен интегралу от остатка  $r(x)$

$$R(f) = \int_a^b p(x) r(x) dx = \int_a^b p(x) \omega(x) f(x, x_1, \dots, x_n) dx. \quad (6.2.5)$$

Это дает возможность воспользоваться, при его исследовании, всеми известными теоремами об остатке интерполирования. Например, если  $f(x)$  будет  $n$ -кратно непрерывно дифференцируемой на  $[a, b]$ , то  $r(x)$  можно представить формулой вида (3.2.8). При принятых сейчас обозначениях получится следующее выражение остатка  $R(f)$ :

$$R(f) = \int_a^b p(x) \omega(x) \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n f^{(n)} \left( x + \sum_{v=1}^n t_v (x_v - x_{v-1}) \right) dx, \\ x_0 = x. \quad (6.2.6)$$

Часто предпочитают пользоваться другим, более простым представлением  $R(f)$ , которое получается, если взять остаток интерполирования в лагранжевой форме  $r(x) = \frac{\omega(x)}{n!} f^{(n)}(\xi)$ ,  $a < \xi < b$ :

$$R(f) = \frac{1}{n!} \int_a^b p(x) \omega(x) f^{(n)}(\xi) dx. \quad (6.2.7)$$

Нахождение точных оценок  $R(f)$  из (6.2.7) затрудняет то обстоятельство, что не известна зависимость  $\xi$  от  $x$ .

Для функций, имеющих на  $[a, b]$  производную порядка  $n$ , ограниченную по абсолютному значению числом  $M_n$ :

$$|f^{(n)}(x)| \leq M_n, \quad x \in [a, b], \quad (6.2.8)$$

из (6.2.6) вытекает оценка

$$|R(f)| \leq M_n \int_a^b |p(x) \omega(x)| dx. \quad (6.2.9)$$

Если  $p(x) \omega(x)$  сохраняет знак на  $[a, b]$ , то оценка (6.2.9) является точной и улучшена быть не может. Попутно отметим, что точная оценка остатка для функций, удовлетворяющих условию (6.2.8), может быть, при любых  $p(x)$  и узлах  $x_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ), легко получена из (5.2.6). Если положить  $r = n$  и принять во внимание, что

при интерполяционной квадратуре остаток равен нулю для всякого многочлена степени  $< n$ , то для  $R(f)$  получим

$$R(f) = \int_a^b f^{(n)}(t) K(t) dt, \quad (6.2.10)$$

где  $K(t)$  имеет значение (5.2.7) при  $r = n$ .

Для функций вида (6.2.8) из (6.2.10) следует точная оценка  $R(f)$ :

$$|R(f)| \leq M_n \int_a^b |K(t)| dt. \quad (6.2.11)$$

### § 3. Формулы Ньютона — Котеса

Среди интерполяционных формул ранее всех были построены широко известные и часто применяемые формулы Ньютона — Котеса. Они относятся к случаю постоянного веса и конечного отрезка интегрирования. Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (6.3.1)$$

Отрезок  $[a, b]$  разделим на  $n$  одинаковых частей  $h = \frac{b-a}{n}$ . Построим интерполяционную квадратурную формулу с узлами  $a, a+h, a+2h, \dots, a+nh=b$ . Чтобы нахождение ее коэффициентов привести к вычислению величин, не зависящих от промежутка  $[a, b]$ , запишем формулу в виде

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{k=0}^n B_k^n f(a+kh). \quad (6.3.2)$$

Согласно (6.2.4), величины  $B_k^n = (b-a)^{-1} A_k$  будут иметь значения

$$B_k^n = (b-a)^{-1} \int_a^b \frac{\omega(x)}{(x-a-kh)\omega'(a+kh)} dx,$$

где  $\omega(x) = (x-a)(x-a-h) \dots (x-a-nh)$ . Если ввести новую переменную  $t$ , положив  $x = a+th$ , то будет

$$\begin{aligned} \omega(x) &= h^{n+1} t(t-1)(t-2) \dots (t-n), \quad x-a-kh = h(t-k), \\ \omega'(a+kh) &= (-1)^{n-k} h^n k!(n-k)!, \end{aligned}$$

и таким образом,

$$B_k^n = \frac{(-1)^{n-k}}{nk! (n-k)!} \int_0^n t(t-1) \dots (t-k+1)(t-k-1) \dots (t-n) dt. \quad (6.3.3)$$

Котесом были вычислены коэффициенты  $B_k^n$  для  $n$  от 1 до 10:

$$n=1; \quad B_0^1 = B_1^1 = \frac{1}{2};$$

$$n=2; \quad B_0^2 = B_2^2 = \frac{1}{6}, \quad B_1^2 = \frac{4}{6};$$

$$n=3; \quad B_0^3 = B_3^3 = \frac{1}{8}, \quad B_1^3 = B_2^3 = \frac{3}{8};$$

$$n=4; \quad B_0^4 = B_4^4 = \frac{7}{90}, \quad B_1^4 = B_3^4 = \frac{32}{90}, \quad B_2^4 = \frac{12}{90};$$

$$n=5; \quad B_0^5 = B_5^5 = \frac{19}{288}, \quad B_1^5 = B_4^5 = \frac{75}{288}, \quad B_2^5 = B_3^5 = \frac{50}{288};$$

$$n=6; \quad B_0^6 = B_6^6 = \frac{41}{840}, \quad B_1^6 = B_5^6 = \frac{216}{840}, \quad B_2^6 = B_4^6 = \frac{27}{840},$$

$$B_3^6 = \frac{272}{840};$$

$$n=7; \quad B_0^7 = B_7^7 = \frac{751}{17280}, \quad B_1^7 = B_6^7 = \frac{3577}{17280}, \quad B_2^7 = B_5^7 = \frac{1323}{17280},$$

$$B_3^7 = B_4^7 = \frac{2989}{17280};$$

$$n=8; \quad B_0^8 = B_8^8 = \frac{989}{28350}, \quad B_1^8 = B_7^8 = \frac{5888}{28350}, \quad B_2^8 = B_6^8 = \frac{-928}{28350},$$

$$B_3^8 = B_5^8 = \frac{10496}{28350}, \quad B_4^8 = \frac{-4540}{28350};$$

$$n=9; \quad B_0^9 = B_9^9 = \frac{2857}{89600}, \quad B_1^9 = B_8^9 = \frac{15741}{89600}, \quad B_2^9 = B_7^9 = \frac{1080}{89600},$$

$$B_3^9 = B_6^9 = \frac{19344}{89600}, \quad B_4^9 = B_5^9 = \frac{5778}{89600};$$

$$n=10; \quad B_0^{10} = B_{10}^{10} = \frac{16067}{598752}, \quad B_1^{10} = B_9^{10} = \frac{106300}{598752}, \quad B_2^{10} = B_8^{10} = \frac{-48525}{598752},$$

$$B_3^{10} = B_7^{10} = \frac{272400}{598752}, \quad B_4^{10} = B_6^{10} = \frac{-260550}{598752}, \quad B_5^{10} = \frac{427368}{598752}.$$

Из приведенной таблицы видно, что поведение коэффициентов  $B_k^n$  при изменении номера  $k$ , начиная с  $n=4$  и, особенно, с  $n=6$ , вряд ли можно считать «правильным». При  $n=8$  встречаются отрицательные коэффициенты.



Чтобы оценить формулы Ньютона — Котеса при большом числе узлов, получим асимптотические значения  $B_k^n$  для больших  $n$  \*). С этой целью преобразуем интеграл  $I = \int_0^n \frac{x(x-1)\dots(x-n)}{x-k} dx$ , входящий в (6.3.3). Очевидно

$$x(x-1)\dots(x-n) = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-n)}.$$

Воспользовавшись известным свойством функции  $\Gamma(z)$ :  $\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{\Gamma(1-z) \sin \pi z}{\pi}$ , можно последнему равенству придать форму

$$x(x-1)\dots(x-n) = (-1)^n \frac{\Gamma(x+1) \Gamma(n+1-x) \sin \pi x}{\pi},$$

$$I = (-1)^n \int_0^n \frac{\Gamma(x+1) \Gamma(n+1-x) \sin \pi x}{\pi(x-k)} dx.$$

Разобьем интеграл на слагаемые по схеме:

$$\int_0^n = \int_0^3 + \int_3^{n-3} + \int_{n-3}^n = \alpha + \beta + \gamma.$$

Оценим сначала интеграл  $\beta$ . Из теории функции  $\Gamma(z)$  известно, что при  $z > 0$   $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$  есть монотонная возрастающая функция \*\*). Поэтому  $\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} - \frac{\Gamma'(n+1-x)}{\Gamma(n+1-x)}$  при  $-1 < x < \frac{n}{2}$  будет величиной отрицательной, а при  $\frac{n}{2} < x < n+1$  — положительной. Отсюда следует, что  $\ln \Gamma(x+1) \Gamma(n+1-x)$ , а следовательно и  $\Gamma(x+1) \Gamma(n+1-x)$  будет при  $3 \leq x \leq n-3$  иметь наибольшее значение на концах этого отрезка:

$$0 < \Gamma(x+1) \Gamma(n+1-x) \leq \Gamma(4) \Gamma(n-2) = 6\Gamma(n-2).$$

Так как при всяких  $x$  имеем  $\left| \frac{\sin \pi x}{\pi(x-k)} \right| \leq 1$ , то

$$|\beta| \leq 6\Gamma(n-2) n = \frac{6\Gamma(n+1)}{(n-2)(n-1)} = O\left(\frac{\Gamma(n+1)}{n^2}\right).$$

\*) См. Р. О. Кузьмин, К теории механических квадратур, Изв. Ленингр. политехн. ин-та, отд. техн., естеств., матем. 32 (1931).

\*\*) Это сразу же видно из известного разложения логарифмической производной функции  $\Gamma(z)$ :

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\frac{1}{z} - C + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+z} \right),$$

где  $C$  — постоянная Эйлера. См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. 2, п° 73, М. — Л., Гостехиздат, 1957.

При изучении интегралов  $\alpha$  и  $\gamma$  будем считать  $1 \leq k \leq n-1$ . Достаточно исследовать интеграл  $\alpha$ . Воспользовавшись формулой Тейлора и тем, что производная от функции  $\psi_z = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$  при больших  $z$  есть величина порядка  $\frac{1}{z}$ , будем иметь:

$$\ln \Gamma(n+1-x) = \ln \Gamma(n+1) - x \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда\*), ввиду того, что при больших  $z$  будет  $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \ln z + O\left(\frac{1}{z}\right)$ , получается

$$\Gamma(n+1-x) = \Gamma(n+1) e^{-x \ln n} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right].$$

Для  $0 \leq x \leq 3$  верно, очевидно, следующее равенство

$$\Gamma(x+1) \frac{\sin \pi x}{\pi(x-k)} = -\frac{x}{k} + O\left(\frac{x^2}{k}\right),$$

$$\alpha = \int_0^3 \Gamma(n+1) e^{-x \ln n} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \left[-\frac{x}{k} + O\left(\frac{x^2}{k}\right)\right] dx.$$

Так как

$$\int_0^3 e^{-x \ln n} x dx = \frac{1}{\ln^2 n} - \frac{1}{n^3} \left(\frac{3}{\ln n} + \frac{1}{\ln^2 n}\right)$$

и

$$\int_0^3 e^{-x \ln n} x^2 dx = \frac{2}{\ln^3 n} - \frac{1}{n^3} \left(\frac{9}{\ln n} + \frac{6}{\ln^2 n} + \frac{2}{\ln^3 n}\right),$$

то

$$\alpha = -\frac{\Gamma(n+1)}{k \ln^2 n} \left[1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right].$$

Аналогично, для интеграла  $\gamma$  можно получить

$$\gamma = (-1)^{n-1} \frac{\Gamma(n+1)}{(n-k) \ln^2 n} \left[1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right].$$

Если принять во внимание найденную оценку интеграла  $\beta$ , то для  $I$  получим следующее значение

$$I = \frac{(-1)^{n-1} \Gamma(n+1)}{\ln^2 n} \left[\frac{1}{k} + \frac{(-1)^n}{n-k}\right] \left[1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right].$$

\*) См., например, Ян к е и Э м д е, Таблицы функций, М., Физматгиз, 1959, стр. 108—109.

Последнее приводит к такому асимптотическому представлению котесова коэффициента  $B_k^n$  при  $1 \leq k \leq n-1$ :

$$B_k^n = \frac{(-1)^{k-1} n!}{k! (n-k)! n \ln^2 n} \left[ \frac{1}{k} + \frac{(-1)^n}{n-k} \right] \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right) \right]. \quad (6.3.4)$$

Сходные вычисления для  $B_0^n$  и  $B_n^n$  приведут к равенству:

$$B_0^n = B_n^n = \frac{1}{n \ln n} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\ln n}\right) \right]. \quad (6.3.5)$$

Из полученных выражений для  $B_k^n$  видно, что при больших  $n$  в формуле Ньютона — Котеса будут встречаться как положительные, так и отрицательные коэффициенты, превосходящие по абсолютной величине сколь угодно большое число. Отсюда, в частности, следует, что при больших  $n$ , малые ошибки в значениях функции  $f(a+kh)$  могут дать большую погрешность в квадратурной сумме. Поэтому рассматриваемые формулы мало пригодны для вычислений, когда число узлов в них будет большим.

Для формулы Ньютона — Котеса выражение (6.2.5) остатка  $R(f)$  будет таким:

$$R(f) = \int_a^b \omega(x) f(x, a, a+h, \dots, a+nh) dx. \quad (6.3.6)$$

Как оказалось, (6.3.6) можно привести к весьма простому виду, значительно более удобному для приложений \*).

Рассмотрим сначала тот случай, когда  $n$  — четное число и в формуле Ньютона — Котеса берется нечетное число узлов. Многочлен  $\omega(x) = (x-a)(x-a-h) \dots (x-a-nh)$  будет обладать следующим свойством  $\omega(a+z) = -\omega(a+nh-z)$  и график его будет линией, симметричной относительно середины отрезка  $[a, b]$ . Примерный вид графика изображен на рис. 2.

Введем функцию  $\Omega(x) = \int_a^x \omega(t) dt$ . Заметим, прежде всего, что  $\Omega(a) = 0$  и  $\Omega(a+nh) = \Omega(b) = 0$ . Последнее равенство следует из указанного свойства симметрии значений  $\omega(x)$ . Покажем теперь, что  $\Omega(x)$  не обращается в нуль нигде внутри  $[a, b]$ , для чего рассмотрим интегралы  $I_v = \int_{a+(v+1)h}^{a+vh} \omega(x) dx$ . Утверждение будет доказано, если установить, что последовательность чисел  $I_0, I_1, \dots, I_{\frac{n}{2}-1}$  убывающая по абсолютной величине.

\*) См., например, Стефенсен, Теория интерполирования, гл. XV. М. — Л., ОНТИ, 1939, где такое преобразование проведено для интегралов немного более общего вида.

Если в интеграле  $I_v = \int_{a+(v-1)h}^{a+(v+1)h} (x-a)(x-a-h) \dots (x-a-nh) dx$  заменить переменную  $x$ , положив  $x = y + h$ , то он преобразуется к виду

$$\begin{aligned} I_v &= \int_{a+(v-1)h}^{a+vh} (y-a+h)(y-a) \dots (y-a-(n-1)h) dy = \\ &= \int_{a+(v-1)h}^{a+vh} \frac{y-a+h}{y-a-nh} \omega(y) dy = \frac{\eta-a+h}{\eta-a-nh} I_{v-1}, \\ &a+(v-1)h < \eta < a+vh. \end{aligned}$$

Чтобы было  $|I_v| < |I_{v-1}|$ , должно выполняться неравенство  $\eta - a + h < nh - \eta + a$ , или  $\eta - a < \frac{n-1}{2}h$ . Но последнее неравенство, очевидно, выполняется, ввиду  $\eta < a + vh$ ,  $\eta - a < vh \leq \left(\frac{n}{2} - 1\right)h$ .

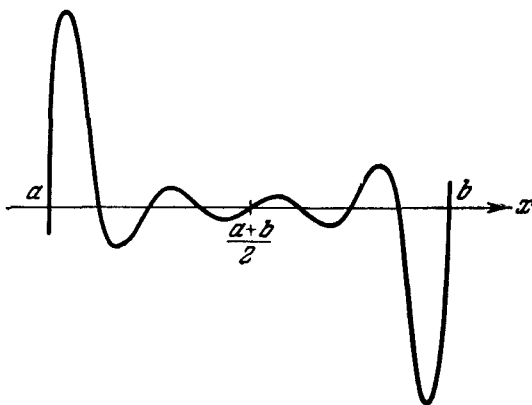


Рис. 2.

Преобразуем (6.3.6) интегрированием по частям и применим теорему о среднем значении

$$\begin{aligned} R(f) &= \Omega(x) f(x, a, \dots, a+nh) \Big|_a^b - \\ &- \int_a^b f'_x(x, a, \dots, a+nh) \Omega(x) dx = \\ &= -f'_x(\eta, a, \dots, a+nh) \int_a^b \Omega(x) dx, \quad a < \eta < b. \end{aligned}$$

Так как

$$f(x, a, \dots, a + nh) = \\ = \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_n} dt_{n+1} f^{(n+1)} \left( x + t_1(a - x) + h \sum_{v=2}^{n+1} t_v \right),$$

то

$$f'_x(x, a, \dots, a + nh) = \\ = \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_n} dt_{n+1} (1 - t_1) f^{(n+2)} \left( x + t_1(a - x) + h \sum_{v=2}^{n+1} t_v \right)$$

и применение теоремы о среднем значении к последнему интегралу

дает  $f'_x(\eta, a, \dots, a + nh) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}$ ,  $a < \xi < b$ . Наконец,

$$\int_a^b \Omega(x) dx = x\Omega(x) \Big|_a^b - \int_a^b x\Omega'(x) dx = - \int_a^b x\omega(x) dx.$$

Этим доказано, что для остатка интерполяционной квадратуры Ньютона — Котеса верно равенство

$$R(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b x\omega(x) dx. \quad (6.3.7)$$

Найдем еще знак множителя при  $f^{(n+2)}(\xi)$ . Функция  $\Omega(x) = \int_a^x \omega(t) dt$  сохраняет знак на отрезке  $[a, b]$  и, поэтому, достаточно выяснить ее знак в одной какой-либо точке, например,  $x = a + h$

$$\Omega(a + h) = \int_a^{a+h} \omega(t) dt.$$

В произведении  $\omega(t) = (t - a)(t - a - h) \dots (t - a - nh)$  при  $a < t < a + h$  первый множитель положителен, все же остальные — отрицательны и, стало быть,  $\text{sign } \Omega(t) = (-1)^n$ ,  $t \in (a, b)$ .

Так как  $\int_a^b x\omega(x) dx = - \int_a^b \Omega(x) dx$ , то  $\text{sign } \int_a^b x\omega(x) dx = (-1)^{n+1} = -1$  ввиду четности  $n$ .

Из изложенного вытекает

**Теорема 2.** Если число узлов  $n+1$  в формуле (6.3.2) Ньютона — Котеса нечетное и функция  $f$  имеет на  $[a, b]$  непрерывную производную порядка  $n+2$ , то внутри  $[a, b]$  существует точка  $\xi$  такая, что для остатка  $R(f)$  формулы верно равенство (6.3.7). Коэффициент при  $f^{(n+2)}(\xi)$  — отрицателен.

Укажем на два следствия, вытекающих из этой теоремы.

1. Если число узлов  $n+1$  в формуле (6.3.2) нечетное, то алгебраическая степень точности формулы равна  $n+1$ .

Как видно из представления остатка (6.3.7), формула (6.3.2) будет точной всякий раз, когда  $f$  есть многочлен, степени  $\leq n+1$ . Если же  $f$  есть многочлен степени  $n+2$ , то  $f^{(n+2)}$  будет величиной, отличной от нуля, и  $R(f) \neq 0$ .

2. Будем, как и выше, считать, что производная  $f^{(n+2)}$  существует и есть непрерывная на  $[a, b]$  функция, и составим представление (5.2.6) остатка. Положим  $r = n+2$  и, для простоты записи, будем считать  $a = a$ . Так как степень точности (6.3.2) равна  $n+1$ , неинтегральные члены в (5.2.6) обращаются в нуль и для остатка получится выражение

$$R(f) = \int_a^b f^{(n+2)}(t) K(t) dt. \quad (6.3.8)$$

Ввиду  $p(x) \equiv 1$ , после простых вычислений ядру  $K(t)$  можно придать форму

$$K(t) = \frac{(b-t)^{n+2}}{(n+2)!} - \sum_{k=1}^n A_k E(a+kh-t) \frac{(a+kh-t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Покажем, что ядро остатка  $K(t)$  есть знакопостоянная неположительная функция на  $[a, b]$ .

Из (6.3.7) видно, что если  $f^{(n+2)}$  не обращается в нуль ни в одной точке  $[a, b]$ , то  $R(f) \neq 0$ .

Если бы функция  $K(t)$  изменяла знак на  $[a, b]$ , то, наверное, существовала бы непрерывная функция  $f^{(n+2)}$ , отличная от нуля на  $[a, b]$  и такая, что  $\int_a^b f^{(n+2)}(t) R(t) dt = 0$ . По производной  $f^{(n+2)}$

мы могли бы восстановить функцию  $f$  обычным путем. Для такой функции  $R(f) = 0$ , что противоречит предыдущему.

Так как в (6.3.7) коэффициент при  $f^{(n+2)}(\xi)$  — отрицательный, ядро  $K(t)$  должно быть неположительной функцией на  $[a, b]$ :

$$K(t) \leq 0.$$

Пусть теперь  $n$  — число нечетное, а число узлов в формуле (6.3.2) — четное. В этом случае многочлен  $\omega(x)$  в точках, равноотстоящих от концов  $a$  и  $b = a + nh$  отрезка, принимает одинаковые значения:  $\omega(a + z) = \omega(a + nh - z)$ . График многочлена будет линией, симметричной относительно прямой  $x = \frac{a+b}{2}$ , проходящей через середину отрезка и параллельной оси  $y$ .

Чтобы упростить выражение остатка (6.3.6), разделим отрезок  $[a, b]$  на две части  $[a, a + (n-1)h]$  и  $[a + (n-1)h, b]$ . На втором частичном отрезке многочлен  $\omega(x)$  сохраняет знак и к интегралу по этому отрезку может быть применена теорема о среднем значении

$$R(f) = \int_a^{a+(n-1)h} \omega(x) f(x, a, \dots, a+nh) dx + \\ + \frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!} \int_{a+(n-1)h}^b \omega(x) dx = I + II,$$

$a < \xi_1 < b$ . Сосредоточим теперь свое внимание на первом из интегралов правой части. Отделим в многочлене  $\omega(x)$  множитель  $x - a - nh$  и положим  $\omega(x) = (x - a - nh)\omega_1(x)$ . По определению разностных отношений

$$f(a + nh, \dots, a, x) = \frac{f(a + (n-1)h, \dots, a, x) - f(a + nh, \dots, a)}{x - a - nh}$$

и, следовательно,

$$I = \int_a^{a+(n-1)h} \omega_1(x) f(x, a, \dots, a + (n-1)h) dx - \\ - f(a, \dots, a + nh) \int_a^{a+(n-1)h} \omega_1(x) dx.$$

Так как  $\int_a^{a+(n-1)h} \omega_1(x) dx = 0$ , на что было указано при исследовании случая четного  $n$ , второй член в выражении для  $I$  исчезает.

Первый же член есть интеграл вида (6.3.6) при нечетном числе узлов и его можно преобразовать так же, как в предыдущем случае:

$$I = \frac{f^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!} \int_a^{a+(n-1)h} x \omega_1(x) dx, \quad a < \xi_2 < b.$$

Напомним также, что коэффициент при  $f^{(n+1)}(\xi_2)$  здесь есть число отрицательное.

Ввиду  $\int_a^{a+(n-1)h} \omega_1(x) dx = 0$ , в предыдущем интеграле функцию  $x\omega_1(x)$  можно заменить на  $(x-a-nh)\omega_1(x) = \omega(x)$ . Для остатка  $R(f)$  получим

$$R(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!} \int_a^{a+(n-1)h} \omega(x) dx + \frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!} \int_{a+(n-1)h}^b \omega(x) dx.$$

При  $a + (n-1)h < x < b$ , в произведении

$$\omega(x) = (x-a)(x-a-h) \dots (x-a-nh)$$

последний множитель — отрицательный, все же остальные — положительные и  $\int_a^{a+(n-1)h} \omega(x) dx < 0$ . Ввиду того, что коэффициенты при  $f^{(n+1)}(\xi_2)$  и  $f^{(n+1)}(\xi_1)$  в последнем выражении остатка отличны от нуля и одного знака, а  $f^{(n+1)}$  есть непрерывная функция, между  $\xi_1$  и  $\xi_2$  существует такая точка  $\xi$ , что

$$R(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b \omega(x) dx. \quad (6.3.9)$$

Этим доказана

**Теорема 3.** Если число узлов  $n+1$  в формуле Ньютона — Котеса (6.3.2) четное и  $f$  имеет непрерывную на  $[a, b]$  производную порядка  $n+1$ , то внутри  $[a, b]$  существует точка  $\xi$  такая, что для остатка  $R(f)$  квадратуры (6.3.2) верно равенство (6.3.9). Коэффициент при  $f^{(n+1)}(\xi)$  в нем есть число отрицательное.

Аналогично случаю нечетного числа узлов, отсюда вытекает два следующих утверждения:

1. Если число узлов  $n+1$  в формуле (6.3.2) — четное, то алгебраическая степень точности (6.3.2) равна  $n$ .

2. Если число узлов  $n+1$  в (6.3.2) — четное и функция  $f$  имеет непрерывную производную порядка  $n+1$  на  $[a, b]$ , то остаток формулы (6.3.2) представим в форме

$$R(f) = \int_a^b f^{(n+1)}(t) K(t) dt, \quad (6.3.10)$$



где ядро остатка  $K(t)$  есть знакопостоянная неположительная функция на  $[a, b]$ :

$$K(t) = \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} - \sum_{k=1}^n A_k E(a+kh-t) \frac{(a+kh-t)^n}{n!}. \quad (6.3.11)$$

Как отмечалось выше в начале § 3, из асимптотических выражений (6.3.4) — (6.3.5) коэффициентов  $B_k^n$  формулы Котеса следует, что при больших  $n$  среди  $B_k^n$  будут обязательно встречаться отрицательные. Но осталось еще неясным, с какого значения  $n$  это будет осуществляться. В § 3 приведена таблица  $B_k^n$ , показывающая, что для  $n=1(1)7$ , 9 все  $B_k^n$  положительны, а при  $n=8$ , 10 некоторые  $B_k^n$  отрицательны. Ниже мы покажем, что для  $n \geq 10$  среди  $B_k^n$  всегда будут существовать отрицательные.

Не ограничивая общности задачи, мы можем считать отрезок интегрирования  $[a, b]$  приведенным к  $[-1, 1]$  и будем рассматривать следующее правило интегрирования с  $n+1$  узлами:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(y_k) + A f(1). \quad (6.3.12)$$

Наряду с ним мы возьмем формулу с  $m+1$  ( $m < n$ ) узлами, два из которых фиксированы в точках  $-1, +1$ :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx p_{-1} f(-1) + \sum_{i=1}^{m-1} p_i f(x_i) + p_{+1} f(1). \quad (6.3.13)$$

В § 2 главы 9 будет показано, что узлы  $x_k$  и коэффициенты  $p_{-1}, p_{+1}, p_i$  могут быть выбраны так, чтобы равенство (6.3.13) выполнялось точно для всякого многочлена степени  $2m-1$  (см. (9.2.12)). Существенно заметить, что абсциссы  $x_i$  тогда будут совпадать с корнями многочлена Якоби степени  $m-1$ :  $y(x) = P_{m-1}^{(1,1)}(x)$ .

Для определенности записи условимся считать, что абсциссы  $y_k$  и  $x_i$  рассматриваемых формул перенумерованы в порядке роста.

**Теорема 4.** Если правило (6.3.12) верно для всех многочленов степени  $2m-1$  ( $n > m$ ) и если  $A_k > 0$  ( $k=1, \dots, n$ ), то справедливо неравенство  $y_n > x_{m-1}$ .

Действительно, применяя правила (6.3.12) и (6.3.13) к многочлену

$$P(x) = \frac{y^2(x)(1-x^2)}{x-x_m} \text{ степени } 2m-1, \text{ находим } \sum_{k=1}^n A_k P(y_k) = 0. \text{ Так как}$$

$n > m$ , то не все слагаемые суммы равны нулю. Среди них должны быть как положительные, так и отрицательные. Но  $P(x) > 0$  при  $x_m < x < 1$  и  $P(x) < 0$  при  $-1 < x < x_m$ . Поэтому наверное  $y_n > x_{m-1}$ .

При оценке корня  $x_{m-1}$  для наших целей достаточна следующая просто доказываемая

**Теорема 5.** Для наибольшего корня  $x_{m-1}$  многочлена Якоби  $y(x) = P_{m-1}^{(1,1)}(x)$  верно неравенство:

$$1 - x_{m-1} < \frac{8}{(m-1)(m+2)+4}. \quad (6.3.14)$$

Многочлены Якоби любых индексов  $\alpha, \beta$  удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0.$$

Для рассматриваемого нами многочлена  $P_{m-1}^{(1,1)}(x)$  это уравнение может быть приведено к виду

$$[(1-x^2)^2 y']' + (m-1)(m+2)(1-x^2)y = 0. \quad (6.3.15)$$

Будем считать, что сюда вместо  $y$  подставлен многочлен  $y(x) = P_{m-1}^{(1,1)}(x)$  и проинтегрируем это равенство от наибольшего корня  $x_{m-1}$  до 1. Так как до конца доказательства теоремы нам придется иметь дело только с наибольшим корнем  $x_{m-1}$ , мы для упрощения обозначения отбросим номер  $m-1$  и этот корень будем обозначать одной буквой  $x$ . Если воспользоваться формулой Тейлора, результат можно записать в виде

$$\begin{aligned} (1-x^2)^2 y'(x) &= (m-1)(m+2) \int_x^1 (1-t^2) y(t) dt = \\ &= (m-1)(m+2) \sum_{v=1}^{m-1} \frac{1}{v!} y^{(v)}(x) \int_x^1 (1-t^2)(t-x)^v dt. \end{aligned}$$

Ввиду того, что в наибольшем корне многочлена Якоби все производные  $y^{(v)}(x)$  положительны, слагаемые последней суммы являются положительными числами. Мы сохраним в правой части только два члена, опустив все остальные. Если  $m > 3$ , то правая часть при этом уменьшится и получится неравенство

$$\begin{aligned} (1-x^2)^2 y'(x) &> (m-1)(m+2) \left[ y'(x) \int_x^1 (1-t^2)(t-x) dt + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} y''(x) \int_x^1 (1-t^2)(t-x)^2 dt \right]. \end{aligned}$$

Из уравнения (6.3.15) следует, что для значения аргумента, равного корню многочлена, будет  $y''(x) = \frac{4x}{1-x} y'(x)$ . Если это значение  $y''(x)$  внести в неравенство, вычислить оба входящие туда интеграла, то после несложных преобразований и сокращения на  $(1-x)^2 y'(x)$  получится

$$(1-x)^2 > (m-1)(m+2) \left[ \frac{3+x}{12} + \frac{x}{15} \frac{4+x}{1+x} \right].$$

Дробь  $\frac{4+x}{1+x} = 1 + \frac{3}{1+x}$  положительна при  $-1 < x \leq 1$  и убывает при возрастании  $x$ . Поэтому правая часть неравенства уменьшится, когда в ней эту дробь мы заменим ее наименьшим значением  $\frac{5}{2}$ , соответствующим  $x=1$ . Если после замены обе части сократить на  $1+x$ , то будет  $1+x > \frac{(m-1)(m+2)}{4} (1-x)$ . Отсюда сразу же следует (6.3.14).

Рассмотрим теперь формулу Котеса для отрезка  $[-1, 1]$ :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f\left(-1 + \frac{2k}{n}\right) \quad (6.3.16)$$

и допустим, что все ее коэффициенты  $A_k$  положительны.

Если  $n$  — четное, степень точности ее равна  $n+1$ . Сравним (6.3.16) с (6.3.13), считая  $2m-1 = n+1$ ,  $m = 0,5(n+2)$ . Теоремы 4 и 5 в этом случае дают

$$-1 + \frac{2(n-1)}{n} > x_{m-1} > 1 - \frac{8}{(m-1)(m+2)+4} = 1 - \frac{32}{n(n+6)+16}.$$

Отсюда следует  $\frac{1}{n} < \frac{16}{n(n+6)+16}$  и, стало быть,  $n < 8$ .

Если же  $n$  есть число нечетное, степень точности (6.3.16) равна  $n$  и можно считать  $2m-1 = n$ ,  $m = 0,5(n+1)$ . На основании теорем 4 и 5 должно быть  $-1 + \frac{2(n-1)}{n} > x_{m-1} > 1 - \frac{32}{(n-1)(n+5)+16}$ , т. е.  $\frac{1}{n} < \frac{16}{(n-1)(n+5)+16}$ , откуда  $n < 11$ . Поэтому верна

**Теорема 6.** Для всех  $n \geq 10$  в правиле Котеса (6.3.16) существуют отрицательные коэффициенты  $A_k$ .

## § 4. Некоторые простейшие формулы Ньютона — Котеса

Формулы Ньютона — Котеса с большим числом узлов, по причинам, выясненным в предыдущем параграфе, редко применяются в вычислительной практике. Предпочитают пользоваться формулами с малым значением  $n$ . Для уменьшения же погрешности результата предварительно разбивают отрезок  $[a, b]$  на достаточно большое число малых интервалов и к каждому из них применяют квадратурную формулу с малым числом узлов.

Положим сначала  $n = 1$ . В этом случае интерполирование  $f$  выполняется по двум ее значениям на концах  $a$  и  $b$  отрезка интегрирования. Равенство (6.3.2) здесь приводится к известной формуле трапеций:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \left[ \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b) \right]. \quad (6.4.1)$$

Так как  $\omega(x) = (x-a)(x-b)$ , то (6.3.9) для остатка даст

$$R = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi), \quad a < \xi < b. \quad (6.4.2)$$

Имея в виду в дальнейшем рассмотреть задачу об увеличении точности котесовых формул, построим для остаточного члена (6.4.1)

и других формул, изучаемых ниже, интегральные представления, отличные от (6.3.10).

Считая  $f$  дважды непрерывно дифференцируемой функцией, разложим ее по многочленам Бернулли при помощи (1.4.2), положив там  $v=2$

$$f(x) = (b-a)^{-1} \int_a^b f(t) dt + B_1\left(\frac{x-a}{b-a}\right) [f(b) - f(a)] - \\ - \frac{(b-a)}{2} \int_a^b f''(t) \left[ B_2^*\left(\frac{x-t}{b-a}\right) - B_2^*\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right] dt.$$

Ввиду того, что формула (6.4.1) для линейной функции дает точный результат,  $R(f)$  равен остатку квадратуры интегрального члена правой части. При записи остатка здесь и в других формулах удобнее пользоваться не  $B_v^*(z)$ , а функциями  $y_v^*(x) = B_v^*(z) - B_v$ , несущественно от них отличающимися:

$$R(f) = - \frac{b-a}{2} \int_a^b f''(t) R_x \left[ y_2^*\left(\frac{x-t}{b-a}\right) - y_2^*\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right] dt.$$

Знаком  $R_x$  обозначен остаток квадратуры по переменной  $x$ . В приводимых ниже вычислениях мы воспользовались известными правилами интегрирования многочленов Бернулли, 1-периодичностью  $y_n^*$ ,  $B_n^*$  и равенством  $y_n(1) = y_n(0) = 0$

$$R_x \left[ y_2^*\left(\frac{x-t}{b-a}\right) - y_2^*\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right] = \int_a^b \left[ y_2^*\left(\frac{x-t}{b-a}\right) - y_2^*\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right] dt - \\ - \frac{b-a}{2} \left\{ \left[ y_2^*\left(\frac{a-t}{b-a}\right) - y_2^*(0) \right] + \left[ y_2^*\left(\frac{b-t}{b-a}\right) - y_2^*(1) \right] \right\} = \\ = -(b-a) y_2^*\left(\frac{b-t}{b-a}\right), \\ R(f) = \frac{(b-a)^2}{2!} \int_a^b f''(t) y_2^*\left(\frac{b-t}{b-a}\right) dt. \quad (6.4.3)$$

Разобьем теперь отрезок  $[a, b]$  на  $n$  одинаковых частей длины  $h = \frac{b-a}{n}$ , рассмотрим частичный отрезок  $[a + kh, a + (k+1)h]$

и к нему применим формулы (6.4.1) и (6.4.3)

$$\int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(x) dx = \frac{h}{2} [f(a+kh) + f(a+(k+1)h)] + \\ + \frac{h^2}{2!} \int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f''(t) y_2^* \left( \frac{a+kh-t}{h} \right) dt.$$

Ввиду 1-периодичности,  $y_2^* \left( \frac{a+kh-t}{h} \right) = y_2^* \left( \frac{a-t}{h} \right)$ . После суммирования по всем частичным отрезкам, получим формулу трапеций с остатком в виде определенного интеграла

$$\int_a^b f(x) dx = h \left[ \frac{1}{2} f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n \right] + \\ + \frac{h^2}{2!} \int_a^b f''(t) y_2^* \left( \frac{a-t}{h} \right) dt, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad f_k = f(a+kh). \quad (6.4.4)$$

Так как ядро остатка  $y_2^* \left( \frac{a-t}{h} \right)$  знакопостоянное, к интегралу может быть применена теорема о среднем арифметическом значении, что для (6.4.4) дает

$$R(f) = -\frac{1}{12} \cdot \frac{(b-a)^3}{n^2} f''(\xi).$$

Перейдем к другому случаю и положим  $n=2$ . Интерполирование  $f$  выполняется по значениям в трех точках:  $a$ ,  $\frac{a+b}{2}$ ,  $b$ .

Квадратурная формула (6.3.2) будет такой:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \left[ \frac{1}{6} f(a) + \frac{4}{6} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{6} f(b) \right]. \quad (6.4.5)$$

Остаток может быть найден при помощи равенства (6.3.7)

$$R(f) = \frac{f^4(\xi)}{4!} \int_a^b x(x-a) \left( x - \frac{a+b}{2} \right) (x-b) dx = -\frac{1}{90} \left( \frac{b-a}{2} \right)^5 f^4(\xi). \quad (6.4.6)$$

Считая  $f$  четырежды непрерывно дифференцируемой на  $[a, b]$  функцией, разложим ее по многочленам Бернулли:

$$f(x) = (b-a)^{-1} \int_a^b f(t) dt + \\ + \sum_{k=1}^3 \frac{(b-a)^{k-1}}{k!} B_k^* \left( \frac{x-a}{b-a} \right) [f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)] - \\ - \frac{(b-a)^3}{4!} \int_a^b f^{(4)}(t) \left[ y_4^* \left( \frac{x-t}{b-a} \right) - y_4^* \left( \frac{x-a}{b-a} \right) \right] dt. \quad (6.4.7)$$

Равенство (6.4.5) является точным для всякого многочлена третьей степени. Поэтому  $R(f)$  будет равен остатку квадратуры последнего члена правой части равенства:

$$R(f) = - \frac{(b-a)^3}{4!} \int_a^b f^{(4)}(t) R_x \left[ y_4^* \left( \frac{x-t}{b-a} \right) - y_4^* \left( \frac{x-a}{b-a} \right) \right] dt. \quad (6.4.8)$$

$$R_x \left[ y_4^* \left( \frac{x-t}{b-a} \right) - y_4^* \left( \frac{x-a}{b-a} \right) \right] = \int_a^b \left[ y_4^* \left( \frac{x-t}{b-a} \right) - y_4^* \left( \frac{x-a}{b-a} \right) \right] dx - \\ - (b-a) \left\{ \frac{1}{6} \left[ y_4^* \left( \frac{a-t}{b-a} \right) - y_4^*(0) \right] + \frac{4}{6} \left[ y_4^* \left( \frac{\frac{a+b}{2}-t}{b-a} \right) - y_4^* \left( \frac{1}{2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \left[ y_4^* \left( \frac{b-t}{b-a} \right) - y_4^*(1) \right] \right\} = \\ = - (b-a) \left\{ \frac{1}{3} y_4^* \left( \frac{a-t}{b-a} \right) + \frac{2}{3} y_4^* \left( \frac{0,5(b+a)-t}{b-a} \right) - \frac{1}{24} \right\}.$$

В вычислениях мы воспользовались значением  $B_n(0,5)$  (в 1.2.14) и нашли

$$y_4^*(0,5) = B_4(0,5) - B_4 = -(2 - 2^{-3}) B_4 = 2^{-4}.$$

$$R(f) = \frac{(b-a)^4}{4!} \int_a^b f^{(4)}(t) \left\{ \frac{1}{3} y_4^* \left( \frac{a-t}{b-a} \right) + \frac{2}{3} y_4^* \left( \frac{0,5(b+a)-t}{b-a} \right) - \frac{1}{24} \right\} dt. \quad (6.4.9)$$

Считая  $n$  четным числом, разделим  $[a, b]$  на  $n$  равных частей величины  $h = \frac{b-a}{n}$ . Возьмем удвоенный частичный отрезок  $[a + (k-1)h, a + (k+1)h]$  и применим к нему формулу (6.4.5)

с остатком (6.4.9):

$$\int_{a+(k-1)h}^{a+(k+1)h} f(x) dx = 2h \left[ \frac{1}{6} f_{k-1} + \frac{4}{6} f_k + \frac{1}{6} f_{k+1} \right] + \\ + \frac{2}{9} h^4 \int_{a+(k-1)h}^{a+(k+1)h} f^{(4)}(t) \left\{ y_4^* \left( \frac{a+(k-1)h-t}{2h} \right) + 2y_4^* \left( \frac{a+kh-t}{2h} \right) - \frac{1}{8} \right\} dt.$$

Применяя последнее равенство к отрезкам  $[a, a+2h]$ ,  $[a+2h, a+4h]$ , ...,  $[a+(n-2)h, a+nh]$  и суммируя результаты, получим хорошо известную формулу парабол или правило Симпсона:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{3} [f_0 + f_n + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{n-2}) + \\ + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{n-1})] + \\ + \frac{2}{9} h^4 \int_a^b f^{(4)}(t) \left\{ y_4^* \left( \frac{a-t}{2h} \right) + 2y_4^* \left( \frac{a+h-t}{2h} \right) - \frac{1}{8} \right\} dt. \quad (6.4.10)$$

Остаточный член (6.4.10) только формой записи отличается от (6.3.10) и ядро остатка поэтому является знакопостоянной функцией  $t$ . Применение теоремы о среднем значении к интегралу позволяет представить остаточный член (6.4.10) в виде

$$R(f) = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi). \quad (6.4.11)$$

При  $n=3$  получим формулу, которая называется иногда «правилом трех восьмых»:

$$\int_a^b f(x) dx \approx H \left[ \frac{1}{8} f(a) + \frac{3}{8} f\left(a + \frac{1}{3}H\right) + \right. \\ \left. + \frac{3}{8} f\left(a + \frac{2}{3}H\right) + \frac{1}{8} f(a+H) \right], \quad (6.4.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega(x) &= (x-a) \left(x-a-\frac{1}{3}H\right) \left(x-a-\frac{2}{3}H\right) (x-a-H), \\ R(f) &= \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_a^b \omega(x) dx = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi), \quad H=b-a. \end{aligned} \right\} \quad (6.4.13)$$

Чтобы получить нужное нам интегральное представление остатка  $R(f)$ , разложим  $f$  по многочленам Бернулли в виде (6.4.7). Ввиду того, что равенство (6.4.12) является точным для всех многочленов

до третьей степени, для  $R(f)$  получим выражение (6.4.8), но с другим значением интегрируемой функции. В рассматриваемом случае будет \*)

$$\begin{aligned} R_x = & \left[ y_4^* \left( \frac{x-t}{H} \right) - y_4^* \left( \frac{x-a}{H} \right) \right] = \int_a^b \left[ y_4^* \left( \frac{x-t}{H} \right) - y_4^* \left( \frac{x-a}{H} \right) \right] dx - \\ & - H \left\{ \frac{1}{8} \left[ y_4^* \left( \frac{a-t}{H} \right) - y_4^*(0) \right] + \frac{3}{8} \left[ y_4^* \left( \frac{a-t}{H} + \frac{1}{3} \right) - y_4^* \left( \frac{1}{3} \right) \right] + \right. \\ & + \frac{3}{8} \left[ y_4^* \left( \frac{a-t}{H} + \frac{2}{3} \right) - y_4^* \left( \frac{2}{3} \right) \right] + \left. \frac{1}{8} \left[ y_4^* \left( \frac{a-t}{H} + 1 \right) - y_4^*(1) \right] \right\} = \\ = & - \frac{H}{8} \left\{ 2y_4^* \left( \frac{a-t}{H} \right) + 3y_4^* \left( \frac{a-t}{H} + \frac{1}{3} \right) + 3y_4^* \left( \frac{a-t}{H} + \frac{2}{3} \right) - \frac{8}{27} \right\}. \end{aligned}$$

Для  $R(f)$  получим

$$\begin{aligned} R(f) = & \frac{H^4}{4!8} \int_a^b f^{(4)}(t) \left\{ 2y_4^* \left( \frac{a-t}{H} \right) + 3y_4^* \left( \frac{a-t}{H} + \frac{1}{3} \right) + \right. \\ & \left. + 3y_4^* \left( \frac{a-t}{H} + \frac{2}{3} \right) - \frac{8}{27} \right\} dt. \quad (6.4.14) \end{aligned}$$

Пусть число  $n$  кратно трем. Разделим  $[a, b]$  на  $n$  равных частей  $h = \frac{b-a}{n}$ . Возьмем строенный отрезок  $[a+kh, a+(k+3)h]$  и применим к нему правило трех восьмых с остатком в форме (6.4.14)

$$\begin{aligned} \int_{a+kh}^{a+(k+3)h} f(x) dx = & \frac{3h}{8} \{ f[a+kh] + 3f[a+(k+1)h] + \\ & + 3f[a+(k+2)h] + f[a+(k+3)h] \} + \\ & + \frac{27h^4}{64} \int_{a+kh}^{a+(k+3)h} f^{(4)}(t) \left\{ 2y_4^* \left( \frac{a+kh-t}{3h} \right) + \right. \\ & \left. + 3y_4^* \left( \frac{a+kh-t}{3h} + \frac{1}{3} \right) + 3y_4^* \left( \frac{a+kh-t}{3h} + \frac{2}{3} \right) - \frac{8}{27} \right\} dt. \end{aligned}$$

\*) При вычислениях мы воспользовались следующими равенствами:

а) Ввиду 1-периодичности,  $y_4^*(z+1) = y_4^*(z)$ .

б) Положив в (1.2.8)  $n=4$ ,  $x = \frac{1}{3}$ ,  $m=3$ , найдем

$$B_4 = 3^3 \left[ B_4 \left( \frac{1}{3} \right) + B_4 \left( \frac{2}{3} \right) + B_4(1) \right] = 3^3 \left[ 2B_4 \left( \frac{1}{3} \right) + B_4 \right],$$

$$B_4 \left( \frac{1}{3} \right) = B_4 \left( \frac{2}{3} \right) = -\frac{13}{27} B_4 = \frac{13}{810},$$

$$y_4^* \left( \frac{1}{3} \right) = y_4^* \left( \frac{2}{3} \right) = B_4 \left( \frac{1}{3} \right) - B_4 = \frac{7}{405}.$$



Записав такие равенства для отрезков  $[a, a + 3h]$ ,  $[a + 3h, a + 6h]$ , ...,  $[a + (n-3)h, a + nh]$  и сложив результаты, построим следующую формулу, аналогичную формуле Симпсона

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx = & \frac{3h}{8} \{ (f_0 + f_n) + 2(f_3 + f_6 + \dots + f_{n-3}) + \\ & + 3(f_1 + f_2 + f_4 + f_5 + \dots + f_{n-2} + f_{n-1}) \} + \\ & + \frac{27h^4}{64} \int_a^b f^{(4)}(t) \left\{ 2y_4^* \left( \frac{a-t}{3h} \right) + 3y_4^* \left( \frac{a-t}{3h} + \frac{1}{3} \right) + \right. \\ & \left. + 3y_4^* \left( \frac{a-t}{3h} + \frac{2}{3} \right) - \frac{8}{27} \right\} dt. \quad (6.4.15) \end{aligned}$$

К интегралу, представляющему остаток, здесь также может быть применена теорема о среднем значении и остаток формулы (6.4.15) может быть записан в форме

$$R(f) = - \frac{(b-a)^5}{80n^4} f^{(4)}(\xi), \quad a < \xi < b. \quad (6.4.16)$$

Когда число частичных отрезков  $n$  кратно 2 и 3, для вычисления интеграла может быть применено и правило парабол (6.4.10) и правило трех восьмых (6.4.15). Обе формулы имеют одинаковую алгебраическую степень точности и почти одинаково просты по своему строению. Вопрос о выборе какой-либо одной из них может быть решен только ожидаемой погрешностью результата. Сравнение остаточных членов (6.4.11) и (6.4.16) показывает, что при применении правила трех восьмых можно ожидать погрешности приблизительно в два раза большей, нежели при применении правила парабол, что заставляет отдать предпочтение формуле (6.4.10).

## § 5. Правила квадратур, имеющие степень точности ниже интерполяционной

Для построения правил интегрирования (5.1.1), коэффициенты  $A_k$  которых не имеют недостатков коэффициентов Котеса, иногда вступают на путь, описываемый ниже. Если потребовать, чтобы равенство (5.1.1) выполнялось точно всякий раз, когда  $f$  есть многочлен степени  $n-1$ , то как выяснилось в § 1, правило интегрирования будет интерполяционным. Уменьшим степень точности правила и потребуем, чтобы равенство (5.1.1) выполнялось для всех многочленов степени  $m-1 < n-1$ . Такое требование равносильно выполнению системы:

$$\sum_{k=1}^n A_k x_k^i = \int_a^b p(x) x^i dx \quad (i=0, 1, \dots, m-1). \quad (6.5.1)$$

Уравнения совместны и число уравнений здесь меньше числа коэффициентов  $A_k$ . После решения системы,  $n - m$  коэффициентов  $A_k$  остаются произвольными. Выбором их величин можно пытаться, например, сделать все коэффициенты  $A_k$  положительными или добиться того, чтобы  $A_k$  имели более «правильные» значения и т. д.

Начнем с рассмотрения частного случая, имеющего, по-видимому, наибольший интерес для приложений, когда степень точности правила интегрирования равна  $n - 2$  и лишь один из коэффициентов  $A_k$  остается произвольным.

Условия точной интегрируемости степеней  $x$  от нулевой до  $n - 2$  дадут следующую систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^n A_k x_k^i = \int_a^b p(x) x^i dx \quad (i = 0, 1, \dots, n-2). \quad (6.5.2)$$

Если ошибку приближенного интегрирования  $x^{n-1}$  обозначить  $\alpha$ , то к (6.5.2) можно присоединить уравнение

$$\sum_{k=1}^n A_k x_k^{n-1} = \int_a^b p(x) x^{n-1} dx + \alpha. \quad (6.5.3)$$

Решение системы (6.5.2) — (6.5.3) может быть очевидным образом представлено в форме суммы решений двух систем, первая из которых отвечает случаю  $\alpha = 0$ :

$$\sum_{k=1}^n A_k x_k^i = \int_a^b p(x) x^i dx \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

и решение которой образуют интерполяционные квадратурные коэффициенты (6.2.4). Вторая же система имеет вид:

$$\sum_{k=1}^n A_k x_k^i = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-2), \quad \sum_{k=1}^n A_k x_k^{n-1} = \alpha$$

и ее решение, как нетрудно видеть, есть  $A_k = \frac{\alpha}{\omega'(x_k)}$ . Поэтому правило интегрирования, имеющее степень точности  $n - 2$ , будет таким:

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b p(x) f(x) dx &\approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \\ A_k &= \int_a^b p(x) \frac{\omega(x)}{(x - x_k) \omega'(x_k)} dx + \frac{\alpha}{\omega'(x_k)}. \end{aligned} \right\} \quad (6.5.4)$$

Коэффициенты его содержат произвольный параметр  $\alpha$ , и из (6.5.4) поэтому могут быть получены многие другие правила интегрирования, зависящие от того, каким целым мы подчиним выбор  $\alpha$ .

До сих пор мы считали весовую функцию  $p(x)$  любой и узлы  $x_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) расположенными совершенно произвольно. Обратимся теперь к правилу Котеса (6.3.2). Оно содержит  $n+1$  узлов  $x_k = a + kh$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ), является интерполяционным и имеет степень точности не ниже  $n$ .

Соответствующее указанным узлам правило интегрирования вида (6.5.4) будет иметь степень точности  $n-1$  и его можно записать, если воспользоваться вычислениями коэффициентов Котеса и  $\omega'(x_k) = \omega'(a + kh)$ , которые находятся между равенствами (6.3.2) и (6.3.3), в следующем виде:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \sum_{k=0}^n \left[ B_k^n + \frac{(-1)^{n-k} \beta}{k!(n-k)!} \right] f(a + kh), \quad (6.5.5)$$

где  $B_k^n$  есть коэффициент Котеса, численное значение которого указано в (6.3.3), и  $\beta$  есть произвольный параметр, связанный с  $\alpha$  равенством  $\alpha = (b-a) h^n \beta$ .

При  $n=6$  правило (6.5.5) будет следующим:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{840} [(41 + \lambda)(f_0 + f_6) + (216 - 6\lambda)(f_1 + f_5) + \\ + (27 + 15\lambda)(f_2 + f_4) + (272 - 20\lambda)f_3], \quad \lambda = \frac{7}{6} \beta.$$

Отсюда, когда  $\alpha = 1$ , получается формула Ведделя (Weddele) с коэффициентами простого вида:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{20} (f_0 + 5f_1 + f_2 + 6f_3 + f_4 + 5f_5 + f_6).$$

Если  $\alpha = -\frac{9}{5}$ , получится хорошо известная интерполяционная формула Харди (Hardy)

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{300} [14(f_0 + f_6) + 81(f_1 + f_5) + 110f_3].$$

Для  $n=8$  формула (6.5.5) дает:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{28350} [(989 + \lambda)(f_0 + f_8) + (5888 - 8\lambda)(f_1 + f_7) + \\ + (28\lambda - 928)(f_2 + f_6) + (10496 - 56\lambda)(f_5 + f_9) + \\ + (70\lambda - 4540)f_4], \quad \beta = 81\lambda.$$

Степень точности этого правила равна 7. Если мы хотим выбором  $\lambda$  достигнуть того, чтобы коэффициенты были неотрицательными, достаточно считать  $454 \leq 7\lambda \leq 1312$ . Например, при  $\lambda = 96$  будет

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{5670} [217(f_0 + f_8) + \\ + 1024(f_1 + f_3 + f_5 + f_7) + 352(f_2 + f_6) + 436f_4].$$

Найдем наибольшее значение  $n$ , при котором можно построить правило (6.5.5) с положительными коэффициентами.

Будем считать, что отрезок интегрирования  $[a, b]$  приведен к  $[-1, 1]$ :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2 \sum_{k=0}^n \left[ B_k^n + \frac{(-1)^{n-k} \beta}{k!(n-k)!} \right] f\left(-1 + \frac{2k}{n}\right). \quad (6.5.6)$$

Считая коэффициенты правила положительными, применим к нему теоремы 4 и 5 § 3. Так как степень равенства равна  $n-1$ , то для четного  $n$  можно считать  $2m-1 = n-1$ ,  $m = \frac{1}{2}n$ . Из указанных теорем следует, что

$$y_n = 1 - \frac{2}{n} > x_{m-1} > 1 - \frac{8}{(m-1)(m+2)+4} = 1 - \frac{32}{(n-2)(n+4)+16}, \\ \frac{1}{n} < \frac{16}{(n-2)(n+4)+16}.$$

Поэтому  $n < 14$ . Если же  $n$  есть число нечетное, то  $2m-1 = n-2$ ,  $m = \frac{1}{2}(n-1)$  и ввиду тех же теорем должно быть

$$\frac{1}{n} < \frac{4}{(m-1)(m+2)+4} = \frac{16}{(n-3)(n+3)+16}, \quad n < 15.$$

Заметим также, что прямыми подсчетами коэффициентов (6.5.6) можно убедиться в том, что для  $n=12$  параметр  $\beta$  может быть выбран так, чтобы все коэффициенты были положительными, и для  $n=13$  при всяких значениях  $\beta$  среди коэффициентов будут отрицательные.

Поэтому верна

**Теорема 7.** Если  $n \geq 13$ , то среди коэффициентов правила (6.5.6) всегда будут существовать отрицательные.

Возвратимся к общему правилу квадратур (5.1.1). Подобно (6.5.4), могут быть построены квадратурные формулы, степень точности которых равна соответственно  $n-3$ ,  $n-4$ , ... Мы не будем рассматривать такие правила ввиду того, что они, насколько нам известно, не применяются в вычислениях.

Мы остановимся еще на одном вопросе теории механических квадратур с равноотстоящими узлами:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f\left(-1 + \frac{2k}{n}\right). \quad (6.5.7)$$

Напомним, что если потребовать, чтобы равенство было точным для многочленов степени  $n-1$ , то правило будет интерполяционным и тогда при  $n \geq 10$  среди коэффициентов  $A_k$  всегда будут отрицательные. Обозначим  $N = N(n)$  максимальную степень многочленов, для которых равенство (6.5.7) будет точным и все  $A_k \geq 0$ .

Ниже будет доказана теорема, из которой следует, что условие неотрицательности  $A_k$  налагает на степень точности  $N$  правила (6.5.7) весьма тяжелое ограничение и  $N$  может возрастать значительно медленнее, чем растет  $n$ .

**Теорема 8.** Если алгебраическая степень точности (6.5.7) равна  $N$  и если  $A_k \geq 0$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ), то

$$N < 4\sqrt{n}. \quad (6.5.8)$$

Для доказательства достаточно применить к (6.5.7) теоремы 4 и 5 из § 3, которыми мы воспользовались несколькими строками выше. Если  $N$  есть число четное, то можно в теореме 4 считать  $2m-1 = N-1$ ,  $m = 0,5N$ .

Тогда должно быть  $y_n = 1 - \frac{2}{n} > x_{m-1} > 1 - \frac{8}{(m-1)(m+2)+4}$ , откуда  $\frac{1}{n} < \frac{16}{(N-2)(N+4)+16}$ ,  $N^2 + 2N + 8 < 16n$ ,  $N+1 < \sqrt{16n-7}$ ,  $N < 4\sqrt{n}$ . Если же  $N$  есть число нечетное, то можно положить  $2m-1 = N$ ,  $m = 0,5(N+1)$ , и применение указанных теорем дает  $\frac{1}{n} < \frac{16}{(N-1)(N+5)+16}$ ,  $N < 4\sqrt{n}$ .

## § 6. Об отбрасывании узлов при построении правил интегрирования

При построении интерполяционных правил, коэффициенты которых не имеют недостатков коэффициентов Котеса, иногда берут не все табличные значения функции, а лишь некоторую их часть и пропускают остальные.

Идея выбора табличных значений тесно связана с проблемой сходимости интерполяционного квадратурного процесса, которая будет рассматриваться в главе 12. Для нашей цели будут достаточны некоторые частные результаты, полученные там. Их мы сформулируем здесь без доказательства.

Вернемся к общему интерполяционному квадратурному правилу (6.2.3) — (6.2.4). Оно определяется расположением узлов  $x_k$  на отрезке  $[a, b]$ . Последний мы будем считать конечным.

Пусть число узлов  $n$  формулы увеличивается неограниченно. При увеличении  $n$  будут, вообще говоря, не только добавляться новые узлы, но может изменяться расположение всех узлов на  $[a, b]$ .

Вопрос о сходимости квадратурного процесса  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = \int_a^b p(x) f(x) dx$  зависит, очевидным образом, от того, каким будет предельное распределение совокупности узлов формулы  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и по какому закону происходит приближение этих узлов к предельному распределению. Естественно было выяснить условия сходимости интерполяционного квадратурного процесса для функций, аналитических на  $[a, b]$ , так как такие функции наиболее часто встречаются в приложениях.

Предположим, что отрезок  $[a, b]$  линейно преобразован в  $[-1, 1]$ . Пусть на этом отрезке произвольно распределена единичная масса. Распределение называется чебышёвским, если его плотность будет \*)  $\rho(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}}$ .

Рассмотрим теперь узлы  $x_1, \dots, x_n$  квадратурного правила и каждому из них припишем массу  $\frac{1}{n}$ . Общая масса, сосредоточенная в узлах, будет единичной. Такое распределение масс мы для краткости обозначим  $\mu_n$ . Оно характеризует расположение узлов формулы (6.2.3) — (6.2.4).

В § 2 главы 12 доказывается, что если при  $n \rightarrow \infty$  распределение  $\mu_n$  будет стремиться к распределению Чебышёва, то квадратурный интерполяционный процесс (6.2.3) — (6.2.4) будет сходиться для всякой функции  $f(x)$ , аналитической на  $[-1, 1]$ , какова бы ни была весовая функция  $p(x)$ . Никакое другое распределение, кроме чебышёвского, этим свойством обладать не будет. Поэтому следует считать, что для интегрирования аналитических функций распределение Чебышёва является наилучшим предельным распределением для  $\mu_n$ . Если мы хотим улучшить точность интерполяционной квадратуры путем специального выбора узлов, то узлы следует выбрать так, чтобы соответствующее им распределение  $\mu_n$  возможно лучше походило на распределение Чебышёва. Узлы  $x_k$  при этом не могут быть равноотстоящими и должны сгущаться вблизи концов отрезка интегрирования.

Если функция  $f$  задана таблично, например, известны ее значения в равноотстоящих точках  $a + ih$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ), то в нашем распоряжении будет только одна возможность добиться указанного выше сходства: мы можем опустить несколько табличных узлов и сделать это так, чтобы оставленные узлы обладали желательным для нас распределением на отрезке интегрирования.

Изложенные соображения имеют лишь наводящее значение и не дают возможности однозначно решить вопрос о выборе абсцисс квадратурной формулы из числа табличных значений аргумента. Часто возможно построить несколько квадратурных правил одинаковой степени точности, с мало отличающимися остатками, но с несовпадающими узлами  $x_k$ . Мы ограничимся тем, что приведем несколько примеров таких формул. Для упрощения записи во всех примерах величина шага приведена к единице.

$$1. \int_0^6 f(x) dx \approx 0,2(f_0 + f_6) + 1,62(f_1 + f_5) + 2,2f_3 \quad (\text{Харди}).$$

Степень точности равна 5.

$$2. \int_0^8 f(x) dx \approx \frac{1}{6615} [2196(f_0 + f_8) + 8192(f_1 + f_7) + \\ + 8064(f_2 + f_6) + 16\,016f_4].$$

Степень точности равна 7.

$$3. \int_0^8 f(x) dx \approx \frac{1}{33\,075} [9836(f_0 + f_8) + 50\,112(f_1 + f_7) + \\ + 8288(f_2 + f_6) + 64\,064(f_3 + f_5)].$$

\*) См. (12.2.5) и рис. 7.

Степень точности равна 7.

$$4. \int_0^{10} f(x) dx \approx \frac{5}{127\,008} [7136(f_0 + f_{10}) + 41\,125(f_1 + f_9) + \\ + 55\,500(f_3 + f_7) + 46\,494f_5] \quad (\text{Вулхауз}) \quad (\text{Woolhouse}).$$

Степень точности равна 7.

## § 7. Правила интегрирования, использующие значения функции и производных

В некоторых случаях численного интегрирования можно увеличить точность результата, если воспользоваться не только значениями интегрируемой функции, но и значениями производных от нее.

В достаточно общей форме такое правило может быть записано в следующем виде. Пусть в области задания функции  $f$ , которая может быть шире отрезка интегрирования  $[a, b]$ , взято  $m$  точек  $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ . Допустим, что в точке  $x_1$  даны значения  $f$  и всех ее производных до порядка  $k_1 - 1$ , в точке  $x_2$  даны значения  $f$  и всех производных до порядка  $k_2 - 1$  и т. д. Общее число известных величин обозначим  $n + 1$ :  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n + 1$ . Будем рассматривать приближенное равенство

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{k_i-1} A_{ij} f^{(j)}(x_i). \quad (6.7.1)$$

Если абсциссы  $x_i$  считать фиксированными, это равенство будет содержать  $n + 1$  параметров  $A_{ij}$ . На выбор их могут быть наложены ограничения и число произвольных параметров может быть меньше  $n + 1$ . Пример таких ограничений дает тот случай, когда в правиле (6.7.1) некоторые из величин  $f^{(j)}(x_i)$  должны быть пропущены. Мы должны тогда заранее считать, что коэффициенты  $A_{ij}$  при пропускаемых значениях  $f^{(j)}(x_i)$  равны нулю.

Остановимся только на том случае построения правила (6.7.1), когда все  $A_{ij}$  считаются произвольными и значения их мы можем выбирать по нашему усмотрению.

Рассмотрим многочлен  $P(x)$  степени  $n$ , удовлетворяющий условиям

$$P^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) \quad (j = 0, 1, \dots, k_i - 1, i = 1, \dots, m). \quad (6.7.2)$$

Построение такого многочлена принадлежит задаче алгебраического интерполирования с кратными узлами. Правила построения  $P(x)$  указаны в § 3 гл. 1. Для нас сейчас достаточно знать, что  $P(x)$

может быть представлен в виде:

$$P(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{k_i-1} h_{ij}(x) f^{(j)}(x_i), \quad (6.7.3)$$

где  $h_{ij}(x)$  есть многочлены степени  $n$  от  $x$ ;  $h_{ij}(x)$  называют *интерполяционным множителем* или *многочленом влияния* значения  $f^{(j)}(x_i)$ .

Обозначим  $r(x)$  погрешность интерполирования:  $f(x) = P(x) + r(x)$ .

Если в интеграле  $\int_a^b p(x) f(x) dx$  заменить  $f(x)$  ее выражением через интерполирующий многочлен  $P(x)$  и пренебречь интегралом от остатка *интерполирования*, построим следующее правило приближенного численного интегрирования, получившее название *интерполяционного с кратными узлами*

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{k_i-1} A_{ij} f^{(j)}(x_i), \quad (6.7.4)$$

$$A_{ij} = \int_a^b p(x) h_{ij}(x) dx. \quad (6.7.5)$$

Погрешность его имеет значение

$$R = \int_a^b p(x) r(x) dx. \quad (6.7.6)$$

Правило (6.7.4) характеризуется следующей теоремой.

**Теорема 9.** Для того чтобы правило интегрирования (6.7.1) было верным для всех многочленов степени  $n$ , необходимо и достаточно, чтобы его коэффициенты имели значения (6.7.5).

Всякий многочлен  $f(x)$  степени  $n$  представим в форме  $f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{k_i-1} h_{ij}(x) f^{(j)}(x_i)$ , и наоборот, при всяких численных значениях  $f^{(j)}(x_i)$  сумма, стоящая справа, будет многочленом, степень которого не больше  $n$ . Если правило (6.7.1) верно для всякого многочлена степени  $n$ , то должно быть выполнено равенство

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{k_i-1} f^{(j)}(x_i) \int_a^b p(x) h_{ij}(x) dx = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{k_i-1} A_{ij} f^{(j)}(x_i), \quad (6.7.7)$$



и так как оно обязано выполняться при произвольных  $f^{(j)}(x_i)$ , отсюда следует, что коэффициенты должны иметь значения (6.7.5). Аналогично проверяется достаточность условий теоремы.

Более подробно остановимся на случае равноотстоящих узлов  $x_i = a + ih$  ( $h = \frac{1}{m}(b - a)$ ) и предположим, что в каждом из них даны значения функции и ее первой производной.

Если считать, что отрезок интегрирования приведен к  $[0, 1]$ , то интерполяционное правило (6.7.4) запишется в виде

$$\int_0^1 p(x) f(x) dx \approx \sum_{i=0}^m \left[ A_{i0} f\left(\frac{i}{m}\right) + A_{i1} f'\left(\frac{i}{m}\right) \right]. \quad (6.7.8)$$

Оно является аналогом правила Ньютона — Котеса.

Для подсчета коэффициентов  $A_{i0}$  и  $A_{i1}$  заметим, что многочлен степени  $2m + 1$ , интерполирующий  $f(x)$  по значениям  $f\left(\frac{i}{m}\right)$  и  $f'\left(\frac{i}{m}\right)$ , будет (см. (3.3.8)):

$$\sum_{i=0}^m \frac{\omega^2(x)}{(x - x_i)^2 \omega'^2(x_i)} \left\{ \left[ 1 - \frac{\omega''(x_i)}{\omega'(x_i)} (x - x_i) \right] f(x_i) + (x - x_i) f'(x_i) \right\},$$

$$x_i = \frac{i}{m}, \quad \omega(x) = x \left( x - \frac{1}{m} \right) \dots (x - 1).$$

Остатку интерполирования, если предположить, что  $f$  имеет на  $[0, 1]$  непрерывную производную порядка  $2m + 2$ , и воспользоваться теоремой 6 гл. 3 и равенством (3.3.9), можно придать форму:

$$r(x) = \frac{\omega^2(x)}{(2m + 2)!} f^{(2m+2)}(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq 1.$$

В правиле (6.7.8) коэффициенты будут следующими:

$$A_{i0} = \int_0^1 p(x) \frac{\omega^2(x)}{(x - x_i)^2 \omega'^2(x_i)} \left[ 1 - \frac{\omega''(x_i)}{\omega'(x_i)} (x - x_i) \right] dx,$$

$$A_{i1} = \int_0^1 p(x) \frac{\omega^2(x)}{(x - x_i) \omega'^2(x_i)} dx.$$

Если весовая функция  $p(x)$  сохраняет знак, на  $[0, 1]$  существует такая точка  $\xi$ , что для погрешности  $R$  правила (6.7.8) верно равенство

$$R = \frac{f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m + 2)!} \int_0^1 p(x) \omega^2(x) dx. \quad (6.7.9)$$

Ниже приведены примеры правил (6.7.8) для случая постоянной весовой функции и  $m=1(1)6$ . В записи принято обозначение  $f\left(\frac{i}{m}\right)=f_i$  и  $f'\left(\frac{i}{m}\right)=f'_i$ :

$$\begin{aligned}
 m=1, \quad \int_0^1 f(x) dx &= \frac{1}{2} \left[ f_0 + f_1 - \frac{1}{6} (f'_1 - f'_0) \right] + \frac{1}{720} f^{(4)}(\xi); \\
 m=2, \quad \int_0^1 f(x) dx &= \frac{1}{30} \left[ 7(f_0 + f_2) + 16f_1 - \frac{1}{2} (f'_2 - f'_0) \right] + \\
 &\quad + \frac{1}{2^7 \cdot 4725} f^{(6)}(\xi); \\
 m=3, \quad \int_0^1 f(x) dx &= \frac{1}{1120} \left\{ 155(f_0 + f_3) + 405(f_1 + f_2) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{3} [27(f'_2 - f'_1) - 19(f'_3 - f'_0)] \right\} + \frac{1}{3^7 \cdot 313\,600} f^{(8)}(\xi); \\
 m=4, \quad \int_0^1 f(x) dx &= \frac{1}{17\,010} \left\{ 1601(f_0 + f_4) + 4096(f_1 + f_3) + \right. \\
 &\quad \left. + 5616f_2 + \frac{3}{2} [128(f'_3 - f'_1) - 29(f'_4 - f'_0)] \right\} + \\
 &\quad + \frac{1}{2^{19} \cdot 1\,964\,655} f^{(10)}(\xi); \\
 m=5, \quad \int_0^1 f(x) dx &= \frac{1}{6\,386\,688} \left\{ 446\,719(f_0 + f_5) + \right. \\
 &\quad + 968\,625(f_1 + f_4) + 1\,778\,000(f_2 + f_3) + \\
 &\quad \left. + 6[-1479(f'_5 - f'_0) + 12\,575(f'_4 - f'_1) + 10\,900(f'_3 - f'_2)] \right\} + \\
 &\quad + \frac{5777}{5^{11} \cdot 230\,150\,670\,288} f^{(12)}(\xi); \\
 m=6, \quad \int_0^1 f(x) dx &= \frac{1}{60\,060\,000} \left\{ 3\,310\,219(f_0 + f_6) + \right. \\
 &\quad + 5\,014\,656(f_1 + f_5) + 11\,161\,125(f_2 + f_4) - 32\,966\,000f_3 - \\
 &\quad \left. - 5[10\,237(f'_6 - f'_0) - 136\,512(f'_5 - f'_1) - 242\,325(f'_4 - f'_2)] \right\} + \\
 &\quad + \frac{1}{2^{18} \cdot 3^{14} \cdot 25\,025} f^{(14)}(\xi).
 \end{aligned} \tag{6.7.10}$$

Приведенные примеры показывают, что правилам интегрирования (6.7.8) присущи некоторые недостатки правил Ньютона — Котеса: коэффициенты их имеют «нерегулярное» распределение значений по узлам  $x_i = \frac{i}{m}$  и уже при  $m = 6$  среди коэффициентов при значениях функции встречаются отрицательные. Можно было бы показать, что при увеличении  $m$  абсолютные значения коэффициентов будут неограниченно и быстро возрастать.

Можно попытаться улучшить свойства коэффициентов правила вида (6.7.8), пропуская в сумме некоторые значения функции  $f$  или ее производной, т. е. заранее считая коэффициенты, стоящие при них, равными нулю. Мы ограничимся тем, что приведем только один пример \*). В правиле (6.7.10), соответствующем  $m = 6$ , коэффициент при  $f_3$  отрицателен. Чтобы сделать коэффициенты при всех значениях функции положительными, достаточно заранее положить равными нулю коэффициенты при  $f'_4$  и  $f'_2$ , остальные же коэффициенты избрать так, чтобы правило интегрирования было точным для многочленов десятой степени. Это приведет нас к квадратурной формуле:

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2310000} \{ 144\,341 (f_0 + f_6) + 377\,784 (f_1 + f_5) + \\ + 475\,875 (f_2 + f_4) + 314\,000 f_3 - 10 [259 (f'_6 - f'_0) - 1134 (f'_5 - f'_1)] \} + \\ + \frac{359}{2^{18} \cdot 3^{12} \cdot 9\,634\,625} f^{(12)} (\xi).$$

Степень точности ее равна 11, что на две единицы ниже, чем у (6.7.10).

## § 8. Некоторые результаты общей теории интерполяционных квадратур

Мы ограничимся рассмотрением правила вычисления интеграла по нескольким значениям интегрируемой функции:

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (6.8.1)$$

Теоремы, доказываемые ниже для этого простейшего правила, могут быть, при надлежащих изменениях, перенесены на более общие правила вида (6.7.1).

Пусть рассматривается система функций  $\omega_k(x)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ). Принципы выбора ее были кратко описаны в § 1, гл. 5.

\*) Для ознакомления с другими правилами такого рода можно воспользоваться справочными и учебными книгами по интегрированию функций.

Считая абсциссы  $x_k$  правила (6.8.1) фиксированными, постараемся коэффициенты его  $A_k$  определить так, чтобы это правило было точным для первых  $n$  функций  $\omega_k(x)$ . Это требование позволяет построить для нахождения  $A_k$  систему  $n$  уравнений

$$\sum_{k=1}^n A_k \omega_i(x_k) = \int_a^b p(x) \omega_i(x) dx = \mu_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (6.8.2)$$

Для того чтобы система имела и при этом единственное решение, следует потребовать, чтобы определитель ее

$$\Delta = \begin{vmatrix} \omega_1(x_1) & \dots & \omega_1(x_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_n(x_1) & \dots & \omega_n(x_n) \end{vmatrix} \quad (6.8.3)$$

был отличен от нуля.

Такое условие, налагаемое на выбор функций  $\omega_i$ , обычно усиливают и требуют, чтобы правило (6.8.1) могло быть построенным и было единственным при всяком выборе абсцисс  $x_k$  на отрезке интегрирования  $[a, b]$ , лишь бы они были различны между собой. Последнее равносильно тому, чтобы определитель  $\Delta$  был отличен от нуля для всяких несовпадающих  $x_k$ . Системы функций  $\omega_i(x)$ , обладающие этим свойством, называют системами Чебышёва.

Явное выражение для коэффициента  $A_k$  правила может быть получено, если воспользоваться теоремой Крамера. Обозначим  $\Delta_{ik}$  алгебраическое дополнение элемента  $(i, k)$  определителя  $\Delta$ . Тогда

$$A_k = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^n \Delta_{ik} \int_a^b p(x) \omega_i(x) dx = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^n \Delta_{ik} \mu_i. \quad (6.8.4)$$

Правила интегрирования (6.8.1) с коэффициентами (6.8.4) называются *интерполяционными* ввиду того, что они связаны со следующей задачей интерполирования. Составим линейную комбинацию первых  $n$  функций  $\omega_i$ :

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i \omega_i(x)$$

и коэффициенты ее выберем так, чтобы  $s_n(x)$  в точках  $x_k$  принимала значения  $f(x_k)$ . Такое требование доставит для  $a_i$  линейную систему

$\sum_{i=1}^n a_i \omega_i(x_k) = f(x_k)$ , матрица коэффициентов которой получается из матрицы системы (6.8.2) при помощи транспонирования. Поэтому решение системы

есть  $a_i = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n \Delta_{ik} f(x_k)$  и, стало быть,

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n \Delta_{ik} f(x_k) \omega_i(x) = \sum_{k=1}^n \Lambda_k(x) f(x_k). \quad (6.8.5)$$

Если остаток интерполирования обозначить  $r_n(x)$ , так что  $f(x) = s_n(x) + r_n(x)$ , то точное значение интеграла будет

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \int_a^b p(x) s_n(x) dx + R_n(f) \\ \left( R_n(f) = \int_a^b p(x) r_n(x) dx \right).$$

Отбрасывая остаток  $R_n$  и внося вместо  $s_n(x)$  ее представление (6.8.5), получим правило приближенной квадратуры вида (6.8.1) с коэффициентами (6.8.4).

Представления остатка правила квадратуры (6.8.1) — (6.8.4), позволяющие получить неухудшаемые оценки  $R_n$  в каком-либо классе функций  $f$ , зависят от выбора этого класса. Мы приведем одно из простых представлений, рассчитанное на функции  $f$  достаточно высокого порядка дифференцируемости. Для облегчения изложения будем считать отрезок интегрирования конечным, вес  $p(x)$  абсолютно интегрируемым, а функции  $\omega_k(x)$  ( $k = 1, \dots, n$ ) и  $f$  имеющими на  $[a, b]$  непрерывные производные порядка  $n$ . Кроме того, предположим, что определитель Вронского

$$W_n(x) = \begin{vmatrix} \omega_1^{(n-1)}(x) & \omega_1^{(n-2)}(x) & \dots & \omega_1(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_n^{(n-1)}(x) & \omega_n^{(n-2)}(x) & \dots & \omega_n(x) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля всюду на  $[a, b]$ .

Рассмотрим линейную дифференциальную операцию, обращающуюся в нуль на линейных комбинациях функций  $\omega_1, \dots, \omega_n$ :

$$L_n(y) = W_n^{-1} \begin{vmatrix} y^{(n)} & y^{(n-1)} & \dots & y \\ \omega_1^{(n)}(x) & \omega_1^{(n-1)}(x) & \dots & \omega_1(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_n^{(n)}(x) & \omega_n^{(n-1)}(x) & \dots & \omega_n(x) \end{vmatrix} = y^{(n)} + P_1(x) y^{(n-1)} + \dots$$

Остаток интерполирования  $r_n(x)$  определяется следующей многоточечной задачей линейного дифференциального уравнения:

Найти решение уравнения  $L_n(y) = L_n(f)$ , удовлетворяющее в точках  $x_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) условиям  $y(x_k) = 0$ . Действительно, так как  $L_n(s_n) = 0$ , то  $L_n(r_n) = L_n(f - s_n) = L_n(f) - L_n(s_n) = L_n(f)$ . Кроме того, ввиду того, что  $s_n(x_k) = f(x_k)$ , будет  $r_n(x_k) = 0$ . Поэтому остаток  $r_n$  есть решение сформулированной задачи. Остается убедиться в том, что эта задача может иметь только одно решение. Если обозначить  $\Omega(x)$  какое-либо частное решение неоднородного уравнения  $L_n(y) = L_n(f)$ , то всякое его решение представимо в виде  $y = \Omega(x) + \sum_{i=1}^n c_i \omega_i(x)$ .

Условия в точках  $x_k$  дают нижеследующую систему уравнений для определения коэффициентов  $c_i$ :  $\Omega(x_k) + \sum_{i=1}^n c_i \omega_i(x_k) = 0$ , определитель которой равен  $\Delta$  и отличен от нуля. Поэтому система разрешима и имеет лишь одно решение.

Чтобы найти нужное нам явное выражение для  $r_n(x)$ , выберем на  $[a, b]$  произвольную точку  $s$  и рассмотрим функцию

$$g(x, s) = W_n^{-1}(s) \begin{vmatrix} \omega_1(x) & \omega_1^{(n-2)}(s) & \dots & \omega_1(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_n(x) & \omega_n^{(n-2)}(s) & \dots & \omega_n(s) \end{vmatrix}.$$

Как линейная комбинация элементов  $\omega_1(x), \dots, \omega_n(x)$  первого столбца,  $g(x, s)$ , рассматриваемая как функция от  $x$ , есть решение однородного уравнения  $L_n(y) = 0$ . При  $x = s$  она удовлетворяет условиям

$$g|_{x=s} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{x=s} = 0, \dots, \quad \frac{\partial^{n-2} g}{\partial x^{n-2}} \Big|_{x=s} = 0, \quad \frac{\partial^{n-1} g}{\partial x^{n-1}} \Big|_{x=s} = 1. \quad (6.8.6)$$

Если  $F(x)$  есть произвольная непрерывная на  $[a, b]$  функция, то ввиду условий (6.8.6) и равенства  $L_n[g(x, s)] = 0$  интеграл  $Y(x) = \int_a^x F(s) g(x, s) ds$  будет решением неоднородного уравнения  $L_n(Y) = F(x)$ .

Функции  $\Lambda_k(x) = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^n \Delta_{ik} \omega_i(x)$ , участвующие в (6.8.5), как линейные

комбинации  $\omega_i(x)$  будут решениями однородного уравнения  $L_n(y) = 0$ . С другой стороны, если положить  $f(x) = \omega_i(x)$ , то в силу единственности

интерполирующей комбинации  $s_n(x)$  должно быть  $\omega_i(x) = \sum_{k=1}^n \Lambda_k(x) \omega_i(x_k)$ .

$\omega_i(x)$  линейно выражаются через  $\Lambda_k(x)$  и функции  $\Lambda_k(x)$  образуют, следовательно, фундаментальную систему решений однородного уравнения  $L_n(y) = 0$ .

Всякое решение неоднородного уравнения  $L_n(y) = L_n[f(x)]$  содержится в

$$y = \int_a^x g(x, s) L_n[f(s)] ds + \sum_{i=1}^n c_i \Lambda_i(x).$$

Чтобы найти значения постоянных  $c_i$ , отвечающих остатку  $r_n(x)$ , можно воспользоваться тем, что  $r_n(x)$  в точках  $x_k$  обращается в нуль. Если принять во внимание, что для  $\Lambda_i(x)$  при  $x = x_k$ , очевидно, выполняются равенства

$$\Lambda_i(x_k) = \begin{cases} 0, & k \neq i, \\ 1, & k = i, \end{cases}$$

то сразу же станет видно, что

$$r_n(x) = \int_a^x g(x, s) L_n[f(s)] ds - \sum_{i=1}^n \Lambda_i(x) \int_a^{x_i} g(x_i, s) L_n[f(s)] ds.$$

Интегралы могут быть объединены в один при помощи введенной выше га-  
сущей функции  $E(x)$ :

$$\left. \begin{aligned} r_n(x) &= \int_a^b k_n(x, s) L_n[f(s)] ds, \\ k_n(x, s) &= g(x, s) E(x-s) - \sum_{i=1}^n \Lambda_i(x) g(x_i, s) E(x_i-s). \end{aligned} \right\} \quad (6.8.7)$$

Ядро  $k_n(x, s)$  в найденном выражении  $r_n(x)$  есть не что иное, как остаток  
интерполирования по  $x$  функции  $g(x, s)$ , содержащей  $s$  как параметр.

Остаток правила (6.8.1) — (6.8.4), связанный с  $r_n(x)$  равенством  $R_n(f) =$   
 $= \int_a^b p r_n dx$ , получит, при помощи (6.8.7), следующее выражение через функ-  
цию  $f$  и параметры правила

$$\left. \begin{aligned} R_n(f) &= \int_a^b K_n(s) L_n[f(s)] ds, \\ K_n(s) &= \int_s^b p(x) g(x, s) ds - \sum_{i=1}^n g(x_i, s) E(x_i-s) \int_a^b p(x) \Lambda_i(x) dx = \\ &= \int_s^b p(x) g(x, s) ds - \sum_{i=1}^n A_i g(x_i, s) E(x_i-s). \end{aligned} \right\} \quad (6.8.8)$$

Естественной величиной, связанной со структурными свойствами функ-  
ции  $f$ , при помощи которой может быть оценен остаток  $R_n$  приближенной  
квадратуры, является, по-видимому, значение операции  $L_n(f)$ .

Очевидно, верна следующая простая теорема:

Если  $f$   $n$ -кратно непрерывно дифференцируема на  $[a, b]$  и если  
 $|L_n(f)| \leq M_n$ , то для остатка  $R_n$  правила (6.8.1) — (6.8.4) верно нера-  
венство  $|R_n(f)| \leq M_n \int_a^b |K_n(s)| ds$ . Оценка является точной в классе  
функций, определяемых условиями теоремы.

## Л и т е р а т у р а

Кузьмин Р. О., К теории механических квадратур, Изв. Ленингр.  
политехн. ин-та, отд. техн., естеств., матем. 32 (1931).

Уиттекер и Робинсон, Математическая обработка результатов  
наблюдений, гл. VII, М. — Л., Гостехиздат, 1935.

Стефенсен, Теория интерполяции, гл. XV, М. — Л., ОНТИ, 1935.

Бернштейн С. Н., Собрание сочинений, т. II, стр. 198—205, Изд.  
АН СССР, 1954.

## ГЛАВА 7

### КВАДРАТУРЫ НАИВЫСШЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СТЕПЕНИ ТОЧНОСТИ

#### § 1. Общие теоремы

В начале этого параграфа мы сохраним о весе  $p(x)$  те же предположения, что и в гл. 5.

Квадратурная формула

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \quad (7.1.1)$$

при фиксированном числе  $n$  узлов содержит  $2n$  параметров  $A_k$  и  $x_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Нашей задачей сейчас будет так выбрать эти параметры, чтобы формулу (7.1.1) сделать точной для многочленов возможно более высокой степени.

В § 2 главы 6 было выяснено, что при любом расположении  $x_k$  можно, за счет выбора коэффициентов  $A_k$ , достигнуть того, чтобы равенство (7.1.1) было бы точным для всех многочленов степени  $\leq n - 1$ . Этим требованием коэффициенты  $A_k$  определяются вполне: формула (7.1.1) должна быть интерполяционной и ее коэффициенты должны иметь значения (6.2.4).

Для увеличения степени точности (7.1.1) в распоряжении вычислителя остается еще  $n$  узлов  $x_k$ . Можно надеяться на то, что выбором их степень точности формулы можно увеличить на  $n$  единиц и сделать формулу верной для всех многочленов степени  $\leq 2n - 1$ . В каком случае это ожидание действительно оправдывается, мы увидим ниже.

Сейчас же выясним условия, которым должны удовлетворять  $A_k$  и  $x_k$ , чтобы формула имела степень точности, не меньшую  $2n - 1$ .

Мы предпочтем иметь дело не с узлами  $x_k$ , а с многочленом  $\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ . Если известны  $x_k$ , то при помощи предыдущего равенства можно сразу же построить многочлен  $\omega(x)$ . Наоборот, пусть известен многочлен  $\omega(x)$ , например,



пусть мы знаем его разложение по степеням  $x$ :  $\omega(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ . Вычисляя корни  $\omega(x)$ , мы найдем все  $x_k$ .

Заметим попутно, что если выбор узлов  $x_k$  мы хотим заменить на нахождение многочлена  $\omega(x)$ , то мы должны будем заботиться о том, чтобы корни  $\omega(x)$  были действительными, различными и не выходили за границы  $[a, b]$ .

**Теорема 1.** Для того чтобы формула (7.1.1) была точной для всех многочленов степени  $\leq 2n-1$ , необходимо и достаточно, чтобы она была интерполяционной и многочлен  $\omega(x)$  был ортогонален по весу  $p(x)$  ко всем многочленам  $Q(x)$  степени  $< n$ :

$$\int_a^b p(x) \omega(x) Q(x) dx = 0. \quad (7.1.2)$$

**Доказательство.** Проверим сначала необходимость. Если формула (7.1.1) верна для многочленов степени  $\leq 2n-1$ , то она верна и для многочленов степени  $\leq n-1$ , и поэтому она должна быть интерполяционной.

Пусть  $Q(x)$  — любой многочлен степени  $\leq n-1$ . Произведение  $f(x) = \omega(x) Q(x)$  есть многочлен степени  $\leq 2n-1$  и для него равенство (7.1.1) должно быть точным. Но  $f(x_k) = 0$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) и потому верно (7.1.2), что доказывает необходимость ортогональности.

Убедимся теперь в достаточности указанных условий. Пусть  $f$  — произвольный многочлен степени  $\leq 2n-1$ . Разделив  $f$  на  $\omega$  по обычным правилам, мы сможем представить  $f$  в форме  $f = Q\omega + \rho$ , где  $Q$  и  $\rho$  — многочлены степеней  $\leq n-1$ . Кроме того, так как  $\omega(x_k) = 0$ , то

$$f(x_k) = \rho(x_k) \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \int_a^b p(x) \omega(x) Q(x) dx + \int_a^b p(x) \rho(x) dx.$$

Первый из интегралов правой части равен нулю по условию ортогональности. Так как степень  $\rho(x)$  не больше  $n-1$ , а формула (7.1.1) интерполяционная, то должно быть точным равенство

$$\int_a^b p(x) \rho(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k \rho(x_k).$$

Ввиду же  $f(x_k) = \rho(x_k)$ , должно быть верным также такое равенство

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

и формула (7.1.1) действительно будет точной для произвольных многочленов степени  $\leq 2n - 1$ .

Вопрос о возможности построения такой формулы прежде всего связан с существованием многочлена  $\omega(x)$  степени  $n$ , обладающего свойством ортогональности (7.1.2). Если весовая функция  $p(x)$  изменяет знак на  $[a, b]$ , то многочлен  $\omega(x)$  может не существовать. Кроме того, если он существует, то корни его могут не удовлетворять указанным выше требованиям.

Подчиним вес  $p(x)$  до конца этого параграфа дополнительному ограничению и будем считать его неотрицательной функцией на  $[a, b]$ :  $p(x) \geq 0$ . В этом случае, как известно из теории ортогональных многочленов \*), многочлен  $\omega(x)$  степени  $n$ , ортогональный по весу  $p(x)$  ко всем многочленам меньших степеней, будет существовать при всяких  $n$ . Корни  $\omega(x)$  будут действительными, различными и лежать внутри отрезка  $[a, b]$ .

Все перечисленное позволяет высказать следующее утверждение.

*Если вес  $p(x) \geq 0$ , то квадратурная формула (7.1.1), точная для всяких многочленов степени  $\leq 2n - 1$ , существует при всех  $n = 1, 2, \dots$*

До сих пор осталось невыясненным, будет ли  $2n - 1$  наивысшей алгебраической степенью точности формулы (7.1.1). Если  $p(x)$  знакопеременная функция, то это может оказаться неверным. Но для знакопостоянного веса легко доказывается

**Теорема 2.** *Если  $p(x) \geq 0$ , то ни при каком выборе  $x_k$  и  $A_k$  равенство (7.1.1) не может быть верным для всех многочленов степени  $2n$ .*

**Доказательство.** Для многочлена  $f(x) = \omega^2(x)$ , имеющего степень  $2n$ , интеграл  $\int_a^b p(x) f(x) dx > 0$ , так как вес  $p(x)$  неотрицателен и неэквивалентен нулю. Квадратурная же сумма  $\sum A_k f(x_k)$  равна нулю, ввиду  $f(x_k) = 0$ . Поэтому для  $f = \omega^2$  равенство (7.1.1) не может быть верным.

Займемся теперь построением квадратурной формулы, имеющей наивысшую степень точности. С этой целью рассмотрим систему ортогональных на  $[a, b]$  многочленов  $P_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) по весу  $p(x)$ . Для определенности, будем считать их нормированными. Возьмем из этой системы многочлен степени  $n$ . Он может отличаться от  $\omega(x)$  только постоянным множителем. Корни  $P_n(x)$  будут узлами  $x_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) разыскиваемой квадратурной формулы.

\*) См. гл. 2, § 1.

Коэффициенты  $A_k$  определяются равенством (6.2.4), или равносильным ему равенством

$$A_k = \int_a^b p(x) \frac{P_n(x)}{(x - x_k) P'_n(x_k)} dx. \quad (7.1.3)$$

Для вычисления интеграла (7.1.3) воспользуемся тождеством Дарбу — Кристоффеля (2.1.11) и положим в нем  $t = x_k$ . После деления на  $x - x_k$  оно примет вид

$$\sum_{s=0}^{n-1} P_s(x) P_s(x_k) = - \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{P_n(x) P_{n+1}(x_k)}{x - x_k}.$$

Здесь знаком  $a_n$  обозначен старший коэффициент в  $P_n(x)$ .

Умножим на  $p(x)$  и интегрируем по  $[a, b]$ . Так как многочлены  $P_s(x)$  ортогональны, интеграл  $\int_a^b p(x) P_s(x) dx$  равен нулю при  $s \geq 1$  и равен 1 при  $s = 0$ , ввиду нормированности  $P_0$ . Поэтому после интегрирования получится равенство

$$1 = - \frac{a_n}{a_{n+1}} P_{n+1}(x_k) \int_a^b p(x) \frac{P_n(x)}{x - x_k} dx.$$

Отсюда для  $A_k$  будем иметь

$$A_k = - \frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{1}{P'_n(x_k) P_{n+1}(x_k)}. \quad (7.1.4)$$

Найденное выражение  $A_k$  может быть немного упрощено. Возьмем трехчленное рекуррентное соотношение (2.1.10) между ортонормированными многочленами и подставим в него вместо  $x$  корень  $x_k$  многочлена  $P_n(x)$ . В результате получится равенство, которое, при принятом сейчас обозначении старшего коэффициента в  $P_n(x)$ , запишется так:  $\frac{a_n}{a_{n+1}} P_{n+1}(x_k) + \frac{a_{n-1}}{a_n} P_{n-1}(x_k) = 0$ . Последнее дает возможность преобразовать (7.1.4) к виду

$$A_k = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{1}{P'_n(x_k) P_{n-1}(x_k)}. \quad (7.1.5)$$

Весьма существенно, что все коэффициенты квадратурной формулы, имеющей наивысшую степень точности  $2n - 1$ , положительны. Это сразу следует из теоремы:

**Теорема 3.** Если квадратурная формула (7.1.1) верна для всевозможных многочленов степени  $2n-2$ , то все ее коэффициенты  $A_k$  положительны.

**Доказательство.** Рассмотрим функцию  $f(x) = \left[ \frac{\omega(x)}{x-x_i} \right]^2$ . Это — многочлен степени  $2n-2$  и для него равенство (7.1.1) должно быть верным. Но

$$f(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq i, \\ \omega'^2(x_i) & \text{при } k = i, \end{cases}$$

и значит,

$$\int_a^b p(x) \left[ \frac{\omega(x)}{x-x_i} \right]^2 dx = A_i \omega'^2(x_i), \quad A_i = \int_a^b p(x) \left[ \frac{\omega(x)}{(x-x_i) \omega'(x_i)} \right]^2 dx > 0,$$

что доказывает утверждение.

Перейдем теперь к изучению остатка квадратуры. Напомним, что отрезок интегрирования  $[a, b]$  мог быть любым отрезком конечной или бесконечной длины. Функция  $f$  предполагается такой, что произведение  $pf$  суммируемо на  $[a, b]$ .

**Теорема 4.** Если  $f$  имеет непрерывную производную порядка  $2n$  на  $[a, b]$ , то существует такая точка  $\eta \in [a, b]$ , что для остатка квадратуры наивысшей степени точности верно равенство

$$R(f) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \int_a^b p(x) \omega^2(x) dx, \quad a \leq \eta \leq b. \quad (7.1.6)$$

**Доказательство.** Построим интерполяционный многочлен  $H(x)$  степени  $\leq 2n-1$ , удовлетворяющий условиям  $H(x_k) = f(x_k)$ ,  $H'(x_k) = f'(x_k)$ . В силу теоремы 6 гл. 3, остаток интерполирования  $r(x) = f(x) - H(x)$  имеет следующее представление:

$$r(x) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \omega^2(x),$$

где  $\xi$  — некоторая точка, лежащая между  $x$  и узлами  $x_k$ ,

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \int_a^b p(x) H(x) dx + \frac{1}{(2n)!} \int_a^b p(x) f^{(2n)}(\xi) \omega^2(x) dx.$$

Сходимость последнего интеграла вытекает из сходимости двух предыдущих. Так как квадратурная формула верна для всех много-

членов степени  $\leq 2n - 1$ , а степень  $H(x)$  также  $\leq 2n - 1$ , то

$$\int_a^b p(x) H(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k H(x_k) = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

и для остатка квадратуры поэтому получается такое равенство:

$$R(f) = \frac{1}{(2n)!} \int_a^b f^{(2n)}(\xi) \cdot p(x) \omega^2(x) dx.$$

Исходя отсюда, путем обычных рассуждений, можно показать, что существует точка  $\eta \in [a, b]$ , для которой имеет место формула (7.1.6)\*). Укажем еще на один факт, связанный с интегральным представлением остатка квадратуры наивысшей степени точности. Для него верно все, что говорилось в § 2 гл. 5 об остатке любой квадратурной формулы. Будем, как выше, считать  $f$  имеющей на  $[a, b]$  непрерывную производную порядка  $2n$ . Допустим, кроме того, что для остатка  $R(f)$  имеет место равенство (5.2.6) при  $r = 2n$

$$R(f) = \int_a^b f^{(2n)}(t) K(t) dt. \quad (7.1.7)$$

Если отрезок  $[a, b]$  конечный, такое представление остатка, наверное, возможно.

Из (7.1.6) видно, что если  $f^{(2n)}(x)$  отлична от нуля на  $[a, b]$ , то  $R(f)$  не обращается в нуль и имеет тот же знак, что и  $f^{(2n)}$ . Так как это верно для любой функции  $f^{(2n)}$ , обладающей указанным свойством, то ядро  $K(t)$  остатка в (7.1.7) должно сохранять свой знак на  $[a, b]$  и быть неотрицательным.

Теорема о сходимости квадратурного процесса, сформулированная несколькими строками ниже, может быть получена как следствие более общего результата, установленного в гл. 12.

Мы докажем эту теорему, не откладывая ее до гл. 12, так как все рассуждения сейчас будут основываться на соображениях значительно более простых, чем те, которые применяются в гл. 12.

\*) Если  $m = \inf_{[a, b]} f^{(2n)}$  и  $M = \sup_{[a, b]} f^{(2n)}$ , то  $m \int_a^b p \omega^2 dx \leq \int_a^b p f^{(2n)}(\xi) \omega^2 dx \leq M \int_a^b p \omega^2 dx$ . Поэтому должно быть  $\int_a^b f^{(2n)}(\xi) p \omega^2 dx = T \int_a^b p \omega^2 dx$ , где  $m \leq T \leq M$ . Отсюда легко прийти к заключению о существовании точки  $\eta$ .

Пусть  $p(x)$  — неотрицательная весовая функция на  $[a, b]$  и  $\omega_n(x)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) — принадлежащая ей система ортогональных многочленов. Пусть, далее,  $x_k^{(n)}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) — корни многочлена  $\omega_n(x)$  и  $A_k^{(n)}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) — соответствующие им коэффициенты квадратурной формулы наивысшей степени точности. Тогда имеет место

**Теорема 5.** Если отрезок  $[a, b]$  — конечный и функция  $f$  непрерывна на нем, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) = \int_a^b p(x) f(x) dx. \quad (7.1.8)$$

**Доказательство.** Так как  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , при любом  $\varepsilon > 0$  найдется такой многочлен  $P(x)$ , что для всяких  $x \in [a, b]$  будет

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon. \quad (7.1.9)$$

Очевидно

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b p f dx - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \right| &\leq \left| \int_a^b p f dx - \int_a^b p P dx \right| + \\ &+ \left| \int_a^b p P dx - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} P(x_k^{(n)}) \right| + \left| \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} P(x_k^{(n)}) - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \right|. \end{aligned}$$

Но, ввиду (7.1.9),

$$\left| \int_a^b p f dx - \int_a^b p P dx \right| < \varepsilon \int_a^b p dx$$

и

$$\left| \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} P(x_k^{(n)}) - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \right| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} = \varepsilon \int_a^b p dx.$$

Кроме того, если  $m$  — степень многочлена  $P(x)$ , то, при  $2n-1 \geq m$ , будет

$$\int_a^b p P dx = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} P(x_k^{(n)})$$

и для таких  $n$

$$\left| \int_a^b p f dx - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \right| < 2\varepsilon \int_a^b p dx,$$

что и доказывает (7.1.8).

## § 2. Постоянная весовая функция

Формула Гаусса является исторически первой найденной формулой наивысшей степени точности. Она служит для вычисления интегралов вида

$$\int_a^b f(x) dx, \quad (7.2.1)$$

взятых по конечному отрезку  $[a, b]$  с постоянным весом.

Линейным преобразованием всякий конечный отрезок  $[a, b]$  может быть преобразован в какой-либо стандартный отрезок. Чтобы сделать более простым использование свойств симметрии узлов  $x_k$  и коэффициентов  $A_k$ , за такой стандартный отрезок мы примем  $[-1, +1]$  и будем считать, что интеграл (7.2.1) приведен к виду

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx. \quad (7.2.2)$$

Ортогональную систему многочленов с постоянным весом на отрезке  $[-1, +1]$  образуют многочлены Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

Для построения квадратурной формулы с  $n$  узлами

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}), \quad (7.2.3)$$

имеющей наивысшую степень точности  $2n - 1$ , узлы ее мы должны взять в корнях многочлена Лежандра степени  $n$ :

$$P_n(x_k^{(n)}) = 0.$$

Коэффициенты  $A_k^{(n)}$  формулы могут быть найдены при помощи равенств (7.1.4) и (7.1.5). Заметим, что при записи этих равенств мы пользовались нормированными многочленами. Поэтому при применении (7.1.4) и (7.1.5) мы должны пользоваться многочленами

$P_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x)$ , старшие коэффициенты которых равны  $A_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$  [см. (2.2.10) и (2.2.11)]. Простые вычисления дадут для  $A_k^{(n)}$  следующие значения:

$$A_k^{(n)} = -\frac{2}{(n+1) P_{n+1}(x_k^{(n)}) P_n'(x_k^{(n)})} = \frac{2}{nP_{n-1}(x_k^{(n)}) P_n'(x_k^{(n)})}. \quad (7.2.4)$$

В них могут быть внесены некоторые упрощения, если воспользоваться известным в теории многочленов Лежандра соотношением \*):

$$(1 - x^2) P'_n(x) = (n+1)[xP_n(x) - P_{n+1}(x)] = n[P_{n-1}(x) - xP_n(x)].$$

Положив здесь  $x = x_k^{(n)}$ , получим следующую систему равенств

$$[1 - (x_k^{(n)})^2] P'_n(x_k^{(n)}) = -(n+1) P_{n+1}(x_k^{(n)}) = n P_{n-1}(x_k^{(n)}),$$

позволяющую исключить из (7.2.4) любую из величин  $P'_n$ ,  $P_{n+1}$  или  $P_{n-1}$ . Равенство (7.2.4) можно привести, например, к виду

$$A_k^{(n)} = \frac{2}{[1 - (x_k^{(n)})^2] [P'_n(x_k^{(n)})]^2}. \quad (7.2.5)$$

Ниже приведены узлы и коэффициенты гауссовой формулы для  $n = 1(1)16$  \*\*).

$n = 1$		
$x_1^{(1)} = 0$		$A_1^{(1)} = 2$
$n = 2$		
$x_2^{(2)} = -x_1^{(2)} = 0,57735\ 02691\ 89526$		$A_1^{(2)} = A_2^{(2)} = 1$
$n = 3$		
$x_2^{(3)} = 0$		$A_2^{(3)} = 0,88888\ 88888\ 88889 = \frac{8}{9}$
$x_3^{(3)} = -x_1^{(3)} = 0,77459\ 66692\ 41483$		$A_1^{(3)} = A_3^{(3)} = 0,55555\ 55555\ 55556 = \frac{5}{9}$
$n = 4$		
$x_3^{(4)} = -x_2^{(4)} = 0,33998\ 10435\ 84856$		$A_2^{(4)} = A_3^{(4)} = 0,65214\ 51548\ 62546$
$x_4^{(4)} = -x_1^{(4)} = 0,86113\ 63115\ 94053$		$A_1^{(4)} = A_4^{(4)} = 0,34785\ 48451\ 37454$
$n = 5$		
$x_3^{(5)} = 0$		$A_3^{(5)} = 0,56888\ 88888\ 88889$
$x_4^{(5)} = -x_2^{(5)} = 0,53846\ 93101\ 05683$		$A_2^{(5)} = A_4^{(5)} = 0,47862\ 86704\ 99366$
$x_5^{(5)} = -x_1^{(5)} = 0,90617\ 98459\ 38664$		$A_1^{(5)} = A_5^{(5)} = 0,23692\ 68850\ 56189$
$n = 6$		
$x_4^{(6)} = -x_3^{(6)} = 0,23861\ 91860\ 83197$		$A_3^{(6)} = A_4^{(6)} = 0,46791\ 39345\ 72691$
$x_5^{(6)} = -x_2^{(6)} = 0,66120\ 93864\ 66265$		$A_2^{(6)} = A_5^{(6)} = 0,36076\ 15730\ 48139$
$x_6^{(6)} = -x_1^{(6)} = 0,93246\ 95142\ 03152$		$A_1^{(6)} = A_6^{(6)} = 0,17132\ 44923\ 79170$

\*) См., например, Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций, М., ИЛ, 1954, п° 20.

\*\*) Lowan A., Davids N., Levenson A., Tables of the zeros of the Legendre polynomials of order 1—16 and the weight coefficients for Gauss, mechanical quadrature formula, Bull. Am. Math. Soc. 48 (1942); 49 (1943).

Запись  $n = 1(1)16$  означает, что  $n$  меняется от  $n = 1$  до  $n = 16$  с интервалом в 1.



$n = 7$ 

$$\begin{aligned}
 x_4^{(7)} &= 0 & A_4^{(7)} &= 0,41795 \ 91836 \ 73469 \\
 x_5^{(7)} &= -x_3^{(7)} = 0,40584 \ 51513 \ 77397 & A_3^{(7)} &= A_5^{(7)} = 0,38183 \ 00505 \ 05119 \\
 x_6^{(7)} &= -x_2^{(7)} = 0,74153 \ 11855 \ 99394 & A_2^{(7)} &= A_6^{(7)} = 0,27970 \ 53914 \ 89277 \\
 x_7^{(7)} &= -x_1^{(7)} = 0,94910 \ 79123 \ 42759 & A_1^{(7)} &= A_7^{(7)} = 0,12948 \ 49661 \ 68870
 \end{aligned}$$

 $n = 8$ 

$$\begin{aligned}
 x_5^{(8)} &= -x_4^{(8)} = 0,18343 \ 46424 \ 95650 & A_4^{(8)} &= A_5^{(8)} = 0,36268 \ 37833 \ 78362 \\
 x_6^{(8)} &= -x_3^{(8)} = 0,52553 \ 24099 \ 16329 & A_3^{(8)} &= A_6^{(8)} = 0,31370 \ 66458 \ 77887 \\
 x_7^{(8)} &= -x_2^{(8)} = 0,79666 \ 64774 \ 13627 & A_2^{(8)} &= A_7^{(8)} = 0,22238 \ 10344 \ 53374 \\
 x_8^{(8)} &= -x_1^{(8)} = 0,96028 \ 98564 \ 97536 & A_1^{(8)} &= A_8^{(8)} = 0,10122 \ 85362 \ 90376
 \end{aligned}$$

 $n = 9$ 

$$\begin{aligned}
 x_3^{(9)} &= 0 & A_5^{(9)} &= 0,33023 \ 93550 \ 01260 \\
 x_6^{(9)} &= -x_4^{(9)} = 0,32425 \ 34234 \ 03809 & A_4^{(9)} &= A_6^{(9)} = 0,31234 \ 70770 \ 40003 \\
 x_7^{(9)} &= -x_3^{(9)} = 0,61337 \ 14327 \ 00590 & A_3^{(9)} &= A_7^{(9)} = 0,26061 \ 06964 \ 02935 \\
 x_8^{(9)} &= -x_2^{(9)} = 0,83603 \ 11073 \ 26636 & A_2^{(9)} &= A_8^{(9)} = 0,18064 \ 81606 \ 94857 \\
 x_9^{(9)} &= -x_1^{(9)} = 0,96816 \ 02395 \ 07626 & A_1^{(9)} &= A_9^{(9)} = 0,08127 \ 43883 \ 61574
 \end{aligned}$$

 $n = 10$ 

$$\begin{aligned}
 x_6^{(10)} &= -x_5^{(10)} = 0,14887 \ 43389 \ 81631 & A_5^{(10)} &= A_6^{(10)} = 0,29552 \ 42247 \ 14753 \\
 x_7^{(10)} &= -x_4^{(10)} = 0,43339 \ 53941 \ 29247 & A_4^{(10)} &= A_7^{(10)} = 0,26926 \ 67193 \ 09996 \\
 x_8^{(10)} &= -x_3^{(10)} = 0,67940 \ 95682 \ 99024 & A_3^{(10)} &= A_8^{(10)} = 0,21908 \ 63625 \ 15982 \\
 x_9^{(10)} &= -x_2^{(10)} = 0,86506 \ 33666 \ 88985 & A_2^{(10)} &= A_9^{(10)} = 0,14945 \ 13491 \ 50581 \\
 x_{10}^{(10)} &= -x_1^{(10)} = 0,97390 \ 65285 \ 17172 & A_1^{(10)} &= A_{10}^{(10)} = 0,06667 \ 13443 \ 08688
 \end{aligned}$$

 $n = 11$ 

$$\begin{aligned}
 x_6^{(11)} &= 0 & A_6^{(11)} &= 0,27292 \ 50867 \ 77901 \\
 x_7^{(11)} &= -x_5^{(11)} = 0,26954 \ 31559 \ 52345 & A_5^{(11)} &= A_7^{(11)} = 0,26280 \ 45445 \ 10247 \\
 x_8^{(11)} &= -x_4^{(11)} = 0,51909 \ 61292 \ 06812 & A_4^{(11)} &= A_8^{(11)} = 0,23319 \ 37645 \ 91990 \\
 x_9^{(11)} &= -x_3^{(11)} = 0,73015 \ 20055 \ 74049 & A_3^{(11)} &= A_9^{(11)} = 0,18629 \ 02109 \ 27734 \\
 x_{10}^{(11)} &= -x_2^{(11)} = 0,88706 \ 25997 \ 68095 & A_2^{(11)} &= A_{10}^{(11)} = 0,12558 \ 03694 \ 64905 \\
 x_{11}^{(11)} &= -x_1^{(11)} = 0,97822 \ 86581 \ 46057 & A_1^{(11)} &= A_{11}^{(11)} = 0,05566 \ 85671 \ 16174
 \end{aligned}$$

 $n = 12$ 

$$\begin{aligned}
 x_7^{(12)} &= -x_6^{(12)} = 0,12523 \ 34085 \ 11469 & A_6^{(12)} &= A_7^{(12)} = 0,24914 \ 70458 \ 13403 \\
 x_8^{(12)} &= -x_5^{(12)} = 0,36783 \ 14989 \ 98180 & A_5^{(12)} &= A_8^{(12)} = 0,23349 \ 25365 \ 38355 \\
 x_9^{(12)} &= -x_4^{(12)} = 0,58731 \ 79542 \ 86617 & A_4^{(12)} &= A_9^{(12)} = 0,20316 \ 74267 \ 23066
 \end{aligned}$$

$$x_{10}^{(12)} = -x_3^{(12)} = 0,76990 \ 26741 \ 94305$$

$$x_{11}^{(12)} = -x_2^{(12)} = 0,90411 \ 72563 \ 70475$$

$$x_{12}^{(12)} = -x_1^{(12)} = 0,98156 \ 06342 \ 46719$$

$$A_3^{(12)} = A_{10}^{(12)} = 0,16007 \ 83285 \ 43346$$

$$A_2^{(12)} = A_{11}^{(12)} = 0,10693 \ 93259 \ 95318$$

$$A_1^{(12)} = A_{12}^{(12)} = 0,04717 \ 53363 \ 86512$$

$n = 13$

$$x_7^{(13)} = 0$$

$$x_8^{(13)} = -x_6^{(13)} = 0,23045 \ 83159 \ 55135$$

$$x_9^{(13)} = -x_5^{(13)} = 0,44849 \ 27510 \ 36447$$

$$x_{10}^{(13)} = -x_4^{(13)} = 0,64234 \ 93394 \ 40340$$

$$x_{11}^{(13)} = -x_3^{(13)} = 0,80157 \ 80907 \ 33310$$

$$x_{12}^{(13)} = -x_2^{(13)} = 0,91759 \ 83992 \ 22978$$

$$x_{13}^{(13)} = -x_1^{(13)} = 0,98418 \ 30547 \ 18588$$

$$A_7^{(13)} = 0,23255 \ 15532 \ 30874$$

$$A_6^{(13)} = A_8^{(13)} = 0,22628 \ 31802 \ 62897$$

$$A_5^{(13)} = A_9^{(13)} = 0,20781 \ 60475 \ 36889$$

$$A_4^{(13)} = A_{10}^{(13)} = 0,17814 \ 59807 \ 61946$$

$$A_3^{(13)} = A_{11}^{(13)} = 0,13887 \ 35102 \ 19787$$

$$A_2^{(13)} = A_{12}^{(13)} = 0,09212 \ 14998 \ 37728$$

$$A_1^{(13)} = A_{13}^{(13)} = 0,04048 \ 40047 \ 65316$$

$n = 14$

$$x_8^{(14)} = -x_7^{(14)} = 0,10805 \ 49487 \ 07344$$

$$x_9^{(14)} = -x_6^{(14)} = 0,31911 \ 23689 \ 27890$$

$$x_{10}^{(14)} = -x_5^{(14)} = 0,51524 \ 86363 \ 58154$$

$$x_{11}^{(14)} = -x_4^{(14)} = 0,68729 \ 29048 \ 11685$$

$$x_{12}^{(14)} = -x_3^{(14)} = 0,82720 \ 13150 \ 69765$$

$$x_{13}^{(14)} = -x_2^{(14)} = 0,92843 \ 48836 \ 63574$$

$$x_{14}^{(14)} = -x_1^{(14)} = 0,98628 \ 38086 \ 96812$$

$$A_8^{(14)} = A_7^{(14)} = 0,21526 \ 38534 \ 63158$$

$$A_9^{(14)} = A_6^{(14)} = 0,20519 \ 84637 \ 21296$$

$$A_{10}^{(14)} = A_5^{(14)} = 0,18553 \ 83974 \ 77938$$

$$A_{11}^{(14)} = A_4^{(14)} = 0,15720 \ 31671 \ 58194$$

$$A_{12}^{(14)} = A_3^{(14)} = 0,12151 \ 85706 \ 87903$$

$$A_{13}^{(14)} = A_2^{(14)} = 0,08015 \ 80871 \ 59760$$

$$A_{14}^{(14)} = A_1^{(14)} = 0,03511 \ 94603 \ 31752$$

$n = 15$

$$x_8^{(15)} = 0$$

$$x_9^{(15)} = -x_7^{(15)} = 0,20119 \ 40939 \ 97435$$

$$x_{10}^{(15)} = -x_6^{(15)} = 0,39415 \ 13470 \ 77563$$

$$x_{11}^{(15)} = -x_5^{(15)} = 0,57097 \ 21726 \ 08539$$

$$x_{12}^{(15)} = -x_4^{(15)} = 0,72441 \ 77313 \ 60170$$

$$x_{13}^{(15)} = -x_3^{(15)} = 0,84820 \ 65834 \ 10427$$

$$x_{14}^{(15)} = -x_2^{(15)} = 0,93727 \ 33924 \ 00706$$

$$x_{15}^{(15)} = -x_1^{(15)} = 0,98799 \ 25180 \ 20485$$

$$A_8^{(15)} = 0,20257 \ 82419 \ 25561$$

$$A_9^{(15)} = A_7^{(15)} = 0,19843 \ 14853 \ 27111$$

$$A_{10}^{(15)} = A_6^{(15)} = 0,18616 \ 10000 \ 15562$$

$$A_{11}^{(15)} = A_5^{(15)} = 0,16626 \ 92058 \ 16994$$

$$A_{12}^{(15)} = A_4^{(15)} = 0,13957 \ 06779 \ 26154$$

$$A_{13}^{(15)} = A_3^{(15)} = 0,10715 \ 92204 \ 67172$$

$$A_{14}^{(15)} = A_2^{(15)} = 0,07036 \ 60474 \ 88108$$

$$A_{15}^{(15)} = A_1^{(15)} = 0,03075 \ 32419 \ 96117$$

$n = 16$

$$x_9^{(16)} = -x_8^{(16)} = 0,09501 \ 25098 \ 37637$$

$$x_{10}^{(16)} = -x_7^{(16)} = 0,28160 \ 35507 \ 79259$$

$$x_{11}^{(16)} = -x_6^{(16)} = 0,45801 \ 67776 \ 57227$$

$$x_{12}^{(16)} = -x_5^{(16)} = 0,61787 \ 62444 \ 02644$$

$$A_9^{(16)} = A_8^{(16)} = 0,18945 \ 06104 \ 55069$$

$$A_{10}^{(16)} = A_7^{(16)} = 0,18260 \ 34150 \ 44924$$

$$A_{11}^{(16)} = A_6^{(16)} = 0,16915 \ 65193 \ 95003$$

$$A_{12}^{(16)} = A_5^{(16)} = 0,14959 \ 59888 \ 16577$$

$$x_{13}^{(16)} = -x_4^{(16)} = 0,75540 \ 44083 \ 55003$$

$$A_{13}^{(16)} = A_4^{(16)} = 0,12462 \ 89712 \ 55534$$

$$x_{14}^{(16)} = -x_3^{(16)} = 0,86563 \ 12023 \ 87832$$

$$A_{14}^{(16)} = A_3^{(16)} = 0,09515 \ 85116 \ 82493$$

$$x_{15}^{(16)} = -x_2^{(16)} = 0,94457 \ 50230 \ 73233$$

$$A_{15}^{(16)} = A_2^{(16)} = 0,06225 \ 35239 \ 38648$$

$$x_{16}^{(16)} = -x_1^{(16)} = 0,98940 \ 09349 \ 91650$$

$$A_{16}^{(16)} = A_1^{(16)} = 0,02715 \ 24594 \ 11754$$

Если интегрируемая функция  $f$  имеет на  $[-1, +1]$  непрерывную производную порядка  $2n$ , то для нахождения остатка гауссовой формулы может быть применено равенство (7.1.6). В нем мы должны считать  $p(x) \equiv 1$  и за  $\omega(x)$  принять многочлен степени  $n$ , ортогональный на  $[-1, +1]$  с постоянным весом к любому многочлену меньшей степени и имеющий старший коэффициент, равный единице. Многочлен  $\omega(x)$  может отличаться от многочлена Лежандра  $P_n(x)$  только постоянным множителем, и так как старший коэффициент

$$P_n(x) \text{ есть } \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}, \text{ то } \omega(x) = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} P_n(x).$$

Ввиду

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1},$$

из (7.1.6) для остатка формулы Гаусса вытекает следующее представление

$$R(f) = \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)(2n)!} \left[ \frac{(n!)^2}{(2n)!} \right]^2 f^{(2n)}(\eta), \quad \eta \in [-1, +1]. \quad (7.2.6)$$

**Пример 1.** Пусть нужно вычислить интеграл

$$J = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2 \approx 0,69314718 \dots$$

Применим для этой цели формулу Гаусса с пятью узлами. Желая воспользоваться приведенной таблицей узлов и коэффициентов, приведем предварительно отрезок интегрирования  $[0, 1]$  к стандартному отрезку  $[-1, +1]$ . Для этого достаточно положить  $t = 0,5(1+x)$ :

$$J = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{3+x}.$$

Полагая в формуле Гаусса  $n=5$ , получим

$$J \approx A_1^{(5)}(3+x_1^{(5)})^{-1} + A_2^{(5)}(3+x_2^{(5)})^{-1} + \dots + A_5^{(5)}(3+x_5^{(5)})^{-1}.$$

Подставив сюда вместо  $A_k^{(5)}$  и  $x_k^{(5)}$  ( $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ) их значения из таблицы и выполнив вычисления на 8 значащих цифр, для интеграла найдем приближенное значение  $J \approx 0,69314717$ .

Пример 2. Интегральное уравнение

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x, s) y(s) ds$$

часто приближенно решают при помощи замены его на «близкую» алгебраическую линейную систему. Такую систему можно построить, например, если заменить интеграл какой-либо квадратурной суммой:

$$y(x) = f(x) + \sum_{j=1}^n A_j K(x, x_j) y(x_j) + R(x).$$

Если положить здесь последовательно  $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ , получим систему равенств

$$y(x_i) = f(x_i) + \sum_{j=1}^n A_j K(x_i, x_j) y(x_j) + R(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Отбрасывая в правых частях неизвестные остатки  $R(x_i)$ , построим систему  $n$  алгебраических уравнений с  $n$  приближенными значениями  $\tilde{y}(x_i)$  неизвестной функции  $y(x)$ :

$$\tilde{y}(x_i) = f(x_i) + \sum_{j=1}^n A_j K(x_i, x_j) \tilde{y}(x_j) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (7.2.7)$$

Чем более точной была взятая квадратурная формула, тем меньше будут отброшенные величины  $R(x_i)$  и тем, следует ожидать, ближе к точному решению интегрального уравнения будет решение алгебраической системы (7.2.7).

Трудность решения системы (7.2.7) быстро возрастает с числом уравнений  $n$ . Поэтому при приведении интегрального уравнения к алгебраической системе часто пользуются квадратурными формулами, дающими высокую точность для гладких функций при небольшом числе узлов, в частности, формулами наивысшей алгебраической степени точности.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$y(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{xt} y(t) dt = \frac{1}{2x} (e^x - 1)$$

и для приближенного решения воспользуемся формулой Гаусса при  $n = 2$ . Узлы и коэффициенты Гаусса для отрезка  $[0, 1]$  легко могут

быть найдены при помощи таблицы, если выполнить замену переменной  $t = 0,5(1 + \xi)$ ,  $-1 \leq \xi \leq +1$ , и будут такими:  $A_1^{(2)} = A_2^{(2)} = 0,5$ ,  $x_1^{(2)} \approx 0,2113$ ,  $x_2^{(2)} \approx 0,7887$ .

Система (7.2.7) для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2} K_{1,1}\right) \tilde{y}_1 - \frac{1}{2} K_{1,2} \tilde{y}_2 &= f_1, \\ -\frac{1}{2} K_{2,1} \tilde{y}_1 + \left(1 - \frac{1}{2} K_{2,2}\right) \tilde{y}_2 &= f_2, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{y}_i = \tilde{y}(x_i^{(2)}), \quad K_{i,j} = K(x_i^{(2)}, x_j^{(2)}), \quad K(t, x) = 0,5e^{xt}, \quad f_i = f(x_i^{(2)}),$$

или, после вычисления всех коэффициентов,

$$\begin{aligned} 0,7386 \tilde{y}_1 - 0,2954 \tilde{y}_2 &= 0,4434, \\ -0,2954 \tilde{y}_1 + 0,5343 \tilde{y}_2 &= 0,2384. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\tilde{y}_1 = \tilde{y}(x_1^{(2)}) = 0,9997, \quad \tilde{y}_2 = \tilde{y}(x_2^{(2)}) = 0,9990.$$

Точное решение уравнения, что легко проверяется подстановкой, есть  $y(x) = 1$ .

### § 3. Интегралы вида $\int_a^b (b-x)^\alpha (x-a)^\beta f(x) dx$

Пусть  $[a, b]$  — любой конечный отрезок и на нем задана весовая функция  $p(x) = (b-x)^\alpha (x-a)^\beta$ ,  $\alpha > -1$ ,  $\beta > -1$ . При изучении интегралов  $\int_a^b (b-x)^\alpha (x-a)^\beta f(x) dx$  и, особенно, для составления таблиц узлов и коэффициентов квадратурных формул, служащих для его вычисления, приводят, обычно, отрезок интегрирования  $[a, b]$  к стандартному отрезку  $[-1, +1]$  линейным преобразованием  $x = 0,5(a+b) + 0,5t(b-a)$ ,  $-1 \leq t \leq +1$ .

Будем считать, что такое приведение выполнено и ограничимся рассмотрением интеграла

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta f(x) dx. \quad (7.3.1)$$

Ортогональной системой многочленов на отрезке  $[-1, +1]$ , соответствующей весу  $p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ , является система

многочленов Якоби  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Желая построить квадратурную формулу с  $n$  узлами

$$\int_{-1}^{+1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (7.3.2)$$

имеющую наивысшую степень точности  $2n-1$ , мы должны считать, что узлы ее  $x_k$  совпадают с корнями яковиева многочлена степени  $n$

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x_k) = 0.$$

Коэффициенты  $A_k$  должны быть найдены при помощи равенств (7.1.4) или (7.1.5).

Нормированные многочлены Якоби есть \*)

$$p_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \delta_n^{-0,5} P_n^{(\alpha, \beta)}(x),$$

где

$$\delta_n = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1) n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}.$$

Старшие коэффициенты их

$$a_n = \delta_n^{-0,5} \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{2^n n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}.$$

Простые вычисления дают для коэффициента  $A_k$  следующее значение

$$A_k = \frac{(\alpha+\beta+2n) 2^{\alpha+\beta} \Gamma(\alpha+n) \Gamma(\beta+n)}{n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1) P_n^{(\alpha, \beta)'}(x_k) P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x_k)}. \quad (7.3.3)$$

Оно может быть немного упрощено, если воспользоваться известным в теории яковиевых многочленов равенством \*\*)

$$\begin{aligned} & (\alpha+\beta+2n)(1-x^2) \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \\ & = -n[(\alpha+\beta+2n)x + \beta - \alpha] P_n^{(\alpha, \beta)}(x) + 2(\alpha+n)(\beta+n) P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x). \end{aligned}$$

Полагая здесь  $x = x_k$ , найдем

$$(\alpha+\beta+2n)(1-x_k^2) P_n^{(\alpha, \beta)'}(x_k) = 2(\alpha+n)(\beta+n) P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x_k),$$

что дает возможность исключить  $P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x_k)$  и привести (7.3.3) к форме

$$A_k = 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{n! \Gamma(\alpha+\beta+n+1) (1-x_k^2) [P_n^{(\alpha, \beta)'}(x_k)]^2}. \quad (7.3.4)$$

\*) См. (2.2.2), (2.2.5) и (2.2.7).

\*\*) Сегё Г., Ортогональные многочлены, М., Физматгиз, 1962.

Старший коэффициент многочлена  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  имеет величину (2.2.2). Поэтому многочлен  $\omega(x)$  для изучаемой квадратурной формулы связан с  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  равенством

$$\omega(x) = \frac{2^n n! \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)} P_n^{(\alpha, \beta)}(x).$$

Если  $f$  имеет на отрезке  $[-1, +1]$  непрерывную производную порядка  $2n$ , то остаточный член формулы (7.3.2) будет

$$\begin{aligned} R(f) &= \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \left[ \frac{2^n n! \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)} \right]^2 \int_{-1}^{+1} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta [P_n^{(\alpha, \beta)}(x)]^2 dx = \\ &= \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \cdot \frac{2^{\alpha+\beta+2n+1} n! \Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(\beta + n + 1) \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}{(\alpha + \beta + 2n + 1) \Gamma^2(\alpha + \beta + 2n + 1)}, \\ & \quad (-1 < \eta < +1). \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

Рассмотрим теперь частные случаи квадратурных формул с якобиевым весом.

1) При  $\alpha = \beta = -0,5$  весовая функция будет  $p(x) = (1-x^2)^{-0,5}$  и соответствующие многочлены Якоби будут только постоянными множителями отличаться от многочленов Чебышёва первого рода (см. (2.3.4))  $P_n^{(-0,5; -0,5)}(x) = C_n T_n(x) = C_n \cos(n \arccos x)$ . Корни  $T_n$ , являющиеся узлами квадратурной формулы, имеют значения  $x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Коэффициенты  $A_k$  легко подсчитываются. Так как

$$T'_n(x_k) = \sin(n \arccos x_k) \cdot \frac{n}{\sqrt{1-x_k^2}} = \frac{(-1)^{k-1} n}{\sqrt{1-x_k^2}},$$

то

$$(1-x_k^2) [P_n^{(-0,5; -0,5)}(x_k)]^2 = C_n^2 (1-x_k^2) T_n'^2(x_k) = C_n^2 n^2$$

и

$$A_k = 2^n \frac{\Gamma^2(n+0,5)}{n! \Gamma(n) C_n^2 n^2}.$$

Правая часть равенства не зависит от  $k$  и поэтому все  $A_k$  будут одинаковы. Обозначим общую величину их буквой  $A$ . Численное значение  $A$  может быть найдено на основании последнего равенства. Но проще его найти, если воспользоваться тем, что квадратурная формула должна дать точный результат для  $f \equiv 1$  и, стало быть, должны быть верными равенства

$$\sum_{k=1}^n A_k = nA = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi, \quad \text{т. е.} \quad A = \frac{\pi}{n}.$$

Квадратурная формула наивысшей степени точности с весом  $p(x) = (1-x^2)^{-0,5}$  будет иметь вид \*)

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\cos \frac{2k-1}{2n} \pi\right) + R(f). \quad (7.3.6)$$

Из (7.3.5) можно получить следующее выражение остатка

$$R(f) = \frac{\pi}{2^{2n-1}} \cdot \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}, \quad -1 < \eta < 1.$$

2) Пусть  $\alpha = \beta = 0,5$  и  $p(x) = \sqrt{1-x^2}$ . Соответствующие многочлены Якоби  $P_n^{(0,5; 0,5)}(x)$  только постоянными множителями отличаются от многочленов Чебышёва второго рода (см. (2.3.5))

$$P_n^{(0,5; 0,5)}(x) = \frac{(2n+1)!}{2^{2n} n! (n+1)!} U_n(x), \quad U_n(x) = \frac{\sin(n+1) \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Корни  $P_n^{(0,5; 0,5)}(x)$  суть  $x_k = \cos \frac{k\pi}{n+1}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Коэффициенты  $A_k$  могут быть подсчитаны при помощи (7.3.4):

$$A_k = \frac{\pi}{n+1} \sin^2 \frac{k\pi}{n+1}.$$

Квадратурная формула имеет вид

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2} f(x) dx = \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{k\pi}{n+1} f\left(\cos \frac{k\pi}{n+1}\right) + R(f). \quad (7.3.7)$$

Остаток  $R(f)$  легко находится, если воспользоваться (7.3.5)

$$R(f) = \frac{\pi}{2^{2n}} \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}, \quad -1 < \eta < 1.$$

3) Пусть  $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = -0,5$ ,  $p(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ . Многочлены Якоби  $P_n^{(0,5; -0,5)}(x)$ , как и в обоих предыдущих случаях, имеют простое выражение через тригонометрические функции. Для любого много-

\*) Она была найдена Мелером в 1864 г. Ознакомившись с ней по курсу анализа Эрмита, П. Л. Чебышёв поставил задачу о построении квадратурных формул с равными коэффициентами для любой весовой функции  $p(x)$ . С результатами, достигнутыми в этом направлении, мы ознакомимся позже, в главе 10,



члена  $Q(x)$ , степени меньшей  $n$ , должно быть выполнено условие ортогональности

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} P_n^{(0,5; -0,5)}(x) Q(x) dx = \\ = \int_{-1}^{+1} (1-x) P_n^{(0,5; -0,5)}(x) Q(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим многочлен  $S(x) = (1-x) P_n^{(0,5; -0,5)}(x)$ . Степень его равна  $n+1$  и он ортогонален на  $[-1, +1]$  по весу  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  ко всякому многочлену  $Q(x)$  степени  $< n$ . Если его разложить по многочленам Чебышёва первого рода  $T_k(x)$  ( $k=0, 1, \dots, n+1$ ), то в разложении, ввиду указанной ортогональности, должны обратиться в нуль все коэффициенты при многочленах  $T_k(x)$  до степени  $n-1$  включительно и разложение должно иметь форму  $S(x) = C_n T_n(x) + C_{n+1} T_{n+1}(x)$ . Кроме того, так как  $S(x)$  должен нацело делиться на  $1-x$ , при  $x=1$  должно быть  $S(1) = C_n T_n(1) + C_{n+1} T_{n+1}(1) = C_n + C_{n+1} = 0$ . Поэтому  $C_{n+1} = -C_n$  и

$$P_n^{(0,5; -0,5)}(x) = C_n \frac{T_{n+1}(x) - T_n(x)}{x-1}.$$

Сравнение старших коэффициентов (см. (2.2.2) и (2.3.2)) позволяет найти  $C_n$ :

$$C_n = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}.$$

Если положить  $x = \cos \theta$  и воспользоваться тем, что  $T_k(x) = \cos k \arccos x = \cos k\theta$ , то для изучаемого многочлена Якоби получаем:

$$P_n^{(0,5; -0,5)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} \theta}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

Корни его есть

$$x_k = \cos \frac{2k\pi}{2n+1} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Квадратурные коэффициенты, вычисленные по (7.3.4) для  $\alpha=0,5$ ,  $\beta=-0,5$ , будут

$$A_k = \frac{4\pi}{2n+1} \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}.$$

Для весовой функции  $p(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$  квадратурная формула будет:

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} f(x) dx = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^n \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1} f\left(\cos \frac{2k\pi}{2n+1}\right) + R(f). \quad (7.3.8)$$

Остаточный член ее имеет вид:

$$R(f) = \frac{\pi}{2^{2n} (2n)!} f^{(2n)}(\eta), \quad -1 < \eta < 1.$$

4) Примем  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = +0,5$  и рассмотрим интеграл  $\int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx$ . Многочлены  $\Pi_n(x)$ , ортогональные по весу  $\sqrt{x}$  на отрезке  $[0, 1]$ , тесно связаны с многочленами Лежандра  $P_k$ . Положим  $k = 2n + 1$  и возьмем многочлены Лежандра нечетных индексов  $P_{2n+1}(y)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Они являются нечетными функциями  $y$  и  $y^{-1}P_{2n+1}(y)$  будет зависеть только от  $y^2$ . Заменим  $y^2$  на  $x$  и покажем, что за  $\Pi_n(x)$  могут быть приняты следующие многочлены  $\Pi_n(x) = \frac{P_{2n+1}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ . Действительно, после замены переменной интегрирования  $x = y^2$  получим следующую систему равенств:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{x} \Pi_n(x) \Pi_m(x) dx &= \int_0^1 P_{2n+1}(\sqrt{x}) P_{2m+1}(\sqrt{x}) \frac{dx}{\sqrt{x}} = \\ &= 2 \int_0^1 P_{2n+1}(y) P_{2m+1}(y) dy = \int_{-1}^1 P_{2n+1}(y) P_{2m+1}(y) dy = 0. \end{aligned}$$

Этим доказана ортогональность  $\Pi_n(x)$ .

В квадратурной формуле наивысшей степени точности

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f) \quad (7.3.9)$$

узлы  $x_k$  являются квадратами положительных корней  $y_k$  лежандрова многочлена  $P_{2n+1}(y)$ :  $x_k = y_k^2$ . Покажем, кроме того, что коэффициенты  $A_k$  весьма просто выражаются через сходственные коэффициенты гауссовой формулы (7.2.3) с  $2n + 1$  узлами

$$A_k = \int_0^1 \sqrt{x} \frac{\Pi_n(x)}{(x - x_k) \Pi'_n(x_k)} dx.$$

Так как  $x_k = y_k^2$  и  $\Pi'_n(x_k) = \frac{P'_{2n+1}(y_k)}{2y_k^2}$ , после подстановки в интеграл вместо  $\Pi_n(x)$  его выражения через  $P_{2n+1}$  и замены переменной  $x = y^2$ , получим

$$A_k = 2y_k^2 \int_0^1 \frac{P_{2n+1}(y)}{P'_{2n+1}(y_k)} \cdot \frac{2y}{y^2 - y_k^2} dy.$$

Если воспользоваться равенством  $\frac{2y}{y^2 - y_k^2} = \frac{1}{y - y_k} + \frac{1}{y + y_k}$  и в интеграле, содержащем дробь  $\frac{1}{y + y_k}$ , заменить  $y$  на  $-y$ , то можно легко привести  $A_k$  к виду

$$A_k = 2y_k^2 \int_{-1}^{+1} \frac{P_{2n+1}(y)}{(y - y_k) P'_{2n+1}(y_k)} dy. \quad (7.3.10)$$

Рассмотрим теперь гауссову формулу (7.2.3) с  $2n+1$  узлами и перенумеруем корни  $y_k$  многочлена Лежандра  $P_{2n+1}(y)$  от номера  $-n$  до  $+n$

$$\int_{-1}^{+1} f(y) dy \approx \sum_{k=-n}^n A_k^{(2n+1)} f(y_k).$$

Коэффициенты ее  $A_k^{(2n+1)}$  будут равны значениям интеграла, стоящего множителем при  $2y_k^2$  в (7.3.10). Поэтому  $A_k = 2y_k^2 A_k^{(2n+1)}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Остаточный член  $R(f)$  формулы (7.3.9) может быть найден при помощи общего представления (7.1.6) для остатка, если принять во внимание, что старший коэффициент многочлена  $\Pi_n(x)$  такой же, как у  $P_{2n+1}(y)$  и поэтому здесь

$$\omega(x) = \frac{2^{2n+1} [(2n+1)!]^2}{(4n+2)!} \Pi_n(x) = \frac{2^{2n+1} [(2n+1)!]^2}{(4n+2)!} \frac{P_{2n+1}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$$

Остаточный член  $R(f)$  имеет значение

$$R(f) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \cdot \frac{2}{4n+3} \left\{ \frac{2^{2n+1} [(2n+1)!]^2}{(4n+2)!} \right\}^2, \quad 0 < \eta < 1.$$

Ниже приведены значения  $x_k$  и  $A_k$  формулы (7.3.9) для  $n = 1$  (1) 7

$$n = 1$$

$$x_1 = 0,6 \qquad A_1 = 0,666 \ 6667 = \frac{2}{3}$$

$$n = 2$$

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0,289 \ 949 \ 2 & A_1 = 0,277 \ 555 \ 0 \\ x_2 = 0,821 \ 161 \ 9 & A_2 = 0,389 \ 110 \ 7 \end{array}$$

$n = 3$ 

$x_1 = 0,164\ 710\ 3$	$A_1 = 0,125\ 782\ 7$
$x_2 = 0,549\ 868\ 5$	$A_2 = 0,307\ 602\ 4$
$x_3 = 0,900\ 805\ 8$	$A_3 = 0,233\ 281\ 6$

 $n = 4$ 

$x_1 = 0,105\ 140\ 3$	$A_1 = 0,065\ 680\ 52$
$x_2 = 0,376\ 224\ 5$	$A_2 = 0,196\ 096\ 3$
$x_3 = 0,698\ 948\ 0$	$A_3 = 0,252\ 527\ 3$
$x_4 = 0,937\ 334\ 3$	$A_4 = 0,152\ 362\ 5$

 $n = 5$ 

$x_1 = 0,072\ 653\ 51$	$A_1 = 0,038\ 187\ 35$
$x_2 = 0,269\ 460\ 8$	$A_2 = 0,125\ 673\ 2$
$x_3 = 0,533\ 122\ 0$	$A_3 = 0,198\ 630\ 8$
$x_4 = 0,786\ 880\ 1$	$A_4 = 0,197\ 633\ 4$
$x_5 = 0,956\ 931\ 3$	$A_5 = 0,106\ 542\ 0$

 $n = 6$ 

$x_1 = 0,053\ 111\ 04$	$A_1 = 0,024\ 036\ 27$
$x_2 = 0,201\ 145\ 7$	$A_2 = 0,083\ 602\ 63$
$x_3 = 0,412\ 612\ 7$	$A_3 = 0,147\ 010\ 6$
$x_4 = 0,642\ 527\ 4$	$A_4 = 0,178\ 460\ 1$
$x_5 = 0,841\ 986\ 8$	$A_5 = 0,155\ 130\ 2$
$x_6 = 0,968\ 616\ 3$	$A_6 = 0,078\ 426\ 93$

 $n = 7$ 

$x_1 = 0,040\ 479\ 06$	$A_1 = 0,016\ 064\ 64$
$x_2 = 0,155\ 355\ 3$	$A_2 = 0,057\ 842\ 19$
$x_3 = 0,326\ 009\ 2$	$A_3 = 0,108\ 410\ 6$
$x_4 = 0,524\ 781\ 0$	$A_4 = 0,146\ 488\ 1$
$x_5 = 0,719\ 454\ 4$	$A_5 = 0,154\ 192\ 3$
$x_6 = 0,878\ 481\ 4$	$A_6 = 0,123\ 630\ 5$
$x_7 = 0,976\ 129\ 2$	$A_7 = 0,060\ 038\ 28$

5) Аналогично может быть построена формула наивысшей степени точности для веса  $p(x) = x^{-0,5}$

$$\int_0^1 x^{-0,5} f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f), \quad (7.3.11)$$

соответствующая  $a=0$ ,  $b=1$ ,  $\alpha=0$ ,  $\beta=-0,5$ .

Многочлены  $S_n(x)$ , ортогональные на  $[0, 1]$  с весом  $p(x) = x^{-0,5}$ , связаны с многочленами Лежандра  $P_k(x)$  равенством

$$S_n(x) = P_{2n}(\sqrt{x}).$$

Поэтому абсциссы  $x_k$  в (7.3.11) равны квадратам положительных корней  $y_k$  лежандрова многочлена  $P_{2n}(y)$ :  $x_k = y_k^2$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Рассмотрим гауссову формулу (7.2.3) с  $2n$  узлами и перенумеруем корни  $y_k$  многочлена  $P_{2n}(y)$  в порядке роста номерами  $k = -n$ ,

$-n+1, \dots, n; k \neq 0$ :

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \approx \sum_{k=-n}^n A_k^{(2n)} f(y_k).$$

Знак ' у суммы  $\sum$  поставлен в знак того, что значение  $k=0$  должно быть пропущено.

Коэффициенты  $A_k$  (7.3.11) связаны с гауссовыми коэффициентами равенством  $A_k = 2A_k^{(2n)}$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ). Остаточный член  $R(f)$  имеет форму

$$R(f) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!} \cdot \frac{2}{4n+1} \left\{ \frac{2^{2n} [(2n)!]^2}{(4n)!} \right\}^2, \quad 0 < \eta < 1.$$

Численные значения  $x_n$  и  $A_n$  приведены в таблице для  $n=1(1)7$

$n=1$

$$x_1 = 0,333\ 333\ 3 = \frac{1}{3} \quad A_1 = 2,000\ 000\ 0$$

$n=2$

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0,115\ 587\ 1 & A_1 = 1,304\ 290\ 3 \\ x_2 = 0,741\ 555\ 7 & A_2 = 0,695\ 709\ 7 \end{array}$$

$n=3$

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0,056\ 939\ 12 & A_1 = 0,935\ 827\ 9 \\ x_2 = 0,437\ 197\ 9 & A_2 = 0,721\ 523\ 1 \\ x_3 = 0,869\ 499\ 4 & A_3 = 0,342\ 649\ 0 \end{array}$$

$n=4$

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0,033\ 648\ 27 & A_1 = 0,725\ 367\ 6 \\ x_2 = 0,276\ 184\ 3 & A_2 = 0,627\ 413\ 3 \\ x_3 = 0,634\ 677\ 5 & A_3 = 0,444\ 762\ 1 \\ x_4 = 0,922\ 156\ 6 & A_4 = 0,202\ 457\ 1 \end{array}$$

$n=5$

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0,022\ 163\ 57 & A_1 = 0,591\ 048\ 4 \\ x_2 = 0,187\ 831\ 6 & A_2 = 0,538\ 533\ 4 \\ x_3 = 0,461\ 597\ 4 & A_3 = 0,438\ 172\ 7 \\ x_4 = 0,748\ 334\ 6 & A_4 = 0,298\ 902\ 7 \\ x_5 = 0,948\ 493\ 9 & A_5 = 0,133\ 342\ 7 \end{array}$$

$n=6$

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0,015\ 683\ 4 & A_1 = 0,498\ 294\ 1 \\ x_2 = 0,135\ 300\ 0 & A_2 = 0,466\ 985\ 1 \\ x_3 = 0,344\ 942\ 4 & A_3 = 0,406\ 334\ 9 \\ x_4 = 0,592\ 750\ 1 & A_4 = 0,320\ 156\ 7 \\ x_5 = 0,817\ 428\ 0 & A_5 = 0,213\ 878\ 7 \\ x_6 = 0,963\ 461\ 3 & A_6 = 0,094\ 350\ 67 \end{array}$$

$$n = 7$$

$x_1 = 0,011\ 675\ 87$	$A_1 = 0,430\ 527\ 7$
$x_2 = 0,101\ 832\ 7$	$A_2 = 0,410\ 396\ 9$
$x_3 = 0,265\ 481\ 2$	$A_3 = 0,371\ 076\ 8$
$x_4 = 0,472\ 371\ 5$	$A_4 = 0,314\ 406\ 3$
$x_5 = 0,684\ 262\ 0$	$A_5 = 0,243\ 037\ 1$
$x_6 = 0,861\ 991\ 3$	$A_6 = 0,160\ 316\ 2$
$x_7 = 0,972\ 755\ 8$	$A_7 = 0,070\ 238\ 9$

6) Пусть рассматривается двойной интеграл в полярной системе координат

$$I = \int_{\sigma} \int F(r, \varphi) r dr d\varphi.$$

Допустим, что область интегрирования  $\sigma$  определяется неравенствами  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ ,  $0 \leq r \leq R = R(\varphi)$ . Если ввести вспомогательную переменную  $\rho$ , положив  $r = \rho R$ ,  $0 \leq \rho \leq 1$ , то интеграл  $I$  можно записать в форме

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \int_0^1 F(\rho R, \varphi) \rho d\rho \right\} R^2 d\varphi.$$

Отсюда видно, что для вычисления двойного интеграла в полярных координатах, при помощи приведения его к интегрированию по координатам  $r$  и  $\varphi$ , существенный интерес представляет рассмотрение интеграла

$$\int_0^1 f(x) x dx. \quad (7.3.12)$$

Если мы хотим построить квадратурную формулу

$$\int_0^1 f(x) x dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f),$$

имеющую наивысшую степень точности, мы должны будем узлы ее взять в корнях многочлена  $\Pi_n(x)$ , ортогонального на отрезке  $[0, 1]$  по весу  $p(x) = x$  ко всякому многочлену степени  $\leq n - 1$ . Коэффициенты  $A_k$  могут быть вычислены по общему правилу (7.1.4) или (7.1.5).

Для нахождения  $x_k$  и  $A_k$  можно воспользоваться полученными раньше результатами для весовой функции  $(1 - z)^{\alpha} (1 + z)^{\beta}$ . Выполним в интеграле (7.3.12) замену переменной, положив  $x = \frac{1-z}{2}$ ,  $-1 \leq z \leq +1$ ,

$$\int_0^1 f(x) x dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} F(z) (1 - z) dz, \quad F(z) = f\left(\frac{1-z}{2}\right). \quad (7.3.13)$$

После преобразования  $\Pi_n(x)$  перейдет в многочлен степени  $n$  от  $z$ , ортогональный на отрезке  $[-1, +1]$  по весу  $1-z$  ко всякому многочлену степени  $\leq n-1$ , и будет отличаться от многочлена Якоби  $P_n^{(1,0)}(z)$  лишь постоянным множителем  $\Pi_n(x) = CP_n^{(1,0)}(z)$ .

Отсюда видно, что узлы  $x_k$  квадратурной формулы должны быть связаны с корнями  $z_n$  якобиева многочлена  $P_n^{(1,0)}(z)$  равенствами

$$x_k = \frac{1-z_k}{2} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Для коэффициентов  $A_k$  при помощи (7.3.13), (7.3.2) и (7.3.4) для  $\alpha=1$ ,  $\beta=0$  может быть получено следующее общее выражение

$$A_k = \frac{1}{(1-z_k^2)[P_n^{(1,0)'}(z_k)]^2}.$$

Значения узлов и коэффициентов квадратурной формулы для  $n=1(1)6$  указаны в приводимой таблице.

$n=1$

$$x_1 = 0,666\ 666\ 7 \quad A_1 = 0,500\ 000\ 0$$

$n=2$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,355\ 051\ 0 & A_1 &= 0,181\ 958\ 6 \\ x_2 &= 0,844\ 949\ 0 & A_2 &= 0,318\ 041\ 4 \end{aligned}$$

$n=3$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,212\ 340\ 5 & A_1 &= 0,069\ 826\ 98 \\ x_2 &= 0,590\ 533\ 2 & A_2 &= 0,229\ 241\ 1 \\ x_3 &= 0,911\ 412\ 0 & A_3 &= 0,200\ 931\ 9 \end{aligned}$$

$n=4$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,139\ 759\ 9 & A_1 &= 0,031\ 180\ 97 \\ x_2 &= 0,416\ 409\ 6 & A_2 &= 0,129\ 847\ 5 \\ x_3 &= 0,723\ 157\ 0 & A_3 &= 0,203\ 464\ 7 \\ x_4 &= 0,942\ 895\ 8 & A_4 &= 0,135\ 506\ 9 \end{aligned}$$

$n=5$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,098\ 535\ 09 & A_1 &= 0,015\ 747\ 91 \\ x_2 &= 0,304\ 535\ 7 & A_2 &= 0,073\ 908\ 87 \\ x_3 &= 0,562\ 025\ 2 & A_3 &= 0,146\ 387\ 0 \\ x_4 &= 0,801\ 986\ 6 & A_4 &= 0,167\ 174\ 6 \\ x_5 &= 0,960\ 190\ 1 & A_5 &= 0,096\ 781\ 59 \end{aligned}$$

$n=6$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,073\ 054\ 33 & A_1 &= 0,008\ 738\ 30 \\ x_2 &= 0,230\ 766\ 1 & A_2 &= 0,043\ 955\ 16 \\ x_3 &= 0,441\ 328\ 5 & A_3 &= 0,098\ 661\ 15 \\ x_4 &= 0,663\ 015\ 3 & A_4 &= 0,140\ 792\ 6 \\ x_5 &= 0,851\ 921\ 4 & A_5 &= 0,135\ 542\ 5 \\ x_6 &= 0,970\ 683\ 6 & A_6 &= 0,072\ 310\ 33 \end{aligned}$$

7) При вычислении тройного интеграла в шаровых координатах

$$I = \int_V \int f(r, \vartheta, \varphi) r^2 dr d\vartheta d\varphi,$$

путем приведения его к интегрированию по координатам  $r, \vartheta, \varphi$ , во многих случаях для интегрирования по радиусу  $r$  полезную помощь оказывают интегралы вида

$$\int_0^1 f(x) x^2 dx. \quad (7.3.14)$$

Подобно предыдущему, можно установить, что в квадратурной формуле наивысшей точности, служащей для вычисления (7.3.14),

$$\int_0^1 f(x) x^2 dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f), \quad (7.3.15)$$

узлы  $x_k$  должны быть связаны с корнями  $z_1, z_2, \dots, z_n$  якобиева многочлена  $P_n^{(2,0)}(z)$  соотношениями  $x_k = \frac{1-z_k}{2}$ , коэффициенты же  $A_k$  должны иметь значения:

$$A_k = \frac{1}{(1-z_k^2)[P_n^{(2,0)'}(z_k)]^2}.$$

#### § 4. Интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) dx$

Ортогональную систему многочленов на всей оси  $(-\infty, +\infty)$  по весу  $p(x) = e^{-x^2}$  образуют многочлены Чебышёва — Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

В квадратурной формуле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f), \quad (7.4.1)$$

имеющей наивысшую алгебраическую степень точности  $2n-1$ , узлы должны лежать в корнях многочлена  $H_n(x)$ :  $H_n(x_k) = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Коэффициенты  $A_k$  легко вычисляются на основании (7.1.4), если воспользоваться тем, что нормированные многочлены Чебышёва —



Эрмита имеют выражения (2.4.3) и их старшие коэффициенты имеют значения (2.4.4):  $A_k = -\frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{H'_n(x_k) H_{n+1}(x_k)}$ . Если в равенстве (2.4.2)

положить  $x = x_k$ , то найдем  $H_{n+1}(x_k) = -H'_n(x_k)$ , что дает возможность преобразовать  $A_k$  к форме:

$$A_k = \frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{H_n^2(x_k)}. \quad (7.4.2)$$

Так как для изучаемой квадратуры  $\omega(x) = 2^{-n} H_n(x)$  и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \omega^2(x) dx = 2^{-2n} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2^{-n} n! \sqrt{\pi},$$

равенство (7.1.6) для остатка  $R(f)$  формулы (7.4.1) дает

$$R(f) = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n (2n)!} f^{(2n)}(\eta). \quad (7.4.3)$$

При  $n = 1(1)10$  узлы  $x_k$  и коэффициенты  $A_k$  таковы\*):

$n = 1$

$$x_1 = 0 \quad A_1 = 1,772 \ 453 \ 850 \ 906$$

$n = 2$

$$x_2 = -x_1 = 0,707 \ 106 \ 781 \ 187 \quad A_1 = A_2 = 0,886 \ 226 \ 925 \ 453$$

$n = 3$

$$\begin{aligned} x_2 = 0 & \quad A_2 = 1,181 \ 635 \ 900 \ 604 \\ x_3 = -x_1 = 1,224 \ 744 \ 871 \ 392 & \quad A_1 = A_3 = 0,295 \ 408 \ 975 \ 151 \end{aligned}$$

$n = 4$

$$\begin{aligned} x_3 = -x_2 = 0,524 \ 647 \ 623 \ 275 & \quad A_2 = A_3 = 0,804 \ 914 \ 090 \ 006 \\ x_4 = -x_1 = 1,650 \ 680 \ 123 \ 886 & \quad A_1 = A_4 = 0,081 \ 312 \ 835 \ 447 \ 3 \end{aligned}$$

$n = 5$

$$\begin{aligned} x_3 = 0 & \quad A_3 = 0,945 \ 308 \ 720 \ 483 \\ x_4 = -x_2 = 0,958 \ 572 \ 464 \ 614 & \quad A_2 = A_4 = 0,393 \ 619 \ 323 \ 152 \\ x_5 = -x_1 = 2,020 \ 182 \ 870 \ 456 & \quad A_1 = A_5 = 0,019 \ 953 \ 242 \ 059 \ 0 \end{aligned}$$

$n = 6$

$$\begin{aligned} x_4 = -x_3 = 0,436 \ 077 \ 412 & \quad A_3 = A_4 = 0,724 \ 629 \ 595 \\ x_5 = -x_2 = 1,335 \ 849 \ 074 & \quad A_2 = A_5 = 0,157 \ 067 \ 320 \\ x_6 = -x_1 = 2,350 \ 604 \ 974 & \quad A_1 = A_6 = 0,004 \ 530 \ 009 \ 90 \end{aligned}$$

\*) Greenwood and Miller, Zeros of the Hermite polynomials and weight for Gauss mechanical quadrature formula, Bull. Amer. Math. Soc. 54, № 8 (1948), 765—769. Исправления см.: Math. tables and other aids to comput. 5, № 34 (1951), 82.

$n = 7$ 

$$\begin{aligned} x_4 &= 0 \\ x_5 &= -x_3 = 0,816 \ 287 \ 883 \\ x_6 &= -x_2 = 1,673 \ 551 \ 629 \\ x_7 &= -x_1 = 2,651 \ 961 \ 357 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_4 &= 0,810 \ 264 \ 618 \\ A_3 &= A_5 = 0,425 \ 607 \ 253 \\ A_2 &= A_6 = 0,054 \ 515 \ 582 \ 8 \\ A_1 &= A_7 = 0,000 \ 971 \ 781 \ 245 \end{aligned}$$

 $n = 8$ 

$$\begin{aligned} x_5 &= -x_4 = 0,381 \ 186 \ 990 \\ x_6 &= -x_3 = 1,157 \ 193 \ 712 \\ x_7 &= -x_2 = 1,981 \ 656 \ 757 \\ x_8 &= -x_1 = 2,930 \ 637 \ 420 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_4 &= A_5 = 0,661 \ 147 \ 013 \\ A_3 &= A_6 = 0,207 \ 802 \ 326 \\ A_2 &= A_7 = 0,017 \ 077 \ 983 \ 0 \\ A_1 &= A_8 = 0,000 \ 199 \ 604 \ 071 \end{aligned}$$

 $n = 9$ 

$$\begin{aligned} x_5 &= 0 \\ x_6 &= -x_4 = 0,723 \ 551 \ 019 \\ x_7 &= -x_3 = 1,468 \ 553 \ 289 \\ x_8 &= -x_2 = 2,266 \ 580 \ 585 \\ x_9 &= -x_1 = 3,190 \ 993 \ 202 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_5 &= 0,720 \ 235 \ 216 \\ A_4 &= A_6 = 0,432 \ 651 \ 559 \\ A_3 &= A_7 = 0,088 \ 474 \ 527 \ 4 \\ A_2 &= A_8 = 0,004 \ 943 \ 624 \ 28 \\ A_1 &= A_9 = 0,000 \ 039 \ 606 \ 977 \ 4 \end{aligned}$$

 $n = 10$ 

$$\begin{aligned} x_6 &= -x_5 = 0,342 \ 901 \ 327 \\ x_7 &= -x_4 = 1,036 \ 610 \ 830 \\ x_8 &= -x_3 = 1,756 \ 683 \ 649 \\ x_9 &= -x_2 = 2,532 \ 731 \ 674 \\ x_{10} &= -x_1 = 3,436 \ 159 \ 119 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_5 &= A_6 = 0,610 \ 862 \ 634 \\ A_4 &= A_7 = 0,240 \ 138 \ 611 \\ A_3 &= A_8 = 0,033 \ 874 \ 394 \ 5 \\ A_2 &= A_9 = 0,001 \ 343 \ 645 \ 75 \\ A_1 &= A_{10} = 0,000 \ 007 \ 640 \ 432 \ 86 \end{aligned}$$

Применим к вычислению интеграла

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} I_0(x) dx = \sqrt{\pi} \exp \frac{1}{8} \cdot I_0 \left( \frac{1}{8} \right)$$

формулу (7.4.1) для  $n = 5$ , воспользовавшись значениями  $x_k$  и  $A_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ), приведенными в таблице, и выполнив вычисления на 4 значащие цифры, найдем для квадратурной суммы

$$A_1 f(x_1) + \dots + A_5 f(x_5) = 1,570.$$

Точное значение интеграла на 4 знака равно 1,563.

## § 5. Интегралы вида $\int_0^{\alpha} x^a e^{-x} f(x) dx$

Как было выяснено в § 5 гл. 2, ортогональными на полуоси  $[0, \infty)$  по весу  $p(x) = x^a e^{-x}$  ( $a > -1$ ) являются многочлены Лягерра

$$L_n^{(a)}(x) = (-1)^n x^{-a} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{a+n} e^{-x}).$$

В квадратурной формуле наивысшей степени точности

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f) \quad (7.5.1)$$

узлы  $x_k$  должны лежать в корнях многочлена Лягерра степени  $n$ . Нормированные многочлены Лягерра есть

$$l_n^{(\alpha)}(x) = \Gamma^{-0,5}(n+1) \Gamma^{-0,5}(\alpha+n+1) L_n^{(\alpha)}(x).$$

Ввиду (2.5.2), старшие коэффициенты их равны

$$a_n = \Gamma^{-0,5}(n+1) \Gamma^{-0,5}(\alpha+n+1).$$

Поэтому (7.1.4) для  $A_k$  даст следующее значение

$$A_k = - \frac{n! \Gamma(\alpha+n+1)}{L_n^{(\alpha)'}(x_k) L_{n+1}^{(\alpha)}(x_k)}.$$

В теории многочленов Лягерра известно рекуррентное равенство

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (x - \alpha - n - 1) L_n^{(\alpha)}(x) - x L_n^{(\alpha)'}(x).$$

Если в нем положить  $x = x_k$ , то получим  $L_{n+1}^{(\alpha)}(x_k) = -x_k L_n^{(\alpha)'}(x_k)$ , что позволяет привести найденное выражение для  $A_k$  к виду

$$A_k = \frac{n! \Gamma(\alpha+n+1)}{x_k [L_n^{(\alpha)'}(x_k)]^2}. \quad (7.5.2)$$

Ниже приведена таблица узлов и коэффициентов для  $n = 1$  (1) 15\*), соответствующая случаю  $\alpha = 0$  и предназначенная для вычислений при помощи квадратурной формулы вида

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (7.5.3)$$

$$n = 1$$

$$x_1 = 1,000\ 000\ 000\ 000 \quad A_1 = 1,000\ 000\ 000\ 000$$

$$n = 2$$

$$\begin{array}{ll} x_1 = 0,585\ 786\ 437\ 627 & A_1 = 0,853\ 553\ 390\ 593 \\ x_2 = 3,414\ 213\ 562\ 373 & A_2 = 0,146\ 446\ 609\ 407 \end{array}$$

\*) H. E. Salzer and R. Zucker, Table of the zeros and weight factors of the first fifteen Laguerre polynomials, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), № 10, 1004—1012.

Число, стоящее в скобках после целой части, означает число нулей между запятой, отделяющей целую часть, и первой значащей цифрой.

$n = 3$ 

$x_1 =$	0,415 774 556 783	$A_1 =$	0,711 093 009 929
$x_2 =$	2,291 280 360 279	$A_2 =$	0,278 517 733 569
$x_3 =$	6,289 945 082 937	$A_3 =$	0,(1) 103 892 565 016

 $n = 4$ 

$x_1 =$	0,322 547 689 619	$A_1 =$	0,603 154 104 342
$x_2 =$	1,745 761 101 158	$A_2 =$	0,357 418 692 438
$x_3 =$	4,536 620 295 921	$A_3 =$	0,(1) 388 879 085 150
$x_4 =$	9,395 070 912 301	$A_4 =$	0,(3) 539 294 705 561

 $n = 5$ 

$x_1 =$	0,263 560 319 718	$A_1 =$	0,521 755 610 583
$x_2 =$	1,413 403 059 107	$A_2 =$	0,398 666 811 083
$x_3 =$	3,596 425 771 041	$A_3 =$	0,(1) 759 424 496 817
$x_4 =$	7,085 810 005 859	$A_4 =$	0,(2) 361 175 867 992
$x_5 =$	12,640 800 844 276	$A_5 =$	0,(4) 233 699 723 858

 $n = 6$ 

$x_1 =$	0,222 846 604 179	$A_1 =$	0,458 964 673 950
$x_2 =$	1,188 932 101 673	$A_2 =$	0,417 000 830 772
$x_3 =$	2,992 736 326 059	$A_3 =$	0,113 373 382 074
$x_4 =$	5,775 143 569 105	$A_4 =$	0,(1) 103 991 974 531
$x_5 =$	9,837 467 418 383	$A_5 =$	0,(3) 261 017 202 815
$x_6 =$	15,982 873 980 602	$A_6 =$	0,(6) 898 547 906 430

 $n = 7$ 

$x_1 =$	0,193 043 676 560	$A_1 =$	0,409 318 951 701
$x_2 =$	1,026 664 895 339	$A_2 =$	0,421 831 277 862
$x_3 =$	2,567 876 744 951	$A_3 =$	0,147 126 348 658
$x_4 =$	4,900 353 084 526	$A_4 =$	0,(1) 206 335 144 687
$x_5 =$	8,182 153 444 563	$A_5 =$	0,(2) 107 401 014 328
$x_6 =$	12,734 180 291 798	$A_6 =$	0,(4) 158 654 643 486
$x_7 =$	19,395 727 862 263	$A_7 =$	0,(7) 317 031 547 900

 $n = 8$ 

$x_1 =$	0,170 279 632 305	$A_1 =$	0,369 188 589 342
$x_2 =$	0,903 701 776 799	$A_2 =$	0,418 786 780 814
$x_3 =$	2,251 086 629 866	$A_3 =$	0,175 794 936 637
$x_4 =$	4,266 700 170 288	$A_4 =$	0,(1) 333 434 922 612
$x_5 =$	7,045 905 402 393	$A_5 =$	0,(2) 279 453 623 523
$x_6 =$	10,758 516 010 181	$A_6 =$	0,(4) 907 650 877 336
$x_7 =$	15,740 678 641 278	$A_7 =$	0,(6) 848 574 671 627
$x_8 =$	22,863 131 736 889	$A_8 =$	0,(8) 104 800 117 487

 $n = 9$ 

$x_1 =$	0,152 322 227 732	$A_1 =$	0,336 126 421 798
$x_2 =$	0,807 220 022 742	$A_2 =$	0,411 213 980 424
$x_3 =$	2,005 135 155 619	$A_3 =$	0,199 287 525 371
$x_4 =$	3,783 473 973 331	$A_4 =$	0,(1) 474 605 627 657
$x_5 =$	6,204 956 777 877	$A_5 =$	0,(2) 559 962 661 079
$x_6 =$	9,372 985 251 688	$A_6 =$	0,(3) 305 249 767 093
$x_7 =$	13,466 236 911 092	$A_7 =$	0,(5) 659 212 302 608
$x_8 =$	18,833 597 788 992	$A_8 =$	0,(7) 411 076 933 035
$x_9 =$	26,374 071 890 927	$A_9 =$	0,(10) 329 087 403 035

$n = 10$ 

$x_1 = 0,137$	793	470	540	$A_1 = 0,308$	441	115	765
$x_2 = 0,729$	454	549	503	$A_2 = 0,401$	119	929	155
$x_3 = 1,808$	342	901	740	$A_3 = 0,218$	068	287	612
$x_4 = 3,401$	433	697	855	$A_4 = 0,(1)$	620	874	560 987
$x_5 = 5,552$	496	140	064	$A_5 = 0,(2)$	950	151	697 518
$x_6 = 8,330$	152	746	764	$A_6 = 0,(3)$	753	008	388 588
$x_7 = 11,843$	785	837	900	$A_7 = 0,(4)$	282	592	334 960
$x_8 = 16,279$	257	831	378	$A_8 = 0,(6)$	424	931	398 496
$x_9 = 21,996$	585	811	981	$A_9 = 0,(8)$	183	956	482 398
$x_{10} = 29,920$	697	012	274	$A_{10} = 0,(12)$	991	182	721 961

 $n = 11$ 

$x_1 = 0,125$	796	442	188	$A_1 = 0,284$	933	212	894
$x_2 = 0,665$	418	255	839	$A_2 = 0,389$	720	889	528
$x_3 = 1,647$	150	545	872	$A_3 = 0,232$	781	831	849
$x_4 = 3,091$	138	143	035	$A_4 = 0,(1)$	765	644	535 462
$x_5 = 5,029$	284	401	580	$A_5 = 0,(1)$	143	932	827 674
$x_6 = 7,509$	887	863	807	$A_6 = 0,(2)$	151	888	084 648
$x_7 = 10,605$	950	999	547	$A_7 = 0,(4)$	851	312	243 547
$x_8 = 14,431$	613	758	064	$A_8 = 0,(5)$	229	240	387 957
$x_9 = 19,178$	857	403	215	$A_9 = 0,(7)$	248	635	370 277
$x_{10} = 25,217$	709	339	678	$A_{10} = 0,(10)$	771	262	693 369
$x_{11} = 33,497$	192	847	176	$A_{11} = 0,(13)$	288	377	586 832

 $n = 12$ 

$x_1 = 0,115$	722	117	358	$A_1 = 0,264$	731	371	055
$x_2 = 0,611$	757	484	515	$A_2 = 0,377$	759	275	873
$x_3 = 1,512$	610	269	776	$A_3 = 0,244$	082	011	320
$x_4 = 2,833$	751	337	744	$A_4 = 0,(1)$	904	492	222 117
$x_5 = 4,599$	227	639	418	$A_5 = 0,(1)$	201	023	811 546
$x_6 = 6,844$	525	453	115	$A_6 = 0,(2)$	266	397	354 187
$x_7 = 9,621$	316	842	457	$A_7 = 0,(3)$	203	231	592 663
$x_8 = 13,006$	054	993	306	$A_8 = 0,(5)$	836	505	585 682
$x_9 = 17,116$	855	187	462	$A_9 = 0,(6)$	166	849	387 654
$x_{10} = 22,151$	090	379	397	$A_{10} = 0,(8)$	134	239	103 052
$x_{11} = 28,487$	967	250	984	$A_{11} = 0,(11)$	306	160	163 504
$x_{12} = 37,099$	121	044	467	$A_{12} = 0,(15)$	814	807	746 743

 $n = 13$ 

$x_1 = 0,107$	142	388	472	$A_1 = 0,247$	188	708	430
$x_2 = 0,566$	131	899	040	$A_2 = 0,365$	688	822	901
$x_3 = 1,398$	564	336	451	$A_3 = 0,252$	562	420	058
$x_4 = 2,616$	597	108	406	$A_4 = 0,103$	470	758	024
$x_5 = 4,238$	845	929	017	$A_5 = 0,(1)$	264	327	544 156
$x_6 = 6,292$	256	271	140	$A_6 = 0,(2)$	422	039	604 027
$x_7 = 8,815$	001	941	187	$A_7 = 0,(3)$	411	881	770 473
$x_8 = 11,861$	403	588	811	$A_8 = 0,(4)$	235	154	739 815
$x_9 = 15,510$	762	037	704	$A_9 = 0,(6)$	731	731	162 025
$x_{10} = 19,884$	635	663	880	$A_{10} = 0,(7)$	110	884	162 570
$x_{11} = 25,185$	263	864	678	$A_{11} = 0,(10)$	677	082	669 221
$x_{12} = 31,800$	386	301	947	$A_{12} = 0,(12)$	115	997	995 991
$x_{13} = 40,723$	008	669	266	$A_{13} = 0,(16)$	224	509	320 389

$n = 14$ 

$x_1 = 0,099\ 747\ 507\ 033$	$A_1 = 0,231\ 815\ 577\ 145$
$x_2 = 0,526\ 857\ 648\ 852$	$A_2 = 0,353\ 784\ 691\ 598$
$x_3 = 1,300\ 629\ 121\ 251$	$A_3 = 0,258\ 734\ 610\ 245$
$x_4 = 2,430\ 801\ 078\ 731$	$A_4 = 0,115\ 482\ 893\ 557$
$x_5 = 3,932\ 102\ 822\ 293$	$A_5 = 0,(1)\ 331\ 920\ 921\ 593$
$x_6 = 5,825\ 536\ 218\ 302$	$A_6 = 0,(2)\ 619\ 286\ 943\ 701$
$x_7 = 8,140\ 240\ 141\ 565$	$A_7 = 0,(3)\ 739\ 890\ 377\ 867$
$x_8 = 10,916\ 499\ 507\ 366$	$A_8 = 0,(4)\ 549\ 071\ 946\ 684$
$x_9 = 14,210\ 805\ 011\ 161$	$A_9 = 0,(5)\ 240\ 958\ 576\ 409$
$x_{10} = 18,104\ 892\ 220\ 218$	$A_{10} = 0,(7)\ 580\ 154\ 398\ 168$
$x_{11} = 22,723\ 381\ 628\ 269$	$A_{11} = 0,(9)\ 681\ 931\ 469\ 249$
$x_{12} = 28,272\ 981\ 723\ 248$	$A_{12} = 0,(11)\ 322\ 120\ 775\ 189$
$x_{13} = 35,149\ 443\ 660\ 592$	$A_{13} = 0,(14)\ 422\ 135\ 244\ 052$
$x_{14} = 44,366\ 081\ 711\ 117$	$A_{14} = 0,(18)\ 605\ 237\ 502\ 229$

 $n = 15$ 

$x_1 = 0,093\ 307\ 812\ 017$	$A_1 = 0,218\ 234\ 885\ 940$
$x_2 = 0,492\ 691\ 740\ 302$	$A_2 = 0,342\ 210\ 177\ 923$
$x_3 = 1,215\ 595\ 412\ 071$	$A_3 = 0,263\ 027\ 577\ 942$
$x_4 = 2,269\ 949\ 526\ 204$	$A_4 = 0,126\ 425\ 818\ 105$
$x_5 = 3,667\ 622\ 721\ 751$	$A_5 = 0,(1)\ 402\ 068\ 649\ 210$
$x_6 = 5,425\ 336\ 627\ 414$	$A_6 = 0,(2)\ 856\ 387\ 780\ 361$
$x_7 = 7,565\ 916\ 226\ 613$	$A_7 = 0,(2)\ 121\ 243\ 614\ 721$
$x_8 = 10,120\ 228\ 568\ 019$	$A_8 = 0,(3)\ 111\ 674\ 392\ 344$
$x_9 = 13,130\ 282\ 482\ 176$	$A_9 = 0,(5)\ 645\ 992\ 676\ 202$
$x_{10} = 16,654\ 407\ 708\ 330$	$A_{10} = 0,(6)\ 222\ 631\ 690\ 710$
$x_{11} = 20,776\ 478\ 899\ 449$	$A_{11} = 0,(8)\ 422\ 743\ 038\ 498$
$x_{12} = 25,623\ 894\ 226\ 729$	$A_{12} = 0,(10)\ 392\ 189\ 726\ 704$
$x_{13} = 31,407\ 519\ 169\ 754$	$A_{13} = 0,(12)\ 145\ 651\ 526\ 407$
$x_{14} = 38,530\ 683\ 306\ 486$	$A_{14} = 0,(15)\ 148\ 302\ 705\ 111$
$x_{15} = 48,026\ 085\ 572\ 686$	$A_{15} = 0,(19)\ 160\ 059\ 490\ 621$

## 1. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{x}{1 - e^{-2x}} dx.$$

Точное его значение есть  $I = \frac{1}{8} \pi^2 = 1,2337 \dots$

Для приближенного вычисления  $I$  применим формулу (7.5.3), взяв в ней пять узлов. Если воспользоваться приведенной таблицей  $x_k$  и  $A_k$  для  $n=5$  и выполнить вычисления, то для квадратурной суммы получим следующее значение, которое мы приведем на 5 знаков

$$A_1 f(x_1) + \dots + A_5 f(x_5) = 1,2338.$$

Оно лишь на единицу пятой значащей цифры отличается от точного значения интеграла.

2. Пусть дан интеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x dx}{e^x + e^{-x} - 1} = \int_0^{\infty} x e^{-x} [1 + e^{-2x} - e^{-x}]^{-1} dx = 1,17 \dots$$

При его приближенном вычислении за вес естественно принять  $p(x) = x e^{-x}$ , что соответствует  $a = 1$  в (7.5.1). За  $f(x)$  должна быть взята функция  $f(x) = [1 + e^{-2x} - e^{-x}]^{-1}$ . Возьмем на отрезке интегрирования только два узла:  $n = 2$ . Соответствующий весу  $x e^{-x}$  многочлен Чебышёва — Лягерра второй степени легко находится из (2.5.2):

$$L_2^{(1)}(x) = x^2 - 6x + 6.$$

Корни его есть  $x_1 = 3 - \sqrt{3}$  и  $x_2 = 3 + \sqrt{3}$ . Коэффициенты  $A_1$  и  $A_2$  вычисляются при помощи (7.5.2) и имеют значения

$$A_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}, \quad A_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}.$$

Подсчеты дают для  $I$  приближенное значение

$$I \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) = 1,20,$$

отличающееся от точного в третьей значащей цифре.

### Л и т е р а т у р а

Gauss C. F., Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi, Werke 3 (1814), 163—196.

Christoffel, Ueber die Gaussische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben, Journ. für reine und angew. Math. 55 (1858), 61—82.

Brown W., Phil. Mag. 34 (1849), 262.

Марков А. А., Исчисление конечных разностей. Math., 1910.

Сонин Н. Я., О приближенном вычислении определенных интегралов входящих при этом вычислении целых функций, Варшавские университетские известия, 1887.

Stieltjes T., Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mecaniques. Ann. Ec. Norm. 1 (1884), 409—426.

Геронимус Я. Л. Теория ортогональных многочленов (обзор достижений отечественной математики), М. — Л. Гостехиздат, 1950.

Mehler, Bemerkungen zur Theorie der mechanischen Quadratur, Journ. für reine und ang. Math. 63 (1864).

Поссе К. А. 1) О функциях, подобных функциям Лежандра, 1872. 2) Sur quelques applications des fractions continues algebriques, 1886.

## ГЛАВА 8

# ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

### § 1. О задаче интегрирования периодической функции в форме интеграла

Не уменьшая общности, можно считать период равным  $2\pi$ . Пусть  $f(x)$  есть любая достаточно гладкая  $2\pi$ -периодическая функция, определенная на всей числовой оси  $x$ . Предположим, что  $p(x)$  — произвольная абсолютно интегрируемая функция на отрезке  $[0, 2\pi]$ , не эквивалентная нулю.

Мы будем рассматривать интеграл, взятый по одному периоду функции  $f$ :  $\int_0^{2\pi} p(x) f(x) dx$ . Такие интегралы встречаются во многих

задачах естествознания и техники, в частности, с ними приходится иметь дело при гармоническом анализе функций и его приложениях к инженерным проблемам.

Выделение веса  $p(x)$  здесь, так же как и раньше, позволяет повысить точность вычисления интеграла, так как при помощи веса можно учесть, например, особенности интегрируемой функции или какие-либо ее свойства, известные заранее.

Мы будем рассматривать следующее правило вычисления интеграла:

$$\int_0^{2\pi} p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (8.1.1)$$

Периодичность функции  $f$  побуждает для приближения интеграла избрать не алгебраические, как это делалось в двух предыдущих главах, а тригонометрические многочлены.

Параметры правила  $A_k$ ,  $x_k$ , численными значениями которых можно распорядиться, выбирают так, чтобы правило давало точный результат в том случае, когда  $f$  есть произвольный тригонометрический многочлен возможно высокой степени.



## § 2. Интерполяционные правила интегрирования

Нашей ближайшей задачей сейчас будет выяснить, какой степени точности правила (8.1.1) можно достичь путем выбора коэффициентов  $A_k$  при произвольно фиксированных абсциссах  $x_k$ . Всюду ниже будем считать, что  $x_k$  перенумерованы в порядке роста и  $0 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n < 2\pi$ .

Пусть число узлов  $n$  — нечетное:  $n = 2m + 1$ . Можно ожидать, что выбором  $A_k$  правило (8.1.1) можно сделать точным для всех тригонометрических многочленов степени  $m$ :

$$T_m(x) = a_0 + \sum_{k=1}^m (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Это равносильно требованию, чтобы равенство (8.1.1) точно выполнялось для функций  $e^{ikx}$  ( $k = m, m-1, \dots, -m$ ). Для сокращения обозначений мы запишем соответствующую систему уравнений в переменных  $z = e^{ix}$ ,  $z_k = e^{ix_k}$ :

$$\sum_{k=1}^m A_k z_k^s = \int_0^{2\pi} p(x) z^s dx \quad (s = m, \dots, -m). \quad (8.2.1)$$

Определитель  $D$  ее несущественно отличается от определителя Вандермонда

$$D = \begin{vmatrix} z_1^m & \dots & z_n^m \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1^{-m} & \dots & z_n^{-m} \end{vmatrix} = (z_1 \dots z_n)^{-m} \begin{vmatrix} z_1^{2m} & \dots & z_n^{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \\ = (z_1 \dots z_n)^{-m} W_n(z_1, \dots, z_n).$$

$D \neq 0$  ввиду того, что все  $z_k$  различны между собой. Система разрешима и имеет только одно решение. Поэтому правило (8.1.1), верное для тригонометрических многочленов степени  $m$ , может быть построено при всяких различных между собой  $x_k$ . Требованием, чтобы правило было точным для любых многочленов степени  $m$ , коэффициенты  $A_k$  определяются единственным образом.

Для нахождения численного значения  $A_j$  можно, например, воспользоваться тригонометрическим многочленом  $L_j(x)$ , участвующим в правиле интерполирования (3.4.5),

$$L_j(x) = \prod_{k \neq j} \frac{\sin 0,5(x - x_k)}{\sin 0,5(x_j - x_k)}. \quad (8.2.2)$$



Определитель  $D$  системы мало отличается от определителя  $\Delta(z_1, \dots, z_n)$ , рассмотренного в гл. 3 (3.4.8),

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} \alpha z_1^m + \bar{\alpha} z_1^{-m} & \dots & \alpha z_n^m + \bar{\alpha} z_n^{-m} \\ z_1^{m-1} & \dots & z_n^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_1^{-m+1} & \dots & z_n^{-m+1} \end{vmatrix} = \\
 &= (z_1 \dots z_n)^{-m} \begin{vmatrix} \alpha z_1^n + \bar{\alpha} & \dots & \alpha z_n^n + \bar{\alpha} \\ z_1^{n-1} & \dots & z_n^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ z_1 & \dots & z_n \end{vmatrix} = (z_1 \dots z_n)^{-m} \Delta(z_1, \dots, z_n) = \\
 &= \alpha (z_1 \dots z_n)^{-m} (z_1 \dots z_n - e^{-2i\delta}) W_n(z_1, \dots, z_n).
 \end{aligned}$$

Условием неравенства  $D$  нулю и вместе с тем условием возможности построения правила (8.1.1), точного для всевозможных тригонометрических многочленов вида (8.2.4), и единственности такого правила будет соблюдение неравенства  $\sigma = x_1 + \dots + x_n \neq -2\delta + 2p\pi$  ( $p$  — целое число). Чтобы найти  $A_j$ , достаточно рассмотреть многочлен  $L_j^*(x)$ , входящий в правило интерполирования (3.4.11):

$$L_j^*(x) = \frac{\sin 0,5(x + \sigma - x_j + 2\delta)}{\sin 0,5(\sigma + 2\delta)} \prod_{k \neq j} \frac{\sin 0,5(x - x_k)}{\sin 0,5(x_j - x_k)}.$$

Он имеет форму (8.2.4) и для него правило (8.1.1) должно быть точным. Но, очевидно,

$$L_j^*(x_k) = \begin{cases} 0, & k \neq j, \\ 1, & k = j, \end{cases}$$

и, стало быть,

$$A_j = \int_0^{2\pi} p(x) L_j^*(x) dx. \quad (8.2.5)$$

### § 3. Правило наивысшей степени точности

Возвратимся к равенству (8.1.1). Сумма, стоящая справа, содержит  $2n$  параметров  $A_k$  и  $x_k$ . Следует ожидать, что выбором их равенство (8.1.1) можно сделать точным для всяких тригонометрических многочленов степени  $n-1$ . Это равносильно выполнению

условий:

$$\sum_{k=1}^n A_k e^{isx_k} = \int_0^{2\pi} p(x) e^{isx} dx \quad (s = -n+1, \dots, n-1). \quad (8.3.1)$$

Число условий  $2n-1$  на единицу меньше числа параметров  $A_k$  и  $x_k$  и один из параметров правила (8.1.1), как можно предвидеть, должен остаться произвольным.

В решении поставленной задачи о выборе  $A_k$  и  $x_k$  будут полезны, наряду с обычными тригонометрическими многочленами

$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ , тригонометрические многочлены «полуцелой степени»:

$$T_{n+0,5}(x) = \sum_{k=0}^n [a_k \cos(k+0,5)x + b_k \sin(k+0,5)x]. \quad (8.3.2)$$

**Теорема 1.** Для того чтобы правило квадратуры (8.1.1) было точным для всякого тригонометрического многочлена степени  $n-1$ , необходимо и достаточно выполнение двух условий:

1. Правило (8.1.1) является интерполяционным, т. е. его коэффициенты  $A_k$  определяются равенством (8.2.3) в случае нечетного  $n$  и равенством (8.2.5) при каком-либо  $\delta(2\delta + x_1 + \dots + x_n \neq 2\pi)$  в случае четного  $n$ .

2. Многочлен  $\omega_{0,5n}(x) = \prod_{k=1}^n \sin 0,5(x - x_k)$  выполняет условие ортогональности:

$$\int_0^{2\pi} p(x) \omega_{0,5n}(x) T_{0,5n-1}(x) dx = 0, \quad (8.3.3)$$

где  $T_{0,5n-1}(x)$  есть произвольный многочлен целой или полуцелой степени  $0,5n-1$ .

При доказательстве мы различим два случая. Пусть  $n$  есть число нечетное:  $n = 2m+1$ .

Необходимость условий проверяется просто. Если правило (8.1.1) верно для многочленов степени  $n-1 = 2m$ , то оно верно и для многочленов степени  $m$ . Как было выяснено в первой части § 2, коэффициенты  $A_k$  должны поэтому иметь значение (8.2.3). Многочлен  $\omega_{0,5n}(x) = \omega_{m+0,5}(x)$  будет иметь полуцелую степень  $m+0,5$  и условие ортогональности (8.3.3) запишется в виде

$$\int_0^{2\pi} p(x) \omega_{m+0,5}(x) T_{m-0,5}(x) dx = 0, \quad (8.3.3')$$

где  $T_{m-0,5}$  есть любой многочлен полуцелой степени  $m - 0,5$ . Произведение  $\omega_{m+0,5} T_{m-0,5}$  будет многочленом степени  $n - 1$ , и из того, что правило (8.1.1) для таких многочленов должно быть точным, следует, ввиду  $\omega_{0,5n}(x_k) = 0$ , выполнение условия ортогональности (8.3.3').

Для доказательства достаточности нам потребуется

**Лемма 1.** *Всякий многочлен  $T_{2m}(x)$  степени  $2m$  единственным образом представим в виде*

$$T_{2m}(x) = \omega_{m+0,5}(x) T_{m-0,5}(x) + \rho_m(x), \quad (8.3.4)$$

где  $T_{m-0,5}$  и  $\rho_m$  — тригонометрические многочлены соответственно полуцелой степени  $m - 0,5$  и целой степени  $m$ .

Разложение многочлена  $\omega_{m+0,5}$  будет иметь форму:

$$\omega_{m+0,5}(x) = \sum_{k=0}^m [\alpha_k \cos(k + 0,5)x + \beta_k \sin(k + 0,5)x].$$

Если воспользоваться переменной  $z = e^{ix}$  и формулами Эйлера, то оно может быть, очевидно, записано в виде

$$\omega_{m+0,5}(x) = z^{-m-0,5} \sum_{v=0}^{2m+1} b_v z^v.$$

Для ближайших рассуждений полезно заметить, что так как при действительных  $x$  многочлен  $\omega_{m+0,5}(x)$  принимает действительные значения, коэффициенты  $b_v$  должны обладать следующим свойством сопряженности  $b_k = \bar{b}_{2m+1-k}$  ( $k = 0, 1, \dots, 2m+1$ ). Кроме того, так как степень многочлена не меньше  $m + 0,5$ , старший коэффициент  $b_{2m+1}$  отличен от нуля.

Аналогично для других многочленов, входящих в (8.3.4), будут верны приводимые ниже разложения по степеням  $z$ :

$$T_{2m}(x) = z^{-2m} \sum_{v=0}^{4m} a_v z^v \quad (a_{4m-v} = \bar{a}_v), \quad T_{m-0,5}(x) = z^{-m+0,5} \sum_{v=0}^{2m-1} c_v z^v, \\ \rho_m(x) = z^{-m} \sum_{v=0}^{2m} d_v z^v.$$

Если эти разложения внести в равенство (8.3.4), освободиться от отрицательных степеней  $z$  путем умножения на  $z^{2m}$  и сравнить коэффициенты при степенях  $z$  от нулевой до  $4m$ , получится система  $4m + 1$  линейных уравнений для определения  $c_v$  ( $v = 0, \dots, 2m - 1$ )



многочленов степени  $0,5n = m$  частного вида (8.2.4) с фиксированным параметром  $\delta$ .

Необходимость условий теоремы проверяется столь же просто, как и в случае нечетного числа узлов: если правило (8.1.1) будет точным для многочленов степени  $n - 1$ , то оно точно и для многочленов степени  $0,5n = m$ , в частности, и для многочленов вида (8.2.4). Поэтому оно должно быть интерполяционным с коэффициентами (8.2.5). Чтобы изложение было правильно понято, попутно заметим, что в выражении (8.2.4)  $\delta$  может быть избрано произвольно и коэффициенты  $A_k$  правила интегрирования не будут зависеть от  $\delta$ .

Если  $T_{m-1}$  — любой многочлен степени  $m - 1$ , произведение  $\omega_m T_{m-1}$  будет многочленом степени  $2m - 1 = n - 1$  и для него равенство (8.1.1) должно выполняться точно. Но так как  $\omega_m(x_k) = 0$  ( $k = 1, \dots, n$ ),

будет выполняться равенство  $\int_0^{2\pi} \rho \omega_m T_{m-1} dx = 0$ , что равносильно условию ортогональности (8.3.3').

**Лемма 2.** *Всякий многочлен  $T_{2m-1}$  степени  $2m - 1$  единственным образом представим в виде*

$$T_{2m-1}(x) = \omega_m(x) T_{m-1}(x) + \rho_m^*(x), \quad (8.3.5)$$

где  $T_{m-1}$  есть многочлен степени  $m - 1$  и  $\rho_m^*$  — степени  $m$  вида

$$\rho_m^*(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + A \cos(mx + \delta),$$

$\delta$  — любое фиксированное число ( $0 \leq \delta < 2\pi$ ), выбор которого мы подчиним единственному условию:  $x_1 + \dots + x_n \neq -2\delta + 2\pi p$  ( $p$  — целое число).

В переменной  $z$   $\rho_m^*(x)$  будет иметь следующее выражение

$$\rho_m^*(x) = z^{-m} \sum_{v=0}^{2m} d_v z^v, \quad d_{2m} = 0,5 A e^{i\delta} = \bar{d}_0.$$

Сходные разложения легко строятся для других многочленов, входящих в (8.3.5):

$$T_{2m-1}(x) = z^{-2m+1} \sum_{v=0}^{4m-2} a_v z^v \quad (a_v = \bar{a}_{4m-2-v}),$$

$$\omega_m(x) = z^{-m} \sum_{v=0}^{2m} b_v z^v \quad (b_{2m-v} = \bar{b}_v, \quad b_0 \neq 0),$$

$$T_{m-1}(x) = z^{-m+1} \sum_{v=0}^{2m-2} c_v z^v.$$

Если, подобно предыдущему, внести эти разложения в (8.3.5) освободиться от отрицательных степеней  $z$  и сравнить коэффициент, при одинаковых степенях  $z$ , получится система уравнений для  $c_v$  и  $d_v$ :

$$\begin{aligned} m-1 \left\{ \begin{aligned} b_0 c_0 &= a_0, \\ b_1 c_0 + b_0 c_1 &= a_1, \\ \dots &\dots \\ b_{m-2} c_0 + \dots + b_0 c_{m-2} &= a_{m-2}, \end{aligned} \right. \\ 2m+1 \left\{ \begin{aligned} b_{m-1} c_0 + \dots + b_0 c_{m-1} + d_0 &= a_{m-1}, \\ \dots &\dots \\ b_{2m} c_{m-1} + \dots + b_{m+1} c_{2m-2} + d_{2m} &= a_{3m-1}; \end{aligned} \right. \\ m-1 \left\{ \begin{aligned} b_{2m} c_m + \dots + b_{m+2} c_{2m-2} &= a_{3m}, \\ \dots &\dots \\ b_{2m} c_{2m-2} &= a_{4m-2}. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Из первых  $m-1$  уравнений, ввиду  $b_0 \neq 0$ , последовательно находятся  $c_0, \dots, c_{m-2}$  и из конечной группы  $m-1$  уравнений находятся последовательно  $c_{2m-2}, \dots, c_m$ . Эти две группы коэффициентов будут попарно сопряжены в том порядке, как они записаны. Например,  $c_0 = \frac{a_0}{b_0}$  и  $c_{2m-2} = \frac{a_{4m-2}}{b_{2m}}$ , и так как  $a_0 = \bar{a}_{4m-2}$  и  $b_0 = \bar{b}_{2m}$ , то  $c_0 = \bar{c}_{2m-2}$ .

Рассмотрим теперь среднюю группу  $2m+1$  уравнений. Из них, очевидно, могут быть найдены все коэффициенты  $d_v$  ( $v=0, \dots, 2m$ ). Но так как  $d_0$  и  $d_{2m}$  не являются независимыми и должны быть сопряженными, то первое и последнее уравнения этой группы, в которые входят  $d_0$  и  $d_{2m}$ , должны быть выделены и подвергнуты дополнительному изучению. Рассмотрим их отдельно

$$\begin{aligned} b_0 c_{m-1} + b_1 c_{m-2} + \dots + b_{m-1} c_0 + d_0 &= a_{m-1}, \\ b_{2m} c_{m-1} + b_{2m-1} c_m + \dots + b_{m+1} c_{2m-2} + d_{2m} &= a_{3m-1}. \end{aligned}$$

Исключая первые члены левых частей, содержащие неизвестный коэффициент  $c_{m-1}$ , все остальные члены уравнений будут попарно сопряжены в том порядке, как мы их записали.

Для совместности уравнений нужна сопряженность первых их членов  $b_{2m} c_{m-1} = \bar{b}_0 \bar{c}_{m-1} = b_{2m} \bar{c}_{m-1}$ , и так как  $b_{2m} \neq 0$ , должно быть  $c_{m-1} = \bar{c}_{m-1}$ , т. е. коэффициент  $c_{m-1}$  должен быть действительным числом. Последнее уравнение тогда будет следствием первого и может быть опущено.

Если первое уравнение разделить на  $b_0$  и все известные члены перенести направо, то после подстановки вместо  $d_0$  его значения



$0,5Ae^{-i\delta}$  оно примет форму

$$c_{m-1} + 0,5Ae^{-i\delta}b_0^{-1} = \alpha + i\beta.$$

Заменяя в  $\omega_m(x) = \prod_{j=1}^n \sin 0,5(x - x_j)$  синус его выражением через показательную функцию по формулам Эйлера, можно при помощи несложных подсчетов найти  $b_0 = (-1)^m 2^{-2m} e^{0,5i \sum x_j}$ . Предыдущее уравнение после замены  $b_0$  его значением примет вид

$$c_{m-1} + A2^{2m-1}(-1)^m e^{-0,5i(\sum x_j + 2\delta)} = \alpha + i\beta.$$

По выбору параметра  $\delta$  сумма  $2\delta + \sum x_j$  будет отлична от чисел вида  $2p\pi$  ( $p$  — целое), и поэтому множитель при  $A$  в уравнении будет иметь отличную от нуля мнимую часть и из уравнения могут быть, и при этом единственным образом, найдены действительные числа  $c_{m-1}$  и  $A$ . Этим завершается доказательство леммы 2.

Допустим теперь, что  $A_k$  и  $x_k$  выполняют условия теоремы 1 при каком-либо  $\delta$ . Предположим, что  $f$  есть произвольный тригонометрический многочлен степени  $n-1$ :  $f = T_{2m-1}(x)$ . В силу леммы 2

$$\int_0^{2\pi} p f dx = \int_0^{2\pi} p \omega_m T_{m-1} dx + \int_0^{2\pi} p \rho_m^* dx.$$

Первый из интегралов, стоящих в правой части, равен нулю по второму условию теоремы. Так как многочлен  $\rho_m^*$  имеет форму (8.2.4) и правило (8.1.1) — интерполяционное с коэффициентами (8.2.5), то

второй из интегралов в точности равен значению суммы  $\sum_{k=1}^n A_k \rho_m^*(x_k)$

или, так как  $T_{2m-1}(x_k) = \rho_m^*(x_k)$ , значению  $\sum_{k=1}^n A_k T_{2m-1}(x_k)$ . Поэтому правило (8.1.1) для  $f = T_{2m-1}$  является точным.

Теорема 1 приводит вопрос о возможности построения правила (8.1.1), верного для многочленов степени  $n-1$ , прежде всего к вопросу о существовании многочлена  $\omega_{0,5n}(x)$ , обладающего свойством ортогональности (8.3.3). Мы покажем, что если весовая функция  $p(x)$  знакопостоянна, то такой многочлен степени  $0,5n$  существует, определяется с точностью до коэффициентов старшей гармоники и если старшая гармоника фиксирована, то такой многочлен единственный.

Для определенности записи предположим  $n$  числом нечетным:  $n = 2m + 1$ . Многочлен  $\omega_{0,5n}(x)$  будет иметь полуцелую степень

$m + 0,5$ . Мы будем искать его в форме

$$\begin{aligned}\omega_m(x) &= \sum_{k=0}^m [a_k \cos(k + 0,5)x + b_k \sin(k + 0,5)x] = \\ &= a_m \cos(m + 0,5)x + b_m \sin(m + 0,5)x + \Pi_{m-0,5}(x).\end{aligned}$$

Условие ортогональности (8.3.3) равносильно выполнению равенств

$$\left. \begin{aligned}\int_0^{2\pi} p(x) \omega_{m+0,5}(x) \cos(j + 0,5)x dx &= 0, \\ \int_0^{2\pi} p(x) \omega_{m+0,5}(x) \sin(j + 0,5)x dx &= 0,\end{aligned}\right\} \quad (j=0, 1, \dots, m-1). \quad (8.3.6)$$

которые можно рассматривать как линейную систему  $2m$  уравнений относительно коэффициентов  $a_0, \dots, a_{m-1}, b_0, \dots, b_{m-1}$ .

При этом коэффициенты  $a_m, b_m$  старшей гармоники не подвергаются никаким ограничениям и будут содержаться в системе как произвольные параметры.

Чтобы показать, что система (8.3.6) имеет и при этом только одно решение, достаточно проверить, что соответствующая однородная система, получающаяся при отбрасывании старшей гармоники в  $\omega_{m+0,5}$ , т. е. замене  $\omega_{m+0,5}$  на многочлен  $\Pi_{m-0,5}$ , имеет лишь нулевое решение

$$\left. \begin{aligned}\int_0^{2\pi} p(x) \Pi_{m-0,5}(x) \cos(j + 0,5)x dx &= 0, \\ \int_0^{2\pi} p(x) \Pi_{m-0,5}(x) \sin(j + 0,5)x dx &= 0,\end{aligned}\right\} \quad (j=0, \dots, m-1), \quad (8.3.7)$$

Пусть эти уравнения выполняются. Умножив уравнения первой серии соответственно на  $a_0, \dots, a_{m-1}$ , второй серии — на  $b_0, \dots, b_{m-1}$  и складывая, получим новое равенство  $\int_0^{2\pi} p \Pi_{m-0,5}^2 dx = 0$ .

Если функция  $p(x)$  не эквивалентна нулю и не меняет знак, оно возможно только в том случае, когда  $\Pi_{m-0,5}$  есть тождественный нуль и, следовательно, все его коэффициенты равны нулю. Однородная система имеет лишь нулевое решение.

Вполне аналогично рассуждения проводятся и в случае четного  $n$ . Все изложенное позволяет высказать нижеследующую теорему.

**Теорема 2.** Если весовая функция  $p(x)$  знакопостоянна, то при всяком значении  $n$  существует тригонометрический многочлен  $\omega_{0,5n}(x)$  целой или полуцелой степени  $0,5n$ , ортогональный по весу  $p(x)$  к любому многочлену  $T_{0,5n-1}$  степени  $0,5n-1$ . Условие ортогональности определяет  $\omega_{0,5n}$  с точностью до гармоника с наибольшей частотой, коэффициенты которой могут быть заданы произвольно.

Во всем последующем коэффициенты старшей гармоники считаются действительными. Так как коэффициенты системы, из которой находятся прочие гармоники  $\omega_{0,5n}$ , есть числа действительные,  $\omega_{0,5n}$  будет действительным многочленом.

Для построения правила (8.1.1) существенное значение имеет расположение корней многочлена  $\omega_{0,5n}$ .

**Теорема 3.** Если многочлен  $\omega_{0,5n}(x)$  обладает свойством ортогональности (8.3.3) и весовая функция знакопостоянна, то все корни  $\omega_{0,5n}(x)$  — действительные, простые и на отрезке  $0 \leq x < 2\pi$  лежит  $n$  таких корней.

Для доказательства будем рассматривать  $x$  как комплексную переменную. Во вспомогательной переменной  $z = e^{ix}$ , которую мы вводили несколько раз выше,  $\omega_{0,5n}(x)$  будет иметь выражение следующего вида:

$$\omega_{0,5n}(x) = z^{-0,5n} \sum_{v=0}^n b_v z^v = z^{-0,5n} P_n(z) \quad (b_n = \bar{b}_0 \neq 0).$$

Корнями  $\omega_{0,5n}(x)$  будут корни многочлена  $P_n(z)$ . В комплексной плоскости  $z$  их  $n$  штук и они лежат вне начала координат  $z = 0$ , так как  $b_0 \neq 0$ .

Преобразование  $z = e^{ix}$  устанавливает взаимно однозначное соответствие между плоскостью  $z$  с разрезом вдоль действительной положительной полуоси, из которой исключены нижний борт разреза и начало координат, и открытой справа полосой  $0 \leq \operatorname{Re} x < 2\pi$  плоскости  $x$ . В этой полосе тригонометрический многочлен  $\omega_{0,5n}(x)$  будет иметь  $n$  корней. В силу действительности многочлена и принципа симметрии эти корни располагаются симметрично относительно действительной оси и сопряженные корни будут иметь одинаковые кратности.

Рассмотрим только те корни, которые лежат на отрезке  $0 \leq x < 2\pi$  действительной оси и имеют нечетную кратность. Пусть это будут

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_q$ . По ним построим многочлен  $t_{0,5q}(x) = \prod_{j=1}^q \sin 0,5(x - \xi_j)$  степени  $0,5q$ .

Так как при выборе корней  $\xi_j$  мы отбрасывали все действительные корни четной кратности и все комплексные корни, сумма кратностей которых есть число четное, по указанной выше причине симметрии число  $q$  будет четным или нечетным одновременно с  $n$ .

Мы покажем, что  $q = n$ . Отсюда, очевидно, будет следовать утверждение теоремы.

Допустим противоположное:  $q \neq n$ . Возможно только  $q < n$ , и так как  $q$  и  $n$  одинаковой четности, то  $q \leq n - 2$ . Поэтому степень  $0,5q$  многочлена  $t_{0,5q}$  не больше  $0,5n - 1$ . Ввиду условия ортого-

нальности должно быть  $\int_0^{2\pi} p \omega_{0,5n} t_{0,5q} dx = 0$ . Но это равенство не

может выполняться, ибо  $p(x) \geq 0$  на отрезке  $0 \leq x \leq 2\pi$ , а произведение  $\omega_{0,5n} t_{0,5q}$  сохраняет знак, так как оба множителя имеют на  $[0, 2\pi]$  одинаковые точки перемены знака. Под знаком интеграла стоит функция, не эквивалентная нулю и сохраняющая знак. Допущение  $q \neq n$  не совместимо с условием ортогональности, и остается только  $q = n$ .

Из теорем 1 и 2 вытекает, что если весовая функция знакопостоянна, то квадратурное правило (8.1.1), верное для многочленов степени  $n - 1$ , всегда может быть построено. Более того, такое правило будет зависеть от одного непрерывного параметра. Действительно, многочлен  $\omega_{0,5n}$ , корнями которого являются абсциссы  $x_k$  правила, определяется с точностью до старшей гармоники. Последняя содержит два произвольных коэффициента. Один из них путем умножения  $\omega_{0,5n}$  на постоянный множитель может быть приведен к единице. Произвольным останется только второй из коэффициентов и ему можно придавать любые значения.

Численное значение можно выбрать либо с целью увеличения точности правила, либо с целью его упрощения. Например, его можно выбрать так, чтобы правило было точным для многочленов

степени  $n$  частного вида  $T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + A \cos(nx + \delta)$ , где  $\delta$  фиксировано, или так, чтобы одна из абсцисс имела бы заданное значение.

Мы ограничимся указанием на эту задачу, но не будем излагать известных результатов ее исследования в общем виде, так как для этого потребовались бы значительные по объему вычисления. Решение задачи в некоторых частных случаях будет указано ниже.

О знаках коэффициентов  $A_k$  правила (8.1.1) верна легко доказываемая

**Теорема 4.** Если  $p(x) \geq 0$  и правило (8.1.1) точно для многочленов  $T_{n-1}(x)$  степени  $n - 1$ , то все коэффициенты  $A_k$  положительны.

Получим предварительно выражение коэффициентов  $A_k$  в удобной для нас форме при любой весовой функции. Выберем какой-либо узел  $x_s$  и введем многочлен  $\lambda_s(x) = \prod_{j \neq s} \sin 0,5(x - x_j)$ . Функция

$f(x) = \lambda_s^2(x)$  будет тригонометрическим многочленом степени  $n - 1$  и правило (8.1.1) для него должно дать точный результат. Но, очевидно,  $f(x_k) = \lambda_s^2(x_k) = 0$  при  $k \neq s$  и (8.1.1) приведет к равенству  $\int_0^{2\pi} p(x) \lambda_s^2(x) dx = A_s \lambda_s^2(x_s)$ , и, стало быть,

$$A_s = \lambda_s^{-2}(x_s) \int_0^{2\pi} p(x) \lambda_s^2(x) dx. \quad (8.3.8)$$

Если весовая функция  $p(x)$  неотрицательна, отсюда следует утверждение теоремы.

Для излагаемой теории интегрирования периодических функций имеет также интерес простая

**Теорема 5.** Если весовая функция  $p(x)$  знакопостоянна, то правило (8.1.1) ни при каких  $A_k$  и  $x_k$  не может быть точным для всех тригонометрических многочленов степени  $n$ .

Чтобы убедиться в справедливости утверждения, достаточно рассмотреть тригонометрический многочлен  $f(x) = \omega_{0,5n}^2(x)$ , степень которого равна  $n$ . Для него интеграл, стоящий слева в (8.1.1), отличен от нуля, сумма же, стоящая справа, равна нулю, ввиду  $\omega_{0,5n}(x_k) = 0$  ( $k = 1, \dots, n$ ).

В приводимых ниже примерах указано несколько правил интегрирования периодических функций. В точности их для любых многочленов степени  $n - 1$  можно наиболее просто убедиться, по-видимому, путем проверки.

Пример 1. Рассмотрим случай постоянной весовой функции  $p(x) \equiv 1$ . Выберем произвольное число  $x_0$  ( $0 \leq x_0 < \frac{2\pi}{n}$ ) и возьмем абсциссы  $x_k = x_0 + \frac{2\pi}{n} k$  ( $k = 0, 1, \dots, n - 1$ ). Все они принадлежат отрезку  $0 \leq x < 2\pi$ . Положим

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx \approx \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_0 + \frac{2\pi}{n} k\right). \quad (8.3.9)$$

Нам достаточно показать, что равенство точно выполняется для  $f = e^{isx}$  ( $s = 0, 1, \dots, n - 1$ ).

Если  $s=0$ , то правая и левая части, очевидно, равны  $2\pi$ . Если  $s=1, \dots, n-1$ , то интеграл равен нулю. Сумма же имеет значение

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{is(x_0 + \frac{2\pi}{n}k)} = e^{isx_0} \frac{e^{is2\pi} - 1}{e^{s\frac{2\pi}{n}} - 1} = 0,$$

и равенство (8.3.9) также выполняется точно. Правило (8.3.9) содержит произвольный параметр  $x_0$ , избрать который можно произвольно.

Если положить  $x_0 = \frac{\pi}{2n}$  или  $x_0 = \frac{3\pi}{2n}$ , то получится два правила:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) dx &\approx \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right), \\ \int_0^{2\pi} f(x) dx &\approx \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{3\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right), \end{aligned}$$

точных для всех тригонометрических многочленов степени  $n$  вида  $f(x) = T_{n-1}(x) + A \cos nx$ . Если же принять  $x_0 = 0$  или  $x_0 = \frac{\pi}{n}$ , получатся правила:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) dx &\approx \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \\ \int_0^{2\pi} f(x) dx &\approx \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right), \end{aligned} \right\} \quad (8.3.10)$$

точные для многочленов степени  $n$  вида  $f(x) = T_{n-1}(x) + B \sin nx$ .

Пример 2.  $p(x) = 1 - \cos x$ . С таким весом мы встречаемся, например, при интегрировании  $2\pi$ -периодической функции, имеющей в точках 0 и  $2\pi$  нули второй кратности.

Рассмотрим сначала случай нечетного числа узлов  $n = 2m + 1$ . Многочлен  $\omega_{0,5n}(x)$  будет иметь полуцелую степень  $m + 0,5$  и должен быть ортогональным с весом  $1 - \cos x$  ко всякому многочлену  $T_{m-0,5}$  полуцелой степени  $m - 0,5$ . Последнее равносильно выполнению системы равенств:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (1 - \cos x) \omega_{m+0,5}(x) \cos(l + 0,5)x dx &= 0, \\ \int_0^{2\pi} (1 - \cos x) \omega_{m+0,5}(x) \sin(l + 0,5)x dx &= 0 \\ (l = 0, 1, \dots, m-1). \end{aligned}$$

Если искать  $\omega_{m+0,5}(x)$  в форме разложения  $\omega_{m+0,5}(x) = \sum_{k=0}^m [a_k \cos(k+0,5)x + b_k \sin(k+0,5)x]$ , внести его в предыдущие равенства и выполнить интегрирование, для коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$  получим две системы уравнений:

$$\begin{array}{ll} a_0 - a_1 = 0, & 3b_0 - b_1 = 0, \\ a_0 - 2a_1 + a_2 = 0, & b_0 - 2b_1 + b_2 = 0, \\ a_1 - 2a_2 + a_3 = 0, & b_1 - 2b_2 + b_3 = 0, \\ \dots & \dots \\ a_{m-2} - 2a_{m-1} + a_m = 0, & b_{m-2} - 2b_{m-1} + b_m = 0. \end{array}$$

Решения их находятся просто:

$$a_k = a_0 = A, \quad b_k = b_0(1+2k) = B(1+2k) \quad (k=1, \dots, m).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \omega_{m+0,5}(x) &= \omega_{0,5n}(x) = \\ &= A \sum_{k=0}^m \cos(k+0,5)x + B \sum_{k=0}^m (2k+1) \sin(k+0,5)x = A\sigma(x) - 2B\sigma'(x), \\ \sigma(x) &= \frac{\sin(m+1)x}{\sin 0,5x} = \frac{\sin 0,5(n+1)x}{\sin 0,5x}. \end{aligned}$$

К такому же выражению  $\omega_{0,5n}(x)$  мы придем и в случае четного числа узлов  $n$ .

Абсциссы  $x_k$  правила квадратур должны быть корнями  $\omega_{0,5n}(x)$ :  $A\sigma(x) - 2B\sigma'(x) = 0$ , или, если считать на время  $B \neq 0$ :  $\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} = -\frac{d}{dx} \ln \sigma(x) = \frac{A}{2B}$ ,

$$\operatorname{ctg} \frac{n+1}{2}x = \frac{1}{n+1} \left[ \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{A}{2B} \right].$$

Отношение  $\frac{A}{2B}$  является параметром уравнения. Если построить графики левой и правой частей уравнения, то легко можно получить наглядное, но неточное представление о расположении корней уравнения и их зависимости от параметра. Получить же явные выражения их в общем случае через элементарные функции, по-видимому, невозможно.

Дальше мы ограничимся рассмотрением частного случая, когда все вычисления легко доводятся до конца. Положим  $B=0$  и  $\omega_{0,5n}(x) = A \frac{\sin 0,5(n+1)x}{\sin 0,5x}$ . Корни  $\omega_{0,5n}(x)$  будут  $x_k = \frac{2k\pi}{n+1}$

( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Правило квадратур, точное для многочленов степени  $n - 1$ , следовательно, имеет форму  $\int_0^{2\pi} (1 - \cos x) f(x) dx \approx$

$$\approx \sum_{k=1}^n A_k f\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right). \text{ Коэффициенты могут быть найдены на основании}$$

интерполяционных правил (8.2.3) и (8.2.5), но проще воспользоваться связью между рассматриваемым правилом интегрирования и первым из (8.3.10). Введем обозначения:  $(1 - \cos x) f(x) = F(x)$ ,  $A_k = (1 - \cos x_k) B_k$ . Тогда, если воспользоваться тем, что  $F(0) = 0$ ,

$$\text{рассматриваемое правило можно записать в форме } \int_0^{2\pi} F(x) dx = \\ = \sum_{k=0}^n B_k F\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right).$$

Если  $f$  есть тригонометрический многочлен степени  $n - 1$ , то  $F$  будет многочленом степени  $n$ . Сличение с (8.3.10) показывает, что так как в рассматриваемом правиле содержится  $n + 1$  абсцисс  $x_k = \frac{2k\pi}{n+1}$ , то правило мы сделаем точным для всех многочленов  $F$  степени  $n$ , если положим  $B_k = \frac{2\pi}{n+1}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ). Поэтому квадратурная формула с весом  $1 - \cos x$ , точная для многочленов степени  $n - 1$ , будет следующей:

$$\int_0^{2\pi} (1 - \cos x) f(x) dx \approx \frac{2\pi}{n+1} \sum_{k=1}^n \left(1 - \cos \frac{2k\pi}{n+1}\right) f\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right). \quad (8.3.11)$$

#### § 4. Остаток квадратуры периодической функции и его оценка

Рассмотрим остаток произвольного правила интегрирования (8.1.1):

$$R(f) = \int_0^{2\pi} p(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (8.4.1)$$

Чтобы получить представление остатка, удобное для нахождения точных его оценок, можно воспользоваться разложением периодической функции по многочленам Бернулли (1.4.2). Считая  $f(x)$  функцией,  $\nu$  раз непрерывно дифференцируемой на  $[0, 2\pi]$ , и приняв во внимание, что для периодической функции  $f^{(k)}(2\pi) = f^{(k)}(0)$



( $k = 1, 2, \dots$ ), получим при  $v \geq 1$ :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt - \frac{(2\pi)^{v-1}}{v!} \int_0^{2\pi} f^{(v)}(t) B_v^* \left( \frac{x-t}{2\pi} \right) dt. \quad (8.4.2)$$

Первый член правой части есть среднее значение функции  $f$ , второй же член имеет смысл отклонения от среднего значения. Чтобы не усложнять оценки остатка не имеющими интереса слагаемыми, мы предположим сейчас, что правило (8.1.1) является точным для того случая, когда  $f$  есть величина постоянная, что равно-

сильно равенству  $\int_0^{2\pi} p(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k$ . При интегрировании произвольной  $f$  среднее значение будет проинтегрировано точно и остаток  $R(f)$  будет иметь значение

$$\begin{aligned} R(f) &= -\frac{(2\pi)^{v-1}}{v!} \int_0^{2\pi} f^{(v)}(t) R \left[ B_v^* \left( \frac{x-t}{2\pi} \right) \right] dt = \int_0^{2\pi} f^{(v)}(t) K_{v,n}(t) dt = \\ &= -\frac{(2\pi)^{v-1}}{v!} \int_0^{2\pi} f^{(v)}(t) \left\{ \int_0^{2\pi} p(x) B_v^* \left( \frac{x-t}{2\pi} \right) dx - \sum_{k=1}^n A_k B_v^* \left( \frac{x_k-t}{2\pi} \right) \right\} dt. \end{aligned} \quad (8.4.3)$$

Проблема нахождения точной оценки  $R(f)$ , по сравнению с задачей интегрирования непериодической функции  $f \in C_v$ , здесь усложнена дополнительным условием: функция  $f^{(v)}(t)$  должна быть не только непрерывной, но и иметь среднее значение, равное нулю:  $\int_0^{2\pi} f^{(v)}(t) dt = 0$ .

Не изменяя величины остатка  $R(f)$ , мы можем записать его в форме

$$R(f) = \int_0^{2\pi} f^{(v)}(t) [K_{v,n}(t) + C] dt,$$

где  $C$  — произвольная постоянная величина.

Если мы рассмотрим класс  $F$  функций  $f$ , удовлетворяющих условию  $|f^{(v)}(t)| \leq M_v$ , то будет верна следующая оценка  $|R(f)| \leq M_v \int_0^{2\pi} |K_{v,n}(t) + C| dt$ , и так как  $C$  здесь может иметь произвольное значение, то будет верной также оценка

$$|R(f)| \leq M_v \int_0^{2\pi} |K_{v,n}(t) + C^*| dt, \quad (8.4.4)$$

где  $C^*$  есть значение  $C$ , для которого интеграл  $\int_0^{2\pi} |K_{v,n} + C| dt$  достигает наименьшего значения.

Убедимся сейчас, что оценка (8.4.4) не может быть улучшена и является точной. Для этого воспользуемся известной теоремой анализа о производной в точке экстремума\*)

$$\frac{d}{dC} \int_0^{2\pi} |K_{v,n}(t) + C| dt \Big|_{C=C^*} = \int_0^{2\pi} \text{sign} [K_{v,n}(t) + C^*] dt = 0.$$

Так как среднее значение  $\text{sign} [K_{v,n}(t) + C^*]$  равно нулю, существует  $2\pi$ -периодическая функция  $f_*$ , для которой  $f_*^{(v)}(t) = M_v \text{sign} [K_{v,n}(t) + C^*]$ . Она может быть найдена, например, путем  $v$ -кратного неопределенного интегрирования с определением аддитивной постоянной каждый раз так, чтобы выполнялось условие

$$\int_0^{2\pi} f_*^{(k)}(t) dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, v-1).$$

Остаток квадратуры для функции  $f_*$  равен

$$\begin{aligned} R(f_*) &= \int_0^{2\pi} f_*^{(v)}(t) K_{v,n}(t) dt = M_v \int_0^{2\pi} \text{sign} [K_{v,n}(t) + C^*] K_{v,n}(t) dt = \\ &= M_v \int_0^{2\pi} \text{sign} [K_{v,n}(t) + C^*] [K_{v,n}(t) + C^*] dt = M_v \int_0^{2\pi} |K_{v,n}(t) + C^*| dt. \end{aligned}$$

Для  $f_*$  оценка (8.4.4) остатка достигается. Функция  $f_*$  может не принадлежать рассматриваемому классу  $F$ , но наверное существует функция  $f \in F$ , для которой  $R(f)$  будет иметь значение, сколь угодно близкое к  $R(f_*)$ . Поэтому оценка (8.4.4) в классе  $F$  является точной.

\*) Под производной мы понимаем здесь ее симметричное определение  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ . Производная в этом смысле от  $|x|$  существует при всех  $x$  и равна  $\text{sign } x$ . Возможность вычисления производной от интеграла путем дифференцирования под знаком интеграла легко проверяется на основании теорем о предельном переходе в интеграле Лебега.

### Л и т е р а т у р а

1. Турецкий А. Х., О формулах квадратур, точных для тригонометрических полиномов, Уч. зап. Белгосуниверситета, сер. матем., вып. 1 (49) (1959), 31—54.
2. Турецкий А. Х., О квадратурных формулах с четным числом узлов, точных для тригонометрических полиномов, ДАН БССР 4, № 9 (1960), 365—368.
3. Кеда Н. П., Квадратурные формулы с производными для периодических функций, Весті АН БССР, сер. фіз.-тэхн., № 4 (1961).
4. Кеда Н. П., К теории квадратур для периодических функций, ДАН БССР 5, № 9 (1961).

## ГЛАВА 9

### КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ, СОДЕРЖАЩИЕ НАПЕРЕД ЗАДАННЫЕ УЗЛЫ

#### § 1. Некоторые общие теоремы

В прикладных задачах иногда возникает необходимость построения таких квадратурных формул, часть узлов которых задается заранее, другая же часть узлов может быть взята произвольно и выбором таких узлов можно распоряжаться для достижения тех или иных целей.

Рассмотрим, например, граничную задачу на отрезке  $a \leq x \leq b$  для дифференциального уравнения второго порядка

$$L(y) + \lambda \rho(x) y = \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] + (\lambda \rho(x) - q(x)) y = -f(x) \quad (9.1.1)$$

при условиях

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \quad (9.1.2)$$

Если известна функция Грина  $G(x, \xi)$  для оператора  $L(y)$  при условиях (9.1.2), решение граничной задачи может быть приведено к решению интегрального уравнения\*)

$$\left. \begin{aligned} y(x) &= F(x) + \lambda \int_a^b G(x, \xi) \rho(\xi) y(\xi) d\xi, \\ F(x) &= \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (9.1.3)$$

Допустим теперь, что мы хотим приближенно решить уравнение (9.1.3) путем применения механических квадратур к интегралу, стоящему в правой части равенства. При выборе квадратурной формулы естественно принять во внимание, что значения функции  $y(x)$  на концах отрезка  $[a, b]$  нам известны из условий (9.1.2), и взять

---

\*) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, Гостехиздат, 1957, 519—521.

формулу вида

$$\int_a^b f(x) dx \approx Af(a) + Bf(b) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k),$$

содержащую два фиксированных узла  $a$  и  $b$ . Прочие узлы  $x_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) являются произвольными.

Выше был взят случай «двухточечной» граничной задачи. Если бы задача была «многоточечной», то могла возникнуть потребность построения квадратурной формулы, содержащей более двух заданных заранее узлов.

Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \sum_{l=1}^m B_l f(a_l), \quad (9.1.4)$$

в которой  $m$  узлов  $a_1, \dots, a_m$  фиксированы. Она содержит  $2n + m$  параметров  $A_k$ ,  $x_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) и  $B_l$  ( $l = 1, \dots, m$ ). Попробуем их выбрать так, чтобы равенство (9.1.4) стало точным для многочленов возможно более высокой степени.

Введем два многочлена, связанных с узлами  $a_l$  и  $x_k$ :

$$\Omega(x) = (x - a_1) \dots (x - a_m), \quad \omega(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n).$$

За счет выбора коэффициентов  $A_k$  и  $B_l$ , формулу (9.1.4) можно сделать верной для многочленов степени  $n + m - 1$ . Для этого ее достаточно взять интерполяционной. Достичь же того, чтобы равенство (9.1.4) было верным для многочленов более высокой степени, можно только за счет специального подбора  $x_k$ .

**Теорема 1.** Для того чтобы формула (9.1.4) была точной для многочленов степени  $2n + m - 1$ , необходимо и достаточно, чтобы 1) она была интерполяционной и чтобы 2) многочлен  $\omega(x)$  был ортогонален на отрезке  $[a, b]$  по весу  $p(x)\Omega(x)$  ко всякому многочлену  $Q(x)$  степени  $\leq n$ .

**Доказательство.** Необходимость первого условия очевидна, так как, если формула (9.1.4) верна для всех многочленов степени  $n + m - 1$ , то она должна быть интерполяционной. Необходимость второго условия проверяется, если положить  $f = \Omega\omega Q$ ;  $f$  есть многочлен, степень которого  $\leq 2n + m - 1$ . Для него равенство (9.1.4) должно быть точным и так как  $f$  в точках  $a_l$  и  $x_k$  исчезает, квадратурная сумма для такой функции  $f$  обратится в нуль и должно будет выполняться равенство

$$\int_a^b p(x) \Omega(x) \omega(x) Q(x) dx = 0. \quad (9.1.5)$$

Пусть  $f$  есть произвольный многочлен степени  $2n + m - 1$ . Его можно представить в форме  $f = \Omega(x)\omega(x)Q(x) + r(x)$ , где  $Q(x)$  и  $r(x)$  будут многочленами, степени  $\leq n - 1$  и  $\leq n + m - 1$  соответственно. При этом, очевидно,  $f(a_l) = r(a_l)$  ( $l = 1, \dots, m$ ) и  $f(x_k) = r(x_k)$  ( $k = 1, \dots, n$ ).

Если выполнено условие ортогональности (9.1.5) и формула (9.1.4) — интерполяционная, то будет верной следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned} \int_a^b p f dx &= \int_a^b p \Omega \omega Q dx + \int_a^b p r dx = \int_a^b p r dx = \sum_{k=1}^n A_k r(x_k) + \\ &+ \sum_{l=1}^m B_l r(a_l) = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \sum_{l=1}^m B_l f(a_l). \end{aligned}$$

Этим доказана достаточность условий теоремы.

Таким образом, построение квадратурной формулы (9.1.4), верной для алгебраических многочленов степени  $2n + m - 1$ , приводится к нахождению многочлена  $\omega(x)$  степени  $n$ , ортогонального на  $[a, b]$  по весу  $p\Omega$  ко всякому многочлену меньшей степени. Корни многочлена  $\omega(x)$  должны быть действительными, различными и принадлежать отрезку  $[a, b]$ . Кроме того, они должны быть отличны от фиксированных узлов  $a_l$  ( $l = 1, \dots, m$ ).

Допустим, что многочлен  $\omega(x)$ , обладающий указанными свойствами, существует. Тогда формула (9.1.4), верная для многочленов степени  $2n + m - 1$ , может быть построена. Сделаем еще замечание об ее алгебраической степени точности. Получим представление остатка, позволяющее легко судить об этом. Выполним интерполирование  $f$  на  $[a, b]$  при помощи многочлена  $H(x)$  степени  $\leq 2n + m - 1$  по следующим условиям

$$\begin{aligned} H(a_l) &= f(a_l) & (l = 1, \dots, m), \\ H(x_k) &= f(x_k), \quad H'(x_k) = f'(x_k) & (k = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Если  $f$  имеет производную порядка  $2n + m$  во всех точках отрезка  $[a, b]$ , то остаток интерполирования  $r(x) = f(x) - H(x)$  представим в форме

$$r(x) = \Omega(x)\omega^2(x) \frac{f^{(2n+m)}(\xi)}{(2n+m)!}, \quad a < \xi < b.$$

Для остатка квадратуры  $R(f)$  справедливо равенство  $R(f) = R(H) + R(r)$ . Так как формула (9.1.4) верна для всех многочленов степени  $2n + m - 1$ , то  $R(H) = 0$ . Кроме того, во всех узлах  $a_l$  и  $x_k$

$r(x)$  обращается в нуль и поэтому квадратурная сумма для  $r(x)$  исчезает

$$\sum_{k=1}^n A_k r(x_k) + \sum_{l=1}^m B_l r(a_l) = 0.$$

Следовательно,

$$R(f) = R(r) = \int_a^b p r dx = \int_a^b p(x) \Omega(x) \omega^2(x) \frac{f^{(2n+m)}(\xi)}{(2n+m)!} dx. \quad (9.1.6)$$

Отсюда видно, что если

$$I = \int_a^b p \Omega \omega^2 dx \neq 0,$$

то степень точности формулы (9.1.4) равна  $2n + m - 1$ .

Действительно, при наших предположениях (9.1.4) дает точный результат для всех многочленов степени  $2n + m - 1$ . Когда же  $f$  есть многочлен степени  $2n + m$ , то  $f^{(2n+m)}$  есть величина постоянная, отличная от нуля и для такой функции  $f$

$$R(f) = \frac{f^{(2n+m)}}{(2n+m)!} \int_a^b p \Omega \omega^2 dx \neq 0.$$

Если  $I = 0$ , то алгебраическая степень точности (9.1.4) будет больше  $2n + m - 1$ . Легко может быть указан признак для суждения о степени точности в этом исключительном случае, на чем мы не будем останавливаться.

Так как формула (9.1.4) является интерполяционной, ее коэффициенты  $A_k$  и  $B_l$  должны иметь следующие значения:

$$A_k = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x) \Omega(x)}{(x - x_k) \omega'(x_k) \Omega(x_k)} dx, \quad (9.1.7)$$

$$B_l = \int_a^b p(x) \frac{\omega(x) \Omega(x)}{(x - a_l) \omega(a_l) \Omega'(a_l)} dx. \quad (9.1.8)$$

Для коэффициента  $A_k$  можно дать другое представление, более удобное для вычисления, нежели (9.1.7). Допустим, что существует единственная система многочленов  $\Pi_s(x)$  ( $s = 1, 2, \dots$ ), где  $\Pi_s$  имеет степень  $s$ , ортонормированная по весу  $\rho(x) = p(x) \Omega(x)$  на  $[a, b]$ . Многочлен  $\Pi_n(x)$  может отличаться от  $\omega(x)$  только постоянным множителем;

$$A_k = \frac{1}{\Pi'_n(x_k) \Omega(x_k)} \int_a^b \rho(x) \frac{\Pi_n(x)}{x - x_k} dx.$$

Интеграл  $\int_a^b \rho(x) \frac{\Pi_n(x)}{x-x_k} dx$  был вычислен в § 1 гл. 7 в других обозначениях. Для него были получены следующие два выражения:

$$\int_a^b \rho(x) \frac{\Pi_n(x)}{x-x_k} dx = -\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n \Pi_{n+1}(x_k)} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1} \Pi_{n-1}(x_k)}.$$

Под  $\alpha_n$  здесь подразумевается старший коэффициент многочлена  $\Pi_n(x)$ :

$$\Pi_n(x) = \alpha_n x^n + \dots, \\ A_k = -\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n \Pi'_n(x_k) \Pi_{n+1}(x_k) \Omega(x_k)} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1} \Pi'_n(x_k) \Pi_{n-1}(x_k) \Omega(x_k)}. \quad (9.1.9)$$

Для вычисления коэффициентов  $A_k$  может быть полезным следующее замечание. Если сравнить (9.1.9) с выражениями (7.1.4) и (7.1.5) для коэффициентов формулы наивысшей алгебраической степени точности, то будет ясно, что  $A_k$  для формулы (9.1.4) будут отличаться только множителем  $\frac{1}{\Omega(x_k)}$  от соответствующих коэффициентов в квадратурной формуле с весовой функцией  $\rho(x) = p(x) \Omega(x)$

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A'_k f(x_k),$$

верной для многочленов степени  $2n-1$ .

Построение формулы (9.1.4) при всяких  $n$ , как видно из изложенного, требует умения находить систему многочленов, ортогональных на  $[a, b]$  по весу  $p(x) \Omega(x)$ . В некоторых случаях здесь может принести пользу указанная несколькими строками ниже теорема о преобразовании ортогональной системы многочленов при умножении веса на многочлен. Эту теорему мы сформулируем с той степенью общности, которая будет достаточной для наших целей.

Для облегчения записи будем рассматривать многочлены со старшими коэффициентами, равными единице. Чтобы отличить их от нормированных многочленов, примененных в предыдущем изложении, будем их обозначать  $\tilde{P}_s(x)$  или  $\tilde{\Pi}_s(x)$ .

Пусть  $\Omega(x) = (x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_m)$  есть любой многочлен с простыми корнями  $a_1, a_2, \dots, a_m$ .

Наряду с заданной весовой функцией  $p(x)$  будем рассматривать весовую функцию  $\rho(x) = p(x) \Omega(x)$ .

Будем считать, что существует система многочленов  $\tilde{P}_s(x) = x^s + \dots$  ( $s=0, 1, \dots$ ), ортогональных на  $[a, b]$  по весу  $p(x)$ ,

такая, что  $\int_a^b p(x) \tilde{P}_s^2 dx \neq 0$ .



Равным образом предположим, что существует и при этом единственная система многочленов  $\tilde{P}_s(x) = x^s + \dots$  ( $s = 0, 1, \dots$ ), ортогональных на  $[a, b]$  по весу  $\rho(x) = p(x)\Omega(x)$ , и покажем, что  $\tilde{P}_s(x)$  имеют следующие выражения через  $P_s(x)$ :

$$\tilde{P}_n(x) = \frac{1}{\Delta\Omega(x)} \left\{ \begin{array}{cccc} \tilde{P}_{n+m}(x) & \tilde{P}_{n+m}(a_1) & \dots & \tilde{P}_{n+m}(a_m) \\ \tilde{P}_{n+m-1}(x) & \tilde{P}_{n+m-1}(a_1) & \dots & \tilde{P}_{n+m-1}(a_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{P}_n(x) & \tilde{P}_n(a_1) & \dots & \tilde{P}_n(a_m) \end{array} \right\} = \frac{D_{n+m}(x)}{\Delta \cdot \Omega(x)}, \quad (9.1.10)$$

$$\Delta = \left| \begin{array}{cccc} \tilde{P}_{n+m-1}(a_1) & \dots & \tilde{P}_{n+m-1}(a_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{P}_n(a_1) & \dots & \tilde{P}_n(a_m) \end{array} \right|.$$

Действительно, произведение  $\Omega(x)\tilde{P}_n(x)$  есть многочлен степени  $n+m$  со старшим членом  $x^{n+m}$ . Его можно разложить по многочленам  $\tilde{P}_s(x)$ :

$$\Omega(x)\tilde{P}_n(x) = \tilde{P}_{n+m}(x) + c_1\tilde{P}_{n+m-1}(x) + c_2\tilde{P}_{n+m-2}(x) + \dots$$

Ортогональность  $\tilde{P}_n(x)$  с весом  $p(x)\Omega(x)$  ко всякому многочлену, степени меньшей  $n$ , равносильна тому, что в указанном разложении должны отсутствовать члены с  $\tilde{P}_s(x)$  для  $s \leq n-1$  и разложение должно иметь форму

$$\Omega(x)\tilde{P}_n(x) = \tilde{P}_{n+m}(x) + c_1\tilde{P}_{n+m-1}(x) + \dots + c_m\tilde{P}_n(x). \quad (9.1.11)$$

При  $x$ , равном  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , левая часть обращается в нуль и поэтому коэффициенты  $c_1, \dots, c_m$  должны быть такими, чтобы выполнялись условия

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{P}_{n+m}(a_1) + c_1\tilde{P}_{n+m-1}(a_1) + \dots + c_m\tilde{P}_n(a_1) = 0, \\ \dots \\ \tilde{P}_{n+m}(a_m) + c_1\tilde{P}_{n+m-1}(a_m) + \dots + c_m\tilde{P}_n(a_m) = 0. \end{array} \right\} \quad (9.1.12)$$

Эти равенства вместе с тем являются условиями того, чтобы правая часть (9.1.11) нацело делилась на  $\Omega(x)$ ;  $\tilde{P}_n(x)$  будет тогда найден из (9.1.11) в форме

$$\tilde{P}_n(x) = \Omega^{-1}(x) [\tilde{P}_{n+m}(x) + c_1\tilde{P}_{n+m-1}(x) + \dots + c_m\tilde{P}_n(x)].$$

Ввиду сделанного предположения о существовании и единственности многочленов  $\tilde{P}_s$ , система уравнений (9.1.12) при всяком  $n$  должна иметь и при этом единственное решение относительно неизвестных



3)  $m = 2$  и берутся два фиксированных узла  $a_1 = a$ ,  $a_2 = b$ .

Ввиду знакопостоянства  $\rho = p\Omega$  на  $[a, b]$ , многочлен  $\omega(x)$ , ортогональный по весу  $\rho$  на  $[a, b]$  ко всякому многочлену степени  $< n$ , существует при всяком  $n$ . Корни его  $x_k$  действительные, простые и все лежат внутри  $[a, b]$ . В частности, они во всех трех случаях отличны от фиксированных узлов, расположенных на концах  $[a, b]$ . Поэтому квадратурные формулы (9.1.4), точные для всевозможных многочленов степени  $2n + m - 1$ , в случаях Маркова могут быть построены при любых  $n$ . Так как  $p\Omega\omega^2$  сохраняет знак на  $[a, b]$

и  $\int_a^b p\Omega\omega^2 dx \neq 0$ , алгебраическая степень точности таких формул будет равна  $2n + m - 1$ .

Построение начнем с первого случая:  $m = 1$ ,  $a_1 = a$ :

$$\int_a^b p f dx = A f(a) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f). \quad (9.2.1)$$

Наивысшая степень точности формулы равна  $2n$ .

Здесь  $\Omega(x) = x - a$ ;  $x_k$  — корни многочлена  $\Pi_n(x)$  степени  $n$ , ортогонального на  $[a, b]$  по весу  $\rho(x) = (x - a)p(x)$  ко всякому многочлену степени  $< n$ . Если  $P_s(x)$  ( $s = 0, 1, \dots$ ) образуют ортогональную систему многочленов по весу  $p(x)$ , то согласно (9.1.10)  $\Pi_n(x)$  может быть записан в форме

$$\Pi_n(x) = \frac{K_n}{x - a} [P_{n+1}(x) P_n(a) - P_n(x) P_{n+1}(a)],$$

где  $K_n$  — некоторая постоянная, отличная от нуля. Равенства (9.1.9) дают достаточно удобное средство для вычисления коэффициентов  $A_k$ :

$$A_k = - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n(x_k - a) \Pi'_n(x_k) \Pi_{n+1}(x_k)} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}(x_k - a) \Pi'_n(x_k) \Pi_{n-1}(x_k)}. \quad (9.2.2)$$

Пользуясь (9.1.8), для  $A$  найдем

$$A = \Pi_n^{-1}(a) \int_a^b p(x) \Pi_n(x) dx. \quad (9.2.3)$$

Покажем, что все коэффициенты формулы (9.2.1) положительны. В качестве интегрируемой функции возьмем многочлен степени  $2n - 1$ :

$$f = (x - a) \left[ \frac{\omega(x)}{x - x_i} \right]^2.$$

Он принимает следующие значения в узлах  $a$ ,  $x_k$ :

$$f(a) = 0, \quad f(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq i, \\ (x_i - a) \omega'^2(x_i) & \text{при } k = i. \end{cases}$$

Так как степень точности формулы (9.2.1) равна  $2n$ , то должно быть верным равенство

$$\int_a^b p(x)(x-a) \left[ \frac{\omega(x)}{x-x_i} \right]^2 dx = A_i (x_i - a) \omega'^2(x_i)$$

и, следовательно,

$$A_i = \frac{1}{(x_i - a) \omega'^2(x_i)} \int_a^b p(x)(x-a) \left[ \frac{\omega(x)}{x-x_i} \right]^2 dx > 0.$$

Аналогично, если положить  $f = \omega^2(x)$ , то для коэффициента  $A$  получим

$$A = \omega^{-2}(a) \int_a^b p(x) \omega^2(x) dx > 0.$$

Если  $f$  имеет непрерывную производную порядка  $2n+1$ , то остаток  $R(f)$  формулы (9.2.1) может быть, согласно (9.1.6), представлен в форме

$$R(f) = \int_a^b p(x)(x-a) \omega^2(x) \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} dx,$$

или, так как  $p(x-a)\omega^2$  сохраняет знак на  $[a, b]$ ,

$$R(f) = \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!} \int_a^b p(x)(x-a) \omega^2(x) dx, \quad a < \eta < b. \quad (9.2.4)$$

Более подробно остановимся на случае, когда весовая функция  $p(x)$  есть величина постоянная:  $p(x) \equiv 1$ . Чтобы воспользоваться при вычислениях яковиевыми многочленами, будем считать, что отрезок интегрирования  $[a, b]$  приведен к отрезку  $[-1, 1]$ , и рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = Af(-1) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f), \quad (9.2.5)$$

имеющую степень точности  $2n$ ;  $\Omega(x) = 1+x$ . Многочлен  $\omega(x) = (x-x_1) \dots (x-x_n)$  должен быть ортогонален на  $[-1, 1]$  по весу  $1+x$  ко всякому многочлену меньшей степени и поэтому может отличаться от многочлена Якоби  $P_n^{(0,1)}(x)$  только постоянным множителем, равным обратной величине старшего коэффициента

$$\omega(x) = \frac{2^n n! \Gamma(n+2)}{\Gamma(2n+2)} P_n^{(0,1)}(x).$$

Узлы  $x_k$  должны быть, следовательно, корнями  $P_n^{(0,1)}(x)$ . Коэффициенты  $A_k$  могут быть легко найдены, если воспользоваться замечанием, сделанным по поводу равенств (9.1.9). Квадратурная формула (7.3.2) с яковиевым весом  $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ , содержащая  $n$  узлов и верная для многочленов степени  $2n-1$ , имеет коэффициенты (7.3.4). Их мы должны вычислить для случая  $\alpha=0$ ,  $\beta=1$  и затем для нахождения  $A_k$ , входящих в формулу (9.2.5), приписать коэффициенту (7.3.4) с тем же индексом  $k$  множитель  $\frac{1}{\Omega(x_k)} = \frac{1}{1+x_k}$ . Это дает:

$$A_k = \frac{4}{(1+x_k)(1-x_k^2)[P_n^{(0,1)}(x_k)]^2}. \quad (9.2.6)$$

При вычислении  $A$  можно воспользоваться формулой (9.1.8), положив в ней  $p=1$ ,  $\Omega=1+x$ ,  $a_l=-1$ :

$$A = \int_{-1}^1 \frac{\omega(x)}{\omega(-1)} dx = [P_n^{(0,1)}(-1)]^{-1} \int_{-1}^1 P_n^{(0,1)}(x) dx.$$

Последний интеграл и численный множитель, стоящий перед ним, легко могут быть найдены при помощи известных свойств многочленов Якоби  $P_n^{(0,1)}(x)$  и равны соответственно  $\frac{(-1)^n 2}{(n+1)}$  и  $(-1)^n(n+1)$ .

$$A = \frac{2}{(n+1)^2}. \quad (9.2.7)$$

Остаток  $R(f)$  может быть подсчитан на основании общего выражения (9.2.4):

$$R(f) = \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!} \int_{-1}^1 (1+x) \omega^2(x) dx, \quad -1 < \eta < 1.$$

Интеграл, входящий в остаток  $R(f)$ , находится без труда

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1+x) \omega^2(x) dx &= \left[ \frac{2^n n! (n+1)!}{(2n+1)!} \right]^2 \int_{-1}^1 (1+x) [P_n^{(0,1)}(x)]^2 dx = \\ &= \frac{2}{n+1} \left[ \frac{2^n n! (n+1)!}{(2n+1)!} \right]^2. \end{aligned}$$

Поэтому

$$R(f) = \frac{2}{n+1} \left[ \frac{2^n n! (n+1)!}{(2n+1)!} \right]^2 \frac{f^{(2n+1)}(\eta)}{(2n+1)!}, \quad -1 < \eta < 1. \quad (9.2.8)$$

Узлы и коэффициенты формулы (9.2.5) для  $n = 1(1)6$  приведены ниже \*):

$n = 1$		
$x_1 =$	0,3333 3333	$A = 0,5$ $A_1 = 1,5$
$n = 2$		
$x_1 =$	-0,2898 9794	$A = 0,2222 2222$ $A_1 = 1,0249 7165$
$x_2 =$	0,6898 9794	$A_2 = 0,7528 0613$
$n = 3$		
$x_1 =$	-0,5753 189	$A = 0,125$ $A_1 = 0,6576 886$
$x_2 =$	0,1810 663	$A_2 = 0,7763 869$
$x_3 =$	0,8228 241	$A_3 = 0,4409 244$
$n = 4$		
$x_1 =$	-0,7204 803	$A = 0,08$ $A_1 = 0,4462 078$
$x_2 =$	0,1671 809	$A_2 = 0,6236 530$
$x_3 =$	0,4463 140	$A_3 = 0,5627 120$
$x_4 =$	0,8857 916	$A_4 = 0,2874 271$
$n = 5$		
$x_1 =$	-0,8029 298	$A = 0,0555 556$ $A_1 = 0,3196 408$
$x_2 =$	-0,3909 286	$A_2 = 0,4853 872$
$x_3 =$	0,1240 504	$A_3 = 0,5209 268$
$x_4 =$	0,6039 732	$A_4 = 0,4169 013$
$x_5 =$	0,9203 803	$A_5 = 0,2015 884$
$n = 6$		
$x_1 =$	-0,8538 913	$A = 0,0408 1633$ $A_1 = 0,2392 275$
$x_2 =$	-0,5384 678	$A_2 = 0,3809 498$
$x_3 =$	-0,1173 430	$A_3 = 0,4471 098$
$x_4 =$	0,3260 306	$A_4 = 0,4247 038$
$x_5 =$	0,7038 428	$A_5 = 0,3182 042$
$x_6 =$	0,9413 672	$A_6 = 0,1489 885$

Обратимся к третьему случаю, когда два заранее заданных узла лежат на границах промежутка интегрирования  $a_1 = a$ ,  $a_2 = b$ :

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = Af(a) + Bf(b) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f). \quad (9.2.9)$$

Наивысшая степень точности такой формулы равна  $2n + 1$ ,  $\Omega(x) = (x - a)(x - b)$ ,  $x_k$  — корни многочлена  $\Pi_n(x)$  степени  $n$ , ортогонального на  $[a, b]$  по весу  $\rho(x) = (x - a)(x - b)p(x)$  ко всякому многочлену меньшей степени.

\*) Результаты найдены Р. Б. Аккерман и К. Е. Черниным.

Многочлен  $\Pi_n(x)$  через многочлены  $P_n(x)$ , ортогональные по весу  $p(x)$ , выражается следующим образом:

$$\Pi_n(x) = \frac{K_n}{(x-a)(x-b)} \begin{vmatrix} P_{n+2}(x) & P_{n+2}(a) & P_{n+2}(b) \\ P_{n+1}(x) & P_{n+1}(a) & P_{n+1}(b) \\ P_n(x) & P_n(a) & P_n(b) \end{vmatrix}.$$

Коэффициенты  $A_k$ ,  $A$  и  $B$  вычисляются при помощи равенств (9.1.9) и (9.1.8):

$$\begin{aligned} A_k &= - \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n \Pi'_n(x_k) \Pi_{n+1}(x_k) (x_k - a) (x_k - b)} = \\ &= \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1} \Pi'_n(x_k) \Pi_{n-1}(x_k) (x_k - a) (x_k - b)}, \end{aligned} \quad (9.2.10)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= [\omega(a)(a-b)]^{-1} \int_a^b p(x)(x-b)\omega(x)dx, \\ B &= [\omega(b)(b-a)]^{-1} \int_a^b p(x)(x-a)\omega(x)dx, \\ \omega(x) &= (x-x_1) \dots (x-x_n). \end{aligned} \right\} \quad (9.2.11)$$

Если рассмотреть квадратурную формулу с весовой функцией  $\rho(x) = p(x)(x-a)(x-b)$ :

$$\int_a^b p(x)(x-a)(x-b)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k'' f(x_k),$$

верную для многочленов степени  $2n-1$ , то коэффициенты  $A_k$  формулы (9.2.8) будут отличаться от  $A_k''$  множителем  $\frac{1}{(x_k-a)(x_k-b)}$ .

Можно показать, что  $A_k$ ,  $A$  и  $B$  положительны. Чтобы убедиться в этом, достаточно применить формулу (9.2.9) к многочленам

$$(x-a)(x-b) \left[ \frac{\omega(x)}{x-x_l} \right]^2, \quad (b-x)\omega^2(x) \quad \text{и} \quad (x-a)\omega^2(x).$$

Остаточный член  $R(f)$  (9.2.9) представим в форме

$$R(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!} \int_a^b p(x)(x-a)(x-b)\omega^2(x)dx.$$

Как выше, остановимся на случае постоянной весовой функции  $p(x)$  и будем считать, что отрезок интегрирования есть  $[-1, 1]$ :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = Af(-1) + Bf(1) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f), \quad (9.2.12)$$

$$\Omega(x) = 1 - x^2.$$

Многочлен  $\omega(x)$  ортогонален на  $[-1, 1]$  с весом  $1 - x^2$  ко всякому многочлену степени  $< n$  и, с точностью до легко определяемого численного множителя, должен совпадать с якобиевым многочленом  $P_n^{(1,1)}(x)$ :

$$\omega(x) = \frac{2^n n! \Gamma(n+3)}{\Gamma(2n+3)} P_n^{(1,1)}(x).$$

Путем, аналогичным тому, который применен в первом случае, вычисляются коэффициенты и остаток формулы (9.2.12):

$$A_k = 8 \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{(1-x_k^2)^2 [P_n^{(1,1)}(x_k)]^2}, \quad A = B = \frac{2}{(n+1)(n+2)},$$

$$R(f) = \frac{8(n+1)}{(2n+3)(n+2)} \left[ \frac{2^n n! (n+2)!}{(2n+2)!} \right]^2 \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}, \quad -1 < \eta < 1.$$

Приведем \*) числовые величины узлов и коэффициентов для  $n = 1(1)15$

$n = 1$	
	$A = B = 0,3333 \ 3333$
$x_1 = 0$	$A_1 = 1,3333 \ 3333$
$n = 2$	
	$A = B = 0,1666 \ 6667$
$x_2 = -x_1 = 0,4472 \ 1360$	$A_1 = A_2 = 0,8333 \ 3333$
$n = 3$	
	$A = B = 0,1$
$x_3 = -x_1 = 0,6546 \ 5367$	$A_3 = A_1 = 0,5444 \ 4444$
$x_2 = 0$	$A_2 = 0,7111 \ 1111$
$n = 4$	
	$A = B = 0,0666 \ 6666 \ 7$
$x_4 = -x_1 = 0,7650 \ 5532$	$A_4 = A_1 = 0,3784 \ 7496$
$x_3 = -x_2 = 0,2852 \ 3152$	$A_3 = A_2 = 0,5548 \ 5837$

\*) Таблица составлена Р. Б. Аккерман.



$n = 5$ 

$$\begin{array}{ll}
 A = B = 0,0475 \ 1904 \ 8 \\
 x_5 = -x_1 = 0,8302 \ 2390 & A_5 = A_1 = 0,2768 \ 2605 \\
 x_4 = -x_2 = 0,4688 \ 4879 & A_4 = A_2 = 0,4317 \ 4538 \\
 x_3 = 0 & A_3 = 0,4876 \ 1905
 \end{array}$$

 $n = 6$ 

$$\begin{array}{ll}
 A = B = 0,0357 \ 1428 \ 6 \\
 x_6 = -x_1 = 0,8717 \ 4015 & A_6 = A_1 = 0,2107 \ 0423 \\
 x_5 = -x_2 = 0,5917 \ 0018 & A_5 = A_2 = 0,3411 \ 2268 \\
 x_4 = -x_3 = 0,2092 \ 9922 & A_4 = A_3 = 0,4124 \ 5881
 \end{array}$$

 $n = 7$ 

$$\begin{array}{ll}
 A = B = 0,0277 \ 7777 \ 8 \\
 x_7 = -x_1 = 0,8997 \ 5800 & A_7 = A_1 = 0,1654 \ 9536 \\
 x_6 = -x_2 = 0,6771 \ 8628 & A_6 = A_2 = 0,2745 \ 3872 \\
 x_5 = -x_3 = 0,3631 \ 1746 & A_5 = A_3 = 0,3464 \ 2851 \\
 x_4 = 0 & A_4 = 0,3715 \ 1927
 \end{array}$$

 $n = 8$ 

$$\begin{array}{ll}
 A = B = 0,0222 \ 2222 \ 2 \\
 x_8 = -x_1 = 0,9195 \ 3391 & A_8 = A_1 = 0,1333 \ 0599 \\
 x_7 = -x_2 = 0,7387 \ 7386 & A_7 = A_2 = 0,2248 \ 8934 \\
 x_6 = -x_3 = 0,4779 \ 2495 & A_6 = A_3 = 0,2920 \ 4268 \\
 x_5 = -x_4 = 0,1652 \ 7896 & A_5 = A_4 = 0,3275 \ 3976
 \end{array}$$

 $n = 9$ 

$$\begin{array}{ll}
 A = B = 0,0181 \ 8181 \ 8 \\
 x_9 = -x_1 = 0,9340 \ 0143 & A_9 = A_1 = 0,1096 \ 1227 \\
 x_8 = -x_2 = 0,7844 \ 8347 & A_8 = A_2 = 0,1871 \ 6989 \\
 x_7 = -x_3 = 0,5652 \ 3533 & A_7 = A_3 = 0,2480 \ 4811 \\
 x_6 = -x_4 = 0,2957 \ 5814 & A_6 = A_4 = 0,2868 \ 7913 \\
 x_5 = 0 & A_5 = 0,3002 \ 1759
 \end{array}$$

 $n = 10$ 

$$\begin{array}{ll}
 A = B = 0,0151 \ 5151 \ 5 \\
 x_{10} = -x_1 = 0,9448 \ 9927 & A_{10} = A_1 = 0,0916 \ 8452 \ 1 \\
 x_9 = -x_2 = 0,8192 \ 7932 & A_9 = A_2 = 0,1579 \ 7471 \\
 x_8 = -x_3 = 0,6328 \ 7615 & A_8 = A_3 = 0,2125 \ 0842 \\
 x_7 = -x_4 = 0,3995 \ 3094 & A_7 = A_4 = 0,2512 \ 7560 \\
 x_6 = -x_5 = 0,1365 \ 5293 & A_6 = A_5 = 0,2714 \ 0524
 \end{array}$$

$n = 11$ 

	$A = B = 0,0128 \ 2051 \ 3$
$x_{11} = -x_1 = 0,9533 \ 0985$	$A_{11} = A_1 = 0,0778 \ 0168 \ 7$
$x_{10} = -x_2 = 0,8463 \ 4757$	$A_{10} = A_2 = 0,1349 \ 8193$
$x_9 = -x_3 = 0,6861 \ 8847$	$A_9 = A_3 = 0,1836 \ 4686$
$x_8 = -x_4 = 0,4829 \ 0982$	$A_8 = A_4 = 0,2207 \ 6779$
$x_7 = -x_5 = 0,2492 \ 8693$	$A_7 = A_5 = 0,2440 \ 1579$
$x_6 = 0$	$A_6 = 0,2519 \ 3085$

 $n = 12$ 

	$A = B = 0,0109 \ 8901 \ 1$
$x_{12} = -x_1 = 0,9599 \ 3505$	$A_{12} = A_1 = 0,0668 \ 3728 \ 3$
$x_{11} = -x_2 = 0,8678 \ 0105$	$A_{11} = A_2 = 0,1165 \ 8665$
$x_{10} = -x_3 = 0,7288 \ 6860$	$A_{10} = A_3 = 0,1600 \ 2185$
$x_9 = -x_4 = 0,5506 \ 3940$	$A_9 = A_4 = 0,1948 \ 2615$
$x_8 = -x_5 = 0,3427 \ 2401$	$A_8 = A_5 = 0,2191 \ 2625$
$x_7 = -x_6 = 0,1163 \ 3187$	$A_7 = A_6 = 0,2316 \ 1279$

 $n = 13$ 

	$A = B = 0,0095 \ 2380 \ 95$
$x_{13} = -x_1 = 0,9652 \ 4592$	$A_{13} = A_1 = 0,0580 \ 2992 \ 2$
$x_{12} = -x_2 = 0,8850 \ 8205$	$A_{12} = A_2 = 0,1016 \ 6004$
$x_{11} = -x_3 = 0,7635 \ 1967$	$A_{11} = A_3 = 0,1405 \ 1171$
$x_{10} = -x_4 = 0,6062 \ 5322$	$A_{10} = A_4 = 0,1727 \ 8965$
$x_9 = -x_5 = 0,4206 \ 3805$	$A_9 = A_5 = 0,1969 \ 8723$
$x_8 = -x_6 = 0,2153 \ 5396$	$A_8 = A_6 = 0,2119 \ 7360$
$x_7 = 0$	$A_7 = 0,2170 \ 4810$

 $n = 14$ 

	$A = B = 0,0083 \ 3333 \ 33$
$x_{14} = -x_1 = 0,9695 \ 6804$	$A_{14} = A_1 = 0,0508 \ 5036 \ 9$
$x_{13} = -x_2 = 0,8992 \ 0054$	$A_{13} = A_2 = 0,0893 \ 9368 \ 9$
$x_{12} = -x_3 = 0,7920 \ 0828$	$A_{12} = A_3 = 0,1242 \ 5539$
$x_{11} = -x_4 = 0,6523 \ 8872$	$A_{11} = A_4 = 0,1540 \ 2699$
$x_{10} = -x_5 = 0,4860 \ 5941$	$A_{10} = A_5 = 0,1774 \ 9190$
$x_9 = -x_6 = 0,2998 \ 3047$	$A_9 = A_6 = 0,1936 \ 9005$
$x_8 = -x_7 = 0,1013 \ 2627$	$A_8 = A_7 = 0,2019 \ 5830$

 $n = 15$ 

	$A = B = 0,0073 \ 5294 \ 12$
$x_{15} = -x_1 = 0,9731 \ 3217$	$A_{15} = A_1 = 0,0449 \ 2195 \ 0$
$x_{14} = -x_2 = 0,9108 \ 8001$	$A_{14} = A_2 = 0,0791 \ 9826 \ 3$
$x_{13} = -x_3 = 0,8156 \ 9624$	$A_{13} = A_3 = 0,1105 \ 9290$
$x_{12} = -x_4 = 0,6910 \ 2899$	$A_{12} = A_4 = 0,1379 \ 8776$
$x_{11} = -x_5 = 0,5413 \ 8540$	$A_{11} = A_5 = 0,1603 \ 9465$
$x_{10} = -x_6 = 0,3721 \ 7443$	$A_{10} = A_6 = 0,1770 \ 0426$
$x_9 = -x_7 = 0,1895 \ 1198$	$A_9 = A_7 = 0,1872 \ 1635$
$x_8 = 0$	$A_8 = 0,1906 \ 6186$

### § 3. Замечание о вычислении интегралов со знакопеременной весовой функцией

Построение квадратурных формул с заданными узлами тесно связано с задачей о приведении знакопеременной весовой функции к весовой функции постоянного знака. Возьмем интеграл вида

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \quad (9.3.1)$$

и будем считать, что  $p(x)$  изменяет знак на отрезке интегрирования. Предположим, что внутри  $[a, b]$   $p(x)$  имеет конечное число точек перемены знака\*):  $a_1, a_2, \dots, a_m$ . Построим многочлен  $P(x)$  степени  $< m$ , интерполирующий  $f$  по ее значениям в точках  $a_l$ :

$$\left. \begin{aligned} P(a_l) &= f(a_l) \quad (l = 1, 2, \dots, m), \\ f(x) &= P(x) + r(x), \quad P(x) = \sum_{l=1}^m \frac{\Omega(x)}{(x - a_l) \Omega'(a_l)} f(a_l). \end{aligned} \right\} \quad (9.3.2)$$

Остаток интерполирования  $r(x)$  представим в форме (см. (3.2.9)):

$$r(x) = (x - a_1) \dots (x - a_m) f(a_1, \dots, a_m, x) = \Omega(x) f(a_1, \dots, a_m, x),$$

где  $f(a_1, \dots, a_m, x)$  есть разностное отношение, составленное для узлов  $a_1, \dots, a_m, x$ .

Интеграл (9.3.1) может быть разложен на два слагаемых следующего вида

$$\begin{aligned} \int_a^b p f dx &= \int_a^b p P dx + \int_a^b p \Omega f(a_1, \dots, a_m, x) dx = \\ &= \sum_{l=1}^m a_l f(a_l) + \int_a^b \rho(x) f(a_1, \dots, a_m, x) dx, \end{aligned} \quad (9.3.3)$$

$$a_l = \int_a^b p(x) \frac{\Omega(x)}{(x - a_l) \Omega'(a_l)} dx. \quad (9.3.4)$$

Для нас особый интерес представляет последний из интегралов в (9.3.3). Функция  $\rho(x) = p(x) \Omega(x)$ , входящая в него, будет сохранять знак на  $[a, b]$ , так как точки  $a_l$  ( $l = 1, \dots, m$ ) будут точками

\*) На каждом из отрезков  $[a, a_1]$ ,  $[a_1, a_2]$ ,  $\dots$ ,  $[a_m, b]$   $p(x)$  сохраняет знак и имеет противоположные знаки на смежных отрезках.

перемены знака для каждого из множителей  $p$  и  $\Omega$ . Примем  $\rho$  за новую весовую функцию. К вычислению интеграла

$$\int_a^b \rho f(a_1, \dots, a_m, x) dx$$

может быть применен любой из методов вычисления интегралов со знакопостоянным весом. В частности для этого могут быть взяты квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности. Как и в предыдущих параграфах, обозначим через  $\Pi_n(x)$  многочлен степени  $n$  из ортогональной системы, принадлежащей весу  $\rho = p\Omega$ . Рассмотрим квадратурную формулу с  $n$  узлами, верную для многочленов степени  $2n-1$ :

$$\int_a^b \rho f(a_1, \dots, a_m, x) dx \approx \sum_{k=1}^n \beta_k f(a_1, \dots, a_m, x_k), \quad (9.3.5)$$

$$\Pi_n(x_k) = 0 \quad (k=1, \dots, n), \quad \omega(x) = (x-x_1) \dots (x-x_n),$$

$$\beta_k = \int_a^b \rho(x) \frac{\Pi_n(x)}{(x-x_k) \Pi'_n(x_k)} dx = \int_a^b p(x) \frac{\Omega(x) \omega(x)}{(x-x_k) \omega'(x_k)} dx.$$

Для первоначального интеграла (9.3.1) мы получим тогда следующее правило приближенного вычисления:

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{l=1}^m \alpha_l f(a_l) + \sum_{k=1}^n \beta_k f(a_1, \dots, a_m, x_k). \quad (9.3.6)$$

Легко выяснить, что алгебраическая степень точности полученного равенства равна  $2n+m-1$ .

Пусть, в самом деле,  $f$  — произвольный многочлен степени  $\leq 2n+m-1$ . Равенство (9.3.3) есть тождество и выполняется при всякой функции  $f$ , для которой имеют смысл все члены, входящие в это равенство. Для  $f$  разностное отношение  $f(a_1, \dots, a_m, x)$  будет многочленом, степень которого на  $m$  единиц меньше степени  $f$  и не превзойдет  $2n-1$ . Так как (9.3.5) имеет степень точности  $2n-1$ , то для  $f(a_1, \dots, a_m, x)$  оно будет выполняться точно, а вместе с ним будет точно выполняться и (9.3.6). С другой стороны, если в качестве  $f$  взять многочлен степени  $2n+m$ :  $f = \Omega(x) \omega^2(x)$ , то для него (9.3.6) не может быть верным. Действительно, для  $f = \Omega \omega^2$  интерполирующий многочлен  $P(x)$  обращается в тождественный нуль и из равенства (9.3.2) следует  $f(a_1, \dots, a_m, x) = \omega^2(x)$ . Все члены правой части равенства (9.3.6) для  $f = \Omega \omega^2$  исчезают. Интеграл же,

стоящий в левой части, будет положительным ввиду того, что произведение  $p\Omega$  сохраняет знак на  $[a, b]$ :

$$\int_a^b p f dx = \int_a^b p \Omega \omega^2 dx > 0.$$

Обратим сейчас внимание на величины  $f(a_1, \dots, a_m, x_k)$  и зависимость их от  $f$ . Если корни  $x_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) многочлена  $\Pi_n(x)$ , являющиеся узлами квадратурной формулы (9.3.6), отличны от  $a_l$  ( $l=1, \dots, m$ ), то разностные отношения  $f(a_1, \dots, a_m, x_k)$  будут такими:

$$f(a_1, \dots, a_m, x_k) = \frac{f(x_k) - P(x_k)}{\Omega(x_k)}. \quad (9.3.7)$$

Тогда  $f(a_1, \dots, a_m, x)$  зависят только от следующих значений функции  $f$ :  $f(x_k)$ ,  $f(a_l)$  ( $l=1, \dots, m$ ).

Если в формулу (9.3.6) подставить вместо  $f(a_1, \dots, a_m, x_k)$  их значения (9.3.7), то будет ясно, что (9.3.6), после объединения членов с одинаковыми значениями  $f(x_k)$  и  $f(a_l)$  преобразуется к виду (9.1.4). При сделанном предположении об  $x_k$  формула (9.3.6) будет, следовательно, частным случаем квадратурной формулы (9.1.4), узлы которой  $a_l$ , задаваемые заранее, располагаются в точках перемены знака весовой функции  $p(x)$ . Отметим попутно, что если узел  $x_k$  совпадает с каким-либо из узлов  $a_l$ , то  $\Omega(x_k) = 0$  и равенство (9.3.7) теряет смысл. Оно должно быть заменено таким:

$$f(a_1, \dots, a_m, x_k) = \frac{f'(x_k) - P'(x_k)}{\Omega'(x_k)},$$

которое получается из (9.3.7) при помощи правила Лопиталья. Разностное отношение  $f(a_1, \dots, a_m, x_k)$  здесь будет зависеть не только от значений  $f(a_l)$  ( $l=1, \dots, m$ ), но и от значения производной  $f'(x_k)$ . В этом случае квадратурная формула (9.3.6) будет давать прибли-

женное выражение интеграла  $\int_a^b p f dx$  не только через значения функции  $f$ , но через значения производной  $f'$  в узлах  $x_k$ , совпадающих с точками перемены знака  $p(x)$ .

Пусть, например,  $m=1$  и  $p(x)$  имеет только одну точку  $a_1$  перемены знака внутри  $[a, b]$ . Интерполирующий многочлен  $P(x)$  здесь будет величиной постоянной:  $P(x) = f(a_1)$  и равенство (9.3.3) имеет форму

$$\int_a^b p f dx = f(a_1) \int_a^b p dx + \int_a^b p(x)(x - a_1) f(a_1, x) dx, \quad (9.3.8)$$

$$f(a_1, x) = \frac{f(x) - f(a_1)}{x - a_1}.$$

Если все  $x_k$  отличны от  $a_1$ , то расчетная формула (9.3.6) будет такой

$$\int_a^b p f dx \approx f(a_1) \int_a^b p dx + \sum_{k=1}^n \beta_k \frac{f(x_k) - f(a_1)}{x_k - a_1}.$$

Если же один из узлов  $x_k$ , например  $x_1$ , совпадает с  $a_1$ , то расчетная формула изменится и примет следующий вид:

$$\int_a^b p f dx \approx f(a_1) \int_a^b p dx + \beta_1 f'(a_1) + \sum_{k=2}^n \beta_k \frac{f(x_k) - f(a_1)}{x_k - a_1}.$$

Допустим, что нам нужно вычислить интеграл

$$\int_{-1}^1 x e^x dx = 2e^{-1} = 0,73576 \dots$$

За весовую функцию  $p(x)$  примем множитель  $x$ :  $p(x) = x$ . Единственная точка перемены знака  $p(x)$  есть  $x = 0$ . Равенство (9.3.8) для рассматриваемого интеграла будет:

$$\int_{-1}^1 x e^x dx = e^0 \int_{-1}^1 x dx + \int_{-1}^1 x^2 f(0, x) dx = \int_{-1}^1 x^2 f(0, x) dx,$$

$$f(0, x) = \frac{e^x - 1}{x}.$$

Для вычисления последнего интеграла применим квадратурную формулу наивысшей алгебраической степени точности с двумя узлами. Многочлен  $\Pi_2(x)$  второй степени из ортогональной системы на  $[-1, 1]$  по весу  $\rho(x) = x^2$ , как легко проверить, есть  $\Pi_2(x) = c(3 - 5x^2)$ . Корни его таковы:

$$x_1 = -q, \quad x_2 = q, \quad q = \frac{\sqrt{15}}{5} \approx 0,7745967.$$

Расчетная формула для интеграла будет

$$\int_{-1}^1 x^2 f(0, x) dx \approx \beta_1 f(0, x_1) + \beta_2 f(0, x_2).$$

Коэффициенты  $\beta_1$  и  $\beta_2$  должны быть одинаковы ввиду того, что значения весовой функции  $\rho = x^2$  распределены симметрично относи-

тельно точки  $x=0$ , и могут быть найдены из условия

$$\beta_1 + \beta_2 = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3}, \quad \beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{3},$$

$$\int_{-1}^1 x^2 f(0, x) dx \approx \frac{1}{3} \left[ \frac{e^{x_1} - 1}{x_1} + \frac{e^{x_2} - 1}{x_2} \right] = \frac{e^q - e^{-q}}{3q} = \approx 0,735\ 36.$$

Этот результат меньше чем на 0,06% отличается от точного значения.

#### § 4. Уточнение правил гауссова типа

Правила интегрирования (9.1.4) с несколькими фиксированными узлами могут быть применены к задаче об уточнении квадратурной формулы гауссова вида и приводят к одному из возможных ее решений, которое в отношении степени точности можно, по-видимому, считать наилучшим.

Задача имеет следующий смысл. Пусть  $[a, b]$  — произвольный конечный или бесконечный отрезок и  $p(x)$  — неотрицательная, не эквивалентная нулю весовая функция, для которой имеют конечные значения моменты любых степеней  $\int_a^b p(x) x^s dx$  ( $s=0, 1, \dots$ ).

Для  $p(x)$  может быть построена соответствующая ей система ортонормальных многочленов  $P_m(x)$  ( $m=0, 1, \dots$ ). Возьмем многочлен степени  $m$  и рассмотрим связанную с ним квадратурную формулу наивысшей алгебраической степени точности  $2m-1$

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{j=1}^m A_j f(a_j) \quad [P_m(a_j) = 0]. \quad (9.4.1)$$

Допустим, что при помощи этого правила найдено приближенное значение интеграла и оно оказалось либо недостаточно точным, либо требующим проверки. Уточняющая и проверочная формулы должны иметь степень точности не ниже  $2m-1$ . В остальном выбор их, принципиально говоря, произволен. При построении такого правила естественно, с целью экономии вычислительного труда, использовать значения  $f(a_j)$ , входящие в (9.4.1) и уже известные нам. К  $a_j$  ( $j=1, \dots, m$ ) присоединим еще  $n$  узлов  $x_k$  ( $k=1, \dots, n$ ), отличных от  $a_j$ , и рассмотрим равенство

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{j=1}^m C_j f(a_j) + \sum_{k=1}^n D_k f(x_k), \quad (9.4.2)$$

зависящее от  $m + 2n$  параметров  $C_j$ ,  $D_k$ ,  $x_k$ . Степень точности его будем считать не меньшей  $2m - 1$ .

Проверим сначала, что для того, чтобы оно было отличным от (9.4.1), необходимо выполнение условия  $n > m$ . Допустим противоположное:  $n \leq m$  и покажем, что тогда (9.4.2) совпадает с (9.4.1). Так как равенство точно для многочленов степени  $2m - 1$ , то оно верно также для многочленов степени  $n + m - 1$  и будет интерполяционным. Его коэффициенты поэтому должны иметь значения (9.1.7) — (9.1.8).

Рассмотрим коэффициент  $D_k$ . В его выражении (9.1.7) многочлен  $\Omega(x) = (x - a_1) \dots (x - a_m)$  мы можем заменить на  $P_m(x)$ , который отличается от  $\Omega(x)$  только численным множителем, равным старшему коэффициенту  $P_m(x)$ :

$$D_k = [P_m(x_k) \omega'(x_k)]^{-1} \int_a^b p(x) P_m(x) \frac{\omega(x)}{x - x_k} dx.$$

Ввиду того, что  $\omega(x) \cdot (x - x_k)^{-1}$  есть целый многочлен степени  $n - 1 < m$ , а  $P_m(x)$  ортогонален ко всякому многочлену меньшей степени,  $D_k = 0$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Следовательно, в правой части (9.4.2)

сохранится лишь сумма  $\sum_{j=1}^m C_j f(a_j)$  и так как степень точности равенства тогда будет равна  $2m - 1$ , т. е. будет наивысшей при  $m$  значениях функции  $f$ , то (9.4.2) должно совпадать с (9.4.1):  $C_j = A_j$ .

Изберем наименьшее возможное значение для числа дополнительных узлов  $x_k$ :  $n = m + 1$  и рассмотрим уточняющее правило вида

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{j=1}^m C_j f(a_j) + \sum_{k=1}^{m+1} D_k f(x_k). \quad (9.4.3)$$

Его  $3m + 2$  параметра целесообразно избрать так, чтобы сделать равенство точным для всяких алгебраических многочленов степени  $3m + 1$ . Для достижения этого, как выяснилось выше, необходимо выполнить условия:

1. Правило (9.4.3) должно быть интерполяционным: его коэффициенты  $C_j$  и  $D_k$  должны иметь значения

$$C_j = [P'_m(a_j) \omega(a_j)]^{-1} \int_a^b p(x) \frac{P_m(x)}{x - a_j} \omega(x) dx,$$

$$D_k = [P_m(x_k) \omega'(x_k)]^{-1} \int_a^b p(x) P_m(x) \frac{\omega(x)}{x - x_k} dx,$$

$$\omega(x) = (x - x_1) \dots (x - x_{n+1}).$$





Для постоянной весовой функции  $p(x) = 1$  и промежутка  $[-1, 1]$  задача рассмотрена более подробно. Уточняемой формулой будет правило Гаусса. Для уточняющей формулы (9.4.3) были вычислены \*) на 16 знаков узлы  $x_k$  и коэффициенты  $C_j$ ,  $D_k$  при  $m = 1(1)40$ .

Для якобиевых весовых функций  $p(x) = (1 - x^2)^a$ ,  $a = -0,5$ ; 0,5, и  $p(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$  уточняющие правила могут быть построены в конечном виде \*\*).

Ввиду недостатка места мы вынуждены ограничиться перечислением указанных результатов и не рассматривать их подробно.

## Литература

Lobatto R., *Lessen over de Integral-Rekening*, 1852.

Марков А. А., *Исчисление конечных разностей*, гл. V, *Mathesis*, 1910.

Szegő G., Über gewisse orthogonale Polynome, die zu einer oszillierenden Belegungsfunktion gehören, *Math. Ann.* 100, № 4 (1934), 501—513.

Мысовских И. П., Один частный случай квадратурных формул, содержащих заданные узлы, *Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. и техн. наук* № 4 (1964), 125—127.

Кронрод А. С.: 1) Об интегрировании с контролем точности, *ДАН СССР* 154, №2 (1964), 283—286; 2) Узлы и веса квадратурных формул, М. «Наука», 1964.

---

\*) Кронрод А. С. [2].

\*\*) Мысовских И. П. [1].

## ГЛАВА 10

### КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С РАВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

#### § 1. Нахождение узлов

Большое удобство квадратурных формул с равными коэффициентами

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx c_n \sum_{k=1}^n f(x_k) \quad (10.1.1)$$

при численных и, особенно, при графических расчетах, привлекло к ним внимание многих ученых и побудило их заняться разработкой теории этих формул.

Формула (10.1.1) содержит  $n+1$  параметров  $c_n, x_1, \dots, x_n$  и выбором их можно надеяться сделать равенство точным для всевозможных многочленов степени  $\leq n$ , или, что равносильно, для степеней  $x$  от нулевой до  $x^n$  включительно \*).

Требование точного выполнения (10.1.1) для  $f \equiv 1$  доставит следующее уравнение

$$\int_a^b p dx = c_n \cdot n,$$

откуда может быть найден коэффициент  $c_n$ :

$$c_n = \frac{1}{n} \int_a^b p dx. \quad (10.1.2)$$

Если, кроме того, потребовать, чтобы (10.1.1) точно выполнялось для  $f = x, x^2, \dots, x^n$ , то получим для нахождения узлов  $x_k$

---

\*) Квадратурные формулы с равными коэффициентами часто называют *формулами Чебышёва* в связи с тем, что он впервые в общем случае рассмотрел задачу о построении таких формул.



Они позволяют последовательно найти все коэффициенты  $A_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) по известным значениям  $s_k$  из (10.1.3). По  $A_i$  может быть построен многочлен  $\omega(x)$ . Определяя же его корни  $x_k$ , мы найдем узлы квадратурной формулы (10.1.1). По смыслу изучаемой задачи,  $x_k$  должны быть различными, действительными и принадлежать отрезку интегрирования. Возможность построения формулы (10.1.1), верной для многочленов степени  $n$ , поэтому определяется тем, что будут или не будут удовлетворять перечисленным требованиям корни многочлена  $\omega(x)$ , коэффициенты  $A_i$  которого найдены указанным путем.

Можно построить другое простое выражение для многочлена (10.1.4), если воспользоваться несложными соображениями из теории аналитических функций. Применим квадратурную формулу (10.1.1) к дробной функции  $f(x) = \frac{1}{z-x}$ , являющейся ядром интеграла Коши, и рассмотрим остаток квадратуры:

$$R\left(\frac{1}{z-x}\right) = \int_a^b \frac{p(x)}{z-x} dx - c_n \sum_{k=1}^n \frac{1}{z-x_k} = \int_a^b \frac{p(x)}{z-x} dx - c_n \frac{\omega'(z)}{\omega(z)}.$$

Найдем разложение остатка по степеням  $z^{-1}$  при  $z$  больших по модулю. Возьмем для этой цели число  $\rho$  настолько большим, чтобы

Поэтому, если  $|x| > |x_i|$  ( $i = 1, \dots, n$ ), то будет верным приводимое ниже разложение

$$\frac{\omega'(x)}{\omega(x)} = \sum_{i=1}^n \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x_i^v}{x^{v+1}} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{s_v}{x^{v+1}}, \quad s_v = \sum_{i=1}^n x_i^v. \quad (b)$$

Умножив обе части последнего равенства на  $\omega(x)$  и заменив  $\omega(x)$  его представлением (10.1.5), придем к равенству

$$\begin{aligned} nx^{n-1} + (n-1)A_1x^{n-2} + (n-2)A_2x^{n-3} + \dots + A_{n-1} = \\ = (x^n + A_1x^{n-1} + \dots) \sum_{v=0}^{\infty} \frac{s_v}{x^{v+1}}. \end{aligned}$$

Если сравнить здесь коэффициенты при  $x^{n-2}$ ,  $x^{n-3}$ , ..., то и получаются соотношения Ньютона

$$\begin{aligned} s_1 + A_1 &= 0, \\ s_2 + A_1s_1 + 2A_2 &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ s_n + A_1s_{n-1} + \dots + nA_n &= 0, \\ s_{n+m} + A_1s_{n+m-1} + \dots + A_ns_m &= 0 \quad (m = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

отрезок интегрирования  $[a, b]$ , а с ним и узлы  $x_k$ , лежали в круге  $|z| \leq \rho$ . Тогда при  $|z| > \rho$

$$\frac{1}{z-x} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^v}{z^{v+1}}$$

и

$$\int_a^b \frac{p(x)}{z-x} dx = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{z^{v+1}} \int_a^b p(x) x^v dx = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\mu_v}{z^{v+1}}.$$

Здесь через  $\mu_v$  обозначен момент порядка  $v$  весовой функции  $p$ . Аналогично

$$\frac{1}{z-x_k} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x_k^v}{z^{v+1}}$$

и

$$\frac{\omega'(z)}{\omega(z)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z-x_k} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{s_v}{z^{v+1}}, \quad s_v = x_1^v + \dots + x_n^v,$$

$$R\left(\frac{1}{z-x}\right) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\mu_v - c_n s_v}{z^{v+1}}. \quad (10.1.7)$$

Мы считаем, что формула (10.1.1) является точной для всех степеней  $x$  от нулевой до  $x^n$ . Поэтому (см. (10.1.2) и (10.1.3))  $\mu_v - c_n s_v = 0$  ( $v = 0, 1, \dots, n$ ) и в последнем разложении первый отличный от нуля член будет содержать  $\frac{1}{z}$  по крайней мере в степени  $n+2$ :

$$\int_a^b \frac{p(x)}{z-x} dx - c_n \frac{\omega'(z)}{\omega(z)} = \sum_{v=n+1}^{\infty} \frac{\mu_v - c_n s_v}{z^{v+1}}.$$

Интегрирование по  $z$  и простые преобразования приведут к равенству:

$$\omega(z) e^{\sum_{v=n+1}^{\infty} \frac{s_v - c_n^{-1} \mu_v}{v z^v}} = A e^{c_n^{-1} \int_a^b p(x) \ln(z-x) dx}, \quad (10.1.8)$$

в котором  $A$  есть некоторая постоянная величина.

Так как разложение  $\exp \sum_{v=n+1}^{\infty} \frac{s_v - c_n^{-1} \mu_v}{v z^v}$  по степеням  $\frac{1}{z}$  будет отличаться от 1 только степенями  $z$ , более низкими чем  $z^{-n}$ , ясно,

что, если разложить правую часть равенства (10.1.8) по степеням  $\frac{1}{z}$  при больших  $|z|$ , то целая часть такого разложения будет совпадать с  $\omega(z)$ :

$$\omega(z) = \text{цел. ч. } Ae^{c_n^{-1} \int_a^b p(x) \ln(z-x) dx} \quad (10.1.9)$$

Постоянный множитель  $A$  легко может быть найден, если принять во внимание, что старший член в  $\omega(z)$  есть  $z^n$ . Мы не станем останавливаться на этом частном вопросе, так как множитель  $A$  не оказывает влияния на корни правой части (10.1.9).

Как говорилось выше, построить формулу (10.1.1), верную для многочленов степени  $\leq n$ , можно в том и только в том случае, когда корни многочлена  $\omega(z)$  действительны, различны и принадлежат отрезку  $[a, b]$  \*).

Многочлен  $\omega(z)$ , очевидно, вполне определяется весовой функцией  $p(x)$  и представляет интерес выяснить, при каких  $p(x)$  и каких значениях  $n$  корни  $\omega(x)$  будут обладать указанными свойствами. Решение этой задачи в общем случае, по-видимому, не известно. Ниже будут рассмотрены два частных случая весовой функции  $p(x)$ , когда может быть получен исчерпывающий ответ.

## § 2. Единственность квадратурной формулы наивысшей алгебраической степени точности с равными коэффициентами

В главе 7, при рассмотрении квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности, для весовой функции  $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , была построена квадратурная формула (7.3.2)

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\cos \frac{2k-1}{2n} \pi\right),$$

точная для многочленов степени  $\leq 2n-1$ . Число узлов  $n$  может быть любым. Весьма замечательно, что коэффициенты этой формулы одинаковы.

В связи с указанной формулой возникает следующий естественный вопрос: существуют ли на  $[-1, 1]$  весовые функции  $p(x)$ , отличные от

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  и такие, что соответствующие им квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности также будут иметь одинаковые коэффициенты?

\*) Интегрируемая функция  $f$  считается заданной только на  $[a, b]$ , а потому квадратурные формулы, узлы которых лежат вне  $[a, b]$ , не рассматриваются.

Отрицательный ответ в этой задаче впервые был дан К. А. Поссе и после него Н. Я. Сониным.

Докажем сейчас более общую теорему, принадлежащую Я. Л. Герониму, из которой теорема К. А. Поссе сразу следует.

Пусть на отрезке  $[-1, 1]$  задана положительная почти везде весовая функция  $p(x)$ . Возьмем соответствующую ей систему ортогональных многочленов  $\omega_n(x) = x^n + \beta_n x^{n-1} + \gamma_n x^{n-2} + \dots$  ( $n = 0, 1, \dots$ ). Обозначим через  $x_k^{(n)}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) корни  $\omega_n(x)$  и рассмотрим квадратурную формулу с равными коэффициентами, узлы которой совпадают с  $x_k^{(n)}$

$$\int_{-1}^1 p(x) f(x) dx \approx c_n \sum_{k=1}^n f(x_k^{(n)}). \quad (10.2.1)$$

**Теорема 1.** Если для любого значения  $n = 1, 2, \dots$  существует постоянная  $c_n$ , такая, что формула (10.2.1) будет точной для \*)  $f = 1$ ,

$f = x$ ,  $f = x^2$ , то вес  $p(x)$  совпадает с весом Чебышёва  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

**Доказательство.** Без ограничения общности можно считать

$$\mu_0 = \int_{-1}^1 p dx = 1.$$

Требование, чтобы квадратурная формула давала точный результат для  $f = 1$ , определяет множитель  $c_n$ :

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = c_n \cdot n,$$

$$c_n = \frac{1}{n}.$$

Полагая в (10.2.1) последовательно  $f = x$  и  $f = x^2$ , придем к двум следующим равенствам:

$$\mu_1 = \int_{-1}^1 px dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^{(n)} = -\frac{1}{n} \beta_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\begin{aligned} \mu_2 = \int_{-1}^1 px^2 dx &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [x_k^{(n)}]^2 = \frac{1}{n} \left\{ \left[ \sum_{k=1}^n x_k^{(n)} \right]^2 - 2 \sum_{k < l} x_k^{(n)} x_l^{(n)} \right\} = \\ &= \frac{1}{n} (\beta_n^2 - 2\gamma_n) \quad (n = 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Отсюда можно найти два первых коэффициента  $\omega_n(x)$ :

$$\beta_n = -n\mu_1, \quad \gamma_n = \frac{1}{2} [\beta_n^2 - n\mu_2] = \frac{n}{2} [n\mu_1^2 - \mu_2] \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \gamma_1 = 0.$$

\*) Точное выполнение равенства (10.2.1) для  $f = x^2$  необходимо лишь при  $n > 1$ .



В § 1 главы 2 было показано, что между ортогональными многочленами трех смежных номеров существует рекуррентное соотношение. Если его записать для нормированных многочленов  $P_n(x)$ , то оно имеет форму (2.1.10). Рассматриваемые нами многочлены  $\omega_n(x)$  отличаются только численными множителями от многочленов  $P_n(x)$  тех же индексов. Если принять во внимание, что старший член в  $\omega_1(x)$  имеет коэффициентом единицу, то рекуррентное соотношение для  $\omega_n(x)$  можно записать в такой форме

$$x\omega_0(x) = \omega_1(x) + \alpha_0, \quad x\omega_n(x) = \omega_{n+1}(x) + \alpha_n\omega_n(x) + \lambda_n\omega_{n-1}(x) \\ (n = 1, 2, \dots).$$

Зная  $\beta_n$  и  $\gamma_n$ , можно найти коэффициенты  $\alpha_n$  и  $\lambda_n$ . Действительно, сравнивая между собой коэффициенты при  $x^n$  в левой и правой частях последнего равенства, найдем

$$\beta_n = \beta_{n+1} + \alpha_n, \quad \alpha_n = \beta_n - \beta_{n+1} = -n\mu_1 + (n+1)\mu_1 = \mu_1.$$

Все  $\alpha_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) имеют одинаковое значение  $\mu_1$ . Его, для простоты, обозначим через  $\alpha$ :  $\alpha_n = \alpha$  ( $n = 0, 1, \dots$ ).

Сравнение коэффициентов при  $x^{n-1}$  в тех же равенствах дает:

$$\gamma_n = \gamma_{n+1} + \alpha_n\beta_n + \lambda_n, \quad \lambda_n = \gamma_n - \gamma_{n+1} - \alpha_n\beta_n.$$

Простые вычисления дают следующие значения для  $\lambda_n$ , при записи которых была введена новая величина  $\sigma$ :

$$\lambda_1 = \mu_2 - \mu_1 = 0,5\sigma^2, \quad \lambda_n = 0,5[\mu_2 - \mu_1] = 0,25\sigma^2 \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Таким образом, рекуррентные соотношения для многочленов  $\omega_n$  будут:

$$\left. \begin{aligned} \omega_0(x) &= 1, \quad \omega_1(x) = x - \alpha, \\ x\omega_n(x) &= \omega_{n+1}(x) + \alpha\omega_n(x) + 0,25\sigma^2\omega_{n-1}(x) \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (10.2.2)$$

Вспомним теперь (см. гл. 2, § 3), что для многочленов Чебышёва первого рода  $T_n(x) = \cos(n \arccos x) = 2^{n-1}x^n + \dots$  рекуррентные соотношения имеют форму:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \quad T_1(x) = x, \\ xT_n(x) &= 0,5T_{n+1}(x) + 0,5T_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Приведем старший коэффициент в  $T_n(x)$  к единице и рассмотрим многочлены  $\tilde{T}_n(x) = 2^{-n+1}T_n(x)$ ,  $\tilde{T}_0 = T_0$ . Рекуррентные соотношения для  $\tilde{T}_n(x)$  будут:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_0(x) &= 1, \quad \tilde{T}_1(x) = x, \\ x\tilde{T}_n(x) &= \tilde{T}_{n+1}(x) + 0,25\tilde{T}_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Наконец, если аргумент  $x$  заменить на  $\frac{x-\alpha}{\sigma}$  и ввести многочлены  $T_n^*(x) = \sigma^n \tilde{T}_n\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right)$ , то для них получаются следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} T_0^*(x) &= 1, \quad T_1^*(x) = x - \alpha, \\ (x - \alpha)T_n^*(x) &= T_{n+1}^*(x) + 0,25\sigma^2 T_{n-1}^*(x). \end{aligned}$$

Они совпадают с (10.2.2) и так как последние вполне определяют  $\omega_n(x)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ), то

$$\omega_n(x) = T_n^*(x) = \sigma^n \tilde{T}_n\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right) = \frac{\sigma^n}{2^{n-1}} T_n\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Корни многочленов  $T_n(x)$  равны  $\cos \frac{2k-1}{2n} \pi$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Они лежат внутри отрезка  $[-1, 1]$  и расположены там всюду плотно. Отсюда следует, что корни  $\omega_n(x)$  лежат на отрезке  $[\alpha - \sigma, \alpha + \sigma]$  и при этом всюду плотно.

С другой стороны, в гл. 2 было показано, что корни многочленов любой ортогональной системы с положительной весовой функцией всегда лежат внутри отрезка ортогональности. В теории ортогональных многочленов известно также, что они расположены на отрезке ортогональности всюду плотно<sup>\*</sup>). Поэтому корни рассматриваемых многочленов  $\omega_n(x)$  принадлежат  $[-1, 1]$  и образуют там всюду плотное множество.

Должно, следовательно, быть  $\alpha = 0$ ,  $\sigma = 1$  и

$$\omega_0(x) = T_0(x) = 1, \quad \omega_n(x) = 2^{-n+1} T_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Многочлены  $T_n(x)$  образуют на  $[-1, +1]$  ортогональную систему по весу  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  и для доказательства теоремы нам осталось только убедиться в том, что ортогональные многочлены, в случае конечного отрезка ортогональности, определяют соответствующую им весовую функцию, с точностью до множителя и до значений на множестве точек меры нуль, однозначно.

В самом деле, пусть  $p(x)$  и  $p_1(x)$  — две весовые функции, относительно которых многочлены  $\omega_n(x)$  ортогональны на  $[-1, 1]$ . Умножая  $p(x)$  и  $p_1(x)$ , если это потребуется, на постоянные множители, можно считать, что

$$\int_{-1}^1 p \, dx = \int_{-1}^1 p_1 \, dx = 1. \quad \text{Ввиду ортогональности } \omega_0(x) \text{ и } \omega_n(x) \quad (n > 0),$$

должно быть

$$\int_{-1}^1 p \omega_n \, dx = 0, \quad \int_{-1}^1 p_1 \omega_n \, dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Отсюда сразу же следует, что для разности  $p - p_1 = \varphi$  должны выполняться равенства

$$\int_{-1}^1 \varphi \omega_n \, dx = 0 \quad (n = 0, 1, \dots).$$

---

<sup>\*</sup>) Известна более точная теорема: если отрезок ортогональности есть  $[-1, 1]$  и весовая функция  $p(x)$  суммируема, почти везде положительна, то предельная функция распределения нулей ортогональных многочленов совпадает с функцией распределения Чебышёва

$$\pi^{-1} \int_{-1}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$



Коэффициенты многочлена  $\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$  должны быть найдены из системы (10.1.6), которая в рассматриваемом случае имеет форму:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 0, \\ \frac{n}{3} + 2A_2 &= 0, \\ A_3 &= 0, \\ \frac{n}{5} + \frac{n}{3}A_2 + 4A_4 &= 0, \\ A_5 &= 0, \\ \frac{n}{7} + \frac{n}{5}A_2 + \frac{n}{3}A_4 + 6A_6 &= 0, \\ A_7 &= 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (10.3.3)$$

Все  $A_k$  нечетных номеров равны нулю и в многочлен  $\omega(x)$  будут входить либо только четные, либо только нечетные степени  $x$ :

$$\omega(x) = x^n + A_2 x^{n-2} + A_4 x^{n-4} + \dots$$

Корни  $\omega(x)$ , являющиеся узлами формулы (10.3.1), располагаются на отрезке  $[-1, 1]$  симметрично относительно точки  $x = 0$ . В частности, если  $n$  есть число нечетное, то один из корней обязательно равен нулю.

Попутно отметим следующий факт. Пусть  $n$  — число четное:  $n = 2m$ . Соответствующие значения  $x_k$  должны удовлетворять системе

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= 0, \\ \dots \dots \dots \\ x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n &= \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

Ввиду же того, что  $n+1 = 2m+1$  есть число нечетное, а  $x_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) расположены симметрично относительно  $x = 0$ , будет выполняться также равенство

$$x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \dots + x_n^{n+1} = 0,$$

откуда вытекает, что формула (10.3.1) будет точной не только для многочленов степени  $n$ , но также для многочленов степени  $n+1$ .

Построим теперь формулы (10.3.1) для нескольких первых значений  $n$ .

При  $n = 1$  многочлен  $\omega(x) = x$  и  $c_1 = 2$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2f(0)$$

Когда  $n=2$ , коэффициент  $c_2=1$  и система уравнений (10.3.3) для определения  $A_1, A_2$  есть

$$A_1=0, \quad \frac{2}{3} + 2A_2=0, \quad A_2=-\frac{1}{3},$$

$$\omega(x)=x^2-\frac{1}{3}.$$

Откуда

$$x_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2=\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-3^{-\frac{1}{2}}\right) + f\left(3^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Пусть  $n=3$ .  $c_3=\frac{2}{3}$ . Уравнения для  $A_1, A_2, A_3$  будут

$$A_1=0, \quad 1+2A_2=0, \quad A_3=0,$$

$$\omega(x)=x^3-\frac{1}{2}x.$$

Узлы формулы, следовательно, таковы:

$$x_1=-\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_2=0, \quad x_3=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

и

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2}{3} \left[ f\left(-2^{-\frac{1}{2}}\right) + f(0) + f\left(2^{-\frac{1}{2}}\right) \right].$$

При  $n=4$  имеем  $c_4=\frac{1}{2}$  и систему для  $A_k$ :

$$A_1=0, \quad \frac{4}{3} + 2A_2=0, \quad A_3=0, \quad \frac{4}{5} + \frac{4}{3}A_2 + 4A_4=0.$$

Отсюда

$$A_2=-\frac{2}{3}, \quad A_4=\frac{1}{45},$$

$$\omega(x)=x^4-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{45}.$$

Корни  $\omega(x)$  суть:

$$x_1=-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}}}, \quad x_2=-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{3\sqrt{5}}},$$

$$x_3=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{3\sqrt{5}}}, \quad x_4=\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}}}.$$

Продолжая такие вычисления дальше, получим при

$$n=5 \quad \omega(x) = x^5 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{7}{72}x,$$

$$n=6 \quad \omega(x) = x^6 - x^4 + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{105},$$

$$n=7 \quad \omega(x) = x^7 - \frac{7}{6}x^5 + \frac{119}{360}x^3 - \frac{149}{6480}x,$$

$$n=9 \quad \omega(x) = x^9 - \frac{3}{2}x^7 + \frac{27}{40}x^5 - \frac{57}{560}x^3 + \frac{53}{22400}x.$$

При  $n=8$  среди корней многочлена  $\omega(x)$  будут комплексные числа и формула Чебышёва (10.3.1) с действительными узлами не может быть построена.

Ниже приведена таблица абсцисс формулы (10.3.1)

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]$$

для  $n = 1(1)7, 9$ .

$n = 1$	$n = 6$
$x_1 = 0$	$x_6 = -x_1 = 0,866 \ 247$
$n = 2$	$n = 7$
$x_2 = -x_1 = 0,577 \ 350$	$x_5 = -x_2 = 0,422 \ 519$
$n = 3$	$x_4 = -x_3 = 0,266 \ 635$
$x_3 = -x_1 = 0,707 \ 107, x_2 = 0$	$x_7 = -x_1 = 0,883 \ 862$
$n = 4$	$x_6 = -x_2 = 0,529 \ 657$
$x_4 = -x_1 = 0,794 \ 654$	$x_5 = -x_3 = 0,323 \ 912$
$x_3 = -x_2 = 0,187 \ 592$	$x_4 = 0$
$n = 5$	$n = 9$
$x_5 = -x_1 = 0,832 \ 497$	$x_9 = -x_1 = 0,911 \ 589$
$x_4 = -x_2 = 0,374 \ 541$	$x_8 = -x_2 = 0,601 \ 019$
$x_3 = 0$	$x_7 = -x_3 = 0,528 \ 762$
	$x_6 = -x_4 = 0,167 \ 906$
	$x_5 = 0$

Вычисление узлов было продолжено для нескольких значений  $n$ , больших 9, но каждый раз оказывалось, что некоторые из корней  $\omega(x)$  были комплексными и формула Чебышёва (10.3.1) не могла быть построена. Однако в общем виде вопрос о возможности или невозможности построения формулы (10.3.1) для  $n > 9$  оставался открытым до работ С. Н. Бернштейна, в которых он путем остроумных оценок, относящихся к более общим вопросам, показал, что построить формулу Чебышёва (10.3.1) для  $n > 9$ , верную для многочленов степени  $n$ , невозможно. Ниже будут изложены с некоторыми упрощениями его исследования.

Докажем предварительно несколько лемм.

**Лемма 1.** Пусть формула

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \quad (10.3.4)$$

точна для всякого многочлена степени  $2m-1$  при  $m < n$ . Обозначим через  $\xi_m$  наибольший корень многочлена Лежандра  $P_m(x)$  степени  $m$ . Тогда, если считать узлы  $x_k$  перенумерованными в порядке возрастания, будет  $x_n > \xi_m$ .

**Доказательство.** Положим

$$f(x) = \frac{P_m^2(x)}{x - \xi_m}.$$

Многочлен  $\frac{P_m(x)}{x - \xi_m}$  имеет степень  $m-1$  и поэтому он наверное ортогонален на  $[-1, 1]$  к  $P_m(x)$ , так что

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0.$$

С другой стороны, степень  $f(x)$  равна  $2m-1$  и для  $f(x)$  равенство (10.3.4) должно быть точным. Стало быть

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) = 0.$$

Многочлен  $f = \frac{P_m^2}{x - \xi_m}$  имеет  $m$  различных корней и не все слагаемые последней суммы равны нулю. Среди них должны быть как положительные, так и отрицательные. Но  $f(x)$  принимает положительные значения только при  $x > \xi_m$ . Значит, найдется такой узел  $x_k$ , что  $x_k > \xi_m$ . А тогда и для наибольшего узла должно быть  $x_n > \xi_m$ .

В последующих рассуждениях многое будет основано на сличении (10.3.4) с квадратурной гауссовой формулой наивысшей степени точности с  $m$  узлами

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &\approx \sum_{i=1}^m A_i f(\xi_i), \\ P_m(\xi_i) &= 0 \quad (i = 1, \dots, m), \quad A_i = \frac{2}{(1 - \xi_i^2) [P'_m(\xi_i)]^2}. \end{aligned} \right\} \quad (10.3.5)$$

**Лемма 2.** Если формула (10.3.4) верна для всяких многочленов степени  $2m-1$ , где  $m < n$ , то

$$A_m > \frac{2}{n}. \quad (10.3.6)$$

**Доказательство.** Пусть

$$f(x) = \left[ \frac{P_m(x)}{(x - \xi_m) P'_m(\xi_m)} \right]^2.$$

В точке  $\xi_m$   $f$  принимает значение 1, в прочих же узлах  $\xi_i$ ,  $i < m$ ,  $f$  обращается в нуль. Поэтому квадратурная сумма (10.3.5) для многочлена  $f$  приводится к одному лишь слагаемому  $A_m f(\xi_m) = A_m$ .

Степень  $f$  равна  $2m - 2$  и обе формулы (10.3.4) и (10.3.5) должны для  $\int_{-1}^1 f dx$  дать точное значение. Поэтому, наверное, будет

$$\frac{2}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = A_m.$$

Ввиду того, что  $f(x) \geq 0$  при всяких  $x$ , отсюда, в частности, вытекает

$$\frac{2}{n} f(x_n) \leq A_m, \quad (10.3.7)$$

$$f(x) = [P'_m(\xi_m)]^{-1} (x - \xi_1)^2 \dots (x - \xi_{m-1})^2.$$

Как сразу же видно из написанного выражения для  $f(x)$ , при  $x \geq \xi_m$   $f$  есть возрастающая функция  $x$  и, ввиду  $x_n > \xi_m$ , будет  $f(x_k) > f(\xi_m) = 1$ , что, совместно с (10.3.7), доказывает утверждение леммы.

Чтобы оценить коэффициент  $A_m = \frac{2}{(1 - \xi_m^2) [P'_m(\xi_m)]^2}$  формулы (10.3.5), нам необходимо сейчас установить вспомогательные неравенства для  $\xi_m$  и  $P'_m(\xi_m)$ .

**Лемма 3.** При любом значении  $m$  для наибольшего корня  $\xi_m$  многочлена  $P_m(x)$  выполняется неравенство:

$$1 - \xi_m < \frac{3}{m(m+1)}. \quad (10.3.8)$$

**Доказательство.** Будем исходить из дифференциального уравнения для  $P_m(x)$

$$\frac{d}{dx} [(1 - x^2) P'_m(x)] + m(m+1) P_m(x) = 0.$$

Если проинтегрировать обе части равенства в границах от  $\xi_m$  до 1, то получим

$$(1 - \xi_m^2) P'_m(\xi_m) = m(m+1) \int_{\xi_m}^1 P_m(x) dx.$$

Разложим многочлен  $P_m(x)$ , стоящий под знаком интеграла, по степеням  $x - \xi_m$

$$P_m(x) = \sum_{i=1}^m \frac{(x - \xi_m)^i}{i!} P_m^{(i)}(\xi_m)$$



и выполним интегрирование

$$(1 - \xi_m^2) P'_m(\xi_m) = m(m+1) \sum_{i=1}^m \frac{(1 - \xi_m)^{i+1}}{(i+1)!} P_m^{(i)}(\xi_m).$$

Между каждыми двумя соседними корнями  $\xi_j, \xi_{j+1}$  многочлена  $P_m(x)$  лежит корень производной  $P'_m(x)$ . Таких корней  $m-1$  штук и никаких других корней  $P'_m(x)$  не имеет. Между ними будут лежать все  $m-2$  корня второй производной и т. д. и, вообще говоря, все корни производной  $P_m^{(i)}(x)$  любого порядка  $i$  находятся между  $\xi_1$  и  $\xi_m$  и, стало быть, лежат слева от  $\xi_m$ . Поэтому  $P_m^{(i)}(\xi_m) > 0$  и все слагаемые суммы, стоящей в правой части последнего равенства, положительны. Для получения оценки  $\xi_m$  с нужной нам степенью точности, достаточно в сумме сохранить лишь два первых члена и отбросить остальные. Если, кроме того, обе части сократить предварительно на  $1 - \xi_m$ , то получим такое неравенство

$$(1 + \xi_m) P'_m(\xi_m) > m(m+1) \left[ \frac{1}{2} (1 - \xi_m) P'_m(\xi_m) + \frac{1}{6} (1 - \xi_m)^2 P''_m(\xi_m) \right].$$

Значение  $P''_m(\xi_m)$  легко находится из уравнения

$$(1 - x^2) P''_m - 2x P'_m + m(m+1) P_m = 0,$$

для чего достаточно положить в нем  $x = \xi_m$ :

$$P''_m(\xi_m) = \frac{2\xi_m}{1 - \xi_m^2} P'_m(\xi_m). \quad (10.3.9)$$

Подстановка этого значения в неравенство и сокращение на  $P'_m(\xi_m)$  дает:

$$1 + \xi_m > m(m+1) \left[ \frac{1}{2} (1 - \xi_m) + \frac{1}{3} \cdot \frac{\xi_m (1 - \xi_m)}{1 + \xi_m} \right].$$

Неравенство усилится, если во втором члене, стоящем в скобках, знаменатель  $1 + \xi_m$  заменить большей величиной 2:

$$1 + \xi_m > m(m+1) \left[ \frac{1}{2} (1 - \xi_m) + \frac{1}{6} \xi_m (1 - \xi_m) \right].$$

Отсюда, обозначая для сокращения  $m(m+1) = \lambda$ , получим:

$$\lambda \xi_m^2 + 2(3 + \lambda) \xi_m + 6 - 3\lambda > 0. \quad (10.3.10)$$

Образует уравнение

$$\lambda z^2 + 2(3 + \lambda) z + 6 - 3\lambda = 0,$$

$$z = \frac{\pm \sqrt{4\lambda^2 + 9} - 3 - \lambda}{\lambda}.$$

Мы должны избрать положительное значение  $z$ . Если  $\xi_m$  удовлетворяет неравенству (10.3.10), то  $\xi_m$  должно быть взято больше  $z$

$$\xi_m > \frac{\sqrt{4\lambda^2 + 9} - 3 - \lambda}{\lambda}.$$

Отбросим слагаемое 9 под знаком корня:

$$\xi_m > 1 - \frac{3}{\lambda} = 1 - \frac{3}{m(m+1)}, \quad 1 - \xi_m < \frac{3}{m(m+1)}.$$

Этим лемма 3 доказана.

**Лемма 4.** Для значения производной  $P'_m(\xi_m)$  многочлена Лежандра  $P_m(x)$  в наибольшем корне  $x = \xi_m$  выполняется неравенство:

$$P'_m(\xi_m) > \frac{2}{3(1-\xi_m)} \left[ 1 - \frac{\Gamma(m+4)}{288 \Gamma(m-2)} (1-\xi_m)^3 \right]. \quad (10.3.11)$$

**Доказательство.** Установим сначала нужное соотношение между корнем  $\xi_m$  и  $P'_m(\xi_m)$ . Воспользовавшись тейлоровой формулой с остатком в виде интеграла, разложим  $P_m(x)$  по степеням  $x - \xi_m$ , ограничив себя только тремя членами формулы:

$$P_m(x) = P'_m(\xi_m)(x - \xi_m) + \frac{1}{2} P''_m(\xi_m)(x - \xi_m)^2 + \frac{1}{2} \int_{\xi_m}^x P'''_m(t)(x - t)^2 dt.$$

Положим здесь  $x = 1$  и примем во внимание, что  $P_m(1) = 1$ :

$$1 = P'_m(\xi_m)(1 - \xi_m) + \frac{1}{2} P''_m(\xi_m)(1 - \xi_m)^2 + \frac{1}{2} \int_{\xi_m}^1 P'''_m(t)(1 - t)^2 dt. \quad (10.3.12)$$

Рассмотрим  $P'''_m(t)$ . При доказательстве леммы 3 выяснилось, что все корни  $P''_m$  лежат левее  $\xi_m$ . Поэтому на отрезке  $[\xi_m, 1]$   $P'''_m(x)$  будет монотонной возрастающей функцией и своего наибольшего значения достигнет при  $x = 1$ . Величину  $P'''_m(1)$  легко найти при помощи дифференциального уравнения

$$(1 - x^2) P''_m(x) - 2x P'_m(x) + m(m+1) P_m(x) = 0.$$

Положив здесь  $x = 1$ , найдем  $P'_m(1) = \frac{m(m+1)}{2}$ . Дифференцируем уравнение:

$$(1 - x^2) P'''_m(x) - 4x P''_m(x) + (m+2)(m-1) P'_m(x) = 0$$

и вновь положим  $x = 1$

$$P''_m(1) = \frac{(m+2)(m-1)}{4} P'_m(1) = \frac{(m+2)(m+1)m(m-1)}{8}.$$

Дифференцируем вторично

$$(1 - x^2) P^{(4)}_m(x) - 6x P'''_m(x) + (m+3)(m-2) P''_m(x) = 0$$

и опять подставим  $x = 1$ :

$$P'''_m(1) = \frac{(m+3)(m-2)}{6} P''_m(1) = \frac{(m+3)(m+2) \dots (m-2)}{48} = \frac{\Gamma(m+4)}{48 \Gamma(m-2)}.$$

Заменив в (10.3.12)  $P_m''(\xi_m)$  ее выражением (10.3.9) и  $P_m'''(t)$  найденным наибольшим значением на  $[\xi_m, 1]$ , придем к следующему неравенству:

$$P_m'(\xi_m)(1 - \xi_m) \left[ 1 + \frac{\xi_m}{1 + \xi_m} \right] + \frac{\Gamma(m+4)}{48\Gamma(m-2)} \frac{(1 - \xi_m)^3}{3!} > 1.$$

Отсюда, ввиду  $\frac{\xi_m}{1 + \xi_m} < \frac{1}{2}$ , вытекает (10.3.11).

Теперь легко находится оценка для  $A_m = \frac{2}{(1 - \xi_m^2)[P_m'(\xi_m)]^2}$ .

Заменим в знаменателе  $P_m'(\xi_m)$  меньшей величиной, стоящей справа в (10.3.11)

$$A_m < \frac{9(1 - \xi_m)}{2(1 + \xi_m)} \left[ 1 - \frac{\Gamma(m+4)}{288\Gamma(m-2)} (1 - \xi_m)^3 \right]^{-2}.$$

Достаточным будет более грубое неравенство, которое легко отсюда получается.  $A_m$  будем рассматривать для  $m \geq 6$ . С увеличением  $m$  величина  $\xi_m$  возрастает и, так как  $\xi_6 = 0,93246 \dots$ , мы вправе считать  $1 + \frac{\xi_m}{3} > 1,93$ . Заменим, кроме того, всюду  $1 - \xi_m$  большим числом  $\frac{3}{m(m+1)}$ .

Оценим теперь выражение, стоящее в фигурных скобках

$$(m+3)(m-2) = m(m+1) - 6 < m(m+1),$$

$$(m+2)(m-1) = m(m+1) - 2 < m(m+1),$$

$$\frac{\Gamma(m+4)}{\Gamma(m-2)} = (m+3)(m+2)(m+1)m(m-1)(m-2) < m^3(m+1)^3,$$

$$1 - \frac{\Gamma(m+4)}{288\Gamma(m-2)} (1 - \xi_m)^3 > 1 - \frac{m^3(m+1)^3}{288} \frac{3^3}{m^3(m+1)^3} = \frac{29}{32},$$

$$A_m < \frac{27 \cdot 32^2}{2 \cdot 1,93 \cdot 29^2} \cdot \frac{1}{m(m+1)} \approx \frac{8,517}{m(m+1)}. \quad (10.3.13)$$

**Теорема 2.** При  $n \geq 10$  не существует формулы вида (10.3.4), верной для многочленов степени  $n$ .

**Доказательство.** Будем рассматривать те значения  $n$ , при которых формула (10.3.4) существует. Предположим, что  $n$  есть число нечетное:  $n = 2m - 1$ . Так как  $m = 0,5(n+1)$  и  $m(m+1) = 0,25(n+1)(n+3)$ , для

$A_m$  должно выполняться неравенство  $A_m = \frac{4 \cdot 8,517}{(n+1)(n+3)}$ . Ввиду леммы 2,

должно также быть  $\frac{4 \cdot 8,517}{(n+1)(n+3)} > \frac{2}{n}$  или  $n^2 - 13,034n + 3 < 0$ ,  $n < 13$ .

Таким образом, при  $n \geq 13$  формула (10.3.4) не существует. Но при  $n = 11$  она также не существует, так как тогда  $m = 6$ ,  $A_6 = 0,173 \dots$ ,  $\frac{2}{11} = 0,1818$

и неравенство  $\frac{2}{11} < A_6$  не выполняется.

Допустим теперь, что число узлов  $n$  четное. Тогда формула (10.3.4) должна быть точной для многочленов степени  $n+1$ . Положим  $n+1 = 2m-1$ ,

$m = \frac{n+2}{2}$ . Ввиду (10.3.13) и (10.3.6), будем иметь  $\frac{4 \cdot 8,517}{(n+2)(n+4)} > \frac{2}{n}$ , откуда  $n < 11$ . Значит, при  $n > 10$  формула (10.3.4) не существует. При  $n = 10$  она также не существует, так как неравенство  $A_6 = 0,173 \dots > \frac{2}{10} = 0,2$ , очевидно, не верно.

## Л и т е р а т у р а

Чебышёв П. Л., О квадратурах, Полн. собр. соч., т. III, Изд. АН СССР, 1948, 49—62.

Поссе К. А., Sur les quadratures, Nouv. Ann. de Math. 26 (1875), 49—62.

Сонин Н. Я., О приближенном вычислении определенных интегралов и входящих при этом вычислении целых функций, Варшавские университетские известия, 1887, 1—76.

Геронимус Я. Л., О формулах квадратур Гаусса и Чебышёва, ДАН СССР 51 (1946), 655—658.

Кузьмин Р. О., О распределении корней полиномов, связанных с квадратурами Чебышёва, Изв. АН СССР (1938), 427—444.

Геронимус Я. Л., Теория ортогональных многочленов, М. — Л., Гостехиздат, 1950.

Бернштейн С. Н., 1) О формулах квадратур Котеса и Чебышёва, 2) Об одной системе неопределенных уравнений, Собр. соч. т. II, стр. 200—204 и 236—242.

Salzer H. E., Equally weighted quadrature formulas over semiinfinite and infinite intervals, Journ. Math. and Phys. 34, № 1 (1955), 54—63.

## ГЛАВА 11

### КВАДРАТУРЫ С НАИМЕНЬШЕЙ ОЦЕНКОЙ ОСТАТКА

#### § 1. О задаче минимизации остатка квадратуры

В главе 6 мы ознакомились с квадратурами, имеющими наивысшую алгебраическую степень точности. Можно было заранее предвидеть, что такие квадратуры дадут малую погрешность, если интегрируемая функция  $f$  допускает хорошее приближение ее многочленами невысоких степеней, в частности, если  $f$  будет аналитической функцией в достаточно широкой области около отрезка  $[a, b]$  интегрирования. Многолетний опыт их применения показал, в широком классе случаев, их превосходство в точности, сравнительно с другими видами квадратурных формул.

Но эти формулы не являются универсальными и в вычислительной практике известны случаи, когда они дают результаты худшие, чем более элементарные формулы: прямоугольников, трапеций, Симпсона и др. Это обычно происходит в тех случаях, когда функция  $f$  имеет невысокий порядок дифференцируемости, или является аналитической функцией, особые точки которой расположены близко к отрезку интегрирования.

В теории квадратур возникла потребность построения формул, которые были бы приспособлены для вычисления интегралов от функций, принадлежащих наперед заданному классу, особенно принадлежащих классам низкого порядка дифференцируемости.

О задаче построения таких формул говорилось в § 1 гл. 5 и мы кратко напомним ее сейчас. Пусть дан класс функций  $\{f\} = F$ . Для каждой функции  $f \in F$  остаток квадратуры  $R(f)$  имеет вполне определенное численное значение

$$R(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (11.1.1)$$

За величину, характеризующую точность квадратурной формулы для всех без исключения функций класса  $F$ , может быть принято число

$$R = \sup_f |R(f)| = \sup_f \left| \int_a^b p f dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) \right|. \quad (11.1.2)$$

Оно зависит от  $x_k$  и  $A_k$  и нужно воспользоваться всеми имеющимися возможностями выбора узлов и коэффициентов для того, чтобы придать  $R$  возможно малое значение. Мы станем на крайнюю точку зрения и будем стремиться к тому, чтобы придать  $R$  наименьшее значение. На выбор  $x_k$  и  $A_k$ , обычно, налагаются некоторые ограничительные условия. Виды условий могут быть весьма разнообразными, в частности они связаны с выбором класса  $F$  функций  $f$  и могут зависеть также от способа задания этих функций. Ниже приведены два примера таких условий.

1. Если функции  $f$  заданы таблично на некоторой системе точек, то мы будем сильно стеснены в выборе узлов  $x_k$  и должны считать, что  $x_k$  берутся только из числа табличных значений аргумента.

2. Пусть мы хотим построить квадратурную формулу, имеющую наименьшую оценку остатка для всех функций с непрерывной производной порядка  $r$ , удовлетворяющей условию  $|f^{(r)}| \leq M_r$ . Чтобы можно было выполнить оценку остатка для таких функций, мы должны считать, что квадратурная формула верна для всевозможных многочленов степени  $\leq r-1$ . Последнее равносильно выполнению следующих  $r$  равенств:

$$\sum_{k=1}^n A_k x_k^i = \int_a^b p x^i dx \quad (i=0, 1, \dots, r-1). \quad (11.1.3)$$

В границах главы II отрезок интегрирования мы будем предполагать конечным. Этого достаточно для частных задач, рассматриваемых ниже. Линейным преобразованием  $[a, b]$  всегда можно свести к отрезку  $[0, 1]$ . Такое преобразование мы будем считать выполненным.

## § 2. Минимизация остатка в классах $L_q^{(r)}$

Условимся говорить, что  $f$  принадлежит классу  $L_q^{(r)}$  ( $q > 1$ ), если  $f$  имеет на  $[0, 1]$  абсолютно непрерывную производную порядка  $r-1$  и производная порядка  $r$  суммируема со степенью  $q$  на  $[0, 1]$ .

Всякая функция  $f \in L_q^{(r)}$  может быть представлена в форме

$$f(x) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + \int_0^1 f^{(r)}(t) E(x-t) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt, \quad (11.2.1)$$

где  $f^{(i)}(0)$  есть числа и  $f^{(r)}(t)$  — некоторая измеримая и суммируемая на  $[0, 1]$  со степенью  $q$  функция. Верно и обратное: при любых числах  $f^{(i)}(0)$  и любой  $f^{(r)}(t) \in L_q$ , функция  $f$ , определенная равенством (11.2.1), принадлежит  $L_q^{(r)}$ .

Будем рассматривать интеграл  $\int_0^1 \rho(x) f(x) dx$ , где  $f \in L_q^{(r)}$ . В ближайших рассуждениях нам достаточно считать весовую функцию  $\rho(x)$  измеримой и суммируемой на  $[0, 1]$ .

Пусть для приближенного вычисления интеграла была взята некоторая квадратурная сумма

$$\int_0^1 \rho f dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (11.2.2)$$

Желая получить формулу, которую можно было бы считать «наилучшей» для всех функций  $f \in L_q^{(r)}$  ( $q \geq 1$ ), мы примем, что равенство (11.2.2) является точным для всевозможных многочленов степени  $< r$ . Если воспользоваться представлением (11.2.1) функций класса  $L_q^{(r)}$ , то остаток  $R(f)$  квадратуры можно привести к виду:

$$R(f) = \int_0^1 \rho f dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = \int_0^1 f^{(r)}(t) K(t) dt, \quad (11.2.3)$$

$$K(t) = \int_0^1 \rho(x) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dx - \sum_{k=1}^n A_k E(x_k - t) \frac{(x_k - t)^{r-1}}{(r-1)!}. \quad (11.2.4)$$

Рассмотрим теперь множество  $F = \{f\}$  функций  $f$ , удовлетворяющих условию

$$\left\{ \int_0^1 |f^{(r)}|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}} \leq M_r, \quad q > 1.$$

Согласно неравенству Гёльдера, для  $R(f)$  в классе  $F$  имеет место оценка

$$|R(f)| \leq \left[ \int_0^1 |f^{(r)}|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \cdot \left[ \int_0^1 |K|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \leq M_r \left[ \int_0^1 |K|^p dt \right]^{\frac{1}{p}},$$

$$\left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right).$$

Функция  $f^{(r)}(t) = M_r \left[ \int_0^1 |K|^p dt \right]^{-\frac{1}{p}} |K(t)|^{\frac{p}{q}} \operatorname{sign} K$  принадлежит множеству  $F$  и, как легко видеть, для нее в полученном неравенстве имеет место знак равенства. Поэтому правая часть неравенства будет точной верхней границей  $|R(f)|$  на множестве  $F$ :

$$R = \sup_F |R(f)| = M_r \left\{ \int_0^1 |K(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}. \quad (11.2.5)$$

От выбора  $x_k$  и  $A_k$  здесь зависит только  $\int_0^1 |K(t)|^p dt$ . Нашей целью будет так выбрать  $x_k$  и  $A_k$ , чтобы интеграл  $\int_0^1 |K|^p dt$  имел наименьшее значение. Если такие  $x_k$  и  $A_k$  существуют, то они будут доставлять наименьшее значение  $R$  при всяких  $M_r$  и соответствующую им квадратурную формулу можно считать «наилучшей» во всем классе \*)  $L_q^{(r)}$ .

Задача минимизации  $\int_0^1 |K|^p dt$  может быть истолкована как задача наилучшего приближения в метрике  $L_p$  (см. гл. 4, § 1) функции  $\int_t^1 \rho(x) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dx$  при помощи функций вида

$$\sum_{k=1}^n A_k E(x_k - t) \frac{(x_k - t)^{r-1}}{(r-1)!}.$$

При произвольных  $\rho(x)$ ,  $r$  и  $n$  такая задача в конечном виде не может быть решена. Мы остановимся на некоторых частных случаях, когда решение может быть найдено при помощи простых средств.

---

\*)  $R(f) = \int_0^1 f^{(r)} K dt$  есть линейный функционал, заданный на множе-

стве  $f^{(r)} \in L_q$ . Интеграл  $\left\{ \int_0^1 |K|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}$  есть норма  $R(f)$  в пространстве  $L_q$

и поставленная задача, если высказать ее в терминах функционального анализа, есть задача построения квадратурной формулы (11.2.2) с наименьшей нормой остатка.



Предварительно необходимо ознакомиться с некоторыми фактами теории приближения функций. Пусть на отрезке  $[0, 1]$  задана некоторая функция  $f \in L_p$ . Рассмотрим, кроме того, функции  $\varphi_k \in L_p$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Последние мы будем предполагать линейно независимыми на  $[0, 1]$ , понимая под этим, что равенство

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \right|^p dx = 0$$

возможно лишь в том случае, когда все  $a_k$  равны нулю. Это равносильно тому, что равенство  $\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) = 0$  может выполняться на множестве точек, меры большей нуля, в том и только в том случае, когда  $a_k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Погрешность  $\varepsilon$  приближения  $f$  линейной комбинацией  $s = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k$  определяется равенством  $\varepsilon^p = \int_0^1 |f - s|^p dx = I$ .

Выясним условия, при которых  $\varepsilon^p$  будет иметь наименьшее значение. На основании известных теорем анализа бесконечно малых можно утверждать, что для значений  $a_k$ , доставляющих минимум  $I$ , должны выполняться равенства

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = p \int_0^1 |f - s|^{p-1} \operatorname{sign}(f - s) \varphi_i dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (11.2.6)$$

Убедимся теперь в том, что, при выполнении условий (11.2.6), линейная комбинация  $s$  действительно дает наилучшее приближение  $f$ . Возьмем

любую другую линейную комбинацию  $s^* = \sum_{k=1}^n a_k^* \varphi_k$ . Мы должны по-

казать, что  $I \leq I^* = \int_0^1 |f - s^*|^p dx$ . Имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 |f - s|^p dx = \int_0^1 |f - s|^{p-1} [f - s] \operatorname{sign}(f - s) dx = \\ &= \int_0^1 |f - s|^{p-1} [f - (s - s^*) - s^*] \operatorname{sign}(f - s) dx. \end{aligned}$$

Ввиду (11.2.6), будет

$$I = \int_0^1 |f - s|^{p-1} [f - s^*] \operatorname{sign}(f - s) dx. \quad (11.2.7)$$

Интеграл не может уменьшиться, если  $\operatorname{sign}(f - s)$  заменить на  $\operatorname{sign}(f - s^*)$ . Поэтому

$$I \leq \int_0^1 |f - s|^{p-1} |f - s^*| dx. \quad (11.2.8)$$

Применим неравенство Гёльдера \*)

$$I \leq \left\{ \int_0^1 |f - s^*|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \left\{ \int_0^1 |f - s|^p dx \right\}^{\frac{p-1}{p}} = I^{*\frac{1}{p}} I^{\frac{p-1}{p}}. \quad (11.2.9)$$

Отсюда вытекает  $I^{\frac{1}{p}} \leq I^{*\frac{1}{p}}$  и  $I \leq I^*$ , что и требовалось.

Покажем, наконец, что линейная комбинация  $s$ , доставляющая  $I$  наименьшее значение, единственная. Нужно проверить, что из  $I = I^*$  следует  $a_k = a_k^*$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). При  $I = 0$  это очевидно, так как из равенства  $f = s$  при почти всех  $x$  следует

$$I^* = \int_0^1 |f - s^*|^p dx = \int_0^1 |s - s^*|^p dx = 0.$$

\*) См., например, И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, М — Л., Гостехиздат, 1950, гл. VII, § 6, стр. 174—175. Если  $F \in L_p$  и  $G \in L_q$ , где  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , то произведение  $FG$  суммируемо и справедливо неравенство

$$\int_0^1 FG dx \leq \left\{ \int_0^1 |F|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \left\{ \int_0^1 |G|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}}. \quad (a)$$

Для дальнейшего изложения существенно отметить, что знак  $=$  может иметь место в том и только в том случае, когда выполняются два условия:

$$1) \frac{|F|^p}{\int_0^1 |F|^p dx} = \frac{|G|^q}{\int_0^1 |G|^q dx} \quad \text{и} \quad 2) \text{ почти всюду на } [0, 1] \text{ знаки } F \text{ и } G \text{ совпадают.}$$

При применении (a) в основном тексте было принято  $F = |f - s^*|$  и  $G = |f - s|^{p-1}$ .

Поэтому при почти всех  $x$   $s = s^*$  и, ввиду независимости  $\varphi_k$ , отсюда вытекает  $a_k = a_k^*$ . Будем считать  $|f - s|$  величиной положительной на множестве точек, меры большей нуля.

Равенство  $I = I^*$  возможно, как видно из рассуждений, при помощи которых было получено (11.2.9), если выполнены два условия: 1) при почти всех значениях  $x$  должно быть

$$|f - s|^{p-1} [f - s^*] \operatorname{sign}(f - s) = |f - s|^{p-1} |f - s^*|, \quad (11.2.10)$$

что необходимо для того, чтобы при переходе от (11.2.7) к (11.2.8) сохранился знак равенства; 2) в неравенстве Гёльдера, которое было применено при переходе от (11.2.8) к (11.2.9), должен быть верным знак  $=$ . Условия этого указаны в сноске и применительно к интегралу (11.2.8) они дают

$$\frac{|f - s|^p}{\int_0^1 |f - s|^p dx} = \frac{|f - s^*|^p}{\int_0^1 |f - s^*|^p dx}$$

почти всюду. Но так как  $I = \int_0^1 |f - s|^p dx = I^* = \int_0^1 |f - s^*|^p dx$ , то почти всюду должно быть

$$|f - s| = |f - s^*|. \quad (11.2.11)$$

Но  $|f - s| > 0$  на множестве положительной меры и из (11.2.10) и (11.2.11) следует, что на множестве положительной меры

$$f - s = f - s^* \quad \text{или} \quad s = s^*,$$

что возможно, ввиду независимости  $\varphi_k$ , только в том случае, когда  $a_k = a_k^*$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Будем считать вес постоянным:  $\rho(x) \equiv 1$  и рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f). \quad (11.2.12)$$

Предположим  $f$  абсолютно непрерывной и производную  $f'$  суммируемой со степенью  $q$ . Это соответствует случаю  $r = 1$ . Формулу (11.2.12) мы будем считать точной без остатка  $R(f)$ , если  $f = 1$ , что налагает следующее условие на коэффициенты:  $\sum A_k = 1$ . Остаток

$R(f)$  в классе  $L_q^{(1)}$  имеет точную оценку

$$R = \sup_f |R(f)| = M_1 \left\{ \int_0^1 |K(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad M_1^q = \int_0^1 |f'|^q dx;$$

$$K(t) = 1 - t - \sum_{k=1}^n A_k E(x_k - t).$$

Ядро остатка  $K(t)$  есть кусочно линейная функция со старшим коэффициентом, равным  $-1$ , для которой узлы  $x_k$  являются точками разрыва. Скачок  $K(t)$  в узле  $x_k$  равен коэффициенту  $A_k$ . Если  $x_k$  лежат внутри отрезка  $[0, 1]$ , то на концах его  $t=0$  и  $t=1$  ядро обращается в нуль. График  $K(t)$  изображен на рис. 3.

Задача минимизации ин-

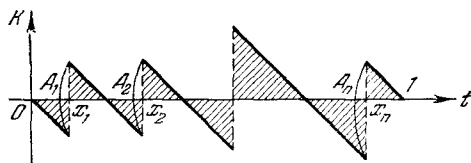


Рис. 3.

теграла  $\int_0^1 |K(t)|^p dt$  имеет

следующий геометрический смысл: нужно определить, при каком положении точек

разрыва  $x_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) и при каких величинах скачков  $A_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ), подчиненных ограничению  $\sum A_k = 1$ , ордината площади, заштрихованной на рис. 3, будет иметь наименьшее среднее значение степени  $p$ . Ответ легко предвидеть: минимум будет достигнут тогда, когда площадь будет состоять из  $2n$  равных треугольников.

Узлы  $x_k$  должны быть расположены в точках  $x_k = \frac{2k-1}{2n}$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ). Коэффициенты  $A_k$  все должны быть одинаковы, и так как сумма их равна 1, то  $A_k = \frac{1}{n}$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ).

Указанное предвидение легко может быть подтверждено вычислениями, на которых мы не будем останавливаться.

Соответствующая квадратурная формула имеет вид

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{2k-1}{2n}\right) + R(f) \quad (11.2.13)$$

и является хорошо известной формулой прямоугольников с ординатами в средних точках, или формулой касательных. Остаток ее в классе  $L_q^{(1)}$  имеет оценку

$$|R(f)| \leq M_1 \frac{1}{2n \sqrt[p]{p+1}}, \quad M_1 = \left\{ \int_0^1 |f'|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right).$$

Положим теперь  $r = 2$  и рассмотрим класс  $L_q^{(2)}$  функций с абсолютно непрерывной первой производной и производной второго порядка, суммируемой со степенью  $q$ .

Будем считать, что квадратурная сумма (11.2.12) дает точное значение интеграла, когда  $f$  есть многочлен нулевой и первой степени. Это накладывает два ограничения на выбор  $A_k$  и  $x_k$ :

$$\sum_{k=1}^n A_k = \int_0^1 1 dx = 1, \quad \sum_{k=1}^n A_k x_k = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}. \quad (11.2.14)$$

При выполнении (11.2.14), остаток  $R(f)$  имеет в классе  $L_q^{(2)}$  следующую точную оценку

$$\left. \begin{aligned} |R(f)| &\leq M_2 \left\{ \int_0^1 |K(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad M_2 = \left\{ \int_0^1 |f''|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}}, \\ K(t) &= \frac{(1-t)^2}{2} - \sum_{k=1}^n A_k E(x_k - t)(x_k - t). \end{aligned} \right\} \quad (11.2.15)$$

Для дальнейшего полезно подсчитать значения ядра  $K(t)$  на участках  $[0, x_1]$ ,  $[x_1, x_2]$ ,  $\dots$ ,  $[x_n, 1]$ :

$$K(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2} & \text{при } 0 \leq t \leq x_1, \\ \frac{(1-t)^2}{2} - \sum_{k=i+1}^n A_k (x_k - t) & \text{при } x_i \leq t \leq x_{i+1}, \\ \frac{(1-t)^2}{2} & \text{при } x_n \leq t \leq 1; \end{cases}$$

$K(t)$  есть непрерывная функция  $t$  на  $[0, 1]$ . Первая производная  $K'(t)$  имеет разрывы первого рода в точках  $x_k$  и величины скачков  $K'(t)$  определяются равенствами:

$$K'(x_k+0) - K'(x_k-0) = -A_k. \quad (11.2.16)$$

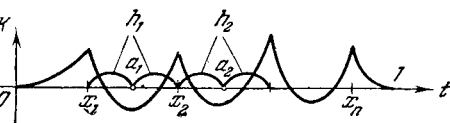


Рис. 4.

На каждом из указанных выше отрезков  $K(t)$  есть квадратный многочлен со старшим членом  $0,5t^2$ . Примерный график  $K(t)$  изображен на рис. 4.

Обратимся к задаче минимизации интеграла

$$U = \int_0^1 |K(t)|^p dt$$

при уравнениях связи (11.2.14). Будем считать, что минимальное значение  $U$  существует и к разысканию его может быть применено обычное в анализе правило множителей Лагранжа. Найденные результаты позже будут оправданы. Составим вспомогательную функцию

$$F = U + \lambda_1 \left( \sum_{k=1}^n A_k - 1 \right) + \lambda_2 \left( \sum_{k=1}^n A_k x_k - \frac{1}{2} \right),$$

вычислим частные производные от нее по  $x_i$  и  $A_i$  и приравняем их нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = -A_i p \int_0^1 |K(t)|^{p-1} S(t) E(x_i - t) dt + \lambda_2 A_i = 0, \quad (11.2.17)$$

$$S(t) = \text{sign } K(t);$$

$$\frac{\partial F}{\partial A_i} = -p \int_0^1 |K(t)|^{p-1} S(t) E(x_i - t)(x_i - t) dt + \lambda_1 + \lambda_2 x_i = 0. \quad (11.2.18)$$

Здесь  $A_i$  считаются отличными от нуля, так как, в противоположном случае, квадратурная сумма содержала бы меньше, чем  $n$  узлов. Равенство (11.2.17) можно сократить на  $A_i$ :

$$\int_0^{x_i} |K(t)|^{p-1} S(t) dt = \frac{\lambda_2}{p}.$$

Придавая  $i$  значения  $1, 2, \dots, n$ , найдем

$$\int_0^{x_1} |K|^{p-1} S(t) dt = \frac{\lambda_2}{p}, \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} |K|^{p-1} S(t) dt = 0 \quad (11.2.19)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Равенство (11.2.18) приводится, при помощи (11.2.17), к виду

$$p \int_0^{x_i} |K|^{p-1} S(t) t dt + \lambda_1 = 0,$$

откуда видно, что

$$\int_0^{x_1} |K|^{p-1} S(t) t dt = -\frac{\lambda_1}{p}, \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} |K|^{p-1} S(t) t dt = 0 \quad (11.2.20)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Из уравнений (11.2.19) и (11.2.20) вытекает, что на каждом из отрезков  $[x_i, x_{i+1}]$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) функция  $K(t)$  есть многочлен второй степени со старшим членом  $0,5t^2$ , наименее отклоняющийся от нуля в метрике  $L_p$ . Чтобы найти такой многочлен, рассмотрим сначала отрезок  $[-1, 1]$  и будем искать на нем многочлен вида  $T_2(x) = x^2 + mx + r$ , наименее уклоняющийся от нуля:

$$\int_{-1}^{+1} |T_2(x)|^p dx = \min.$$

Сразу же видно, что в таком многочлене  $m = 0$ . Действительно, если заменить в интеграле  $x$  на  $-x$ , то найдем, что  $T_2(-x)$  также будет наименее отклоняться от нуля. Но такой многочлен может быть только один:  $T_2(x) = T_2(-x)$  и, следовательно,  $m = 0$ . Осталось найти еще свободный член  $r$ . Для  $T_2$  должны выполняться условия

$$\int_{-1}^{+1} |T_2|^{p-1} \operatorname{sign} T_2 dx = 0, \quad \int_{-1}^{+1} |T_2|^{p-1} x \operatorname{sign} T_2 dx = 0. \quad (11.2.21)$$

Второе из них есть тождество. Из первого же следует, что  $\operatorname{sign} T_2$  должен изменять знак внутри  $[-1, 1]$ . Мы положим, поэтому,  $r = -l^2$ ,  $0 < l < 1$ ,  $T_2(x) = x^2 - l^2$  и перепишем первое условие в форме

$$-\int_0^l (l^2 - x^2)^{p-1} dx + \int_l^1 (x^2 - l^2)^{p-1} dx = 0.$$

Если положить  $x = l\sqrt{t}$ , то можно привести его к виду

$$\int_1^{\frac{1}{l^2}} t^{-0,5} (t-1)^{p-1} dt = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(p)}{\Gamma(p+0,5)}. \quad (11.2.22)$$

Из этого уравнения должно быть найдено  $l$ . При возрастании  $l$  от 0 до 1, левая часть его будет убывать от  $\infty$  до 0, и уравнение будет иметь одно и только одно решение.

Чтобы перейти к отрезку  $[x_i, x_{i+1}]$ , введем координату его середины  $a_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$  и обозначим через  $h_i$  половину его длины  $h_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}$ . Тогда многочлен второй степени со старшим членом  $0,5t^2$ , наименее отклоняющийся от нуля в метрике  $L_p$  на  $[x_i, x_{i+1}]$ , каким является  $K(t)$  на этом отрезке, запишется так

$$K(t) = \frac{h_i^2}{2} T_2\left(\frac{t - a_i}{h_i}\right) = \frac{h_i^2}{2} \left[ \left(\frac{t - a_i}{h_i}\right)^2 - l^2 \right], \quad x_i \leq t \leq x_{i+1}.$$

В точке  $t = x_i = a_i - h_i$  он принимает значение  $K(x_i) = 0,5h_i^2(1 - l^2)$ . Аналогично, если рассмотреть  $K(t)$  на участке  $[x_{i-1}, x_i]$  и найти его значение в точке  $t = x_i$ , то получим  $K(x_i) = 0,5h_{i-1}^2(1 - l^2)$ . Ввиду непрерывности  $K(t)$  оба значения должны совпадать. Откуда следует, что  $h_{i-1} = h_i$  ( $i = 2, \dots, n$ ). Общую величину всех  $h_i$  обозначим через  $h$ . Во всех узлах  $x_i$  будет  $K(x_i) = 0,5h^2(1 - l^2)$ . Возьмем, наконец, отрезок  $0 \leq t \leq x_1$ . Здесь  $K(t) = 0,5t^2$  и в точке  $t = x_1$  должно быть  $K(x_1) = 0,5x_1^2 = 0,5h^2(1 - l^2)$  и  $x_1 = h\sqrt{1 - l^2}$ . Наконец, рассмотрев ядро на крайнем правом отрезке  $[x_n, 1]$ , для его длины мы получим следующее значение:  $1 - x_n = h\sqrt{1 - l^2}$ . Так как сумма длин всех участков  $[0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_n, 1]$  равна 1, то должно быть

$$2h\sqrt{1 - l^2} + (n - 1)2h = 1 \quad \text{и} \quad h = 0,5[\sqrt{1 - l^2} + n - 1]^{-1},$$

$$x_k = x_1 + 2h(k - 1) = [\sqrt{1 - l^2} + 2(k - 1)]h. \quad (11.2.23)$$

Для вычисления коэффициентов  $A_k$  можно воспользоваться равенством (11.2.16). На отрезке  $x_i \leq t \leq x_{i+1}$

$$K(t) = \frac{h^2}{2} \left[ \left( \frac{t - a_i}{h} \right)^2 - l^2 \right],$$

$$K'(t) = t - a_i,$$

$$K'(x_i + 0) = K'(a_i - h + 0) = -h,$$

$$K'(x_{i+1} - 0) = K'(a_i + h - 0) = +h.$$

Следовательно,

$$A_i = 2h \quad (i = 2, 3, \dots, n - 1). \quad (11.2.24)$$

Сходные вычисления в узлах  $x_1$  и  $x_n$  дадут

$$A_1 = A_n = (1 + \sqrt{1 - l^2})h. \quad (11.2.25)$$

Найдем еще значение интеграла  $\int_0^1 |K(t)|^p dt$ . Имеем

$$\int_0^1 |K|^p dt = \int_0^{x_1} \left( \frac{t^2}{2} \right)^p dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| \frac{h^2}{2} T_2 \left( \frac{t - a_i}{h} \right) \right|^p dt + \int_{x_n}^1 \left[ \frac{(1 - t)^2}{2} \right]^p dt.$$



Легко проверяется, что

$$\begin{aligned} \int_0^{x_1} \frac{t^{2p}}{2^p} dt &= \int_{x_n}^1 \frac{(1-t)^{2p}}{2^p} dt = h^{2p+1} \frac{(1-l^2)^{p+\frac{1}{2}}}{(2p+1)2^p}, \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left| \frac{h^2}{2} T_2 \left( \frac{t-\alpha_i}{h} \right) \right|^p dt &= \frac{h^{2p+1}}{2^p} \int_{-1}^{+1} |T_2(x)|^p dx, \\ I = \int_{-1}^{+1} |T_2|^p dx &= |T_2|^p x \Big|_{-1}^{+1} - p \int_{-1}^1 |T_2|^{p-1} \operatorname{sign}(T_2) T_2' x dx = \\ &= 2(1-l^2)^p - 2p \int_{-1}^{+1} |T_2|^{p-1} \operatorname{sign}(T_2) x^2 dx \end{aligned}$$

Если под знаком последнего интеграла заменим  $x^2$  на  $x^2 - l^2 + l^2 = T_2 + l^2$ , то получим

$$I = 2(1-l^2)^p - 2pl - 2pl^2 \int_{-1}^{+1} |T_2|^{p-1} \operatorname{sign} T_2 dx.$$

Но, как видно из (11.2.21), интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, равен нулю и, следовательно,

$$I = \frac{2(1-l^2)^p}{2p+1},$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |K(t)|^p dt &= h^{2p+1} \frac{(1-l^2)^{p+\frac{1}{2}}}{(2p+1) \cdot 2^{p-1}} + (n-1) h^{2p+1} \frac{(1-l^2)^p}{(2p+1) 2^{p-1}} = \\ &= h^{2p+1} (1-l^2)^p \frac{\sqrt{1-l^2} + n-1}{(2p+1) \cdot 2^{p-1}} = h^{2p} \frac{(1-l^2)^p}{(2p+1) 2^p}. \quad (11.2.26) \end{aligned}$$

Остаток  $R(f)$  формулы (11.2.12) с узлами (11.2.23) и коэффициентами (11.2.24—25) будет иметь следующую оценку для функций  $f \in L_p^{(2)}$

$$|R(f)| \leq M_2 \frac{h^2 (1-l^2)^{\frac{p}{2}}}{2\sqrt{2p+1}}, \quad M_2 = \left\{ \int_0^1 [f'']^q \right\}^{\frac{1}{q}}. \quad (11.2.27)$$

Убедимся теперь в том, что найденные узлы  $x_k$  и коэффициенты  $A_k$  действительно дают наименьшее значение интегралу (11.2.26).

Пусть  $x_k^*$  и  $A_k^*$  — любые другие узлы и коэффициенты и  $K^*(t)$  — соответствующее им ядро остатка. Мы должны показать, что

$$\int_0^1 |K^*|^p dt \geq h^{2p} \frac{(1-l^2)^p}{(2p+1) \cdot 2^p}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |K^*|^p dt &= \int_0^{x_1^*} \left(\frac{t^2}{2}\right)^p dt + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} |K^*|^p dt + \int_{x_n^*}^1 \left[\frac{(1-t)^2}{2}\right]^p dt = \\ &= \frac{x_1^{*2p+1}}{(2p+1) 2^p} + \frac{(1-x_n^*)^{2p+1}}{(2p+1) 2^p} + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} |K^*|^p dt. \end{aligned}$$

На каждом из отрезков  $[x_i^*, x_{i+1}^*]$  ядро  $K^*(t)$  есть некоторый квадратичный многочлен со старшим членом  $0,5t^2$ . Заменим его на многочлен с тем же старшим членом и наименее отклоняющимся от нуля на  $[x_i^*, x_{i+1}^*]$  в метрике  $L_p$ . Если обозначить  $a_i^* = 0,5(x_i^* + x_{i+1}^*)$  и

$$h_i^* = 0,5(x_{i+1}^* - x_i^*), \text{ то такой многочлен будет } \frac{h_i^{*2}}{2} T_2\left(\frac{t-a_i^*}{h_i^*}\right).$$

После указанной замены, последнее равенство перейдет в неравенство

$$\int_0^1 |K^*|^p dt \geq \frac{x_1^{*2p+1} + (1-x_n^*)^{2p+1}}{(2p+1) 2^p} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{h_i^{*2}}{2}\right)^p \int_{x_i^*}^{x_{i+1}^*} \left|T_2\left(\frac{t-a_i^*}{h_i^*}\right)\right|^p dt.$$

Знак равенства возможен только в том случае, когда на всех отрезках  $[x_i^*, x_{i+1}^*]$   $K^*(t)$  будет многочленом, наименее отклоняющимся от нуля. Но тогда, как было выяснено выше, будет  $x_k^* = x_k$  и  $A_k^* = A_k$ . Интеграл, стоящий под знаком суммы, был вычислен раньше в других обозначениях и имеет величину  $\frac{2(1-l^2)^p}{2p+1}$ . Поэтому

$$\int_0^1 |K^*|^p dt \geq \frac{x^{*2p+1} + (1-x_n^*)^{2p+1}}{(2p+1) 2^p} + \frac{(1-l^2)^p}{(2p+1) 2^{3p}} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1}^* - x_i^*)^{2p+1}. \quad (11.2.28)$$

Если в сумме  $U_n = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1}^* - x_i^*)^{2p+1}$  фиксировать  $x_1^*$  и  $x_n^*$ , то, как функция от  $x_2^*, \dots, x_{n-1}^*$ , она имеет наименьшее значение, когда все

частичные отрезки  $[x_i^*, x_{i+1}^*]$  будут равны между собой:  $x_{i+1}^* - x_i^* = \frac{x_n^* - x_1^*}{n-1}$ . С достаточной степенью простоты в этом можно убедиться путем индукции. Положим  $n=3$  и рассмотрим  $u_3 = (x_3^* - x_2^*)^{2p+1} + (x_2^* - x_1^*)^{2p+1}$ . Условие стационарности  $u_3$ :

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2^*} = (2p+1)[(x_2^* - x_1^*)^{2p} - (x_3^* - x_2^*)^{2p}] = 0$$

равносильно

$$x_2^* - x_1^* = x_3^* - x_2^* \quad (11.2.29)$$

и так как

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^{*2}} = (2p+1)2p[(x_2^* - x_1^*)^{2p-1} + (x_3^* - x_2^*)^{2p-1}] > 0,$$

то  $u_3$ , при соблюдении (11.2.29), действительно имеет собственный минимум.

Будем считать, что высказанное утверждение верно для суммы  $u_{n-1}$  и проверим его для  $u_n$ :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{i=1}^{n-2} (x_{i+1}^* - x_i^*)^{2p+1} + (x_n^* - x_{n-1}^*)^{2p+1} \geq \\ &\geq (n-2) \left( \frac{x_{n-1}^* - x_1^*}{n-2} \right)^{2p+1} + (x_n^* - x_{n-1}^*)^{2p+1} = v. \end{aligned}$$

Найдем минимум  $v$  как функции от  $x_{n-1}^*$ . Из равенства

$$\frac{\partial v}{\partial x_{n-1}^*} = (2p+1) \left[ \left( \frac{x_{n-1}^* - x_1^*}{n-2} \right)^{2p} - (x_n^* - x_{n-1}^*)^{2p} \right] = 0$$

следует, что отрезок  $[x_{n-1}^*, x_n^*]$  должен иметь такую же длину, что и все предыдущие отрезки  $[x_i^*, x_{i+1}^*]$ :

$$x_n^* - x_{n-1}^* = \frac{x_{n-1}^* - x_1^*}{n-2}. \quad (11.2.30)$$

Ввиду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_{n-1}^{*2}} = (2p+1)2p \left[ \frac{1}{n-2} \left( \frac{x_{n-1}^* - x_1^*}{n-2} \right)^{2p-1} + (x_n^* - x_{n-1}^*)^{2p-1} \right] > 0,$$

$v$ , при условии (11.2.30), имеет собственный минимум и, следовательно,

$$u_n \geq (n-1) \left( \frac{x_n^* - x_1^*}{n-1} \right)^{2p+1}.$$

Заменив в (11.2.28)  $u_n$  ее наименьшим значением, получим такую оценку

$$\int_0^1 |K^*|^p dt \geq \frac{x_1^{*2p+1} + (1-x_n^*)^{2p+1}}{(2p+1)2^p} + \frac{(1-l^2)^p}{(2p+1)2^{3p}} \cdot \frac{(x_n^* - x_1^*)^{2p+1}}{(n-1)^{2p}} = w. \quad (11.2.31)$$

Подобно предыдущему, при помощи простых теорем анализа можно убедиться в том, что  $w$  достигает наименьшего значения при

$$x_1^* = 1 - x_n^* = \frac{\sqrt{1-l^2}}{2(\sqrt{1-l^2} + n-1)} = h\sqrt{1-l^2}$$

и это значение есть

$$\min w = \frac{(1-l^2)^p h^{2p}}{2^p(2p+1)}.$$

Окончательно получаем неравенство

$$\int_0^1 |K^*|^p dt \geq \frac{(1-l^2)^p h^{2p}}{2^p(2p+1)} = \int_0^1 |K|^p dt.$$

Из рассуждений видно, что знак равенства здесь может иметь место в том и только в том случае, когда  $x_k^*$  и  $A_k^*$  будут совпадать со значениями (11.2.23) – (11.2.25).

Дополним изложенное одним замечанием. Именно, покажем, что квадратурная сумма  $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$  при  $n \rightarrow \infty$  будет стремиться к значению интеграла  $\int_0^1 f dx$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = \int_0^1 f dx$ , какова бы ни была функция  $f$ , интегрируемая на  $[0, 1]$  в смысле Римана. Для этого достаточно показать, что  $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$  есть риманова интегральная сумма, что равносильно выполнению неравенств

$$A_1 + \dots + A_{k-1} \leq x_k \leq A_1 + \dots + A_k \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Последние неравенства проверяются весьма легко, так как, если в них подставить вместо  $x_k$  и  $A_k$  найденные значения, мы получим следующие очевидные неравенства:

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt{1-l^2})h + (\sqrt{1-l^2} + 2(k-2))h &\leq (\sqrt{1-l^2} + 2(k-1))h \leq \\ &\leq (1 + \sqrt{1-l^2})h + (\sqrt{1-l^2} + 2(k-1))h. \end{aligned}$$

### § 3. Минимизация остатка в классах $C_r$

Выше (гл. 5, § 2) мы условились говорить, что функция  $f$  принадлежит классу  $C_r$ , если она имеет непрерывную производную порядка  $r$  на  $[0, 1]$ . Характерное представление функций  $f \in C_r$  дается равенством

$$f(x) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + \int_0^1 f^{(r)}(t) E(x-t) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt, \quad (11.3.1)$$

где  $f^{(i)}(0)$  — любые числа и  $f^{(r)}(t)$  — произвольная функция, непрерывная на  $[0, 1]$ .

Для построения квадратурной формулы

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (11.3.2)$$

имеющей наименьшую оценку остатка в  $C_r$ , мы должны считать, что равенство (11.3.2) является точным для любого многочлена степени  $< r$ . Тогда остаток (11.3.2) может быть представлен в следующем виде:

$$R(f) = \int_0^1 f^{(r)}(t) K(t) dt, \quad (11.3.3)$$

где

$$K(t) = \frac{(1-t)^r}{r!} - \sum_{k=1}^n A_k E(x_k - t) \frac{(x_k - t)^{r-1}}{(r-1)!}.$$

Рассмотрим множество  $F$  функций  $f \in C_r$ , удовлетворяющих условию  $|f^{(r)}| \leq M_r$ . На  $F$  верна оценка

$$|R(f)| \leq M_r \int_0^1 |K(t)| dt.$$

Можно легко убедиться в том, что правая часть неравенства есть верхняя грань  $|R(f)|$  на  $F$ . Для этого достаточно  $f$  взять такой, чтобы всюду, кроме точек разрыва,  $f^{(r)}(t) = M_r \operatorname{sign} K(t)$ . Для нее

$R(f) = M_r \int_0^1 |K(t)| dt$ . Эта функция не принадлежит  $F$ , так как  $f^{(r)}$

может иметь разрывы первого рода, но ее, вместе с производными до второго порядка включительно, всегда можно приблизить с любой степенью точности в метрике  $L$  при помощи функции из  $F$ . Поэтому

в неравенстве для  $|R(f)|$  правая часть не может быть уменьшена

$$R = \sup_F |R(t)| = M_r \int_0^1 |K(t)| dt. \quad (11.3.4)$$

Мы должны так подобрать  $x_k$  и  $A_k$ , чтобы  $\int_0^1 |K(t)| dt$  имел бы наименьшее значение, при выполнении условий

$$\sum_{k=1}^n A_k x_k^i = \frac{1}{i+1} \quad (i=0, 1, \dots, r-1). \quad (11.3.5)$$

Как и в предыдущем параграфе, мы остановимся только на двух частных случаях задачи.

Положим  $r=1$  и рассмотрим класс функций, непрерывно дифференцируемых на  $[0, 1]$ . В этом случае мы должны требовать, чтобы квадратурная формула давала точный результат для постоянной величины, что равносильно выполнению уравнения связи  $\sum_{k=1}^n A_k = 1$ .

Ядро  $K(t)$  имеет значение

$$K(t) = 1 - t - \sum_{k=1}^n A_k E(x_k - t).$$

График его изображен на рис. 3. Интеграл  $\int_0^1 |K(t)| dt$  численно равен арифметическому значению площади, заштрихованной на рис. 3. Наименьшее значение эта площадь будет, очевидно, иметь в том случае, когда она будет состоять из  $2n$  одинаковых треугольников. Поэтому наименьшую оценку остатка на множестве  $F$  при всяком  $M_1$  будет иметь формула касательных (11.2.13).

Минимальное значение указанной площади равно  $\frac{1}{4n}$  и, стало быть, остаток  $R(f)$  формулы (11.2.13) в классе  $C_1$  имеет оценку

$$|R(f)| \leq M_1 \cdot \frac{1}{4n}, \quad |f'(x)| \leq M_1.$$

Возьмем теперь класс дважды непрерывно дифференцируемых функций и положим, в соответствии с этим,  $r=2$ . Узлы и коэффициенты должны быть подчинены двум условиям (11.2.14), означающим, что квадратурная формула должна дать точный результат для всякой линейной функции.

Ядро остатка  $K(t)$  указано в равенстве (11.2.15). Несколько строками ниже этого равенства приведены значения ядра на отрез-

ках  $[x_k, x_{k+1}]$ . Считая, что минимум  $u = \int_0^1 |K(t)| dt$  существует, применим к его нахождению известные правила разыскания экстремумов функции. Составим вспомогательную функцию

$$F = U + \lambda_1 \left( \sum_{k=1}^n A_k - 1 \right) + \lambda_2 \left( \sum_{k=1}^n A_k x_k - \frac{1}{2} \right)$$

и приравняем нулю ее частные производные по узлам  $x_i$  и коэффициентам  $A_i$ :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = -A_i \int_0^1 S(t) E(x_i - t) dt + \lambda_2 A_i = 0, \quad S(t) = \text{sign } K(t), \quad (11.3.6)$$

$$\frac{\partial F}{\partial A_i} = - \int_0^1 S(t) E(x_i - t) (x_i - t) dt + \lambda_1 + \lambda_2 x_i = 0 \quad (11.3.7)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

Отсюда видно, что для каждого отрезка  $[x_i, x_{i+1}]$  должно быть

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} S(t) dt = 0, \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} t S(t) dt = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Следовательно, на каждом отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$  ядро  $K(t)$  есть многочлен второй степени со старшим членом  $0,5t^2$ , наименее уклоняющийся от нуля в метрике  $L$  на  $[x_i, x_{i+1}]$ .

В § 3 гл. 2 было доказано, что среди многочленов степени  $n$  со старшим членом  $x^n$  наименее отклоняться от нуля в метрике  $L$  на  $[-1, +1]$  будет многочлен  $P_n(x) = \frac{1}{2^n} U_n(x) = \frac{\sin(n+1) \arccos x}{2^n \sqrt{1-x^2}}$ .

В частности, при  $n=2$  это будет многочлен  $P_2(x) = x^2 - \frac{1}{4}$ . Когда от отрезка  $-1 \leq x \leq +1$  мы перейдем к  $x_i \leq t \leq x_{i+1}$  при помощи линейного преобразования  $t = a_i + h_i x$ ,  $a_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ ,  $h_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}$  и приведем после этого старший коэффициент к 0,5, то для  $K(t)$  получим следующее представление

$$K(t) = \frac{h_i^2}{2} P_2\left(\frac{t-a_i}{h_i}\right), \quad x_i \leq t \leq x_{i+1}.$$

Если исходить из этого представления ядра  $K(t)$  и повторить рассуждения, проделанные по аналогичному вопросу в предыдущем

параграфе, то можно доказать справедливость перечисляемых ниже утверждений.

1. Узлы и коэффициенты должны иметь значения

$$x_i = \frac{\sqrt{3} + 4(i-1)}{2} h, \quad h = [\sqrt{3} + 2(n-1)]^{-1},$$

$$A_i = 2h \quad (i = 2, \dots, n-1), \quad A_1 = A_n = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} h.$$

2. Указанные  $x_i$  и  $A_i$  действительно доставляют наименьшее значение интегралу  $\int_0^1 |K(t)| dt$  и такие значения являются единственными.

3. Остаток  $R(f)$  квадратурной формулы при указанных  $x_i$  и  $A_i$  имеет в классе  $C_2$  оценку

$$|R(f)| \leq M_2 \frac{h^2}{8}, \quad |f''| \leq M_2.$$

4. Квадратурная сумма  $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$  есть сумма Римана и для всякой интегрируемой на  $[0, 1]$  в смысле Римана функции будет

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = \int_0^1 f dx.$$

#### § 4. Задача минимизации оценки остатка квадратуры с закрепленными узлами

Перейдем сейчас к изучению задачи построения квадратурной формулы с заданными узлами и с минимальной оценкой остатка. Рассмотрим наиболее часто встречающийся в приложениях случай равноотстоящих узлов и постоянной весовой функции. Будем считать, что отрезок интегрирования  $[0, 1]$  разделен на  $n$  равных частей  $h = \frac{1}{n}$ .

В квадратурной формуле

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (11.4.1)$$

можно распорядиться выбором  $n+1$  коэффициентов  $A_k$ . Если потребовать, чтобы равенство (11.4.1) было точным для всевозможных многочленов степени  $n$ , то, как было выяснено в гл. 6, коэффициенты  $A_k$  определяются вполне и (11.4.1) совпадает с интерполя-



ционной формулой Ньютона — Котеса. Будем считать, что формула (11.4.1) дает точный результат для многочленов степени  $r - 1 < n$ . Это накладывает следующие ограничения на выбор  $A_k$ :

$$\sum_{k=0}^n A_k = 1, \quad \sum_{k=1}^n A_k k^i = \frac{n^i}{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, r-1). \quad (11.4.2)$$

Если производная порядка  $r - 1$  от  $f$  есть абсолютная непрерывная функция, то остаток квадратуры представим в форме

$$\left. \begin{aligned} R(f) &= \int_0^1 f^{(r)}(t) K(t) dt, \\ K(t) &= \frac{(1-t)^r}{r!} - \sum_{k=1}^n A_k E\left(\frac{k}{n} - t\right) \frac{\left(\frac{k}{n} - t\right)^{r-1}}{(r-1)!}. \end{aligned} \right\} \quad (11.4.3)$$

Среди  $n + 1$  чисел  $A_k$  остаются произвольными  $n + 1 - r$  и выбором их нужно воспользоваться для уменьшения оценки погрешности квадратуры.

Ниже будут рассмотрены два случая минимизации такой оценки.

Возьмем сначала функции класса  $L_q^{(1)}$  и выберем те из них, для

которых  $\left\{ \int_0^1 |f'|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \leq M_1$ . Если считать, что квадратурная формула будет точной в случае  $f = \text{const}$  и, следовательно, ее коэффициенты удовлетворяют первому из условий (11.4.2), то для таких функций будет верна следующая оценка остатка:

$$\begin{aligned} |R(f)| &\leq \left\{ \int_0^1 |f'|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \cdot \left\{ \int_0^1 |K|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leq M_1 \left\{ \int_0^1 |K|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} = \\ &= \sup_f |R(f)|. \end{aligned}$$

От чисел  $A_k$  в оценке зависит лишь интеграл  $\int_0^1 |K(t)|^p dt$  и коэффициенты  $A_k$  нужно выбрать так, чтобы придать интегралу наименьшее значение. Ядро остатка  $K(t)$  здесь имеет значение:

$$K(t) = 1 - t - \sum_{k=1}^n A_k E\left(\frac{k}{n} - t\right);$$

оно является линейной функцией на каждом из отрезков  $\frac{i-1}{n} < t < \frac{i}{n}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ):

$$K(t) = 1 - t - \sum_{k=i}^n A_k.$$

В точках  $t = \frac{i}{n}$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ )  $K(t)$  имеет разрыв первого рода со скачком  $A_i$  и предельные значения его на концах отрезка  $[0, 1]$  равны  $A_0$  и  $-A_n$ .

Схематический график  $K(t)$  приведен на рис. 5.

Нам нужно определить, при каких величинах скачков  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) и граничных значениях  $A_0$  и  $-A_n$ , подчиненных

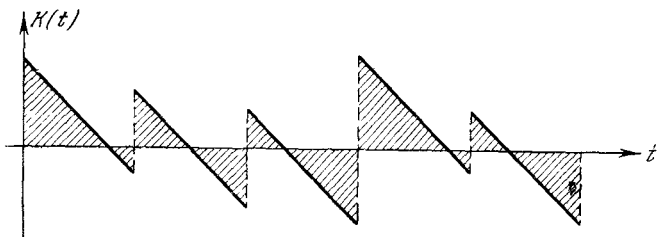


Рис. 5.

ограничению  $\sum_{i=0}^n A_i = 1$ , ордината  $K(t)$  площади, заштрихованной на рис. 5, будет иметь наименьшее среднее значение степени  $p$ . Несложными вычислениями можно проверить, что это будет в том случае, когда указанная площадь будет состоять из  $2n$  равных прямоугольных треугольников. Отсюда сразу же следует, что  $A_0 = A_n = \frac{1}{2n}$ ,  $A_1 = A_2 = \dots = A_{n-1} = \frac{1}{n}$ . Разыскиваемая квадратурная формула является хорошо известной формулой трапеций

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{2} f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{2} f(1) \right] + R(f)$$

и остаток ее  $R(f)$  будет иметь оценку

$$|R(f)| \leqslant \frac{M_1}{2n(p+1)^{\frac{1}{p}}}, \quad M_1 = \left\{ \int_0^1 |f'|^q dt \right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению квадратурных формул с наименьшей оценкой остатка в классах функций более высокого порядка дифференцируемости и ограничимся исключительно случаем классов  $L_2^{(r)} (r \geq 2)$ , когда задача определения коэффициентов  $A_k$  имеет простое решение.

Будем считать квадратурную формулу точной для многочленов степени  $< r$ , что равносильно выполнению равенств (11.4.2). Остаток представим в форме (11.4.3). На множестве функций  $f$ , удовлетворяющих условию

$$\left\{ \int_0^1 [f^{(r)}]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \leq M_r,$$

его оценка будет

$$R(f) \leq M_r \left\{ \int_0^1 K^2(t) dt \right\}^{\frac{1}{2}} = \sup_f |R(f)|.$$

От  $A_k$  здесь зависит  $I = \int_0^1 K^2(t) dt$  и, при принятом в настоящей

главе порядке идей, нашей задачей будет так выбрать  $A_k$ , чтобы придать  $I$  наименьшее возможное значение. Это есть задача о минимуме многочлена второй степени от  $A_k$  при линейных связях (11.4.2). Интеграл  $I$  не зависит от  $A_0$ . Кроме того,  $A_0$  входит в первое уравнение связи (11.4.2). При нахождении минимума  $I$  это уравнение мы можем отбросить, так как оно не налагает никаких ограничений на  $A_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) и будет служить для вычисления  $A_0$ , когда будут найдены все  $A_k$  ( $k \geq 1$ ). Другие уравнения связи

$$\sum_{k=1}^n A_k k^i = \frac{n^i}{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, r-1)$$

являются независимыми и могут быть решены относительно любых  $r-1$  коэффициентов  $A_k$ , например, относительно  $A_1, \dots, A_{r-1}$ —

В интеграле  $I$  члены второй степени относительно  $A_k$  получаются при вычислении интеграла

$$\sigma(A_1, \dots, A_n) = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 \left[ \sum_{k=1}^n A_k E\left(\frac{k}{n} - t\right) \left(\frac{k}{n} - t\right)^{r-1} \right]^2 dt.$$

Квадратичная форма  $\sigma(A_1, \dots, A_n)$  является определенной положительной, так как, очевидно,  $\sigma(A_1, \dots, A_n) \geq 0$ , при этом равенство

$\sigma(A_1, \dots, A_n) = 0$  может выполняться только в том случае, когда при всяких  $t \in [0, 1]$

$$\sum_{k=1}^n A_k E\left(\frac{k}{n} - t\right) \left(\frac{k}{n} - t\right)^{r-1} = 0,$$

что возможно лишь при условии  $A_k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Исходя из этого факта, путем обычных для алгебры рассуждений можно показать, что задача о минимуме

$$I = \int_0^1 K^2(t) dt,$$

при соблюдении уравнений связи (11.4.2), имеет решение и такое решение единственное. Если записать обычные условия экстремума  $I$ , то получится система линейных уравнений для нахождения  $A_k$ . Сард и Меверс\*) вычислили значения коэффициентов  $A_k$  и интегралов

$$I = \int_0^1 K^2(t) dt$$

для  $r = 2$ ,  $n = 1(1)20$ ;  $r = 3$ ,  $n = 2(1)12$  и  $r = 4$ ,  $n = 2(1)9$ . Числа, найденные ими для формулы (11.4.1), приведены в помещаемых ниже таблицах.

$$r = 2$$

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\delta$	2	16	30	112	190	624	994	3 104	4 770
$A_0 \delta = A_n \delta$	1	3	4	11	15	41	56	153	209
$A_1 \delta = A_{n-1} \delta$		10	11	32	43	118	161	440	601
$A_2 \delta = A_{n-2} \delta$				26	37	100	137	374	511
$A_3 \delta = A_{n-3} \delta$						106	143	392	535
$A_4 \delta = A_{n-4} \delta$								386	529
$n^5 I$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{160}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{5}{456}$	$\frac{77}{6\,240}$	$\frac{39}{2\,840}$	$\frac{22}{1\,455}$	$\frac{7}{424}$

\*) Amer. Journ. Math. 71, № 1 (1949), 80—91 и Journ. Math. and Phys. 29, № 2 (1950), 118—123.

Продолжение

$n$	10	11	12	13	14	15
$\delta$	14 480	21 758	64 848	95 966	282 352	413 250
$A_0\delta = A_n\delta$	571	780	2 131	2 911	7 953	10 864
$A_1\delta = A_{n-1}\delta$	1 642	2 243	6 128	8 371	22 870	31 241
$A_2\delta = A_{n-2}\delta$	1 393	1 907	5 210	7 117	19 444	26 561
$A_3\delta = A_{n-3}\delta$	1 462	1 997	5 456	7 453	20 362	27 815
$A_4\delta = A_{n-4}\delta$	1 444	1 973	5 390	7 363	20 116	27 479
$A_5\delta = A_{n-5}\delta$	1 450	1 979	5 408	7 387	20 182	27 569
$A_6\delta = A_{n-6}\delta$			5 402	7 381	20 164	27 545
$A_7\delta = A_{n-7}\delta$					20 170	27 551
$n^5I$	$\frac{311}{17\,376}$	$\frac{763}{39\,560}$	$\frac{419}{20\,265}$	$\frac{9\,773}{442\,920}$	$\frac{28\,381}{1\,210\,080}$	$\frac{8\,213}{330\,600}$

$n$	16	17	18	19	20
$\delta$	1 204 288	1 747 906	5 056 272	7 290 718	20 966 960
$A_0\delta = A_n\delta$	29 681	40 545	110 771	151 316	413 403
$A_1\delta = A_{n-1}\delta$	85 352	116 593	318 538	435 131	1 188 800
$A_2\delta = A_{n-2}\delta$	72 566	99 127	270 820	369 947	1 010 714
$A_3\delta = A_{n-3}\delta$	75 992	103 807	283 606	387 413	1 058 432
$A_4\delta = A_{n-4}\delta$	75 074	102 553	280 180	382 733	1 045 646
$A_5\delta = A_{n-5}\delta$	75 320	102 889	281 098	383 987	1 049 072
$A_6\delta = A_{n-6}\delta$	75 254	102 799	280 852	383 651	1 048 154
$A_7\delta = A_{n-7}\delta$	75 272	102 823	280 918	383 741	1 048 400
$A_8\delta = A_{n-8}\delta$	75 266	102 817	280 900	383 717	1 048 334
$A_9\delta = A_{n-9}\delta$			280 906	383 723	1 048 352
$A_{10}\delta = A_{n-10}\delta$					1 048 346
$n^5I$	$\frac{2\,468}{94\,085}$	$\frac{170\,393}{6\,169\,080}$	$\frac{162\,977}{5\,618\,080}$	$\frac{699\,869}{23\,023\,320}$	$\frac{8\,331}{262\,087}$

$r = 3$ 

$n$	2	3	4	5	6	7	8
$\delta$	6	24	240	1560	930	607 152	643 104
$A_0\delta = A_n\delta$	1	3	21	112	55	30 927	28 603
$A_1\delta = A_{n-1}\delta$	4	9	76	379	192	106 573	99 124
$A_2\delta = A_{n-2}\delta$			46	289	132	76 573	69 874
$A_3\delta = A_{n-3}\delta$					172	89 503	85 684
$A_4\delta = A_{n-4}\delta$							76 534
$n^7 I$	$\frac{1}{1\ 890}$	$\frac{11}{8\ 960}$	$\frac{11}{12\ 600}$	$\frac{73}{69\ 888}$	$\frac{11}{10\ 850}$	$\frac{134\ 081}{124\ 899\ 840}$	$\frac{3\ 961}{3\ 617\ 460}$

$n$	9	10	11	12
$\delta$	4 700 880	34 572 870	2 789 581 080	143 254 032
$A_0\delta = A_n\delta$	186 016	1 230 777	90 294 905	4 250 217
$A_1\delta = A_{n-1}\delta$	643 081	4 259 404	312 347 051	14 705 148
$A_2\delta = A_{n-2}\delta$	457 051	3 016 564	221 544 971	10 423 398
$A_3\delta = A_{n-3}\delta$	549 131	3 656 464	267 523 241	12 607 228
$A_4\delta = A_{n-4}\delta$	515 161	3 358 804	247 986 521	11 640 978
$A_5\delta = A_{n-5}\delta$		3 528 844	255 093 851	12 084 348
$A_6\delta = A_{n-6}\delta$				11 831 398
$n^7 I$	$\frac{662\ 807}{584\ 998\ 400}$	$\frac{507\ 029}{435\ 618\ 162}$	$\frac{3\ 062\ 211\ 497}{2\ 556\ 270\ 662\ 400}$	$\frac{1\ 028\ 343}{835\ 648\ 520}$

 $r = 4$ 

$n$	2	3	4	5	6	7
$\delta$	6	24	28 992	432 840	19 740 084	167 985 552
$A_0\delta = A_n\delta$	1	3	2 349	29 392	1 082 811	8 013 897
$A_1\delta = A_{n-1}\delta$	4	9	9 932	110 209	4 409 946	31 412 443
$A_2\delta = A_{n-2}\delta$			4 430	76 819	2 225 043	18 665 443
$A_3\delta = A_{n-3}\delta$					4 304 484	25 900 993
$n^9 I$	$\frac{1}{9\ 072}$	$\frac{13}{17\ 920}$	$\frac{6\ 557}{36\ 529\ 920}$	$\frac{61\ 633}{193\ 912\ 320}$	$\frac{210\ 047}{921\ 203\ 920}$	$\frac{56\ 097\ 271}{207\ 342\ 167\ 040}$

Продолжение

$n$	8	9
$\delta$	12 298 253 184	291 277 352 304
$A_0\delta = A_n\delta$	509 110 987	10 764 281 184
$A_1\delta = A_{n-1}\delta$	2 040 010 996	42 647 140 119
$A_2\delta = A_{n-2}\delta$	1 105 566 730	24 253 340 709
$A_3\delta = A_{n-3}\delta$	1 867 200 148	37 040 022 813
$A_4\delta = A_{n-4}\delta$	1 254 475 462	30 933 891 327
$n^9 I$	2 876 254 589	18 892 720 083
	<u>11 621 849 258 880</u>	<u>72 495 696 573 440</u>

### Литература

Никольский С. М., К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами, Усп. матем. наук 5, вып. 2 (1950), 165—177.

Sard A., Best approximate integration formulas, best approximation formulas, Amer. Journ. Math. 71, № 1 (1949), 80—91.

Meyers and Sard, Best approximate integration formulas, Journ. of Math. and Physik 29, № 2 (1950), 118—123.

Шайдаева Т. А., Наиболее точные квадратуры для некоторых классов функций, Диссертация, Ленингр. гос. ун-т, 1954.

## ГЛАВА 12

### СХОДИМОСТЬ КВАДРАТУРНОГО ПРОЦЕССА

#### § 1. О проблеме сходимости квадратурного процесса

В этой главе будет рассматриваться последовательность квадратурных формул, число узлов  $n$  в которых может принимать все целые значения  $n = 1, 2, \dots$ . Такая последовательность определяется двумя треугольными матрицами: матрицей узлов

$$X = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & & & \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad (12.1.1)$$

и матрицей коэффициентов

$$A = \begin{vmatrix} A_1^{(1)} & & & \\ A_1^{(2)} & A_2^{(2)} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \\ A_1^{(n)} & A_2^{(n)} & \dots & A_n^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}. \quad (12.1.2)$$

Возьмем квадратурную формулу, соответствующую строкам номера  $n$  этих матриц

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) + R_n(f) = Q_n(f) + R_n(f), \quad (12.1.3)$$

и условимся говорить, что квадратурный процесс, определяемый матрицами  $X$  и  $A$ , сходится для функции  $f$ , если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) = \int_a^b p(x) f(x) dx. \quad (12.1.4)$$



Сходимость или расходимость процесса зависит как от свойств интегрируемой функции  $f$ , так и от выбора квадратурных формул, и задача исследования сходимости в общем виде состоит в выяснении таких связей между свойствами  $f$  и свойствами матриц  $X$  и  $A$ , при которых можно быть уверенным в сходимости процесса.

Две основные проблемы теории сходимости могут быть высказаны в следующих словах.

1. Заданы матрицы  $X$  и  $A$  и нужно определить, для какого класса  $F$  функций  $f$  можно гарантировать выполнение (12.1.4).

2. Задан класс  $F$  функций  $f$  и нужно определить, каким условиям должны удовлетворять матрицы  $X$  и  $A$ , чтобы можно было гарантировать сходимость квадратурного процесса для всех функций  $f \in F$ .

В последующих параграфах будет рассмотрено решение каждой из этих задач для некоторых частных случаев, имеющих существенное значение в теории квадратур и их приложениях.

Мы ограничимся изучением сходимости для случая конечного отрезка интегрирования и не будем затрагивать более трудную проблему сходимости квадратурных формул для несобственных интегралов с бесконечными пределами.

## § 2. Сходимость интерполяционных квадратур для аналитических функций

Чтобы упростить доказательства теорем этого параграфа и придать им общность, мы будем сейчас, вместо интеграла  $\int_a^b p(x) f(x) dx$ , рассматривать интеграл Стильеса. Допустим, что на отрезке  $[a, b]$  задана некоторая функция  $\sigma(x)$  с ограниченным изменением и возьмем интеграл  $\int_a^b f(x) d\sigma(x)$ . Выберем на  $[a, b]$   $n$  точек  $x_k^{(n)}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) и построим интерполяционную квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x) d\sigma(x) = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) + R_n(f), \quad (12.2.1)$$

$$\omega_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k^{(n)}), \quad A_k^{(n)} = \int_a^b \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k^{(n)}) \omega_n'(x_k^{(n)})} d\sigma(x).$$

Последовательность таких формул вполне определяется матрицей узлов (12.1.1).

Замечательно, что можно указать эффективные и простые признаки для суждения о сходимости интерполяционных квадратурных

процессов для аналитических функций. Такие признаки могут быть сформулированы при помощи функции, которая имеет смысл предельной функции распределения узлов  $x_k^{(n)}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) при  $n \rightarrow \infty$ .

Узлы  $x_k^{(n)}$  предполагаются лежащими на отрезке  $[a, b]$  и в соответствии с этим мы определим функцию распределения только на этом отрезке.

Представим себе, что единичная масса произвольным образом распределена на  $[a, b]$ . Если  $x$  есть любая точка отрезка, не совпадающая с правым концом  $x = b$ , то под значением функции  $\mu(x)$  в точке  $x$  условимся понимать сумму всех масс, лежащих строго левее точки  $x$ . В частности, так как левее точки  $a$  нет масс, то  $\mu(a) = 0$ . Если же  $x = b$ , то, по определению, считаем  $\mu(b) = 1$ .

Функция  $\mu(x)$  должна, очевидно, обладать следующими свойствами:

1. При  $x = a$   $\mu(a) = 0$ .

2.  $\mu(x)$  есть монотонная неубывающая функция  $x$ , непрерывная слева в каждой точке внутри  $[a, b]$ .

3. При  $x = b$   $\mu(b) = 1$ .

Перечисленные свойства мы примем за определение и всякую функцию  $\mu(x)$ , обладающую этими свойствами, будем называть *функцией распределения* на отрезке  $[a, b]$ .

Пусть дана последовательность функций распределения  $\mu_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Условимся говорить, что  $\mu_n(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  сходится в основном к функции  $\mu(x)$ , если  $\mu_n(x) \rightarrow \mu(x)$  во всякой точке непрерывности \*)  $\mu(x)$ . Возьмем теперь строку номера  $n$  матрицы  $X$ :

$$x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}.$$

Будем считать, что узлы  $x_k^{(n)}$  перенумерованы в порядке роста. Припишем каждому из них массу, равную  $\frac{1}{n}$ . Этим взятой строке матрицы  $X$  будет поставлена в соответствие функция распределения  $\mu_n(x)$ .

Если существует функция  $\mu(x)$ , обладающая перечисленными выше свойствами, к которой в основном сходится последовательность  $\mu_n(x)$ :

$$\mu_n(x) \rightarrow \text{оснв. } \mu(x), \quad n \rightarrow \infty,$$

то  $\mu(x)$  будем называть *предельной функцией распределения* для матрицы  $X$ .

Мы остановимся исключительно на том случае, когда такая функция  $\mu(x)$  существует \*\*).

\*) Заметим, что в точках  $x = a$  и  $x = b$  выполняются равенства  $\mu_n(a) = \mu(a) = 0$  и  $\mu_n(b) = \mu(b) = 1$  и сходимость на концах отрезка  $[a, b]$  имеет место всегда.

\*\*) В силу известной теоремы о выборе для функций распределения, от случая существования  $\mu(x)$  легко можно перейти к случаю любой матрицы  $X$ .

Обозначим  $r_n(x)$  остаток интерполирования  $f$  по ее значениям в узлах  $x_k^{(n)}$  ( $k=1, \dots, n$ ):

$$r_n(x) = f(x) - \sum_{k=1}^n \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k^{(n)}) \omega_n'(x_k^{(n)})} f(x_k^{(n)}) = f(x) - L_n(x).$$

Остаток квадратуры (12.2.1)  $R_n(f)$  равен интегралу от остатка интерполирования

$$R_n(f) = \int_a^b r_n(x) d\sigma(x).$$

Сходимость квадратуры тесно связана со сходимостью интерполирования, в частности, если  $r_n(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно относительно  $x \in [a, b]$ , то и  $R_n(f) \rightarrow 0$ , т. е. будет сходиться и квадратурный процесс. Исследование сходимости квадратурного процесса (12.2.1) мы начнем с изучения сходимости интерполирования.

Будем считать, что функция  $f(z)$  является аналитической функцией переменной  $z$ , регулярной в некоторой односвязной области  $B$  комплексной плоскости  $z$ , содержащей отрезок  $[a, b]$  действительной оси внутри себя. Обозначим  $l$  произвольный замкнутый спрямляемый контур, лежащий в  $B$  и такой, что  $[a, b]$  лежит внутри его.

Остаток интерполирования  $r_n(x)$  может быть представлен (см. (3.2.11)) в форме следующего контурного интеграла:

$$r_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\omega_n(x)}{\omega_n(z)} \frac{f(z)}{z-x} dz, \quad (12.2.2)$$

где  $x$  есть любая точка, лежащая внутри  $l$ . Пусть  $\mu(x)$  есть предельная функция распределения узлов матрицы  $X$ . Для исследования  $r_n(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  большое значение имеет следующий логарифмический потенциал

$$u(z) = \int_a^b \ln \frac{1}{|z-t|} d\mu(t). \quad (12.2.3)$$

$u(z)$  есть гармоническая функция, регулярная в комплексной плоскости всюду, кроме бесконечно далекой точки и отрезка  $[a, b]$ . Когда точка  $z$  удаляется на бесконечность,  $u(z)$  будет стремиться к  $-\infty$ .

Рассмотрим линии уровня

$$u(z) = C.$$

Если  $C$  есть большое по абсолютной величине отрицательное число, линия уровня будет содержать внутри себя отрезок интегрирования  $[a, b]$  и будет «близкой» к окружности большого радиуса.

Назовем эту линию  $l_C$  и обозначим  $B_C$  часть плоскости, лежащую внутри ее. При возрастании  $C$  множество  $B_C$  будет уменьшаться. Введем число  $\lambda$ , равное точной верхней границе значений  $C$ , при которых  $[a, b]$  лежит внутри  $B_C$ . При всяком  $C < \lambda$  линия уровня  $l_C$  будет содержать  $[a, b]$  внутри себя.

Рассмотрим также открытую область плоскости  $z$ , в которой  $u(z) < \lambda$ . Назовем ее  $\mathfrak{K}$  и дополнение к ней обозначим  $\beta$ .

**Теорема 1.** Если функция  $f(z)$  есть аналитическая функция, регулярная в некоторой области  $\mathcal{D}$ , содержащей внутри себя  $\beta$ , то

$$r_n(x) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

равномерно относительно  $x \in \beta$ .

Доказательство. Так как  $\beta$  лежит внутри  $\mathcal{D}$ , наверное существует число  $C' < \lambda$  такое, что соответствующая ему область  $B_{C'} \neq l_{C'}$  также лежит внутри  $\mathcal{D}$ .

Возьмем произвольное число  $C''$  между  $C'$  и  $\lambda$ :  $C' < C'' < \lambda$ . Линия уровня  $l_{C''}$  будет лежать внутри  $l_{C'}$  и будет содержать  $\beta$ , а следовательно и  $[a, b]$ , внутри себя.

Примем  $l_{C'}$  за контур интегрирования в интегральном представлении  $r_n(x)$ . Будем, кроме того, считать, что точка  $x$  лежит на  $l_{C''}$ .

Если обозначить  $M$  наибольшее значение  $|f|$  на  $l_{C'}$  и  $\delta$  — расстояние между  $l_{C'}$  и  $l_{C''}$ , то будет верна оценка

$$|r_n(x)| \leq \frac{M}{2\pi\delta} \int_{l_{C'}} \frac{|\omega_n(x)|}{|\omega_n(z)|} ds.$$

Рассмотрим отдельно  $|\omega_n(z)|^{-1}$ :

$$|\omega_n(z)|^{-1} = \exp \sum_{k=1}^n \ln \frac{1}{|z - x_k^{(n)}|}.$$

Припишем, как выше, каждому узлу  $x_k^{(n)}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) массу  $\frac{1}{n}$  и введем соответствующую функцию распределения  $\mu_n(x)$ . Очевидно,

$$\int_a^b \ln \frac{1}{|z - t|} d\mu_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{1}{|z - x_k^{(n)}|}$$

и поэтому

$$|\omega_n(z)|^{-1} = \exp n \int_a^b \ln \frac{1}{|z - t|} d\mu_n(t).$$

При  $n \rightarrow \infty$   $\mu_n(t)$  будет сходиться в основном к предельной функции распределения узлов  $\mu(t)$ . Точка  $z$  лежит вне  $[a, b]$  и  $\ln \frac{1}{|z - t|}$

есть непрерывная функция  $t \in [a, b]$ . Согласно известной теореме о предельном переходе для интеграла Стильтьеса, которую часто называют второй теоремой Хелли, будет верным следующее \*)

$$\int_a^b \ln \frac{1}{|z-t|} d\mu_n(t) \rightarrow \int_a^b \ln \frac{1}{|z-t|} d\mu(t) = C', \quad n \rightarrow \infty.$$

В интеграле величина  $z$  играет роль параметра и сходимость будет равномерной относительно  $z \in I_{C'}$ . Чтобы убедиться в последнем, достаточно проследить за ходом обычных доказательств теоремы Хелли. Существует, следовательно, такое  $n'$ , что при  $n > n'$  и для любых  $z \in I_{C'}$  будут справедливы неравенства

$$C' - \frac{1}{3}(C'' - C') < \int_a^b \ln \frac{1}{|z-t|} d\mu_n(t) < C' + \frac{1}{3}(C'' - C').$$

Аналогично, при  $x \in I_{C''}$  равномерно относительно  $x$  будет

$$\int_a^b \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu_n(t) \rightarrow \int_a^b \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu(t) = C'', \quad n \rightarrow \infty.$$

Существует, стало быть, такое  $n''$ , что при  $n > n''$  и при всяких  $x \in I_{C''}$  выполняются неравенства

$$C'' - \frac{1}{3}(C'' - C') < \int_a^b \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu_n(t) < C'' + \frac{1}{3}(C'' - C').$$

Взяв  $n_0 = \max(n', n'')$ , можно утверждать, что при  $n > n_0$  и любых  $z \in I_{C'}$ ,  $x \in I_{C''}$  будет иметь место оценка

$$\begin{aligned} \int_a^b \ln \frac{1}{|z-t|} d\mu_n(t) - \int_a^b \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu_n(t) &< \left[ C' + \frac{1}{3}(C'' - C') \right] - \\ &- \left[ C'' - \frac{1}{3}(C'' - C') \right] = -\frac{1}{3}(C'' - C'). \end{aligned}$$

Отсюда получается оценка для отношения  $\frac{\omega_n(x)}{\omega_n(z)}$ :

$$\left| \frac{\omega_n(x)}{\omega_n(z)} \right| < e^{-\frac{n}{3}(C'' - C')}.$$

\*) В. И. Гливенко, Интеграл Стильтьеса, ОНТИ, 1936, № 14. См. также И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, гл. 8, § 7, М.—Л., Гостехиздат, где теорема Хелли доказана при предположениях, немного отличных от требования сходимости  $\mu_n$  к  $\mu$  в основном. Но легко можно видеть, что это доказательство, с некоторыми изменениями, переносится и на случай сходимости  $\mu_n$  к  $\mu$  в основном.

Для остатка интерполирования  $r_n(x)$  получим

$$|r_n(x)| < \frac{Ms}{2\pi\delta} e^{-\frac{n}{3}(C''-C')}, \quad n > n_0, \quad x \in I_{C''}. \quad (12.2.4)$$

Здесь  $s$  — длина линии  $I_{C'}$ .

Из (12.2.4) вытекает, что при  $n \rightarrow \infty$   $r_n(x) \rightarrow 0$  равномерно на  $I_{C''}$ . Но, так как  $r_n(x)$  есть аналитическая функция, регулярная в области  $I_{C''} + B_{C''}$ , то равномерное стремление  $r_n(x)$  к нулю будет во всей области  $I_{C''} + B_{C''}$ . В частности, это будет верно и на множестве  $\beta$ , лежащем внутри  $I_{C''}$ .

Доказанная теорема об интерполировании позволяет высказать соответствующую ей теорему о сходимости интерполяционного квадратурного процесса.

**Теорема 2.** Пусть  $[a, b]$  есть конечный отрезок. Если  $f(x)$  есть аналитическая функция, регулярная в некоторой области, содержащей множество  $\beta$  внутри себя, то, при любой функции  $\sigma(x)$ , интерполяционно квадратурный процесс, определяемый равенством (12.2.1), сходится:

$$R_n(f) = \int_a^b r_n(x) d\sigma(x) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Остановимся на случае, когда предельная функция  $\mu(x)$  соответствует равномерному распределению единичной массы на  $[a, b]$ :

$$\mu(x) = \frac{(x-a)}{(b-a)}, \quad a \leq x \leq b. \quad (12.2.5)$$

К такой функции  $\mu(x)$  приводит, например, изучение сходимости квадратурных процессов с равноотстоящими узлами, в частности, квадратурных процессов Ньютона — Котеса.

Для облегчения записи будем считать отрезок  $[a, b]$  приведенным к  $[0, 1]$ .

$$\mu(x) = x.$$

Логарифмический потенциал (12.2.3) здесь будет

$$u(z) = \int_0^1 \ln \frac{1}{|z-t|} dt.$$

Так как

$$\int_0^1 \ln |z-t| dt = \operatorname{Re} \int_0^1 \ln(z-t) dt = \operatorname{Re} \{(1-z) \ln(1-z) + z \ln z - 1\}.$$

то

$$u(z) = \operatorname{Re} \{1 - z \ln z - (1 - z) \ln (1 - z)\} = \\ = 1 - x \ln \sqrt{x^2 + y^2} - (1 - x) \ln \sqrt{(1 - x)^2 + y^2} + y \operatorname{arctg} \frac{y}{x - x^2 - y^2}.$$

Линии уровня  $u(z) = C$  изображены на рис. 6. Множество  $\beta$  состоит из линии уровня, проходящей через концы отрезка  $[0, 1]$  и области, лежащей внутри нее.

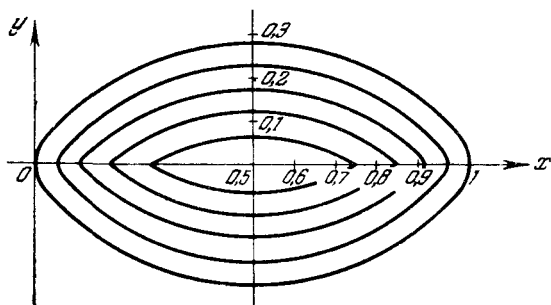


Рис. 6.

Наибольший горизонтальный размер  $\beta$  равен единице, а наибольший размер по вертикали — около 0,5 и получается он в сечении  $\beta$  прямой  $x = 0,5$ .

Из изложенного выше, в частности, видно, что наверное гарантировать сходимость интерполяционного квадратурного процесса Ньютона — Котеса, имеющего равноотстоящие узлы, можно только в том случае, если интегрируемая функция  $f$  будет аналитической функцией, регулярной в достаточно широкой области около отрезка  $[0, 1]$ , а именно в такой, чтобы она содержала внутри себя указанную область  $\beta$ .

Рассмотрим еще два вопроса теории сходимости интерполяционных квадратур, которые, в известном смысле, являются крайними случаями доказанной выше теоремы.

Можно заранее предвидеть, что если  $f$  будет функцией, регулярной в весьма широкой области около отрезка  $[a, b]$ , то квадратурный процесс будет наверное сходиться, как бы ни выбирать узлы  $x_k^{(n)}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) и какой бы ни была функция  $\sigma(x)$ . Попытаемся теперь определить наименьшую область, в которой должна быть регулярной  $f$ , чтобы можно было гарантировать сходимость процесса для любых  $x_k^{(n)}$  и при всяких  $\sigma(x)$ .

Изучим предварительно сходную проблему для интерполяционной задачи.

Опишем около точек  $a$  и  $b$ , как около центров, круги радиуса, равного  $b - a$ , и обозначим  $\kappa$  замкнутую область, являющуюся теоретико-множественной суммой двух таких кругов.

**Теорема 3.** Если аналитическая функция  $f(z)$  регулярна в области  $\kappa$ , то, каковы бы ни были узлы интерполирования на  $[a, b]$ , будет иметь

место сходимости интерполирования  $L_n(x) \rightarrow f(x)$ ,  $n \rightarrow \infty$ , равномерно относительно  $x \in [a, b]$ .

Область регулярности  $\kappa$  является наименьшей, обеспечивающей сходимость интерполирования при любой матрице узлов  $x_k^{(n)}$ .

Доказательство. Пусть  $x$  и  $t$  суть две любые точки отрезка  $[a, b]$  и  $z$  произвольная точка плоскости. Если  $z$  лежит вне  $\kappa$ , то, очевидно, будет  $\left| \frac{x-t}{z-t} \right| < 1$ . Если же  $z$  принадлежит области  $\kappa$ , то, наверное найдутся такие  $x$  и  $t$  на  $[a, b]$ , что будет  $\left| \frac{x-t}{z-t} \right| \geq 1$ .

Докажем первую часть теоремы. Так как  $f$  предполагается регулярной в замкнутой области  $\kappa$ , она будет регулярной и в некоторой более широкой области. Поэтому наверное существует замкнутая линия  $l$ , содержащая  $\kappa$  внутри себя и такая, что  $f$  будет регулярна как на ней самой, так и всюду внутри ее. Остаток интерполирования представим контурным интегралом

$$r_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{\omega_n(x)}{\omega_n(z)} \frac{f(z)}{z-x} dz.$$

Ввиду того, что  $x$  и  $x_k^{(n)}$  лежат на  $[a, b]$  и  $z$  лежит на  $l$ , будет выполняться неравенство  $\left| \frac{x - x_k^{(n)}}{z - x_k^{(n)}} \right| < 1$ . Более того, наверное существует число

$q < 1$ , не зависящее от  $x$ ,  $x_k^{(n)} \in [a, b]$  и  $z \in l$ , такое, что  $\left| \frac{x - x_k^{(n)}}{z - x_k^{(n)}} \right| \leq q < 1$ .

Поэтому при всяких  $x \in [a, b]$  и  $z \in l$  будет  $\left| \frac{\omega_n(x)}{\omega_n(z)} \right| \leq q^n$ , и для остатка интерполирования получится оценка

$$|r_n(x)| \leq \frac{q^n}{2\pi} \max_{z \in l} \int_l \frac{|f(z)|}{|z-x|} ds = A_0 q^n.$$

Отсюда следует, что  $r_n(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно относительно  $x$ .

Убедимся теперь в том, что область регулярности  $\kappa$  является наименьшей и не может быть сужена. Для этого достаточно показать, что, какова бы ни была точка  $\alpha \in \kappa$ , всегда найдется такая функция  $f$ , регулярная в  $\kappa$ , везде, кроме точки  $\alpha$ , и такая система узлов  $x_k^{(n)}$ , что интерполяционный процесс для  $f$  будет расходиться в некоторой точке  $x \in [a, b]$ .

Пусть, в самом деле,  $\alpha$  есть любая точка  $\kappa$ . Мы вправе считать, что  $\alpha$  лежит вне  $[a, b]$ . Рассмотрим функцию  $f = \frac{1}{z-\alpha}$ . Она регулярна на всей плоскости  $z$ , кроме точки  $z = \alpha$ . За контур  $l$  в интегральном представлении остатка  $r_n(x)$  примем линию, состоящую из окружности  $\Gamma$  большого радиуса с центром, например, в точке  $\alpha$ , из малой окружности  $\gamma$  около точки  $\alpha$  и из разреза, соединяющего  $\Gamma$  и  $\gamma$ .

Интегралы по сторонам разреза сократятся и мы получим

$$r_n(x) = r_n\left(\frac{1}{z-\alpha}, x\right) = \frac{\omega_n(x)}{2\pi i} \int_{\Gamma+\gamma} \frac{dz}{\omega_n(z)(z-\alpha)(z-x)}.$$



Интеграл по  $\Gamma$  равен нулю, ввиду того, что интегрируемая функция  $\frac{1}{\omega_n(z)(z-\alpha)(z-x)}$  имеет на бесконечности нуль выше второй кратности. Интеграл по  $\gamma$  берется в направлении по движению часовой стрелки и равен вычету в точке  $\alpha$  интегрируемой функции, умноженному на  $-2\pi i$

$$r_n\left(\frac{1}{z-\alpha}, x\right) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n(\alpha)(x-\alpha)}.$$

Так как  $\alpha \in \kappa$ , наверное существуют такие  $x$  и  $t$ , лежащие на  $[a, b]$ , что  $\left|\frac{x-t}{\alpha-t}\right| \geq 1$ . Фиксируем значение  $x$  и возьмем все узлы интерполирования совпадающими с  $t$ . Интерполирование должно выполняться по значениям  $f = \frac{1}{z-\alpha}$  и ее производных до порядка  $n-1$  в точке  $t$ . Интерполирующий многочлен будет отрезком тейлорова ряда для  $\frac{1}{z-\alpha}$  около точки  $t$ . Многочлен  $\omega_n(z)$  равен  $\omega_n(z) = (z-t)^n$ . Остаток интерполирования имеет значение  $r_n\left(\frac{1}{z-\alpha}, x\right) = \left(\frac{x-t}{\alpha-t}\right)^n \frac{1}{x-\alpha}$ . Ввиду  $\left|\frac{x-t}{\alpha-t}\right| \geq 1$ ,  $r_n$  при  $n \rightarrow \infty$  не будет стремиться к нулю и интерполирование функции  $\frac{1}{z-\alpha}$  в точке  $x$  будет расходящимся.

Мы указали пример расходящегося эрмитовского интерполирования с одним  $n$ -кратным узлом. Но совершенно ясно, что если  $x_k^{(n)}$  ( $k=1, \dots, n$ ) выбрать весьма близко к  $t$  и считать, что при  $n \rightarrow \infty$  узлы  $x_k^{(n)}$  достаточно быстро будут приближаться к  $t$ , можно построить пример расходящегося интерполяционного процесса с разными узлами. Вторая часть теоремы доказана.

Из изложенного сразу же получается теорема о сходимости квадратурного процесса.

**Теорема 4.** Если  $f$  есть аналитическая функция, регулярная в области  $\kappa$ , интерполяционный квадратурный процесс, определяемый равенством (12.2.1), сходится  $R_n(f) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , каковы бы ни были узлы  $x_k^{(n)}$  и какова бы ни была функция  $\sigma(x)$  с ограниченным изменением на  $[a, b]$ .

Область регулярности  $\kappa$  есть наименьшая область, обеспечивающая сходимость квадратурного процесса (12.2.1) при любых узлах  $x_k^{(n)}$  и произвольной функции  $\sigma(x)$ .

**Доказательство.** Если  $f$  регулярна в  $\kappa$ , то остаток интерполирования ее при любых узлах  $x_k^{(n)}$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$  равномерно относительно  $x$ . Поэтому остаток квадратуры  $R_n(f) = \int_a^b r_n(x) d\sigma(x)$  также

будет при  $n \rightarrow \infty$  стремиться к нулю, какова бы ни была функция  $\sigma(x)$  с ограниченным изменением на  $[a, b]$ .

Для доказательства второй части утверждения теоремы достаточно показать, что если из  $\kappa$  отбросить хотя бы одну точку, то найдутся такие функции  $f$  и  $\sigma$  и такие узлы  $x_k^{(n)}$ , что  $R_n(f)$  не будет стремиться к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

Выберем функцию  $\sigma(x)$  кусочно постоянной, имеющей единственный скачок величины 1 в некоторой точке  $x$  отрезка  $[a, b]$ . Тогда

$$R_n(f) = \int_a^b r_n(x) d\sigma(x) = r_n(x).$$

Для такой  $\sigma(x)$  сходимость квадратурного процесса равносильна сходимости интерполирования в точке  $x$ . Но, как видно из доказательства предыдущей теоремы, если из  $x$  удалить хоть одну точку  $\alpha$ , то для функции  $f = \frac{1}{z - \alpha}$  можно указать такую точку  $x$  и такие узлы  $x_k^{(n)}$ , что  $r_n(x)$  не будет стремиться к нулю при  $n \rightarrow \infty$  и квадратурный процесс, следовательно, будет расходиться.

С целью упростить запись, будем считать, что отрезок интегрирования  $[a, b]$  приведен к  $[-1, 1]$ . Функция распределения  $\mu(x)$  называется функцией Чебышёва, если

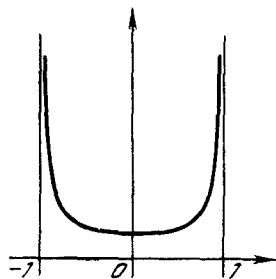


Рис. 7.

$$\mu(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (12.2.6)$$

Плотность распределения  $\rho(x) = \mu'(x)$  изображена на рис. 7. Пусть матрица  $X$  имеет предельную функцию распределения узлов и эта функция есть (12.2.6). Так будет, например, в том случае, когда за узлы  $x_k^{(n)}$  ( $k = 1, \dots, n$ ;  $n = 1, 2, \dots$ ) принимают корни системы многочленов, ортогональных на отрезке  $[-1, 1]$  с любой суммируемой почти везде положительной весовой функцией  $p(x)$ . С таким выбором узлов выше мы встречались при построении квадратурных формул, имеющих наивысшую алгебраическую степень точности.

Рассмотрим логарифмический потенциал

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|z-t|} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (12.2.7)$$

$u(z)$  есть действительная часть функции комплексного переменного

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{z-t} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (12.2.8)$$

В комплексной плоскости  $z$  проведем разрез вдоль действительной оси от точки 1 к  $-\infty$  и выберем ту ветвь логарифма, для

которой  $\arg(z-t)=0$  при действительных  $z$ , больших чем  $t$ ,

$$F'(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dt}{(z-t)\sqrt{1-t^2}}.$$

Последний интеграл легко вычисляется путем нахождения первообразной функции и имеет значение

$$F'(z) = -\frac{1}{\sqrt{z^2-1}},$$

причем выбирается та ветвь корня, которая принимает положительные значения при  $z > 1$ ; тогда

$$F(z) = \ln \frac{C}{z + \sqrt{z^2-1}}.$$

Постоянная  $C$  находится из условия, что функция (12.2.8) при больших  $z$  имеет представление вида

$$F(z) = \ln \frac{1}{z} + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

Это дает  $C=2$  и окончательно

$$F(z) = \ln \frac{2}{z + \sqrt{z^2-1}}, \quad u(z) = \ln \frac{2}{|z + \sqrt{z^2-1}|}. \quad (12.2.9)$$

Линии уровня  $u(z)=C$  при  $C < \ln 2$  будут замкнутыми линиями, охватывающими отрезок  $[-1, 1]$ . При  $C = \ln 2$  линия уровня совпадает с самим отрезком  $[-1, 1]$ . Множество  $\beta$  будет состоять только из отрезка интегрирования  $[-1, 1]$ . Последнее дает возможность высказать следующую теорему.

**Теорема 5.** Если матрица  $X$  имеет в качестве предельной функции распределения узлов функцию Чебышёва (12.2.6), то:

1) соответствующий ей интерполяционный процесс сходится для всякой функции, аналитической на  $[-1, +1]$  и при этом равномерно относительно  $x \in [-1, 1]$ ;

2) квадратурный процесс, определяемый равенством (12.2.1), при  $[a, b] = [-1, 1]$  сходится для любой функции  $f(x)$ , аналитической на  $[-1, 1]$ , какова бы ни была функция  $\sigma(x)$  с ограниченным изменением на  $[-1, 1]$ .

В связи с этим весьма интересно отметить, что верны теоремы, которые могут быть названы обратными для только что установленной теоремы. Докажем сейчас первую из таких теорем.

**Теорема 6\*).** Если матрица  $X$  такова, что интерполирование по узлам  $x_k^{(n)}$  ( $k=1, \dots, n$ ;  $n=1, 2, \dots$ ) сходится во всех точках отрезка

\*) L. Kalmár, Az interpolációról, Mathematikai es physikai lapok. 32, 1926, 120, где аналогичная теорема доказана для более общего утверждения.

$[-1, 1]$  для всякой функции  $f$ , аналитической на  $[-1, 1]$ , то для матрицы  $X$  существует предельная функция распределения узлов и это есть функция (12.2.6).

Для доказательства нам потребуется ознакомиться с некоторыми свойствами логарифмического потенциала. Рассмотрим последовательность функций распределения, отвечающих строкам матрицы  $X: \mu_1(x), \mu_2(x), \dots$ . По теореме Хелли\*), из нее всегда можно выбрать частичную последовательность, сходящуюся в основном к некоторой функции распределения. Последнюю мы обозначим  $\mu(x)$ . В дальнейшем будем считать, что индекс  $n$  пробегает такую последовательность целых чисел, для которых  $\mu_n(x) \rightarrow \mu(x)$  в осн.

Теорема будет доказана, если мы установим, что  $\mu(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ .

Интеграл

$$u(x) = \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu(t), \quad (12.2.10)$$

при  $x$ , лежащем на отрезке  $[-1, 1]$ , является несобственным и мы условимся в следующем его понимании. Введем функцию  $\ln_N x$ , определив ее равенствами

$$\ln_N x = \begin{cases} \ln x & \text{при } \ln x \leq N, \\ N & \text{при } \ln x > N. \end{cases}$$

Функция  $\ln_N \frac{1}{|x-t|}$  ограничена и непрерывна при  $t \in [-1, 1]$ . Интеграл  $\int_{-1}^1 \ln_N \frac{1}{|x-t|} d\mu(t)$  есть неубывающая функция  $N$ . По определению полагаем

$$u(x) = \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \ln_N \frac{1}{|x-t|} d\mu(t).$$

**Лемма 1.** Если  $\mu(t)$  имеет в точке  $x \in [-1, 1]$  производную, то интеграл (12.2.10) в этой точке конечен.

**Доказательство.** Пусть  $x$  лежит внутри  $[-1, 1]$ . Считая  $N$  большим, выделим около точки  $x$  отрезок  $x - \delta \leq t \leq x + \delta$ , где  $\delta = e^{-N}$ ,

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu(t) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_{-1}^{x-\delta} \ln \frac{1}{x-t} d\mu + \int_{x+\delta}^1 \ln \frac{1}{t-x} d\mu + N [\mu(x+\delta) - \mu(x-\delta)] \right\}. \end{aligned}$$

\*) В. И. Гливенко, Интеграл Стильеса, М. — Л., ОНТИ, 1936, № 13.

После интегрирования по частям в фигурных скобках, получим, если принять во внимание, что  $\ln \delta = -N$ ,  $\mu(1) = 1$ ,  $\mu(-1) = 0$ ,

$$u(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \ln \frac{1}{1-x} - \int_{-1}^{x-\delta} \frac{\mu(t)}{x-t} dt - \int_{x+\delta}^1 \frac{\mu(t)}{x-t} dt \right\} = \\ = \ln \frac{1}{1-x} + \text{гл. зн.} \int_{-1}^1 \frac{\mu(t)}{x-t} dt.$$

Так как  $\mu(t)$  в точке  $x$  имеет производную, гл. зн.  $\int_{-1}^1 \frac{\mu(t)}{x-t} dt$  существует

и имеет конечную величину.

Аналогично проверяется утверждение леммы в случае, когда точка  $x$  лежит в каком-либо из концов отрезка  $[-1, 1]$ .

Так как производная  $\mu'(t)$  существует почти везде, интеграл (12.2.10) имеет на  $[-1, 1]$  почти везде конечное значение.

Рассмотрим логарифмический потенциал  $u(z) = \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|z-t|} d\mu(t)$ .

Пусть  $x$  лежит на отрезке  $[-1, 1]$  и будем считать, что точка  $z = x + iy$  приближается к  $x$  по вертикали.

**Лемма 2.** При любом значении  $x \in [-1, 1]$  верно равенство

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|z-t|} d\mu(t) = \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu(t) \quad (12.2.11)$$

независимо от того, конечное или бесконечное значение имеет интеграл, стоящий справа.

**Доказательство.** Выделим около  $x$  малый отрезок  $x - \varepsilon \leq t \leq x + \varepsilon$  и обозначим  $E_\varepsilon$  часть  $[-1, 1]$ , остающуюся после удаления из  $[-1, 1]$  отрезка  $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ . При малых значениях  $\varepsilon$  для всяких  $t \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$

$|z - t| < 1$ . Тогда  $\ln \frac{1}{|z - t|} > 0$  и так как  $\mu(t)$  неубывающая функция, то должно быть верным неравенство

$$\int_{E_\varepsilon} \ln \frac{1}{|z-t|} d\mu(t) \leq \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|z-t|} d\mu(t).$$

В интеграле по  $E_\varepsilon$  допустим предельный переход при  $y \rightarrow 0$  под знаком интеграла. Если принять, кроме того, во внимание, что  $\ln \frac{1}{|z-t|} <$

$< \ln \frac{1}{|x-t|}$ , после предельного перехода получим

$$\begin{aligned} \int_{E_\varepsilon} \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu(t) &\leq \lim_{y \rightarrow 0} \inf \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|z-t|} d\mu(t) \leq \\ &\leq \lim_{y \rightarrow 0} \sup \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|z-t|} d\mu(t) \leq \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu(t). \end{aligned}$$

Но при  $\varepsilon \rightarrow 0$   $\int_{E_\varepsilon} \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu(t) \rightarrow \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu(t)$  независимо от того, конечное или бесконечное значение имеет последний интеграл. Поэтому  $\liminf_{y \rightarrow 0} \int_{-1}^1$  и  $\limsup_{y \rightarrow 0} \int_{-1}^1$  должны совпадать и иметь значение, одинаковое

$$с \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu(t).$$

Перейдем к изучению  $u_n(x) = \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu_n(t)$ . Если  $x = x_k^{(n)}$ , то полагаем  $u_n(x) = \infty$ .

**Лемма 3.** Почти везде на отрезке  $-1 \leq x \leq 1$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu_n(t) = \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu(t). \quad (12.2.12)$$

**Доказательство.** По определению функции  $\ln_N x$  верно неравенство

$$\int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu_n(t) \geq \int_{-1}^1 \ln_N \frac{1}{|x-t|} d\mu_n(t).$$

Предельный переход при  $n \rightarrow \infty$  дает

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu_n(t) \geq \int_{-1}^1 \ln_N \frac{1}{|x-t|} d\mu(t).$$

Ввиду того, что полученное неравенство верно при всяких  $N$ , отсюда следует

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu_n(t) \geq \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu(t). \quad (12.2.13)$$

Найдем теперь оценку сверху величины, стоящей слева в (12.2.13).

Функция  $\int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu_n(t)$  ограничена снизу числом  $\ln \frac{1}{2}$  и при любых  $\alpha, \beta \in [-1, 1]$ , ввиду теоремы Фату, верны неравенства:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu_n(t) dx &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu_n(t) = \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 d\mu_n(t) \int_{\alpha}^{\beta} \ln \frac{1}{|x-t|} dx. \end{aligned}$$

В последнем интеграле допустим предельный переход под знаком интеграла, так как  $\int_{\alpha}^{\beta} \ln \frac{1}{|x-t|} dx$  есть непрерывная функция  $t$ :

$$\int_{\alpha}^{\beta} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu_n(t) dx \leq \int_{-1}^1 d\mu(t) \int_{\alpha}^{\beta} \ln \frac{1}{|x-t|} dx.$$

Функция  $\ln \frac{1}{|x-t|}$  ограничена снизу числом  $\ln \frac{1}{2}$  и, на основании теоремы Фубини, в правой части неравенства можно изменить порядок интегрирования

$$\int_{\alpha}^{\beta} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu_n(t) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} dx \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu(t).$$

Неравенство верно при всяких  $\alpha, \beta \in [-1, 1]$ . Следовательно, почти везде на  $-1 \leq x \leq 1$  должно быть

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu_n(t) \leq \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu(t) \dots \quad (12.2.13^*)$$

Из сравнения (12.2.13) и (12.2.13\*) сразу же вытекает утверждение леммы 3.

Обозначим  $E$  множество точек на  $[-1, 1]$ , в которых выполняется (12.2.11) и, кроме того, интеграл  $\int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x-t|} d\mu(t)$  конечен;  $E$  отличается от отрезка  $[-1, 1]$  разве лишь на множество меры нуль.

**Лемма 4.** Если матрица  $X$  такова, что при  $n$ , пробегающем указанные выше значения, остаток интерполирования  $r_n(x)$  стремится

к нулю при любом  $x \in [-1, 1]$  и для любой функции вида  $f = \frac{1}{x - \alpha}$ , где  $\alpha$  лежит вне отрезка  $[-1, 1]$ , то потенциал (12.2.10) сохраняет постоянные значения на множестве  $E$ .

**Доказательство.** Допустим противоположное и покажем, что тогда на верное существует функция вида  $f = \frac{1}{x - \alpha}$ , для которой остаток интерполирования не будет стремиться к нулю. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  два значения, принадлежащие  $E$ , для которых (12.2.10) принимает разные значения. Для определенности записи будем считать  $u(x_1) < u(x_2)$ . Обозначим  $u(x_2) - u(x_1) = \delta$  и возьмем произвольное  $\varepsilon < \delta$ . Рассмотрим прямую линию, проходящую через точку  $x_2$  параллельно мнимой оси. При приближении точки  $z$  вдоль этой прямой к  $x_2$   $u(z)$  будет стремиться к  $u(x_2)$  по лемме 2. Попутно отметим, что при приближении  $z$  к  $x_2$   $\ln \frac{1}{|z - t|}$  для всякого  $t$  будет возрастать. Так как, кроме того,  $\mu(t)$  есть неубывающая функция, то при приближении  $z$  к  $x_2$   $u(z)$  также будет возрастать.

На взятой прямой существует, следовательно, такая точка  $z_2 \neq x_2$ , что  $u(x_2) - \frac{1}{3}\varepsilon < u(z_2) < u(x_2)$ . Фиксируем  $z_2$  и построим функцию  $f(x) = \frac{1}{x - z_2}$ . Остаток интерполирования ее есть

$$r_n(x) = r_n\left(\frac{1}{x - z_2}, x\right) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n(z_2)(x - z_2)}.$$

Значение остатка в точке  $x = x_1$  равно

$$\begin{aligned} r_n(x_1) &= \frac{\omega_n(x_1)}{\omega_n(z_2)(x_1 - z_2)}, \\ |r_n(x_1)| &= \frac{1}{|x_1 - z_2|} \frac{|\omega_n(x_1)|}{|\omega_n(z_2)|} = \\ &= \frac{1}{|x_1 - z_2|} \exp n \left[ \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|z_2 - t|} d\mu_n(t) - \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|x_1 - t|} d\mu_n(t) \right] = \\ &= \frac{1}{|x_1 - z_2|} e^{n[u_n(z_2) - u_n(x_1)]}. \end{aligned}$$

По лемме 3, существует бесконечная последовательность значений  $n$ , для которых

$$|u_n(x_1) - u(x_1)| < \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Поэтому на верное существует также бесконечное множество  $n$ , для которых

$$\begin{aligned} u_n(z_2) - u_n(x_1) &= u(z_2) - u(x_1) - [u(z_2) - u_n(z_2)] - [u_n(x_1) - u(x_1)] > \\ &> \delta - \frac{1}{3}\varepsilon - \frac{1}{3}\varepsilon - \frac{1}{3}\varepsilon = \delta - \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Для таких  $n$

$$|r_n(x_1)| > \frac{1}{|x_1 - z_2|} e^{n(\delta - \varepsilon)}$$



и интерполирование функции  $f = \frac{1}{x - z_2}$  в точке  $x_1$ , следовательно, расходится.

В доказываемой теореме считалось, что интерполирование сходится на отрезке  $[-1, 1]$  для всякой функции, аналитической на  $[-1, 1]$ . В частности это будет для функций вида  $f = \frac{1}{x - \alpha}$ ,  $\alpha \notin [-1, 1]$  и, в условиях этой теоремы,  $u(x)$  также будет сохранять постоянное значение на  $E$ , и, следовательно, почти везде на  $[-1, 1]$ .

Чтобы завершить доказательство теоремы, нам осталось еще доказать следующую лемму.

**Лемма 5.** Если логарифмический потенциал (12.2.10) почти везде на  $[-1, 1]$  сохраняет постоянное значение, то  $\mu(t)$  есть функция распределения Чебышёва:

$$\mu(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

**Доказательство.** Рассмотрим потенциал

$$u(z) = \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|z-t|} d\mu(t) \quad (12.2.14)$$

всюду в плоскости  $z$ . С целью воспользоваться для доказательства леммы известными теоремами теории интеграла Пуассона и тригонометрических рядов, перейдем от плоскости  $z$  к кругу.

Проведем в плоскости  $z$  разрез по прямолинейному отрезку  $[-1, 1]$  и будем различать два борта разреза. Преобразуем (12.2.14) в интеграл, взятый по контуру  $\lambda$ , состоящему из обоих бортов разреза. Для этого достаточно представить (12.2.14) в форме

$$u(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \ln \frac{1}{|z-t|} d\mu(t) - \frac{1}{2} \int_1^{-1} \ln \frac{1}{|z-t|} d\mu(t)$$

и ввести функцию  $v(t)$ , определив ее на  $\lambda$  равенствами

$$v(t) = \begin{cases} 0.5\mu(t) & \text{на верхнем борте разреза,} \\ 1 - 0.5\mu(t) & \text{на нижнем борте разреза.} \end{cases} \quad (12.2.15)$$

Тогда

$$u(z) = \int_{\lambda} \ln \frac{1}{|z-t|} dv(t). \quad (12.2.16)$$

Интегрирование по верхнему борту выполняется от точки  $-1$  к  $1$  и по нижнему борту — в обратном направлении.

В плоскости  $\xi = re^{i\varphi}$  возьмем круг  $|\xi| \leq 1$ . Он преобразуется на плоскость  $z$  с разрезом  $[-1, 1]$  при помощи функции

$$z = \frac{1}{2}(\xi + \xi^{-1}).$$

Точка  $\tau = e^{i\psi}$  окружности перейдет в точку  $t = \frac{1}{2}(\tau + \tau^{-1}) = \frac{1}{2}(e^{i\psi} + e^{-i\psi}) = \cos \psi$ . Изменению  $\psi$  от  $-\pi$  до  $\pi$  будет отвечать обход контура  $\lambda$  в указанном выше направлении. Функция  $v(t)$ , определенная на  $\lambda$ , перейдет в функцию

$$v(t) = v(\cos \psi) = F(\psi), \quad -\pi \leq \psi \leq \pi$$

полярного угла  $\psi$ .

Контурный интеграл (12.2.16) при переходе к плоскости  $\zeta$  преобразуется в следующий интеграл по окружности круга

$$\begin{aligned} u(z) &= \int_{-\pi}^{\pi} \ln \left| \frac{2\zeta}{1 - 2\zeta \cos \psi + \zeta^2} \right| dF(\psi) = \\ &= \ln 2|\zeta| + \int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{1}{|\zeta - e^{i\psi}| | \zeta - e^{-i\psi} |} dF(\psi) = \ln 2|\zeta| + I(\zeta). \end{aligned}$$

$I(\zeta)$  разлагается на сумму двух логарифмических потенциалов, гармонических в круге  $|\zeta| < 1$ .

$$I(\zeta) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{1}{|\zeta - e^{i\psi}|} dF(\psi) + \int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{1}{|\zeta - e^{-i\psi}|} dF(\psi) = I_1(\zeta) + I_2(\zeta).$$

Ввиду равноправности  $I_1(\zeta)$  и  $I_2(\zeta)$ , достаточно изучить только потенциал  $I_1(\zeta)$ . Можно проверить, что функция  $I_1(\zeta)$  представима интегралом Пуассона — Лебега\*). Пусть  $E$  есть любое измеримое множество на от

\*) Функция  $v(\zeta)$  называется представимой интегралом Пуассона — Лебега, если она гармоническая в круге  $|\zeta| < 1$  и если существует такая суммируемая на  $[-\pi, \pi]$  функция  $f(\varphi)$ , что  $v(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\psi - \varphi) + \rho^2} d\psi$ .

Известна теорема: для того, чтобы гармоническая в круге  $|\zeta| < 1$  функция  $v(\zeta)$  была представима интегралом Пуассона — Лебега, необходимо и достаточно, чтобы семейство функций  $F_\rho(\alpha) = \int_0^\alpha v(\rho e^{i\varphi}) d\varphi$  было равномерно абсолютно непрерывно по  $\alpha$ , т. е. чтобы при всех  $\rho < 1$  и  $\varepsilon > 0$  существовало такое число  $\delta(\varepsilon) > 0$ , что для всякого множества  $E$  с мерой  $mE < \delta(\varepsilon)$  было  $\left| \int_E v(\rho e^{i\varphi}) d\varphi \right| < \varepsilon$ . Известно также, что когда точка  $\zeta$

приближается к некоторой точке  $\psi = \psi_0$  окружности по любому пути, некасательному к окружности, то при почти всех значениях  $\psi_0$   $v(\zeta) \rightarrow f(\psi_0)$ . См., например, И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, гл. I, § 3, М. — Л., Гостехиздат, 1950.

резке  $[-\pi, \pi]$  с мерой  $mE \leq \delta$ .

$$\begin{aligned} \int_E I_1(\rho e^{i\varphi}) d\varphi &= \int_E d\varphi \int_{-\pi}^{\pi} \ln \frac{1}{|\rho e^{i\varphi} - e^{i\psi}|} dF(\psi) = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \int_E \ln \frac{1}{|\rho e^{i\varphi} - e^{i\psi}|} d\varphi \right] dF(\psi). \end{aligned}$$

Изменение порядка интегрирования было возможным в силу теоремы Фубини так как функция  $\ln \frac{1}{|\zeta - e^{i\psi}|}$  ограничена снизу числом  $\ln \frac{1}{2}$ . Для внутреннего интеграла верны оценки

$$\left| \int_E \ln \frac{1}{|\rho e^{i\varphi} - e^{i\psi}|} d\varphi \right| \leq \int_E \ln \frac{1}{|\sin(\varphi - \psi)|} d\varphi \leq \int_{-0,5\delta}^{0,5\delta} \ln \frac{1}{|\sin x|} dx.$$

Поэтому наверное для всякого заданного  $\varepsilon > 0$  можно  $\delta(\varepsilon)$  выбрать так, чтобы было

$$\left| \int_E I_1(\rho e^{i\varphi}) d\varphi \right| < \varepsilon, \quad \rho < 1.$$

Отсюда, по известному признаку, указанному в сноске, следует, что  $I_1(\zeta)$  представима интегралом Пуассона — Лебега.  $I_2(\zeta)$ , а, следовательно, и  $I(\zeta)$ , также будут представимы интегралом Пуассона — Лебега.

При приближении точки  $z = x + iy$  к отрезку  $[-1, 1]$  вдоль прямой, параллельной мнимой оси,  $u(z)$  будет почти при всяких  $x$  стремиться к постоянной величине. Указанные прямые, при переходе к кругу  $|\zeta| < 1$ , преобразуются в некоторые пути, ортогональные к окружности  $|\zeta| = 1$ . При приближении вдоль них к границе круга  $u(z)$  почти всюду будет стремиться к постоянной величине, и так как  $\ln 2|\zeta|$  будет при этом стремиться к  $\ln 2$ , то  $I(\zeta)$  будет почти всюду на окружности иметь предельные значения, равные постоянной величине. Ввиду того, что  $I(\zeta)$  представима через интеграл Пуассона — Лебега,  $I(\zeta)$  постоянна всюду в круге. Но, очевидно,  $I(0) = 0$  и, следовательно, всюду в круге  $I(\zeta) = 0$ .

Легко видеть, что разложения функций  $\ln \frac{1}{|\zeta - e^{i\psi}|}$  и  $\ln \frac{1}{|\zeta - e^{-i\psi}|}$ ,

$\zeta = \rho e^{i\varphi}$ , в ряды по степеням  $\rho$  при  $\rho < 1$  суть

$$\ln \frac{1}{|\zeta - e^{i\psi}|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \rho^k \cos k(\varphi - \psi)$$

и

$$\ln \frac{1}{|\zeta - e^{-i\psi}|} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \rho^k \cos k(\varphi + \psi).$$

Поэтому

$$I(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \rho^k [\cos k(\varphi - \psi) + \cos k(\varphi + \psi)] dF(\psi) =$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \rho^k \cos k\varphi \int_{-\pi}^{\pi} \cos k\psi dF(\psi) = 0.$$

Отсюда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos k\psi dF(\psi) = F(\psi) \cos k\psi \Big|_{-\pi}^{\pi} + k \int_{-\pi}^{\pi} F(\psi) \sin k\psi d\psi =$$

$$= (-1)^k [F(\pi) - F(-\pi)] + k\pi b_k = 0,$$

Здесь  $b_k$  обозначен коэффициент Фурье при  $\sin k\psi$  функции  $F(\psi)$ .  $F(\pi) = 1$ ,  $F(-\pi) = 0$ , следовательно

$$b_k = -\frac{(-1)^k}{k\pi}.$$

Из определений функции  $v(t)$  и  $F(\psi)$  видно, что

$$F(\psi) = \begin{cases} 0,5\mu(\cos \psi), & -\pi \leq \psi \leq 0, \\ 1 - 0,5\mu(\cos \psi), & 0 \leq \psi \leq \pi. \end{cases}$$

Четная часть  $F(\psi)$  есть

$$0,5[F(\psi) + F(-\psi)] = 0,5.$$

Коэффициенты Фурье  $a_k$  при  $\cos k\psi$  для  $F(\psi)$  будут иметь значения

$$a_0 = 0,5, \quad a_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Таким образом, для  $F(\psi)$  получим

$$F(\psi) = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\pi} \sin k\psi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \psi.$$

Если вернуться к плоскости  $z$  и переменной  $t = \cos \psi$ , то несложные вычисления покажут, что

$$\mu(t) = 1 - \frac{1}{\pi} \arccos t = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Этим теорема доказана.

Сходная с ней теорема в теории квадратур приведена ниже.

**Теорема 7.** Если интерполяционный квадратурный процесс, определяемый равенствами (12.2.1) при  $[a, b] = [-1, 1]$ , сходится при всякой функции  $\sigma(x)$  с ограниченным изменением и для любой функции  $f(x)$ , аналитической на  $[-1, 1]$ , то для матрицы узлов  $X$  существует предельная функция распределения узлов и она совпадает с (12.2.6).

Доказательство. Рассмотрим остаток квадратуры

$$R_n(f) = \int_{-1}^1 r_n(x) d\sigma(x).$$

Здесь  $r_n(x)$  есть остаток интерполирования. Возьмем произвольную точку  $x$  на  $[-1, 1]$ . За  $\sigma$  примем кусочно постоянную функцию с единственным скачком величины 1 в точке  $x$ . Для такой  $\sigma$   $R_n(f) = r_n(x)$  и сходимость квадратурного процесса равносильна сходимости интерполирования. После этого, чтобы закончить доказательство, достаточно сослаться на предыдущую теорему.

### § 3. Сходимость общего квадратурного процесса

Перейдем к изучению общего квадратурного процесса (12.1.3), определяемого матрицей узлов (12.1.1) и матрицей коэффициентов (12.1.2). Вес  $p(x)$  может быть любой суммируемой функцией. Будем считать, что задан некоторый класс  $F$  функций  $f$ . Нашей целью будет выяснить условия, которым следует подчинить  $X$  и  $A$  для того, чтобы квадратурный процесс сходил для всех функций заданного класса. Такая задача изучалась для многих классов  $F$ . Мы остановимся лишь на некоторых результатах исследований такого рода, наиболее простых и важных для теории квадратур.

Всюду в рамках этого параграфа отрезок интегрирования считается конечным.

**Теорема 8.** *Для того чтобы квадратурный процесс (12.1.3) сходил для всякой функции  $f$ , непрерывной на отрезке  $[a, b]$ , необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

- 1) *процесс сходится для всякого многочлена;*
- 2) *существует число  $K$  такое, что при  $n = 1, 2, \dots$  выполняется неравенство \*):*

$$\sum_{k=1}^n |A_k^{(n)}| \leq K. \quad (12.3.1)$$

Доказательство. Если на множестве функций непрерывных на  $[a, b]$  определить норму следующим способом:  $\|f\| = \max_{[a, b]} |f(x)|$ , то такое множество мы можем рассматривать как линейное нормированное пространство  $C$  типа  $B$ . Квадратурная сумма  $Q_n(f) = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$  и интеграл  $I(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx$  есть два линейных функционала, определенных на  $C$ . Значения  $Q_n(f)$  и  $I(f)$

\*) Достаточность условий была доказана В. А. Стекловым, необходимость — Г. Поля.

принадлежат числовому пространству, которое также является пространством типа  $B$ .

К задаче выяснения условий сходимости квадратурного процесса  $Q_n(f) \rightarrow I(f)$ ,  $n \rightarrow \infty$ , может быть применена теорема С. Банаха о сходимости последовательности линейных операторов (см. гл. 4 § 3). Напомним, что необходимым и достаточным условием сходимости является выполнение двух требований: 1) сходимость на множестве элементов, всюду плотном в пространстве, где определены операторы, и 2) ограниченность в совокупности норм операторов.

За множество всюду плотное в  $C$ , по теореме Вейерштрасса о возможности сколь угодно точного равномерного приближения всякой непрерывной функции многочленами, может быть принято множество алгебраических многочленов и первым требованием в рассматриваемой задаче будет требование сходимости квадратурного процесса для всякого многочлена.

Норма функционала  $Q_n(f)$  имеет значение

$$\|Q_n\| = \sup_{|f| \leq 1} \left| \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \right| = \sum_{k=1}^n |A_k^{(n)}|.$$

Выполнение неравенства (12.3.1) есть требование ограниченности в совокупности норм функционалов  $Q_n(f)$ . Высказанная теорема этим доказана.

Две сформулированные ниже теоремы являются простыми следствиями теоремы 8.

**Теорема 9.** *Если все коэффициенты  $A_k^{(n)}$  неотрицательны, то для сходимости квадратурного процесса для любой непрерывной функции необходимо и достаточно, чтобы он сходиллся для всякого многочлена.*

**Доказательство.** Необходимость условия теоремы очевидна. Достаточность же условия видна из того, что для многочлена нулевой степени  $f = 1$  должно быть

$$Q_n(1) \rightarrow \int_a^b p \, dx, \quad n \rightarrow \infty.$$

Поэтому значения  $Q_n(1)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ограничены:  $Q_n(1) \leq K$ . Но

$$\sum_{k=1}^n |A_k^{(n)}| = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} = Q_n(1) \leq K,$$

и поэтому выполняется не только первое, но и второе условие теоремы 8 и процесс сходится для всякой непрерывной функции.

**Теорема 10.** Для сходимости интерполяционного квадратурного процесса для любой непрерывной функции необходимо и достаточно выполнение неравенства  $\sum_{k=1}^n |A_k^{(n)}| \leq K < \infty$ .

Второе условие теоремы 8 является также условием теоремы 10, первое же условие наверное выполнено, так как если  $f$  есть многочлен, то когда  $n$  станет больше степени многочлена, будет выполняться равенство  $Q_n(f) = \int_a^b p f dx$ .

Выясним теперь условия сходимости квадратурного процесса в классах дифференцируемых функций.

Условимся, как выше, нумеровать узлы в порядке роста и введем кусочно постоянную функцию  $F_{n0}(x)$ , характеризующую распределение узлов и значения коэффициентов:  $F_{n0}(x) = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} E(x - x_k^{(n)})$ .

Наряду с ней будем рассматривать первообразные функции любого порядка  $r$ , удовлетворяющие начальным условиям  $F_{nr}^{(j)}(a) = 0$  ( $j = 0, 1, \dots, r-1$ ):

$$F_{nr}(x) = \int_a^x F_{n0}(t) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} E(x - x_k^{(n)}) \frac{(x - x_k^{(n)})^r}{r!}. \quad (12.3.2)$$

**Теорема 11.** Для того чтобы квадратурный процесс (12.1.3) при  $n \rightarrow \infty$  сходилась для всякой функции  $f \in C_r[a, b]$ , необходимо и достаточно выполнение условий:

- 1) процесс сходится для всякого многочлена;
- 2) полные вариации первообразных функций порядка  $r$   $F_{nr}(x)$

( $n = 1, 2, \dots$ ) ограничены в совокупности:  $\text{Var}_a^b F_{n,r}(t) \leq M$ .

Доказательство. Если  $f \in C_r[a, b]$  при  $r \geq 1$ , то, разлагая  $f$  по формуле Тейлора около точки  $b$ , мы сможем представить функцию в форме

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(b)}{i!} (x-b)^i + \int_b^x f^{(r)}(t) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dt = \\ &= \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(b)}{i!} (x-b)^i + (-1)^r \int_a^b f^{(r)}(t) E(t-x) \frac{(t-x)^{r-1}}{(r-1)!} dt. \end{aligned}$$

Наоборот, каковы бы ни были числа  $f^{(i)}(b)$  и непрерывная на  $[a, b]$  функция  $f^{(r)}(t)$ ,  $f(x)$ , определенная такой формулой, принадлежит  $C_r[a, b]$ .

Остаток квадратуры  $R_n(f)$  дается следующей формулой, характерной для класса  $C_r[a, b]$ :

$$\begin{aligned}
 R_n(f) = & \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(b)}{i!} R_n[(x-b)^i] + \\
 & + (-1)^r \int_a^b f^{(r)}(t) \left[ \int_a^b p(x) E(t-x) \frac{(t-x)^{r-1}}{(r-1)!} dx - \right. \\
 & \left. - \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} E(t-x_k^{(n)}) \frac{(t-x_k^{(n)})^{r-1}}{(r-1)!} \right] dt = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{f^{(i)}(b)}{i!} R_n[(x-b)^i] + \\
 & + (-1)^r \int_a^b f^{(r)}(t) \left[ \int_a^t p(x) \frac{(t-x)^{r-1}}{(r-1)!} dx - F_{n,r-1}(t) \right] dt \dots \quad (12.3.3)
 \end{aligned}$$

Сходимость квадратурного процесса, ввиду независимости параметров формулы  $f^{(i)}(b)$  ( $i=0, 1, \dots, r-1$ ) и  $f^{(r)}(t)$ , равносильна тому, что при  $n \rightarrow \infty$

$$R_n[(x-b)^i] \rightarrow 0 \quad (i=0, 1, \dots, r-1) \quad (12.3.4)$$

и

$$R_n^*(f^{(r)}) = \int_a^b f^{(r)}(t) \left[ \int_a^t p(x) \frac{(x-t)^{r-1}}{(r-1)!} dx - F_{n,r-1}(t) \right] dt \rightarrow 0. \quad (12.3.5)$$

(12.3.4) означают, что квадратурный процесс должен сходиться для всякого многочлена степени  $\leq r-1$ .

Условие (12.3.5) должно выполняться при любой непрерывной функции  $f^{(r)}$ . Если на множестве функций  $f^{(r)}$  ввести норму  $\|f^{(r)}\| = \max_t |f^{(r)}(t)|$ , то мы можем его рассматривать как пространство  $C$ . По теореме Банаха стремление  $R_n^*(f^{(r)})$  к нулю при  $n \rightarrow \infty$  равносильно выполнению двух требований:

1. Функционал  $R_n^*(f^{(r)})$  должен стремиться к нулю на множестве элементов, всюду плотном в  $C$ . За такое множество можно принять множество многочленов. Но требование  $R_n^*(f^{(r)}) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , когда  $f^{(r)}$  есть полином любой степени, совместно с (12.3.4) эквивалентно тому, что квадратурный процесс должен сходиться для всякого многочлена.

2. Нормы функционалов  $R_n^*(f^{(r)})$  ( $n=1, 2, \dots$ ) должны быть ограничены в совокупности:

$$\|R_n^*\| = \int_a^b \left| \int_a^t p(x) \frac{(t-x)^{r-1}}{(r-1)!} dx - F_{n,r-1}(t) \right| dt \leq L \quad (n=1, 2, \dots).$$



Заметив, что  $\int_a^b \left| \int_a^t p \frac{(t-x)^{r-1}}{(r-1)!} dx \right| dt$  не зависит от  $n$ , можем

сказать, что ограниченность норм  $\|R_n^*\|$  равносильна ограниченности в совокупности интегралов от  $|F_{n,r-1}(t)|$ :

$$\int_a^b |F_{n,r-1}(t)| dt \leq M \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Так как  $\frac{d}{dt} F_{n,r}(t) = F_{n,r-1}(t)$ , последние неравенства означают

$$\text{Var}_a^b F_{n,r}(t) \leq M \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Можно убедиться в том, что все изложенное остается верным и в случае  $r = 0$ . Этим закончено доказательство теоремы 11.

Отметим частный случай теоремы. Рассмотрим класс непрерывно дифференцируемых функций на  $[a, b]$ , что отвечает случаю  $r = 1$ .  $F_{n0}(t)$  есть кусочно постоянная функция, принимающая на участках между узлами  $x_k^{(n)}$  указываемые ниже значения:

$$F_{n0}(t) = \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} E(t - x_k^{(n)}) = \begin{cases} 0 & \text{при } a \leq t < x_1^{(n)} \\ A_1^{(n)} & \text{при } x_1^{(n)} < t < x_2^{(n)} \\ A_1^{(n)} + A_2^{(n)} & \text{при } x_2^{(n)} < t < x_3^{(n)} \\ \dots & \dots \\ A_1^{(n)} + \dots + A_n^{(n)} & \text{при } x_n^{(n)} < t \leq b. \end{cases}$$

Отсюда видно, что

$$\begin{aligned} \text{Var}_a^b F_{n1}(t) &= \int_a^b |F_{n0}(t)| dt = |A_1^{(n)}| (x_2^{(n)} - x_1^{(n)}) + \\ &+ |A_1^{(n)} + A_2^{(n)}| (x_3^{(n)} - x_2^{(n)}) + \dots + |A_1^{(n)} + \dots + A_n^{(n)}| (b - x_n^{(n)}). \end{aligned}$$

Поэтому можно высказать следующую теорему:

**Теорема 12.** Для того чтобы квадратурный процесс (12.1.3) сходил для любой непрерывно дифференцируемой функции, необходимо и достаточно выполнение условий:

1) процесс сходится для всякого многочлена;

2) существует число  $M$  такое, что при  $n = 1, 2, \dots$  выполняются неравенства

$$|A_1^{(n)}|(x_2^{(n)} - x_1^{(n)}) + |A_1^{(n)} + A_2^{(n)}|(x_3^{(n)} - x_2^{(n)}) + \dots \\ \dots + |A_1^{(n)} + \dots + A_n^{(n)}|(b - x_n^{(n)}) \leq M. \quad (12.3.6)$$

Будем говорить, что  $f$  принадлежит классу  $A_r[a, b]$  ( $r = 0, 1, \dots$ ), если производная  $f^{(r)}$  порядка  $r$  от  $f$  есть абсолютно непрерывная функция.

Характерное представление  $f \in A_r[a, b]$  без труда строится при помощи формулы Тейлора и может быть записано в виде:

$$f(x) = \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}(b)}{i!} (x-b)^i + \int_b^x f^{(i+1)}(t) \frac{(x-t)^r}{r!} dt = \\ = \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}(b)}{i!} (x-b)^i + (-1)^{r+1} \int_a^b f^{(r+1)}(t) E(t-x) \frac{(t-x)^r}{r!} dt. \quad (12.3.7)$$

Здесь  $f^{(i)}(b)$  ( $i = 0, 1, \dots, r$ ) могут быть любыми числами и  $f^{(r+1)}$  есть произвольная функция, суммируемая на  $[a, b]$ .

**Теорема 13.** Для сходимости квадратурного процесса (12.1.3) при всякой функции  $f \in A_r[a, b]$  необходимо и достаточно выполнение условий:

- 1) процесс сходится для всякого многочлена,
- 2) первообразные функции  $F_{nr}(t)$  порядка  $r$  для  $F_{n0}(t)$  ограничены в совокупности:

$$|F_{nr}(t)| \leq M, \quad a \leq x \leq b \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (12.3.8)$$

**Доказательство.** Если  $f \in A_r[a, b]$ , для остатка квадратуры  $R_n(f)$  при помощи (12.3.7), легко получается выражение

$$R_n(f) = \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}(b)}{i!} R_n[(x-b)^i] + \\ + (-1)^{r+1} \int_a^b f^{(r+1)}(t) \left\{ \int_a^t p(x) \frac{(t-x)^r}{r!} dx - F_{nr}(t) \right\} dt.$$

Это равенство является структурной формулой остатка  $R_n(f)$  для функций  $f \in A_r[a, b]$ . Сходимость квадратурного процесса в классе  $A_r[a, b]$ , ввиду произвола чисел  $f^{(i)}(b)$  ( $i = 0, 1, \dots, r$ ) и функций  $f^{(r+1)}$ , равносильна тому, что должно быть

$$R_n[(x-b)^i] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (i = 0, 1, \dots, r) \quad (12.3.9)$$

и

$$R_n^*(f^{(r+1)}) = \int_a^b f^{(r+1)}(t) \left\{ \int_a^t p(x) \frac{(t-x)^r}{r!} dx - F_{nr}(t) \right\} dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (12.3.10)$$

Дальнейшие рассуждения будут в значительной мере повторять те, которые были проделаны при доказательстве теоремы 8. Введем на множестве производных  $f^{(r+1)}$  норму

$$\|f^{(r+1)}\| = \int_a^b |f^{(r+1)}(t)| dt.$$

После этого оно станет нормированным пространством  $L$  типа  $B$ . К сходимости функционала  $R_n^*(f^{(r+1)}) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , применима теорема С. Банаха. За множество всюду плотное в  $L$  можно принять множество многочленов. Требование стремления  $R_n^*(f^{(r+1)})$  для всякого многочлена  $f^{(r+1)}$ , совместно с (12.3.9), равносильно требованию сходимости квадратурного процесса для любых многочленов. Норма функционала  $R_n^*(f^{(r+1)})$  имеет значение (см. гл. 4, § 2 (4.2.6))

$$\|R_n^*\| = \max_t \left| \int_a^t p(x) \frac{(t-x)^r}{r!} dx - F_{nr}(t) \right|.$$

Интеграл  $\int_a^t p(x) \frac{(t-x)^r}{r!} dx$  не зависит от  $n$  и требование ограниченности в совокупности норм  $\|R_n^*\|$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) эквивалентно существованию числа  $M$  такого, что при  $n = 1, 2, \dots$  будет

$$|F_{nr}(t)| \leq M, \quad a \leq t \leq b.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим частный случай  $r=0$  и соответствующий ему класс абсолютно непрерывных функций  $A_0[a, b]$ . Функция  $F_{n0}(t)$  кусочно постоянна и на отрезках  $[a, x_1^{(n)}]$ ,  $[x_1^{(n)}, x_2^{(n)}]$ ,  $\dots$ ,  $[x_n^{(n)}, b]$  принимает значения соответственно равные  $0$ ,  $A_1^{(n)}$ ,  $A_1^{(n)} + A_2^{(n)}$ ,  $\dots$ ,  $A_1^{(n)} + \dots + A_n^{(n)}$ . Применение общей теоремы 13 к рассматриваемому частному случаю позволяет высказать следующую теорему \*).

**Теорема 14.** Для сходимости квадратурного процесса (12.1.3) при всякой функции  $f$ , абсолютно непрерывной на  $[a, b]$ , необходимо и достаточно выполнение двух условий:

- 1) процесс сходится для всякого многочлена,
- 2) частичные суммы квадратурных коэффициентов

$$A_1^{(n)}, A_1^{(n)} + A_2^{(n)}, \dots, A_1^{(n)} + A_2^{(n)} + \dots + A_n^{(n)} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

ограничены в совокупности:

$$\left| \sum_{k=1}^i A_k^{(n)} \right| \leq M < \infty \quad (i = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots). \quad (12.3.11)$$

\* Доказана впервые С. М. Лозинским в немного другой форме. Изв. АН СССР, сер. матем. 4 (1940).

Изучим условия сходимости еще для одного класса функций. Будем говорить, что  $f$  принадлежит классу  $V_r[a, b]$ , если производная порядка  $r$   $f^{(r)}$  имеет ограниченное изменение на  $[a, b]$ . Структурное представление класса  $V_r[a, b]$  для  $r \geq 1$  также может быть получено из формулы Тейлора и его можно записать в виде:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}(b)}{i!} (x-b)^i + \int_b^x \frac{(x-t)^r}{r!} df^{(r)}(t) = \\ &= \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}(b)}{i!} (x-b)^i + (-1)^{(r+1)} \int_a^b E(t-x) \frac{(t-x)^r}{r!} df^{(r)}(t). \end{aligned} \quad (12.3.12)$$

Параметрами здесь являются числа  $f^{(i)}(b)$ , могущие иметь любые значения, и произвольная функция  $f^{(r)}$  с ограниченным изменением на  $[a, b]$ .

**Теорема 15.** Для сходимости квадратурного процесса (12.1.3) в классе  $V_r[a, b]$  при  $r \geq 1$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1. Процесс сходится для всех многочленов степени  $\leq r$ .
2. Первообразные функции  $F_{nr}(x)$  порядка  $r$  для  $F_{n0}(x)$  ограничены в совокупности

$$|F_{nr}(x)| \leq M < \infty, \quad a \leq x \leq b \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (12.3.13)$$

3. При всех значениях  $t \in [a, b]$  должно быть

$$F_{nr}(t) \rightarrow \int_a^t p(x) \frac{(t-x)^r}{r!} dx, \quad n \rightarrow \infty.$$

**Доказательство.** Если  $f \in V_r[a, b]$ , остаток квадратуры  $R_n(f)$  для нее, при помощи формулы (12.3.12), приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} R_n(f) &= \sum_{i=0}^r \frac{f^{(i)}(b)}{i!} R_n[(x-b)^i] + \\ &+ (-1)^{r+1} \int_a^b \left\{ \int_a^t p(x) \frac{(t-x)^r}{r!} dx - F_{nr}(t) \right\} df^{(r)}(t). \end{aligned}$$

Сходимость квадратуры для всех функций из  $V_r[a, b]$ , в силу независимости структурных параметров  $f^{(i)}(b)$  ( $i = 0, 1, \dots, r$ ) и  $f^{(r+1)}(t)$ , равносильна выполнению равенств:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n[(x-b)^i] = 0 \quad (i = 0, \dots, r) \quad (12.3.14)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^*(f^{(r)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left\{ \int_a^t p(x) \frac{(t-x)^r}{r!} dx - F_{nr}(t) \right\} df^{(r)}(t) = 0. \quad (12.3.15)$$

Первое из них означает, что процесс должен сходиться для всех многочленов степени  $\leq r$ . Сосредоточим внимание на втором равенстве. Функционал  $R_n^*(f^{(r)})$  определен на линейном множестве функций ограниченного измене-

ния  $f^{(r)}$ . Не изменяя величины интеграла  $R_n^*(f^{(r)})$ , всегда можно считать, что  $f^{(r)}(a) = 0$ . Введем в этом множестве норму, положив  $\|f^{(r)}\| = \overset{b}{\underset{a}{\text{Var}}} f^{(r)}$ .

После этого указанное множество мы можем рассматривать как линейное пространство  $V$  типа  $B$ . Если  $R_n^*(f^{(r)}) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ , при всяких  $f^{(r)}$  из  $V$ , то, по теореме Банаха, нормы всех функционалов  $R_n^*$  должны быть ограничены в совокупности

$$\|R_n^*\| \leq N \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (12.3.16)$$

Но

$$\|R_n^*\| = \max_t \left| \int_a^t p(x) \frac{(t-x)^r}{r!} dx - F_{nr}(t) \right|.$$

Ввиду же независимости  $\int_a^t p(x) \frac{(t-x)^r}{r!} dx$  от  $n$ , условие (12.3.16) эквивалентно существованию такого числа  $M$ , чтобы было выполнено второе условие теоремы.

Для проверки необходимости третьего условия возьмем произвольное  $x \in [a, b]$  и положим  $f^{(r)}$  кусочно постоянной с единственным скачком величины 1 в точке  $x$ . Для такой  $f^{(r)}$

$$R_n^*(f^{(r)}) = \int_a^x p(u) \frac{(x-u)^r}{r!} du - F_{nr}(x).$$

По взятой  $f^{(r)}$  можно восстановить, с точностью до аддитивного многочлена степени  $n-1$ , который не имеет значения в рассуждениях, функцию  $f$ . Для нее квадратурный процесс должен сходиться и должно быть

$$R_n^*(f^{(r)}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Последнее же означает выполнение третьего условия теоремы.

Этим доказана необходимость всех трех условий. Столь же просто проверяется их достаточность. Первое из условий теоремы равносильно (12.3.14). Осталось убедиться лишь в том, что из второго и третьего условий вытекает (12.3.15). Действительно, из этих условий следует, что функция, стоящая под знаком интеграла Стильеса (12.3.15)

$$\Phi_n(t) = \int_a^t p(x) \frac{(t-x)^r}{r!} dx - F_{nr}(t)$$

ограничена по модулю некоторым числом при любых  $t \in [a, b]$  и  $n = 1, 2, \dots$  и стремится к нулю, когда  $n \rightarrow \infty$ , при всех  $t$ . Если же преобразовать

интеграл Стильеса к интегралу Лебега по обычным правилам, то при помощи известных теорем о предельном переходе в интеграле Лебега \*) можно убедиться в том, что равенство (12.3.15) верно.

## Л и т е р а т у р а

Натансон И. П., Конструктивная теория функций, ч. III, гл. V, М. — Л., Гостехиздат, 1949.

Геронимус Я. Л., Теория ортогональных многочленов, гл. II, §§ 27—28, М. — Л., Гостехиздат, 1950.

Стеклов В. А. 1) О приближенном вычислении определенных интегралов при помощи формул механических квадратур, Изв. АН 6 (1916), 10. 2) Sur l'approximation des fonctions à l'aide des polynomes de Tchebycheff et sur les quadratures, Изв. АН (1917), 11. 3) Remarques sur les quadratures, Изв. АН 12 (1918).

Кузьмин Р. О., К теории механических квадратур, Изв. Ленингр. Политехн. ин-та, Отд. техн., естеств. и матем. 33, (1931).

Пойа (Polya), Über die Konvergenz von Quadraturverfahren, Math. Z. 37, (1933), 264—286.

Микеладзе Ш., Численное интегрирование, УМН 3 (1948).

Лозинский С. М., О формулах механических квадратур, Изв. АН 4 (1940).

Крылов В. И. 1) Об определении наименьшей области, голоморфность в которой обеспечивает сходимость эрмитовского интерполирования при любой системе узлов, ДАН 78, № 5 (1951). 2) Сходимость механических квадратур в классах функций различного порядка дифференцируемости, ДАН 101, № 5 (1955).

\*) Известна, например, следующая теорема: Если функции  $f_n(x)$  измеримы на  $[a, b]$  и при всех  $n$   $|f_n(x)| \leq N < \infty$  и если почти везде на  $[a, b]$   $f_n(x) \rightarrow f(x)$ ,  $n \rightarrow \infty$ , то

$$\int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx.$$

## ГЛАВА 13

### УВЕЛИЧЕНИЕ ТОЧНОСТИ КВАДРАТУРЫ И УСКОРЕНИЕ СХОДИМОСТИ КВАДРАТУРНОГО ПРОЦЕССА

#### § 1. О двух направлениях в задаче увеличения точности

Пусть рассматривается некоторая вполне определенная квадратурная формула

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (13.1.1)$$

Весовая функция  $p(x)$ , коэффициенты  $A_k$  и узлы  $x_k$  предполагаются фиксированными;  $f$  есть любая функция, для которой имеют смысл обе части приближенного равенства (13.1.1).

Нас сейчас будет интересовать остаток формулы (13.1.1)

$$R(f) = \int_a^b p f dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (13.1.2)$$

Увеличить точность приближенной квадратуры — это значит выделить из остатка  $R(f)$  такую его часть, которую можно, при выполнении некоторых условий, считать «главной частью» и добавить ее к квадратурной сумме  $\sum_k A_k f(x_k)$ .

Величина остатка  $R(f)$  зависит как от вида квадратурной формулы, т. е. от  $p(x)$ ,  $A_k$  и  $x_k$ , так и от свойств интегрируемой функции  $f$ . От них должны зависеть также и правила увеличения точности. Можно строить такие правила, рассчитанные на классы квадратурных формул, близких по своим свойствам, или же на классы функций, обладающих некоторыми общими структурными свойствами.

Задача увеличения точности ниже будет рассматриваться в двух следующих направлениях.

1. Большинство применяемых в практических вычислениях формул механических квадратур рассчитаны на интегрирование функций,

обладающих той или иной степенью гладкости. Так, например, можно ожидать, что формула парабол

$$\int_a^b f dx \approx \frac{h}{3} [f_0 + f_n + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{n-2}) + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{n-1})],$$

$$h = \frac{b-a}{n},$$

даст при вычислениях хороший по точности результат, если интегрируемая функция  $f$  будет непрерывной на всем отрезке  $[a, b]$  и на каждом двоекном отрезке  $[a, a+2h]$ ,  $[a+2h, a+4h]$ , ... может быть достаточно точно приближена многочленом второй или третьей степени.

Аналогично, при применении квадратурной формулы наивысшей алгебраической степени точности с  $n$  узлами

$$\int_a^b f dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

можно наверное рассчитывать получить результат, близкий к истинному значению, если функция  $f$  допускает хорошее приближение на всем отрезке интегрирования  $[a, b]$  алгебраическим многочленом степени  $2n-1$ .

Применить формулы вида (13.1.1) к вычислению несобственных интегралов от неограниченных функций не всегда возможно, так как одно

или несколько значений  $f(x_k)$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) в сумме  $\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$

могут оказаться бесконечными. Но даже если применение формулы будет возможным, то погрешность ее может иметь большие значения. С большой погрешностью можно встретиться также при применении таких квадратурных формул к вычислению интегралов от непрерывных функций, у которых одна из производных невысокого порядка будет неограниченной. Аналогичное может обнаружиться и при интегрировании аналитических функций, если их особые точки лежат вблизи отрезка  $[a, b]$ .

Заметное улучшение точности вычисления интеграла здесь может принести особый прием предварительного преобразования интегрируемой функции, который может быть назван методом ослабления особенности. Мы должны разбить интегрируемую функцию  $f(x)$  на два слагаемых  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$  так, чтобы  $f_1(x)$  содержала в себе «все» особенности функции  $f(x)$  или «главную часть» этих особенностей. При этом функция  $f_1(x)$  должна быть такой, чтобы

интеграл  $\int_a^b p(x) f_1(x) dx$  легко вычислялся точно. Функция же  $f_2(x)$



не должна иметь особенностей, или, по меньшей мере, ее особенности должны быть настолько «слабее» особенностей  $f(x)$ , чтобы интеграл  $\int_a^b p f_2 dx$  мог быть с достаточной точностью вычислен по одной из формул приближенных квадратур.

Способы выделения и ослабления особенностей функций многообразны и некоторые из них будут рассмотрены в следующем параграфе.

2. Квадратурные формулы, обычно, позволяют найти интеграл с любой точностью, если взять достаточно большое число узлов  $n$ . Когда заранее указана точность вычисления, то определить, сколько следует взять узлов для того, чтобы достигнуть такой точности, можно, принципиально говоря, если воспользоваться известными в теории квадратур оценками остатка  $R(f)$ . Но следует иметь в виду, что такие оценки обычно бывают рассчитаны на широкие классы функций и не учитывают индивидуальные свойства интегрируемой функции  $f$ . Поэтому оценки будут давать, как правило, преувеличенное значение для числа узлов и найденное так значение  $n$  можно, по-видимому, принять только как ориентировочное.

При составлении плана вычислений обычно назначают число узлов  $n$ , приняв во внимание не только указанную оценку, но и многие другие соображения, в частности пользуются уже накопленным вычислительным опытом, аналогией с другими интегралами, или выполняют вычисления двумя различными способами и т. д. При этом для назначенного  $n$  можно часто лишь ожидать, что погрешность не будет превосходить предписанного значения, но неоспоримой убежденности в этом может не быть. Тогда возникает потребность в проверке полученного результата\*) и в увеличении его точности, если она окажется меньшей, чем требуемая.

Интегрируемая функция  $f$  считается сейчас достаточно «гладкой», так что большое значение погрешности  $R(f)$  квадратуры может быть вызвано только недостаточной точностью взятой квадратурной формулы.

Для увеличения точности формулы мы должны определить какое дополнительное слагаемое следует добавить к правой части приближенного равенства (13.1.1) для того, чтобы новая квадратурная формула, полученная после этого, имела точность, большую чем (13.1.1).

Этот новый член формулы должен, очевидно, быть главной частью остатка  $R(f)$ . Но одним только этим условием он не вполне определяется, так как из  $R(f)$  можно выделить много «главных частей», отличающихся между собой «малыми» слагаемыми. Среди

---

\*) Проверка точности результата часто является трудной задачей. Методы такой проверки в книге не рассматриваются.

дополнительных условий, определяющих разыскиваемую главную часть, должны обязательно находиться условия ее эффективной вычислимости и простоты.

Методы выделения главной части должны быть связаны со свойствами остатка и с некоторыми методами такого рода мы ознакомимся в следующих параграфах настоящей главы.

Допустим теперь, что каким-либо путем новый член формулы (13.1.1) был найден. Если добавление его к квадратурной сумме исправит прежний результат до требуемой точности, то на этом улучшение формулы заканчивается. Если же на первом шаге требуемая точность не будет достигнута, то следует найти остаток вновь построенной квадратурной формулы и из него в свою очередь выделить главную часть и т. д.

Так как, вообще говоря, нельзя заранее сказать, сколько необходимо выполнить таких шагов для получения желаемого результата, нужно для остатка (13.1.2) исходной формулы построить ряд из «главных частей» последовательных порядков.

## § 2. Ослабление особенности интегрируемой функции

Как говорилось в § 1, улучшение точности квадратуры при помощи ослабления особенности основано на таком разложении интегрируемой функции  $f$  на две части  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ , чтобы функция  $f_1$  содержала все, или «почти все» особенности  $f$  и интеграл от нее  $\int_a^b p f_1 dx$  находился точно, а интеграл от второй части  $\int_a^b p f_2 dx$  мог быть вычислен механическими квадратурами с достаточно малой погрешностью.

Правила разложения  $f$  зависят от характера особенностей этой функции и веса  $p(x)$ . Мы ограничимся тем, что рассмотрим несколько простых случаев такого разложения.

1. Пусть дан интеграл

$$\int_a^b (x - x_1)^\alpha \varphi(x) dx, \quad (13.2.1)$$

где  $x_1$  есть некоторая точка, лежащая на отрезке  $[a, b]$ , или вблизи него. Для определенности изложения будем считать, что  $x_1$  принадлежит  $[a, b]$ . Показатель степени  $\alpha$  предположим большим  $-1$  и отличным от целого числа. Кроме того, допустим, что функция  $\varphi(x)$  непрерывна на  $[a, b]$  и в точке  $x_1$  имеет производные до некоторого порядка  $m$ , причем  $\varphi(x_1) \neq 0$ .

При  $\alpha < 0$  заданный интеграл будет несобственным, если же  $\alpha > 0$ , то интегрируемая функция не будет иметь производные

в точке  $x_1$ , начиная с некоторого порядка, и формулы механических квадратур, поэтому, могут давать большую погрешность вычисления.

Выделим из тейлорова разложения функции  $\varphi(x)$  около точки  $x_1$  некоторое число  $k < m$  первых членов и разобьем интегрируемую функцию  $f$  на две части

$$f(x) = (x - x_1)^\alpha \varphi(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

где

$$f_1(x) = (x - x_1)^\alpha \left[ \varphi(x_1) + \frac{\varphi'(x_1)}{1!} (x - x_1) + \dots + \frac{\varphi^{(k-1)}(x_1)}{(k-1)!} (x - x_1)^{k-1} \right],$$

$$f_2(x) = (x - x_1)^\alpha \left[ \varphi(x) - \varphi(x_1) - \frac{\varphi'(x_1)}{1!} (x - x_1) - \dots - \frac{\varphi^{(k-1)}(x_1)}{(k-1)!} (x - x_1)^{k-1} \right].$$

В соответствии с этим заданный интеграл также будет разложен на две части

$$\int_a^b (x - x_1)^\alpha \varphi(x) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx.$$

Первый из интегралов вычисляется точно элементарным путем. Функция же  $f_2(x)$ , стоящая под знаком второго интеграла, имеет в точке  $x_1$  порядок дифференцируемости на  $k$  единиц выше, нежели

исходная функция  $f = (x - x_1)^\alpha \varphi$ . Поэтому интеграл  $\int_a^b f_2 dx$  может

быть вычислен с большей точностью, чем (13.2.1), если воспользоваться какой-либо формулой механических квадратур.

Рассмотрим в качестве примера интеграл

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4} = 0,785\,398\,163 \dots$$

На верхней границе интегрирования  $x=1$  функция  $\sqrt{1-x^2}$  имеет алгебраическую особенность. Выделим из нее множитель  $\sqrt{1-x}$ , другой же множитель  $\sqrt{1+x}$  разложим по степеням  $x-1$  и возьмем два члена разложения:

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{2} \left( 1 - \frac{1-x}{4} \right) + \left[ \sqrt{1+x} - \sqrt{2} \left( 1 - \frac{1-x}{4} \right) \right].$$

Рассматриваемый интеграл при этом разобьется на два новых интеграла. Первый из них вычисляется с помощью первообразной функции

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{2} \sqrt{1-x} \left(1 - \frac{1-x}{4}\right) dx = \sqrt{2} \frac{17}{30} = 0,801\,388 \dots$$

Второй интеграл

$$I_2 = \int_0^1 \sqrt{1-x} \left[ \sqrt{1+x} - \sqrt{2} \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{4} x \right) \right] dx$$

вычислим путем применения формулы парабол (6.4.5) с одной промежуточной ординатой

$$f_2(0) = 1 - \frac{3}{4} \sqrt{2} = -0,060\,660,$$

$$4f_2\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} - \frac{7}{2} = -0,035\,898,$$

$$f_2(1) = 0,$$

$$I_2 \approx \frac{1}{6} \left[ f_2(0) + 4f_2\left(\frac{1}{2}\right) + f_2(1) \right] = -0,016\,093,$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = I_1 + I_2 \approx 0,785\,295.$$

Ошибка результата в четвертом знаке. Применение формулы парабол с одной и тремя промежуточными ординатами непосредственно к заданному интегралу дает соответственно 0,637 и 0,744 с погрешностями в первом и во втором знаках.

II. Сходные преобразования могут быть выполнены в том случае, когда интегрируемая функция имеет алгебраические особенности в нескольких точках. Пусть интеграл имеет форму

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b (x-x_1)^{\alpha_1} (x-x_2)^{\alpha_2} \dots (x-x_n)^{\alpha_n} \varphi(x) dx. \quad (13.2.2)$$

Объединим все множители, кроме первого,

$$(x-x_2)^{\alpha_2} \dots (x-x_n)^{\alpha_n} \varphi(x)$$

и разложим полученное произведение в ряд Тейлора по степеням  $(x-x_1)$ . Взяв из этого ряда  $k_1$  первых членов, мы, подобно предыдущему, разложим подынтегральную функцию на два слагаемых

$$f(x) = f_1(x) + [f(x) - f_1(x)],$$

где  $f_1(x)$  есть сумма нескольких степенных функций, а  $f(x) - f_1(x)$  имеет в точке  $x_1$  производные более высокого порядка, чем  $f(x)$ . Аналогично составляются разложения, отвечающие другим особым точкам  $x_2, \dots, x_n$ :

$$f(x) = f_k(x) + [f(x) - f_k(x)] \quad (k = 2, 3, \dots).$$

Когда это сделано, мы можем заданный интеграл разбить на два:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)] dx + \\ &+ \int_a^b [f(x) - f_1(x) - f_2(x) - \dots - f_n(x)] dx, \end{aligned}$$

причем первый интеграл легко вычисляется точно.

Функция, стоящая под знаком второго интеграла, может иметь производные более высоких порядков, чем  $f$ , и применение квадратурных формул к этому интегралу даст более точный результат, чем для (13.2.2).

III. Формула Тейлора может быть использована для ослабления особенности всякий раз, когда интеграл имеет вид  $\int_a^b \psi(x) \varphi(x) dx$ , где  $\psi(x)$  имеет особенность в некоторой точке  $x_1$  и такова, что интегралы  $\int_a^b \psi(x)(x - x_1)^i dx$  легко находятся точно, а функция  $\varphi(x)$  несколько раз дифференцируема в точке  $x_1$ . Таким будет, например, интеграл  $\int_a^b (x - x_1)^a \ln^p |x - x_1| \varphi(x) dx$ , где  $a > -1$  и  $p$  — целое число.

IV. Остановимся еще на интеграле

$$\int_a^b \psi[\varphi(x)] dx, \quad (13.2.3)$$

в котором функция  $\psi(t)$  имеет особенность в точке  $t = 0$ , а  $\varphi(x)$  — непрерывно дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль в точке  $x = x_1$  и такая, что  $\varphi'(x_1) = A \neq 0$ .

Тогда, для ослабления особенности интегрируемой функции, ее можно разложить на две части

$$\psi[\varphi(x)] = \psi[A(x - x_1)] + \{\psi[\varphi(x)] - \psi[A(x - x_1)]\}$$

и, если интеграл от первого слагаемого  $\int_a^b \psi[A(x-x_1)] dx$  может быть вычислен точно, такое разбиение облегчит применение механических квадратур.

**Пример.** Возьмем интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2 \approx -1,089 \, 045.$$

Интегрируемая функция имеет логарифмическую особенность при  $x=0$ . Выделим из функции  $\sin x$  первый член ее разложения в ряд по степеням  $x$  и разобьем интеграл на две следующие части

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{\sin x}{x} \, dx = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln x \, dx = \frac{\pi}{2} \left( \ln \frac{\pi}{2} - 1 \right) \approx -0,861 \, 452.$$

Функция  $\ln \frac{\sin x}{x}$  не имеет особых точек при  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ . Для вычисления  $I_2$  была применена формула парабол с тремя ординатами:

$$I_2 \approx \frac{\pi}{12} \left( y(0) + 4y\left(\frac{\pi}{4}\right) + y\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) = -0,228 \, 189.$$

Окончательно

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx = I_1 + I_2 \approx -1,089 \, 641.$$

### § 3. Эйлеровы методы разложения остатка квадратуры

Сейчас рассмотрим задачу увеличения точности квадратуры при помощи выделения из ее остатка главной части. Способы выделения зависят от свойств остатка и могут быть весьма разнообразными.

Ниже мы остановимся только на двух методах разложения остатка, первый из которых тесно связан с широко известными формулами Эйлера — Маклорена.

Простейшей формулой эйлера вида следует, по-видимому, считать формулу, служащую для увеличения точности элементарной формулы прямоугольников. Она является другой формой записи разложения произвольной функции по многочленам Бернулли.

Пусть функция  $f$  задана на конечном отрезке  $[a, b]$  и имеет там непрерывные производные до порядка  $v$ . В первой главе было показано, что для такой функции имеет место равенство (1.4.2), дающее представление  $f$  через многочлены Бернулли  $B_k(x)$  и периодическую функцию  $B_v^*(x)$ . Найдем отсюда  $\int_a^b f(t) dt$  и запишем равенство в следующей форме:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt = & (b-a)f(x) - (b-a)B_1\left(\frac{x-a}{b-a}\right)[f(b) - f(a)] - \\ & - \frac{(b-a)^2}{2!}B_2\left(\frac{x-a}{b-a}\right)[f'(b) - f'(a)] - \dots \\ & \dots - \frac{(b-a)^{v-1}}{(v-1)!}B_{v-1}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)[f^{(v-2)}(b) - f^{(v-2)}(a)] + \\ & + \frac{(b-a)^v}{v!} \int_a^b f^{(v)}(t) \left[ B_v^*\left(\frac{x-t}{b-a}\right) - B_v^*\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right] dt. \quad (13.3.1) \end{aligned}$$

Первый член правой части  $(b-a)f(x)$  дает приближенное значение интеграла  $\int_a^b f(t) dt$ , вычисленное по формуле прямоугольников с одной ординатой в точке  $x$ . Приближенное равенство  $\int_a^b f dt \approx (b-a)f(x)$  будет давать, наверное, точный результат только в том случае, когда  $f$  сохраняет постоянное значение.

Если к  $(b-a)f(x)$  присоединить второй член правой части, то полученное после этого равенство

$$\int_a^b f(t) dt \approx (b-a)f(x) - (b-a)B_1\left(\frac{x-a}{b-a}\right)[f(b) - f(a)]$$

будет точным для любых линейных функций. Если добавить третий член, то новое равенство будет давать точный результат для всякого многочлена второй степени и т. д. Присоединяя справа по одному новому члену из (13.3.1), мы каждый раз будем, как правило, увеличивать алгебраическую точность квадратурной формулы на единицу. Можно ожидать, что при этом, по крайней мере в некоторых случаях, будет уменьшаться погрешность приближенного равенства и добавление новых членов позволит увеличить точность квадратуры.

Последний, интегральный член справа в (13.3.1) является остаточным членом квадратурной формулы. Его исследование будет проведено ниже.

Равенство (13.3.1) имеет более широкое значение, чем то, на которое мы указали выше и позволяет, принципиально говоря, построить равенства, позволяющие увеличивать точность любых других квадратурных формул, служащих для вычисления интегралов с постоянной весовой функцией. Рассмотрим произвольную формулу

механических квадратур для  $\int_a^b f dt$  и запишем ее в виде

$$\int_a^b f(t) dt \approx (b-a) \sum_{k=1}^n P_k f(x_k). \quad (13.3.2)$$

Допустим, что она точна для случая, когда  $f$  есть постоянная величина, так что  $\sum_{k=1}^n P_k = 1$ . Вполне очевидно, что (13.3.2) есть линейная комбинация  $n$  элементарных формул прямоугольников

$$\int_a^b f dt \approx (b-a) f(x_k) \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

с весовыми коэффициентами  $P_k$ . Поэтому, линейно комбинируя с теми же коэффициентами  $P_k$  несколько равенств вида (13.3.1), составленных для  $x=x_1$ ,  $x=x_2$ , ...,  $x=x_n$ , мы сможем получить новое равенство, позволяющее повышать точность приближенной формулы (13.3.2).

Оказывается, что аналогичные равенства могут быть построены также для квадратурных формул, служащих для вычисления инте-

гралов  $\int_a^b p f dx$  с любой суммируемой весовой функцией  $p(x)$ . Эти

равенства формально весьма просто получаются, если воспользоваться теоремой о разложении по многочленам Бернулли и особого рода интегральными представлениями остатка квадратурной формулы. Но если встать на этот путь, то будет не вполне ясным в каких случаях можно ожидать, что полученные формулы действительно позволят увеличить точность квадратуры и когда их применение может, наоборот, ухудшить результат.

Мы предпочтем исходить из некоторых наглядных соображений, которые будут изложены ниже. Найденные правила увеличения точности могут применяться в широком классе случаев, независимо от таких соображений. Сами же эти соображения могут оказать пользу при выявлении условий, при которых формулам эйлера вида сле-



дует отдать предпочтение перед другими правилами увеличения точности.

Будем считать, как выше, отрезок  $[a, b]$  конечным и предположим, что  $f$  имеет на  $[a, b]$  непрерывные производные до порядка  $m+s$ . Здесь  $m$  и  $s$  есть целые положительные числа, роль которых будет ясна из дальнейшего.

Возьмем квадратурную формулу

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f) \quad (13.3.3)$$

и рассмотрим ее остаток  $R(f)$ . Допустим, что степень точности формулы равна  $m-1$ .

Функцию  $f$  можно представить следующей формулой Тейлора:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i + \int_a^x f^{(m)}(t) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dt = \\ &= P_{m-1}(x) + \int_a^b f^{(m)}(t) E(x-t) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dt. \end{aligned}$$

Так как  $R(P_{m-1})=0$ , то  $R(f)$  будет совпадать с остатком квадратуры интеграла в последнем равенстве:

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_a^b p(x) \int_a^b f^{(m)}(t) E(x-t) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dt dx - \\ &= \sum_{k=1}^n A_k \int_a^b f^{(m)}(t) E(x_k-t) \frac{(x_k-t)^{m-1}}{(m-1)!} dt. \end{aligned}$$

Изменим порядок интегрирования в двухкратном интеграле, что при принятых нами предположениях о конечности  $[a, b]$ , непрерывности  $f^{(m)}$  и суммируемости  $p(x)$ , наверное, возможно. Это даст нам возможность построить представление  $R(f)$ , которое явится исходным для анализа остатка и, в частности, для выделения из него «главной части»:

$$R(f) = \int_a^b f^{(m)}(t) K(t) dt. \quad (13.3.4)$$

Ядро остатка  $K(t)$  имеет значение

$$K(t) = \int_a^b p(x) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dx - \sum_{k=1}^n A_k E(x_k-t) \frac{(x_k-t)^{m-1}}{(m-1)!}. \quad (13.3.5)$$

Когда  $K(t)$  есть «мало изменяющаяся» функция, главным значением  $K$ , оказывающим наибольшее влияние на образование численного значения  $R(f)$ , будет среднее значение ядра. Для выделения из  $R(f)$  главной части достаточно положить

$$K(t) = C_0 + [K(t) - C_0], \text{ где } C_0 = (b-a)^{-1} \int_a^b K(t) dt.$$

$$R(f) = C_0 \int_a^b f^{(m)}(t) dt + \int_a^b f^{(m)} [K - C_0] dt =$$

$$= C_0 [f^{(m-1)}(b) - f^{(m-1)}(a)] + \int_a^b f^{(m+1)}(t) L_1(t) dt,$$

$$L_1(t) = \int_a^t [C_0 - K(x)] dx.$$

Если ядро  $L_1(t)$  вновь полученного интеграла также есть «мало изменяющаяся» функция, из  $\int_a^b f^{(m+1)} L_1 dt$  в свою очередь может быть выделена «главная часть» и т. д.

После  $s$ -кратного выделения из остатка последовательных главных частей, мы приведем рассматриваемую квадратурную формулу (13.3.3) к следующей формуле эйлера вида, которая и решает поставленную задачу об увеличении точности (13.3.3) при предположениях о малой изменяемости функций  $L_0 = K, L_1, L_2, \dots$ :

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + C_0 [f^{(m-1)}(b) - f^{(m-1)}(a)] + \dots$$

$$\dots + C_{s-1} [f^{(m+s-2)}(b) - f^{(m+s-2)}(a)] + R_s(f), \quad (13.3.6)$$

$$C_i = (b-a)^{-1} \int_a^b L_i(t) dt, \quad L_{i+1}(t) = \int_a^t [C_i - L_i(x)] dx, \quad L_0(t) = K(t),$$

$$R_s(f) = \int_a^b f^{(m+s)}(t) L_s(t) dt. \quad (13.3.7)$$

Равенства (13.3.7) дают возможность последовательно находить  $C_i$  и  $L_i$ . Но легко можно указать представления  $C_i$  и  $L_i$  непосредственно через ядро  $K(t)$ . Для этого возвратимся к исходной квадратурной формуле (13.3.3) и заменим в ней остаток  $R(f)$  его

интегральным выражением

$$R(f) = \int_a^b f^{(m)}(t) K(t) dt.$$

Если в  $R(f)$  вместо  $f^{(m)}(t)$  под знак интеграла поставить ее разложение по многочленам Бернулли

$$\begin{aligned} f^{(m)}(t) = & (b-a)^{-1} \int_a^b f^{(m)}(x) dx + \\ & + \sum_{i=1}^{s-1} \frac{(b-a)^{i-1}}{i!} B_i\left(\frac{t-a}{b-a}\right) [f^{(m+i-1)}(b) - f^{(m+i-1)}(a)] - \\ & - \frac{(b-a)^{s-1}}{s!} \int_a^b f^{(m+s)}(x) \left[ B_s^*\left(\frac{t-x}{b-a}\right) - B_s^*\left(\frac{t-a}{b-a}\right) \right] dx \end{aligned}$$

и затем выполнить почленное интегрирование, то получится новое равенство

$$\begin{aligned} \int_a^b p(t) f(t) dt = & \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \\ & + (b-a)^{-1} \int_a^b K(t) dt [f^{(m-1)}(b) - f^{(m-1)}(a)] + \\ & + \sum_{i=1}^{s-1} \frac{(b-a)^{i-1}}{i!} \int_a^b K(t) B_i\left(\frac{t-a}{b-a}\right) dt [f^{(m+i-1)}(b) - f^{(m+i-1)}(a)] - \\ & - \frac{(b-a)^{s-1}}{s!} \int_a^b K(t) \int_a^b f^{(m+s)}(x) \left[ B_s^*\left(\frac{t-x}{b-a}\right) - B_s^*\left(\frac{t-a}{b-a}\right) \right] dt dx, \end{aligned}$$

которое должно совпадать с (13.3.6), какова бы ни была функция  $f$ , непрерывно дифференцируемая  $m+s$  раз на  $[a, b]$ . Но последнее может быть в том и только в том случае, когда равны коэффициенты при одинаковых скобках  $[f^{(m+i-1)}(b) - f^{(m+i-1)}(a)]$  и равны множители при  $f^{(m+s)}$  в интегральных выражениях остаточных членов:

$$C_i = \frac{(b-a)^{i-1}}{i!} \int_a^b K(t) B_i\left(\frac{t-a}{b-a}\right) dt, \quad (13.3.8)$$

$$L_s(t) = - \frac{(b-a)^{s-1}}{s!} \int_a^b K(x) \left[ B_s^*\left(\frac{x-t}{b-a}\right) - B_s^*\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right] dx. \quad (13.3.9)$$

$C_i$  и  $L_i$  имеют весьма простой смысл. Если сравнить (13.3.8) с интегральным представлением остатка  $R(f)$  (13.3.4), то будет ясно, что  $C_i$  есть остаток квадратуры некоторой функции, у которой производная порядка  $m$  равна  $\frac{(b-a)^{i-1}}{i!} B_i\left(\frac{t-a}{b-a}\right)$ .

Если вспомнить правило дифференцирования многочленов Бернулли (1.2.6), то будет ясно, что за такую функцию можно принять  $\frac{(b-a)^{m+i-1}}{(m+i)!} B_{m+i}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)$ , так что

$$\begin{aligned} C_i &= \frac{(b-a)^{m+i-1}}{(m+i)!} R\left[B_{m+i}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)\right] = \\ &= \frac{(b-a)^{m+i-1}}{(m+1)!} \left\{ \int_a^b p(t) B_{m+i}\left(\frac{t-a}{b-a}\right) dt - \sum_{k=1}^n A_k B_{m+i}\left(\frac{x_k-a}{b-a}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (13.3.10)$$

Этот результат во многих случаях дает удобное средство для вычисления  $C_i$ .

Аналогично для  $L_s(t)$  можно получить

$$L_s(t) = -\frac{(b-a)^{m+s-1}}{(m+s)!} R_x\left[B_{m+s}^*\left(\frac{x-t}{b-a}\right) - B_{m+s}^*\left(\frac{x-a}{b-a}\right)\right]. \quad (13.3.11)$$

Знак  $x$ , поставленный у  $R_x$ , указывает на то, что вычисляется остаток квадратуры по переменной  $x$ .

Перейдем к построению частных формул Эйлера вида и начнем с получения первой формулы Эйлера — Маклорена\*), служащей для увеличения точности формулы трапеций.

Рассмотрим сначала простейшую формулу трапеций

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] + R(f). \quad (13.3.12)$$

Степень алгебраической точности ее равна единице и мы должны поэтому положить  $m=2$ . Чтобы построить для нее равенство (13.3.6), нужно, прежде всего, посчитать коэффициенты  $C_i$ . В данном случае наиболее просто, по-видимому, воспользоваться представлениями (13.3.10).

\*) Относительно других формул Эйлера — Маклорена см. И. Ф. Стефенсен, Теория интерполирования, гл. XIII, М. — Л., ОНТИ, 1935.

Так как многочлены  $B_n(x)$  ( $n=2, 3, \dots$ ) принимают в точках  $x=0$  и  $x=1$  одинаковые значения, то

$$\int_a^b B_{i+2}\left(\frac{t-a}{b-a}\right) dt = \frac{b-a}{i+3} [B_{i+3}(1) - B_{i+3}(0)] = 0,$$

$$C_i = -\frac{(b-a)^{i+2}}{(i+2)!} \cdot \frac{1}{2} [B_{i+2}(0) + B_{i+2}(1)] =$$

$$= -\frac{(b-a)^{i+2}}{(i+2)!} \cdot \frac{1+(-1)^{i+2}}{2} B_{i+2}.$$

Все числа Бернулли нечетных индексов, кроме  $B_1$ , равны нулю, поэтому  $C_1 = C_3 = C_5 = \dots = 0$ . Для коэффициентов  $C_i$  четных индексов  $i=2k$  имеем

$$C_{2k} = -\frac{(b-a)^{2k+2}}{(2k+2)!} B_{2k+2}. \quad (13.3.13)$$

Несколько первых  $C_{2k}$  таковы:

$$C_0 = -\frac{(b-a)^2}{12}, \quad C_2 = \frac{(b-a)^4}{720}, \quad C_4 = -\frac{(b-a)^6}{30240},$$

$$C_6 = \frac{(b-a)^8}{1209600}, \quad C_8 = -\frac{(b-a)^{10}}{47900160}.$$

Займемся теперь остатком  $R_s(f)$  (13.3.6) и найдем ядро  $L_s(t)$  при помощи (13.3.11)

$$L_s(t) = -\frac{(b-a)^{s+1}}{(s+2)!} \left\{ \int_a^b \left[ B_{s+2}^*\left(\frac{x-t}{b-a}\right) - B_{s+2}^*\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right] dx - \right.$$

$$\left. -\frac{b-a}{2} \left[ \left( B_{s+2}^*\left(\frac{a-t}{b-a}\right) - B_{s+2}^*(0) \right) + \left( B_{s+2}^*\left(\frac{b-t}{b-a}\right) - B_{s+2}^*(1) \right) \right] \right\}.$$

Ввиду  $(b-a)$ -периодичности функции  $B_{s+2}^*\left(\frac{x-t}{b-a}\right)$ ,

$$\int_a^b B_{s+2}^*\left(\frac{x-t}{b-a}\right) dx = \int_a^b B_{s+2}^*\left(\frac{x-a}{b-a}\right) dx$$

и интегральный член в выражении  $L_s(t)$  равен нулю. Кроме того, так как

$$B_{s+2}^*\left(\frac{a-t}{b-a}\right) = B_{s+2}^*\left(\frac{b-t}{b-a}\right) \text{ и } B_{s+2}^*(0) = B_{s+2}^*(1) = B_{s+2},$$

то

$$L_s(t) = \frac{(b-a)^{s+2}}{(s+2)!} \left[ B_{s+2}^*\left(\frac{b-t}{b-a}\right) - B_{s+2} \right] = \frac{(b-a)^{s+2}}{(s+2)!} y_{s+2}^* \left(\frac{b-t}{b-a}\right).$$

Образуем теперь ряд (13.3.6) для формулы трапеций (13.3.12). Приняв во внимание, что члены с коэффициентами  $C_l$  нечетных индексов должны отсутствовать, запишем этот ряд в форме:

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)] - \sum_{k=1}^{v-1} \frac{(b-a)^{2k}}{(2k)!} B_{2k} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] + \rho_{2v}(f), \quad (13.3.14)$$

где остаток  $\rho_{2v}(f)$  равен либо

$$\rho_{2v}(f) = \frac{(b-a)^{2v-1}}{(2v-1)!} \int_a^b f^{(2v-1)}(t) y_{2v-1}^* \left( \frac{b-t}{b-a} \right) dt, \quad (13.3.15)$$

либо

$$\rho_{2v}(f) = \frac{(b-a)^{2v}}{(2v)!} \int_a^b f^{(2v)}(t) y_{2v}^* \left( \frac{b-t}{b-a} \right) dt, \quad (13.3.16)$$

в зависимости от того, будет ли  $f$  иметь на  $[a, b]$  непрерывную производную порядка  $2v-1$  или  $2v$ .

Ниже мы всюду будем считать, что для остатка  $\rho_{2v}(f)$  верно представление (13.3.16) и преобразуем его к форме, более удобной для нашей цели. Заменим в нем переменную  $t$ , положив  $t = a + (b-a)u$ , и  $0 \leq u \leq 1$ . Воспользовавшись тем, что  $y_{2v}^* \left( \frac{b-t}{b-a} \right) = y_{2v}^*(1-u) = B_{2v}(1-u) - B_{2v} = B_{2v}(u) - B_{2v} = y_{2v}(u)$ , получим

$$\begin{aligned} \rho_{2v}(f) &= \frac{(b-a)^{2v+1}}{(2v)!} \int_0^1 f^{(2v)}(a + (b-a)u) [B_{2v}(u) - B_{2v}] du = \\ &= \frac{(b-a)^{2v+1}}{(2v)!} \int_0^1 f^{(2v)}(a + (b-a)u) y_{2v}(u) du. \end{aligned} \quad (13.3.17)$$

Чтобы получить правило увеличения точности общей формулы трапеций (6.4.4), разделим теперь отрезок  $[a, b]$  на любое число  $n$  равных частей длины  $h = \frac{b-a}{n}$  и к частичному отрезку

$[a + ph, a + (p + 1)h]$  применим равенство (13.3.14):

$$\begin{aligned} \int_{a+ph}^{a+(p+1)h} f(x) dx &= \frac{h}{2} \{f[a + ph] + f[a + (p + 1)h]\} - \\ &- \sum_{k=1}^{v-1} \frac{h^{2k}}{(2k)!} B_{2k} \{f^{(2k-1)}[a + (p + 1)h] - f^{(2k-1)}[a + ph]\} + \rho_{2v}^{(p)}(f), \\ \rho_{2v}^{(p)}(f) &= \frac{h^{2v+1}}{(2v)!} \int_0^1 f^{(2v)}(a + ph + hu) y_{2v}(u) du. \end{aligned}$$

При сложении таких равенств, отвечающих всем частичным отрезкам ( $p = 0, 1, \dots, n-1$ ), слагаемые в суммах  $\sum_{k=1}^{v-1}$ , отвечающие точкам деления, лежащим внутри  $[a, b]$ , взаимно уничтожаются и останутся только слагаемые, отвечающие точкам  $a$  и  $b$ .

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= T_n - \sum_{k=1}^{v-1} \frac{h^{2k}}{(2k)!} B_{2k} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] + \rho_{2v}(f) = \\ &= T_n - \frac{h^2}{12} [f'(b) - f'(a)] + \frac{h^4}{720} [f'''(b) - f'''(a)] - \\ &- \frac{h^6}{30240} [f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)] + \frac{h^8}{1209600} [f^{(7)}(b) - f^{(7)}(a)] - \\ &- \frac{h^{10}}{47900160} [f^{(9)}(b) - f^{(9)}(a)] + \dots + \rho_{2v}(f), \quad (13.3.18) \end{aligned}$$

причем

$$T_n = h \left[ \frac{1}{2} f(a) + f(a + h) + f(a + 2h) + \dots + \frac{1}{2} f(b) \right]$$

и

$$\begin{aligned} \rho_{2v}(f) &= \frac{h^{2v+1}}{(2v)!} \int_0^1 y_{2v}(u) \sum_{p=0}^{n-1} f^{(2v)}(a + ph + hu) du = \\ &= \frac{h^{2v+1}}{(2v)!} \int_0^1 [B_{2v}(u) - B_{2v}] \sum_{p=0}^{n-1} f^{(2v)}(a + hp + hu) du. \end{aligned}$$

(13.3.18) есть знаменитая формула Эйлера — Маклорена, устанавливающая связь между интегралом  $\int_a^b f(x) dx$  и суммой значений

функции  $f$  в равноотстоящих точках:

$$\begin{aligned} S_n &= f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(b) = \\ &= h^{-1} T_n + \frac{1}{2} [f(a) + f(b)]. \end{aligned}$$

В задачах вычислений она может служить как для нахождения сумм значений функции  $S_n$ , так и для нахождения интеграла. Мы ее будем применять только для второй цели.

Если неограниченно увеличивать  $v$ , то сумма  $-\sum_{k=1}^{v-1}$  в пределе даст ряд

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{2k}}{(2k)!} B_{2k} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)]. \quad (13.3.19)$$

Вспомним, что, начиная с некоторого номера, числа Бернулли  $B_{2k}$  быстро возрастают и при больших  $k$  имеют значения

$$B_{2k} \approx 2(-1)^{k-1} (2k)! (2\pi)^{-2k}.$$

Ряд (13.3.19) будет сходиться для весьма узкого класса функций, составляющих лишь малую часть функций, встречающихся в приложениях. Несмотря на этот недостаток, формулу Эйлера — Маклорена все же применяют в вычислениях, так как часто оказывается, что ее остаток  $\rho_{2v}(f)$  для нескольких первых значений  $v$  имеет малую величину и добавление нескольких первых членов суммы к  $T_n$  нередко значительно повышает точность формулы трапеций.

Об остатке  $\rho_{2v}(f)$  докажем три следующих простых теоремы.

**Теорема 1.** Если  $f^{(2v)}(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то существует такая точка  $\xi \in [a, b]$ , что для  $\rho_{2v}(f)$  выполняется равенство:

$$\rho_{2v}(f) = -\frac{h^{2v+1} n}{(2v)!} B_{2v} f^{(2v)}(\xi). \quad (13.3.20)$$

**Доказательство.** При изучении многочленов Бернулли в гл. 1 § 2, было установлено, что функция  $y_{2v}(u)$  на  $0 < u < 1$  сохраняет знак:  $(-1)^v y_{2v}(u) > 0$ ,  $0 < u < 1$ . Рассмотрим интеграл

$$I_v = \int_0^1 (-1)^v y_{2v}(u) \sum_{p=0}^{n-1} f^{(2v)}(a + hp + hu) du.$$

Наибольшее и наименьшее значение  $f^{(2v)}$  на  $[a, b]$  обозначим соответственно  $M$  и  $m$ . Для  $I_v$  очевидно верны оценки

$$(-1)^v n m \int_0^1 y_{2v}(u) du \leq I_v \leq (-1)^v n M \int_0^1 y_{2v}(u) du$$



и так как

$$\begin{aligned} \int_0^1 y_{2v}(u) du &= \int_0^1 [B_{2v}(u) - B_{2v}] du = \\ &= \frac{1}{2v+1} [B_{2v+1}(1) - B_{2v+1}(0)] - B_{2v} = -B_{2v}, \end{aligned}$$

то

$$I_v = (-1)^{v+1} n P B_{2v},$$

где  $m \leq P \leq M$ . По непрерывности  $f^{(2v)}$ , наверное существует точка  $\xi \in [a, b]$  такая, что  $f^{(2v)}(\xi) = P$  и  $I_v = (-1)^{v+1} n B_{2v} f^{(2v)}(\xi)$ .

Отсюда следует (13.3.20), ввиду  $\rho_{2v}(f) = (-1)^v \frac{h^{2v+1}}{(2v)!} I_v$ .

**Теорема 2.** Если  $f^{(2v)}$  непрерывна и сохраняет знак на  $[a, b]$ , то для  $\rho_{2v}(f)$  верно равенство

$$\begin{aligned} \rho_{2v}(f) &= -\theta (2 - 2^{-2v+1}) \frac{h^{2v} B_{2v}}{(2v)!} [f^{(2v-1)}(b) - f^{(2v-1)}(a)] \quad (13.3.21) \\ 0 &< \theta < 1. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Действительно в § 2 гл. 1 показывалось, что  $(-1)^k y_{2k}(x)$  сохраняет знак на  $[0, 1]$ , возрастает при  $0 \leq x < 0,5$  и убывает при  $0,5 < x \leq 1$ , наибольшего же значения достигает при  $x = 0,5$  и оно равно  $(-1)^k y_{2k}(0,5) = -(-1)^k (2 - 2^{-2k+1}) B_{2k}$ .

Поэтому  $\rho_{2v}(f)$  (13.3.17) имеет тот же знак, что и

$$y_{2v}(0,5) \frac{h^{2v+1}}{(2v)!} \int_0^1 \sum_{p=0}^{n-1} f^{(2v)}(a + hp + hu) du$$

и по абсолютному значению меньше этой величины, так что

$$\rho_{2v}(f) = \theta y_{2v}(0,5) \frac{h^{2v+1}}{(2v)!} \int_0^1 \sum_{p=0}^{n-1} f^{(2v)}(a + hp + hu) du, \quad 0 < \theta < 1.$$

Но  $y_{2k}(0,5) = -(2 - 2^{-2k+1}) B_{2k}$  и

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{p=0}^{n-1} f^{(2v)}(a + hp + hu) du &= \\ &= h^{-1} \sum_{p=0}^{n-1} \{f^{(2v-1)}[a + h(p+1)] - f^{(2v-1)}[a + hp]\} = \\ &= h^{-1} [f^{(2v-1)}(b) - f^{(2v-1)}(a)], \end{aligned}$$

что доказывает равенство (13.3.21).

Из него в частности видно, что  $\rho_{2\nu}(f)$ , в условиях второй теоремы, имеет знак такой же, что и первый отброшенный член в ряде Эйлера — Маклорена и по абсолютной величине меньше удвоенного абсолютного значения этого члена.

Оказывается, что при некоторых предположениях о функции  $f$  для остатка  $\rho_{2\nu}(f)$  формулы Эйлера — Маклорена верна теорема, аналогичная теореме об остатке знакопеременного ряда.

**Теорема 3.** Если  $f$  имеет на  $[a, b]$  непрерывную производную порядка  $2\nu+2$  и при всяких  $x \in [a, b]$  либо  $f^{(2\nu)}(x) \geq 0$  и  $f^{(2\nu+2)}(x) \geq 0$ , либо  $f^{(2\nu)}(x) \leq 0$  и  $f^{(2\nu+2)}(x) \leq 0$ , то  $\rho_{2\nu}(f)$  имеет тот же знак, что и  $-\frac{h^{2\nu} B_{2\nu}}{(2\nu)!} [f^{(2\nu-1)}(b) - f^{(2\nu-1)}(a)]$  и по абсолютной величине не больше этого члена.

Доказательство. Остатки  $\rho_{2\nu}(f)$  и  $\rho_{2\nu+2}(f)$  связаны друг с другом очевидным равенством

$$\rho_{2\nu}(f) = -\frac{h^{2\nu} B_{2\nu}}{(2\nu)!} [f^{(2\nu-1)}(b) - f^{(2\nu-1)}(a)] + \rho_{2\nu+2}(f),$$

которое можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{h^{2\nu+1}}{(2\nu)!} \int_0^1 y_{2\nu}(u) \sum_{p=0}^{n-1} f^{(2\nu)}(a + hp + hu) du + \\ & + \frac{h^{2\nu+3}}{(2\nu+2)!} \int_0^1 [-y_{2\nu+2}(u)] \sum_{p=0}^{n-1} f^{(2\nu+2)}(a + hp + hu) du = \\ & = -\frac{h^{2\nu} B_{2\nu}}{(2\nu)!} [f^{(2\nu-1)}(b) - f^{(2\nu-1)}(a)]. \end{aligned}$$

По условию теоремы  $f^{(2\nu)}$  и  $f^{(2\nu+2)}$  имеют одинаковые знаки. В § 2 гл. 1 выяснялось, что на отрезке  $[0, 1]$   $y_{2\nu}(u)$  и  $-y_{2\nu+2}(u)$  также имеют одинаковые знаки. Поэтому оба члена левой части последнего равенства имеют один и тот же знак. Знаки их должны совпадать со знаком правой части и абсолютное значение каждого из них не может быть больше абсолютной величины правой части.

Пусть нужно вычислить интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$$

Здесь  $a=0$ ,  $b=1$ . Разделим отрезок  $[0, 1]$  на 10 равных частей и, в соответствии с этим, положим  $n=10$ ,  $h=0,1$ . В формуле Эйлера —

Маклорена сохраним, кроме  $T_n$ , еще два члена, что отвечает  $v=3$ .

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx T_n - \frac{h^2}{12} [f'(1) - f'(0)] + \frac{h^4}{720} [f'''(1) - f'''(0)],$$

$$T_n = 0,1 \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{1,1} + \frac{1}{1,2} + \dots + \frac{1}{1,9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right] = 0,693\,771\,403,$$

$$- \frac{h^2}{12} [f'(1) - f'(0)] = - \frac{1}{1200} \left[ 1 - \frac{1}{4} \right] = - 0,000625,$$

$$\frac{h^4}{720} [f'''(1) - f'''(0)] = \frac{10^{-4} \cdot 6}{720} \left[ 1 - \frac{1}{16} \right] = 0,000\,000\,781 \dots$$

Правая часть приближенного равенства имеет значение

$$0,693\,771\,403 - 0,000\,625 + 0,000\,000\,781 = 0,693\,147\,184.$$

Оценим погрешность. Для этого заметим, что производные шестого порядка  $f^{(6)} = \frac{6!}{(1+x)^7}$  и восьмого порядка  $f^{(8)} = \frac{8!}{(1+x)^9}$  обе положительны на отрезке  $[0, 1]$  и для оценки остатка  $\rho_6(f)$  можно воспользоваться теоремой 3. Образует первый отброшенный член формулы:

$$- \frac{h^6}{30\,240} [f^{(6)}(1) - f^{(6)}(0)] = - \frac{120 \cdot 10^{-6}}{30\,240} \left[ 1 - \frac{1}{64} \right] \approx - 0,000\,000\,004.$$

Поэтому с точностью до  $0,5 \cdot 10^{-8}$  можно положить

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,693\,147\,18.$$

Построим теперь формулу эйлера вида для увеличения точности правила парабол (6.4.10). Для этой цели возьмем простейшую формулу парабол

$$\int_a^{a+2h} f(x) dx = \frac{h}{3} [f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)] + R(f) \quad (13.3.22)$$

и для нее построим равенство (13.3.6).

Алгебраическая степень точности (13.3.22) равна 3 и нужно считать  $m=4$ .

Для нахождения коэффициентов  $C_i$  вновь воспользуемся их выражением (13.3.10)

$$C_i = \frac{(2h)^{i+3}}{(i+4)!} \left\{ \int_a^{a+2h} B_{i+4}\left(\frac{t-a}{2h}\right) dt - \frac{h}{3} \left[ B_{i+4}(0) + 4B_{i+4}\left(\frac{1}{2}\right) + B_{i+4}(1) \right] \right\} = \frac{(2h)^{i+4}}{3(i+4)!} (1 - 2^{-i-2}) B_{i+4}.$$

Ввиду  $B_{2k+1} = 0$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), отличными от нуля будут только  $C_i$  с четными индексами  $i$ .

Для составления остатка  $R_s(f)$ , найдем  $L_s(t)$ :

$$L_s(t) = -\frac{(2h)^{s+3}}{(s+4)!} \left\{ \int_a^{a+2h} \left[ B_{s+4}^*\left(\frac{x-t}{2h}\right) - B_{s+4}\left(\frac{x-a}{2h}\right) \right] dx - \right. \\ \left. - \frac{h}{3} \left[ B_{s+4}^*\left(\frac{a-t}{2h}\right) - B_{s+4}(0) + 4 \left( B_{s+4}^*\left(\frac{a+h-t}{2h}\right) - B_{s+4}\left(\frac{1}{2}\right) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + B_{s+4}\left(1 + \frac{a-t}{2h}\right) - B_{s+4}(1) \right] \right\}.$$

Интеграл, входящий в построенное выражение для  $L_s$ , равен нулю. Если вместо функции  $B_{s+4}^*$  ввести функцию  $y_{s+4}^*$ , то для  $L_s(t)$  получится:

$$L_s(t) = \frac{(2h)^{s+4}}{3(s+4)!} \left\{ y_{s+4} \left( 1 + \frac{a-t}{2h} \right) + \right. \\ \left. + 2 \left[ y_{s+4}^* \left( \frac{1}{2} + \frac{a-t}{2h} \right) - y_{s+4} \left( \frac{1}{2} \right) \right] \right\}.$$

Внесем в остаток  $R_s(f) = \int_a^{a+2h} f^{(s+4)}(t) L_s(t) dt$  найденное представление  $L_s(t)$  и заменим переменную  $t$ , положив  $t = a + 2hu$  ( $0 \leq u \leq 1$ ).

$$R_s(f) = \frac{(2h)^{s+5}}{3(s+4)!} \int_0^1 f^{(s+4)}(a + 2hu) \{ y_{s+4}(1 - u) + \\ + 2 [y_{s+4}^*(0.5 - u) - y_{s+4}(0.5)] \} du.$$

Это дает возможность записать равенство (13.3.6) для формулы парабол (13.3.22) в виде

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2h} f(x) dx &= \frac{h}{3} [f(a) + 4f(a+h) + f(a+2h)] + \\ &+ \sum_{k=2}^{v-1} \frac{(2h)^{2k}}{3(2k)!} (1 - 2^{-2k+2}) B_{2k} \cdot [f^{(2k-1)}(a+2h) - f^{(2k-1)}(a)] + \rho_{2v}(f). \end{aligned} \quad (13.3.22')$$

Остаток  $\rho_{2v}(f)$  может быть представлен в виде либо

$$\begin{aligned} \rho_{2v}(f) &= \frac{(2h)^{2v}}{3(2v-1)!} \int_0^1 f^{(2v-1)}(a+2hu) \{ y_{2v-1}(1-u) + \\ &+ 2y_{2v-1}^*(0,5-u) \} du, \end{aligned}$$

либо

$$\begin{aligned} \rho_{2v}(f) &= \frac{(2h)^{2v+1}}{3(2v)!} \int_0^1 f^{(2v)}(a+2hu) \{ y_{2v}(u) + \\ &+ 2[y_{2v}^*(0,5-u) - y_{2v}(0,5)] \} du, \end{aligned}$$

смотря по тому, будет ли  $f$  иметь непрерывную производную порядка  $2v-1$  или  $2v$ . Ниже мы будем считать, что  $f^{(2v)}$  существует и непрерывна и будем пользоваться вторым выражением остатка.

Перейдем к общей формуле парабол (6.4.10). Разделим отрезок интегрирования  $[a, b]$  на  $n$  равных частей, считая  $n$  четным числом. Выделим двоянный частичный отрезок  $[a+2hp, a+2h(p+1)]$  и применим к нему равенство (13.3.22'). Если после этого суммировать полученные равенства по  $p$  от нуля до  $\frac{n}{2}-1$ , получим разыскиваемый результат:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= U_n + \sum_{k=2}^{v-1} \frac{(2h)^{2k}}{3(2k)!} (1 - 2^{-2k+2}) B_{2k} \cdot [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] + \\ &+ \rho_{2v}(f) = U_n - \frac{h^4}{180} [f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a)] + \frac{h^6}{1512} [f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)] - \\ &- \frac{h^8}{14400} [f^{(7)}(b) - f^{(7)}(a)] + \dots + \rho_{2v}(f), \end{aligned} \quad (13.3.23)$$

где

$$U_n = \frac{h}{3} \{f(a) + f(b) + 2[f(a+2h) + \dots + f(a+(n-2)h)] + \\ + 4[f(a+h) + \dots + f(a+(n-1)h)]\},$$

$$\rho_{2v}(f) = \frac{(2h)^{2v+1}}{3(2v)!} \int_0^1 \left\{ y_{2v}(u) + 2 \left[ y_{2v}^* \left( \frac{1}{2} - u \right) - y_{2v} \left( \frac{1}{2} \right) \right] \right\} \times \\ \times \sum_{p=0}^{\frac{n}{2}-1} f^{(2v)}(a+2ph+2hu) du. \quad (13.3.24)$$

Для исследования остатка  $\rho_{2v}(f)$  необходимо предварительно рассмотреть ядро интеграла  $F(u) = y_{2v}(u) + 2[y_{2v}^*(0,5-u) - y_{2v}(0,5)]$ .

**Лемма.** Функция  $\varphi_{2v+1}(x) = y_{2v+1}(x) - 2y_{2v+1}(0,5-x)$  внутри отрезка  $(0; 0,5)$  не имеет нулей ни при каких значениях  $v \geq 1$  и имеет там знак, определяемый неравенством

$$(-1)^v \varphi_{2v+1}(x) > 0, \quad 0 < x < 0,5.$$

**Доказательство.** Будем считать  $v \geq 1$ . Так как  $y_{2v+1}(0) = y_{2v+1}(0,5) = 0$ , то, очевидно,  $x=0$  и  $x=0,5$  будут нулями  $\varphi_{2v+1}(x)$ . Допустим, вопреки утверждению леммы, что точка  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 0,5$ ) есть нуль функции  $\varphi_{2v+1}$ . Тогда внутри каждого из отрезков  $[0, \alpha]$  и  $[\alpha, 0,5]$   $\varphi'_{2v+1}$  будет иметь хоть один нуль. Следовательно, вторая производная  $\varphi''_{2v+1}$  имеет внутри  $[0; 0,5]$  по меньшей мере один нуль. Но  $\varphi''_{2v+1} = (2v+1)(2v)[y_{2v-1}(x) - 2y_{2v-1}(0,5-x)] = (2v+1)2v\varphi_{2v-1}(x)$ .

Таким образом, из допущения, что  $\varphi_{2v+1}$  имеет внутри  $(0; 0,5)$  нуль, следует, что  $\varphi_{2v-1}$  также имеет нуль внутри  $(0; 0,5)$ . Продолжая эти рассуждения, можно прийти к заключению, что  $\varphi_3$  должна иметь внутри  $(0; 0,5)$  корень. Но, как легко проверить,  $\varphi_3 = 3x^2(x-0,5)$  и не обращается в нуль внутри  $(0; 0,5)$ . Полученное противоречие доказывает лемму. Чтобы определить знак  $\varphi_{2v+1}(x)$  на  $(0; 0,5)$ , достаточно вычислить  $\varphi_{2v+1}$  в точке  $x=0,25$ :

$$\varphi_{2v+1}(0,25) = -y_{2v+1}(0,25).$$

В § 2 главы 1 было показано, что  $(-1)^{v+1} y_{2v+1}(x) > 0$  при  $0 < x < 0,5$ . Поэтому  $(-1)^v \varphi_{2v+1}(x) > 0$  ( $0 < x < 0,5$ ). Считая  $0 \leq u \leq 0,5$ , возвратимся к  $F(u) = y_{2v} + 2[y_{2v}(0,5-u) - y_{2v}(0,5)]$  и рассмотрим  $(-1)^{v-1} F(u)$ ;

$$(-1)^{v-1} F'(u) = 2v(-1)^{v-1} [y_{2v-1}(u) - 2y_{2v-1}(0,5-u)] = \\ = 2v(-1)^{v-1} \varphi_{2v-1}(u).$$

В силу леммы,  $(-1)^{v-1} F'(u) > 0$ , стало быть,  $(-1)^{v-1} F(u)$  есть монотонная возрастающая функция при  $0 \leq u \leq 0,5$ . Так как, кроме того,  $F(0) = 0$ , то  $F(u) > 0$  при  $0 < u \leq 0,5$ .

Чтобы судить о поведении  $F(u)$  на отрезке  $0,5 \leq u \leq 1$ , достаточно показать, что значения  $F(u)$  распределены симметрично относительно  $u = 0,5$ :  $F(1-u) = F(u)$ . Действительно,

$$F(1-u) = y_{2v}(1-u) + 2[y_{2v}^*(u-0,5) - y_{2v}(0,5)],$$

$$y_{2v}(1-u) = y_{2v}(u), \quad y_{2v}^*(u-0,5) = y_{2v}^*(u+0,5) = y_{2v}^*(0,5-u).$$

Следовательно,

$$F(1-u) = y_{2v}(u) + 2[y_{2v}^*(0,5-u) - y_{2v}(0,5)] = F(u).$$

Отсюда вытекает, что на отрезке  $0,5 \leq u < 1$   $(-1)^{v-1} F(u)$  есть монотонная убывающая функция с положительными значениями.  $(-1)^{v-1} F(u)$  достигает наибольшего значения на отрезке  $[0, 1]$  в точке  $u = 0,5$  и это значение есть

$$\max_{[0, 1]} (-1)^{v-1} F(u) = -(-1)^{v-1} y_{2v}(0,5) = (-1)^{v-1} 2(1-2^{-2v}) B_{2v}. \quad (13.3.25)$$

Указанные выше свойства ядра  $F(u)$  позволяют доказать об остатке  $\rho_{2v}(f)$  (13.3.24) три теоремы, аналогичные сходственным теоремам об остатке формулы Эйлера — Маклорена.

Доказательства этих теорем мы опускаем, так как для этого достаточно повторить доказательства теорем I, II, III с небольшими изменениями.

**Теорема 4.** Если функция  $f$  имеет непрерывную производную порядка  $2v$  на  $[a, b]$ , то внутри  $[a, b]$  существует такая точка  $\xi$ , что для остатка  $\rho_{2v}(f)$  формулы (13.3.23) верно равенство:

$$\rho_{2v}(f) = \frac{nh(2h)^{2v}}{3(2v)!} (1 - 2^{-2v+2}) B_{2v} f^{(2v)}(\xi). \quad (13.3.26)$$

Сравним это представление остатка (13.3.26) с выражением (13.3.20) для остатка формулы Эйлера — Маклорена (13.3.18). Если производная  $f^{(2v)}(x)$  сохраняет знак на  $[a, b]$ , то остатки формул (13.3.23) и (13.3.18) имеют разные знаки. Отсюда вытекает следующее полезное для вычислений правило:

Когда производная  $f^{(2v)}(x)$  сохраняет знак на  $[a, b]$ , то точное значение интеграла  $\int_a^b f(x) dx$  заключается между приближенными значениями, найденными по формулам (13.3.18) и (13.3.23), если отбросить в них остаточные члены  $\rho_{2v}(f)$ .

**Теорема 5.** Если производная  $f^{(2v)}$  сохраняет знак на  $[a, b]$ , то остаток  $\rho_{2v}(f)$  формулы (13.3.23) представим в виде:

$$\rho_{2v}(f) = 2\theta \frac{(2h)^{2v}}{3(2v)!} (1 - 2^{-2v}) B_{2v} [f^{(2v-1)}(b) - f^{(2v-1)}(a)] \quad (0 < \theta < 1). \quad (13.3.27)$$

Из (13.3.27) видно, что остаток  $\rho_{2v}(f)$  формулы (13.3.23) имеет тот же знак, что и первый отбрасываемый член

$$\frac{(2h)^{2v}}{3(2v)!} (1 - 2^{-2v+2}) B_{2v} [f^{(2v-1)}(b) - f^{(2v-1)}(a)],$$

и по абсолютной величине меньше удвоенного арифметического значения этого члена.

**Теорема 6.** Если функция  $f$  имеет производную порядка  $2v+2$  и при всяких  $x$  на  $[a, b]$  либо  $f^{(2v)}(x) \geq 0$  и  $f^{(2v+2)}(x) \geq 0$ , либо  $f^{(2v)}(x) \leq 0$  и  $f^{(2v+2)}(x) \leq 0$ , то остаток  $\rho_{2v}(f)$  формулы (13.3.23) имеет тот же знак, что первый отбрасываемый член

$$\frac{(2h)^{2v}}{3(2v)!} (1 - 2^{-2v+2}) B_{2v} [f^{(2v-1)}(b) - f^{(2v-1)}(a)],$$

и не больше его по абсолютной величине.

Ниже приводятся ряды вида (13.3.6), служащие для увеличения степени точности некоторых частных квадратурных формул.

1. Для формулы Котеса с 4 ординатами (правило  $\frac{3}{8}$  Ньютона)

$$\begin{aligned} \int_a^{a+3h} f(x) dx &\sim \frac{3}{8} h [f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + f(a+3h)] + \\ &+ \sum_{k=2} \frac{(3h)^{2k}}{8(2k)!} (1 - 3^{-2k+2}) B_{2k} [f^{(2k-1)}(a+3h) - f^{(2k-1)}(a)] = \\ &= \frac{3}{8} h [f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + f(a+3h)] - \\ &- \frac{h^4}{80} [f^{(3)}(a+3h) - f^{(3)}(a)] + \frac{h^6}{336} [f^{(5)}(a+3h) - f^{(5)}(a)] - \\ &- \frac{13h^8}{19200} [f^{(7)}(a+3h) - f^{(7)}(a)] + \dots \quad (13.3.28) \end{aligned}$$

2. Рассмотрим интеграл, взятый по отрезку  $[-1, 1]$  с весом  $p(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$  ( $\alpha, \beta > -1$ ), и квадратурную формулу с  $n$  узлами для него, имеющую наивысшую степень точности  $2n-1$ . Узлы ее расположены в нулях якобиева многочлена степени  $n$ .



Формула (13.3.6) для него будет иметь вид:

$$\int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} f(x) dx \sim \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \\ + C_0 [f^{(2n-1)}(1) - f^{(2n-1)}(-1)] + C_1 [f^{(2n)}(1) - f^{(2n)}(-1)] + \dots$$

Коэффициенты  $C_0$  и  $C_1$  имеют значения

$$C_0 = \frac{2^{\alpha+\beta+2n} \cdot n!}{(2n)!(\alpha+\beta+2n+1)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1) \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma^2(\alpha+\beta+2n+1)}, \\ C_1 = \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+2n} \left[ \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+2n+2} + 2n \right] \frac{n! 2^{\alpha+\beta+2n}}{(2n+1)!} \times \\ \times \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1) \Gamma(\alpha+n+1) \Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1) \Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}.$$

Для ультрасферического случая  $\beta = \alpha$  коэффициенты  $C_i$  нечетных индексов равны нулю и

$$C_0 = \frac{2^{2\alpha} n! \Gamma(2\alpha+n+1)}{(2n)!(2\alpha+2n+1)} \left[ \frac{2^n \Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(2\alpha+2n+1)} \right]^2, \\ C_2 = \frac{2^{2\alpha} n! \Gamma(2\alpha+n+1)}{(2n+2)!} \left[ \frac{2^n \Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(2\alpha+2n+1)} \right]^2 \times \\ \times \left[ \frac{2n^2 + 2(2\alpha+1)n + 2\alpha - 1}{(2\alpha+2n-1)(2\alpha+2n+1)(2\alpha+2n+3)} + \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)}{(2\alpha+2n-1)(2\alpha+2n+1)} - \frac{(n+1)(2n+1)}{3(2\alpha+2n+1)} \right].$$

3. В частности для квадратурной формулы Гаусса, узлы которой лежат в корнях многочлена Лежандра, формула эйлерова вида будет:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \sim \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \frac{1}{(2n+1)!} \left[ \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \right]^2 \times \\ \times [f^{(2n-1)}(1) - f^{(2n-1)}(-1)] + \frac{1}{(2n+2)!} \left[ \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \right]^2 \times \\ \times \left[ \frac{2n^2 + 2n - 1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} + \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{n+1}{3} \right] \times \\ \times [f^{(2n+1)}(1) - f^{(2n+1)}(-1)] + \dots$$

При применении эйлеровых формул к вычислениям необходимо находить значения производных от функции  $f$  на концах отрезка  $[a, b]$ , что во многих случаях может представить затруднения. Можно построить другие формулы для увеличения точности квадратуры, в которых поправочные члены выражаются через разности или значения функции вместо производных. Такие формулы могут быть весьма разнообразными, так как замена производных конечными разностями может быть сделана многими способами. Ниже рассмотрен лишь один

пример замены такого вида, достаточный для того, чтобы ознакомиться с характером формул указанного типа.

Пусть мы хотим вычислить производные функции  $f$  в точке  $a$ . Для этого интерполируем  $f$  по ее значениям в нескольких точках. Вид интерполяционного многочлена определяется, прежде всего, выбором узлов. Будем считать, что для интерполирования можно пользоваться только значениями  $f$  в равноотстоящих точках  $a + kh$  ( $k = 0, 1, \dots$ ), принадлежащих отрезку  $[a, b]$ .

Воспользуемся ньютоновым представлением интерполяционного многочлена (3.2.6), приняв в нем следующий порядок узлов:  $x_0 = a$ ,  $x_1 = a + h$ ,  $x_2 = a + 2h$ ,  $\dots$

$$f(x) = f(a) + (x - a)f(a, a + h) + \\ + (x - a)(x - a - h)f(a, a + h, a + 2h) + \dots + \rho(x),$$

где  $\rho(x)$  — остаток интерполирования. Для равноотстоящих узлов разностные отношения просто выражаются через разности:

$$f(a, a + h, \dots, a + kh) = h^k k! \Delta^k f_0, \quad f_0 = f(a).$$

Вводя для облегчения записи новую переменную  $t = \frac{x - a}{h}$ ,  $x = a + ht$ , получим хорошо известную формулу Ньютона — Грегори, построенную для интерполирования вблизи начала таблицы значений функции

$$f(x) = f(a + ht) = f_0 + \frac{t}{1!} \Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \\ + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 f_0 + \dots + \rho(x).$$

Вычисляя от обеих частей равенства производные и полагая  $x = a$ ,  $t = 0$ , найдем

$$\begin{aligned} hf'(a) &= \Delta f_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 f_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 f_0 - \frac{1}{4} \Delta^4 f_0 + \frac{1}{5} \Delta^5 f_0 - \dots + \rho'(a) \\ h^2 f''(a) &= \Delta^2 f_0 - \Delta^3 f_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 f_0 - \frac{5}{6} \Delta^5 f_0 + \dots \\ h^3 f^{(3)}(a) &= \Delta^3 f_0 - \frac{3}{2} \Delta^4 f_0 + \frac{7}{4} \Delta^5 f_0 - \dots \\ h^4 f^{(4)}(a) &= \Delta^4 f_0 - 2 \Delta^5 f_0 + \dots \\ h^5 f^{(5)}(a) &= \Delta^5 f_0 - \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Аналогично, для нахождения значений производных  $f^{(k)}(b)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) интерполируем  $f$  в окрестности точки  $b = a + nh$ , используя для этого то же представление интерполяционного много-

члена (3.2.6) и полагая в нем  $x_0 = a + nh$ ,  $x_1 = a + (n-1)h$ ,  $x_2 = a + (n-2)h$ , ...:

$$f(x) = f(a + nh) + (x - a - nh)f(a + nh, a + (n-1)h) + \\ + (x - a - nh)(x - a - (n-1)h) \times \\ \times f(a + nh, a + (n-1)h, a + (n-2)h) + \dots + \rho(x)$$

или

$$f(a + th) = f_n + \frac{t}{1!} \Delta f_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 f_{n-2} + \\ + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} \Delta^3 f_{n-3} + \dots + \rho(x).$$

Отсюда получим

$$hf'(b) = \Delta f_{n-1} + \frac{1}{2} \Delta^2 f_{n-2} + \frac{1}{3} \Delta^3 f_{n-3} + \frac{1}{4} \Delta^4 f_{n-4} + \frac{1}{5} \Delta^5 f_{n-5} + \dots \\ h^2 f''(b) = \Delta^2 f_{n-2} + \Delta^3 f_{n-3} + \frac{11}{12} \Delta^4 f_{n-4} + \frac{5}{6} \Delta^5 f_{n-5} + \dots \\ h^3 f^{(3)}(b) = \Delta^3 f_{n-3} + \frac{3}{2} \Delta^4 f_{n-4} + \frac{7}{4} \Delta^5 f_{n-5} + \dots \\ h^4 f^{(4)}(b) = \Delta^4 f_{n-4} + 2 \Delta^5 f_{n-5} + \dots \\ h^5 f^{(5)}(b) = \Delta^5 f_{n-5} + \dots \\ \dots \dots \dots$$

Предположим теперь, что мы хотим преобразовать формулу Эйлера — Маклорена (13.3.18), заменив в ней значения производных на конечные разности. Подставив вместо  $f^{(2k-1)}(a)$  и  $f^{(2k-1)}(b)$  только что найденные выражения, после некоторых вычислений получим следующую формулу Грегори:

$$\int_a^{a+nh} f(x) dx = T_n - \frac{h}{12} (\Delta f_{n-1} - \Delta f_0) - \frac{h}{24} (\Delta^2 f_{n-2} + \Delta^2 f_0) - \\ - \frac{19h}{720} (\Delta^3 f_{n-3} - \Delta^3 f_0) - \frac{3h}{160} (\Delta^4 f_{n-4} + \Delta^4 f_0) - \\ - \frac{863h}{60480} (\Delta^5 f_{n-5} - \Delta^5 f_0) - \frac{275h}{24192} [\Delta^6 f_{n-6} + \Delta^6 f_0] - \dots \\ \dots - C_k h (\Delta^k f_{n-k} + (-1)^k \Delta^k f_0) + R_1(f). \quad (13.3.29)$$

Можно показать, что

$$C_k = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \int_0^1 x(x-1) \dots (x-k) dx.$$

#### § 4. Увеличение точности квадратуры при наличии короткого главного участка интегрирования в интегральном представлении остатка

Как выше, будем рассматривать механическую квадратуру с произвольной весовой функцией  $p(x)$ :

$$\int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f). \quad (13.4.1)$$

Если алгебраическая степень точности (13.4.1) равна  $m-1$  и  $f$  имеет на  $[a, b]$  непрерывную производную порядка  $m$ , остаток  $R(f)$  представим во многих случаях в форме \*) (13.3.4):

$$R(f) = \int_a^b f^{(m)}(x) K(x) dx, \quad (13.4.2)$$

где ядро  $K(x)$  не зависит от  $f$ .

Предположим, что на  $[a, b]$  существует участок  $[\alpha, \beta]$ , вне которого  $K(x)$  имеет пренебрежимо малые значения или, по меньшей мере, быстро убывает при удалении от  $[\alpha, \beta]$ . В образовании численного значения интеграла (13.4.2) интегрирование по  $[\alpha, \beta]$  будет тогда играть главную роль. Пусть, кроме того,  $f^{(m)}$  «мало изменяется» на  $[\alpha, \beta]$ , или, что, по существу дела, равносильно,  $[\alpha, \beta]$  имеет «малую длину». В этих предположениях, для выделения главной части из остатка  $R(f)$ , достаточно разложить  $f^{(m)}$  на два слагаемых, положив  $f^{(m)}(x) = f^{(m)}(\alpha_0) + [f^{(m)}(x) - f^{(m)}(\alpha_0)]$ , где  $\alpha_0$  есть некоторая точка главного участка интегрирования  $[\alpha, \beta]$ :

$$R(f) = f^{(m)}(\alpha_0) \int_a^b K(t) dt + \int_a^b [f^{(m)}(x) - f^{(m)}(\alpha_0)] K(x) dx.$$

Остается еще произвол в выборе  $\alpha_0$ . Когда ядро  $K(x)$  сохраняет знак, за  $\alpha_0$  естественно принять координату той точки оси  $x$ , около которой сосредоточены значения  $K(x)$ , наибольшие по абсолютной величине, и считать  $\alpha_0$  равным средней абсциссе по весу  $K(x)$ :

$$\alpha_0 = \left[ \int_a^b K dx \right]^{-1} \cdot \int_a^b x K(x) dx.$$

Предположим, что  $f$  имеет непрерывные производные до порядка  $m+2s$ , и преобразуем последнее выражение для  $R(f)$ . Разложим

\*) Такое представление остатка возможно всякий раз, когда допустимо изменение порядка интегрирования в двукратном интеграле, входящем в выражение  $R(f)$ , предшествующем (13.3.4).

$f^{(m)}(x) - f^{(m)}(\alpha_0)$  при помощи формулы Тейлора, взяв в ней два члена

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) - f^{(m)}(\alpha_0) &= f^{(m+1)}(\alpha_0)(x - \alpha_0) + \int_{\alpha_0}^x f^{(m+2)}(t)(x - t) dt = \\ &= f^{(m+1)}(\alpha_0)(x - \alpha_0) + \int_a^b f^{(m+2)}(t)[E(x - t) - E(\alpha_0 - t)](x - t) dt. \end{aligned}$$

Подставим это выражение  $f^{(m)}(x) - f^{(m)}(\alpha_0)$  в  $R(f)$  и выполним интегрирование. Ввиду выбора  $\alpha_0$ ,  $\int_a^b K(t)(t - \alpha_0) dt = 0$  и мы будем иметь

$$R(f) = C_0 f^{(m)}(\alpha_0) + \int_a^b f^{(m+2)}(t) K_1(t) dt.$$

$$C_0 = \int_a^b K(x) dx, \quad K_1(t) = \int_a^b K(x)[E(x - t) - E(\alpha_0 - t)](x - t) dx.$$

Если повторить такие преобразования  $s$  раз, получится приводимая ниже формула, позволяющая в некоторых случаях последовательно увеличивать точность механической квадратуры:

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x) f(x) dx &= \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + C_0 f^{(m)}(\alpha_0) + C_1 f^{(m+2)}(\alpha_1) + \dots \\ &\dots + C_{s-1} f^{(m+2s-2)}(\alpha_{s-1}) + \int_a^b f^{(m+2s)}(x) K_s(x) dx, \quad (13.4.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_0(x) &= K(x), \quad K_{i+1}(x) = \int_a^b K_i(t)[E(t - x) - E(\alpha_i - x)](t - x) dt, \\ C_i &= \int_a^b K_i dx, \quad \alpha_i = C_i^{-1} \int_a^b x K_i(x) dx. \end{aligned}$$

По поводу ядер  $K_i(x)$  полезно отметить следующее. Из рекуррентного соотношения для них сразу получаются такие равенства

$$K_{i+1}(x) = \begin{cases} \int_a^x K_i(t)(x - t) dt, & a \leq x < \alpha_i, \\ \int_x^b K_i(t)(t - x) dt, & \alpha_i < x \leq b. \end{cases}$$

Отсюда видно, что если ядро  $K_i(x)$  сохраняет знак при  $a \leq x \leq b$ , то ядро  $K_{i+1}(x)$  также сохраняет знак при  $a \leq x \leq b$ , причем знаки  $K_i$  и  $K_{i+1}$  одинаковы. В частности, если исходное ядро  $K_0(x) = K(x)$  остатка (13.4.2) было положительным, то будут положительными все ядра  $K_i(x)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ).

Рассмотрим квадратурную формулу с  $n$  узлами, имеющую наивысшую степень точности  $2n - 1$  и служащую для вычисления интегралов с весовой функцией  $(1 - x)^p (1 + x)^q$ ,  $p, q > -1$ :

$$\int_{-1}^1 (1 - x)^p (1 + x)^q f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + R(f). \quad (13.4.4)$$

Узлы ее лежат в нулях многочлена Якоби  $P_n^{(p, q)}(x)$ . Будем считать их перенумерованными в порядке роста  $-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$ .

Убедимся сначала в том, что при больших  $p$  или  $q$  в интегральном представлении остатка  $R(f)$  действительно будет существовать короткий главный участок интегрирования. Достаточная для наших целей качественная картина может быть получена, если воспользоваться электростатической аналогией для корней  $P_n^{(p, q)}(x)$ .

Известно, что многочлен  $P_n^{(p, q)}(x)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению \*)

$$P_n^{(p, q)''}(x) + \left( \frac{p+1}{x-1} + \frac{q+1}{x+1} \right) P_n^{(p, q)'}(x) + \frac{n(p+q+n+1)}{1-x^2} P_n^{(p, q)}(x) = 0.$$

Положим здесь  $x = x_k$ . При этом исчезнет третий член левой части. Разделим, кроме того, на  $P_n^{(p, q)'}(x_k)$ , что можно сделать, так как  $P_n^{(p, q)'}(x_k) \neq 0$ . После этого получится равенство

$$\sum_{i \neq k} \frac{2}{x_k - x_i} + \frac{p+1}{x_k - 1} + \frac{q+1}{x_k + 1} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (13.4.5)$$

имеющее простой физический смысл. Пусть изучается плоское электростатическое поле, в котором заряды взаимодействуют с силами, пропорциональными их массам и обратно пропорциональными первым степеням расстояния между ними. Если заряды масс  $m'$  и  $m''$  лежат на оси  $x$  и имеют координаты  $x'$  и  $x''$ , то сила, с которой масса  $m'$  действует на массу  $m''$ , будет равна  $\lambda \frac{m'm''}{x'' - x'}$ .

Поместим в точки  $+1$  и  $-1$  электрические заряды масс  $p+1$  и  $q+1$  соответственно и закрепим их. Кроме того, возьмем  $n$  зарядов

\*) В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, часть 2, М. — Л., Гостехиздат, 1957, 382—384.

массы 2, поместим их внутрь отрезка  $[-1, +1]$  и будем считать, что они могут свободно перемещаться вдоль оси  $x$ . Координаты свободных зарядов обозначим  $x_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ). Если такая система помещена в вязкую среду, то через некоторое время в ней наступит состояние равновесия. Уравнения равновесия получаются, если мы запишем, что для каждого свободного заряда равнодействующая всех воздействий, которые он испытывает со стороны других зарядов системы, равна нулю. Для свободного заряда номера  $k$  это дает:

$$\lambda \sum_{i \neq k} \frac{2 \cdot 2}{x_k - x_i} + \lambda \frac{2(p+1)}{x_k - 1} + \lambda \frac{2(q+1)}{x_k + 1} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Уравнение равновесия только множителем  $\lambda \cdot 2$  отличается от (13.4.5). Поэтому корни многочлена Якоби  $P_n^{(p, q)}(x)$  будут совпадать с координатами положений равновесия свободных зарядов.

Когда массы  $p+1$  или  $q+1$  закрепленных зарядов будут «большими», они с значительной силой будут отталкивать от себя свободные заряды и вынудят их сконцентрироваться на «малом» участке отрезка  $[-1, 1]$ . Поэтому участок  $[x_1, x_n]$ , на котором располагаются все корни  $P_n^{(p, q)}(x)$ , будет иметь малую длину. Когда  $p$  значительно больше  $q$ ,  $[x_1, x_n]$  будет «малым» отрезком вблизи точки  $-1$ . Наоборот, если  $q \gg p$ ,  $[x_1, x_n]$  будет лежать вблизи точки  $+1$ . В общем же случае положение участка  $[x_1, x_n]$  будет зависеть от  $p$  и  $q$ .

Для квадратурной формулы (13.4.4) остаток  $R(f)$ , ввиду конечности отрезка интегрирования и положительности весовой функции, наверное представим в форме (13.4.2). Ядро остатка  $K(x)$ , имеющее в общем случае вид (13.3.5), для изучаемой формулы будет:

$$K(x) = \int_x^1 (1-t)^p (1+t)^q \frac{(t-x)^{2n-1}}{(2n-1)!} dt - \sum_{k=1}^n A_k E(x_k - x) \frac{(x_k - x)^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

В частности, когда точка  $x$  лежит вне участка  $[x_1, x_n]$ :

$$K(x) = \int_{-1}^x (1-t)^p (1+t)^q \frac{(x-t)^{2n-1}}{(2n-1)!} dt, \quad \text{для } -1 \leq x \leq x_1.$$

и

$$K(x) = \int_x^1 (1-t)^p (1+t)^q \frac{(t-x)^{2n-1}}{(2n-1)!} dt, \quad \text{для } x_n \leq x \leq 1.$$

Остановимся, например, на случае  $x_n \leq x \leq 1$ . Множитель  $1+t$  заключен в границах  $1+x_n \leq 1+t \leq 2$ . Поэтому  $K(x)$  будет находиться между числами

$$(1+x_n)^q \int_x^1 (1-t)^p \frac{(t-x)^{2n-1}}{(2n-1)!} dt =$$

$$= (1+x_n)^q \cdot \frac{(1-x)^{p+2n}}{(2n-1)!} \int_0^1 (1-u)^p u^{2n-1} du = (1+x_n)^q C (1-x)^{p+2n}$$

и

$$2^q \int_x^1 (1-t)^p \frac{(t-x)^{2n-1}}{(2n-1)!} dt = 2^q C (1-x)^{p+2n}.$$

При возрастании  $x$  от  $x_n$  до 1  $K(x)$  будет стремиться к нулю как  $(1-x)^{p+2n}$ . Если  $p$  большое число, то стремление к нулю будет весьма быстрым. Если же  $p$  не будет большим числом, а показатель степени  $q$  большим, то  $x_n$  будет близко к единице и множитель  $(1-x)^{p+2n}$  также будет малой величиной.

Изложенные соображения имеют только качественный характер. Но они позволяют надеяться, что увеличение точности квадратуры (13.4.4) указанным выше методом будет тем успешнее, чем больше будут  $p$  или  $q$ .

Формула (13.4.3) для интеграла (13.4.4) будет такой:

$$\int_{-1}^1 (1-x)^p (1+x)^q f(x) dx =$$

$$= \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + C_0 f^{(2n)}(a_0) + C_1 f^{(2n+2)}(a_1) + \dots$$

$$\dots + C_{s-1} f^{(2n+2s-2)}(a_{s-1}) + \int_{-1}^1 f^{(2n+2s)}(x) K_s(x) dx. \quad (13.4.6)$$

Коэффициент первого поправочного члена  $C_0 = \int_{-1}^1 K(x) dx$  есть погрешность квадратуры некоторой функции, производная которой порядка  $2n$  равна 1. За такую функцию может быть взята

$$f = \frac{a_n^{-2}}{(2n)!} P_n^{(p, q)}(x),$$

где  $a_n$  есть старший коэффициент  $P_n^{(p, q)}(x)$ . Так как  $P_n^{(p, q)}(x_k) = 0$ ,



$$\begin{aligned}
 C_0 &= R(f) = \\
 &= \frac{1}{(2n)! a_n^2} \left[ \int_{-1}^1 (1-x)^p (1+x)^q P_n^{(p, q)^2}(x) dx - \sum_{k=1}^n A_k P_n^{(p, q)^2}(x_k) \right] = \\
 &= \frac{1}{(2n)! a_n^2} \int_{-1}^1 (1-x)^p (1+x)^q P_n^{(p, q)^2}(x) dx.
 \end{aligned}$$

Или, ввиду того, что  $a_n$  и интеграл от квадрата якобиева многочлена имеют известные значения (2.2.2) и (2.2.5),

$$C_0 = \frac{2^{p+q+2n+1} n! \Gamma(p+n+1) \Gamma(q+n+1) \Gamma(p+q+n+1)}{(2n)! \Gamma(p+q+2n+1) \Gamma(p+q+2n+2)}.$$

Вычислим еще  $\alpha_0$ . Заметим, что в выражении  $\alpha_0 = C_0^{-1} \int_{-1}^1 xK(x) dx$

интеграл  $\int_{-1}^1 xK(x) dx$  есть остаток приближенного интегрирования по формуле (13.4.4) такой функции  $f$ , производная которой порядка  $2n$  равна  $x$ . Пусть  $P_n^{(p, q)}(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots$ . За  $f$  может быть принят многочлен  $f(x) = \frac{1}{(2n+1)! a_n^2} \left[ x - 2 \frac{b_n}{a_n} \right] P_n^{(p, q)^2}(x)$ . Ввиду  $f(x_k) = 0$ , будет

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 xK(x) dx &= R(f) = \int_{-1}^1 (1-x)^p (1+x)^q f dx - \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) = \\
 &= \frac{1}{(2n+1)! a_n^2} \left\{ \int_{-1}^1 (1-x)^p (1+x)^q x P_n^{(p, q)^2}(x) dx - \right. \\
 &\quad \left. - 2 \frac{b_n}{a_n} \int_{-1}^1 (1-x)^p (1+x)^q P_n^{(p, q)^2}(x) dx \right\}. \quad (13.4.7)
 \end{aligned}$$

Второй интеграл в скобках встречался несколькими строками раньше и равен  $C_0 (2n)! a_n^2$ . Два старшие коэффициента  $a_n$  и  $b_n$  многочлена  $P_n^{(p, q)}(x)$  также известны и имеют значения \*)

$$a_n = \frac{\Gamma(p+q+2n+1)}{2^n n! \Gamma(p+q+n+1)} \quad \text{и} \quad b_n = n(p-q) \frac{\Gamma(p+q+2n)}{2^n n! \Gamma(p+q+n+1)}.$$

\*) См., напр., Д. Джексон, Ряды Фурье и ортогональные полиномы, М., ИЛ, 1948, гл. VIII, п. 3.

Поэтому

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{n(p-q)}{p+q+2n}.$$

Перейдем к вычислению первого интеграла в скобках. В теории многочленов Якоби известно следующее рекуррентное соотношение \*)

$$\begin{aligned} & (p+q+2n)(p+q+2n+1)(p+q+2n+2)xP_n^{(p,q)}(x) = \\ & = 2(n+1)(p+q+n+1)(p+q+2n)P_{n+1}^{(p,q)}(x) + (q^2 - p^2) \times \\ & \times (p+q+2n+1)P_n^{(p,q)}(x) + 2(p+n)(q+n)(p+q+2n+2)P_{n-1}^{(p,q)}(x). \end{aligned}$$

Если обе части равенства умножить на  $(1-x)^p(1+x)^q P_n^{(p,q)}(x)$  и интегрировать по отрезку  $[-1, 1]$ , откуда сразу же получится:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (1-x)^p(1+x)^q x P_n^{(p,q)}(x) dx = \\ & = \frac{q^2 - p^2}{(p+q+2n)(p+q+2n+2)} \int_{-1}^1 (1-x)^p(1+x)^q P_n^{(p,q)}(x) dx = \\ & = \frac{(q^2 - p^2)(2n)! a_n^2}{(p+q+2n)(p+q+2n+2)} C_0. \end{aligned}$$

Подставив все указанные частные результаты в (13.4.7), найдем

$$\text{для } \int_{-1}^1 xK(x) dx$$

$$\int_{-1}^1 xK(x) dx = \frac{q-p}{2n+1} \left\{ \frac{p+q}{(p+q+2n)(p+q+2n+2)} + \frac{2n}{p+q+2n} \right\} C_0.$$

и после несложных вычислений для  $\alpha_0 = C_0^{-1} \int_{-1}^1 xK(x) dx$

$$\alpha_0 = \frac{q-p}{2n+1} \left\{ \frac{n}{p+q+2n} + \frac{n+1}{p+q+2n+2} \right\}.$$

---

\*) См. предыдущую сноску, гл. VIII п. 5.

В ультрасферическом случае  $p = q$  все  $\alpha_k$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) обращаются в нуль и формула (13.4.6) будет такой:

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^p f(x) dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \\ + \frac{2^{2p+2n+1} n! \Gamma^2(p+n+1) \Gamma(2p+n+1)}{(2n)! \Gamma(2p+2n+1) \Gamma(2p+2n+2)} \{ f^{(2n)}(0) + \\ + \frac{1}{2 \cdot (2n+1)(2n+2)} \left[ \frac{(n+1)(n+2)}{2p+2n+3} + \frac{(n-1)n}{2p+2n-1} \right] f^{(2n+2)}(0) + \dots \}$$

Пусть нужно вычислить интеграл

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^2 e^x dx = 8e - 56e^{-1} \approx 1,145006.$$

Здесь  $p = q = 2$ . Положим  $n = 1$ , т. е. возьмем только один узел:

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^2 f(x) dx = A_1 f(x_1) + \frac{8}{105} \{ f^{(2)}(0) + \frac{1}{36} f^{(4)}(0) + \dots \}.$$

В силу четности весовой функции  $(1-x^2)^2$ , очевидно будет  $x_1 = 0$ . Кроме того

$$A_1 = \int_{-1}^1 (1-x^2)^2 dx = \frac{16}{15} \approx 1,066\,667.$$

Первый член формулы

$$A_1 f(x_1) = \frac{16}{15} \cdot 1 \approx 1,066\,667$$

дает весьма неточное значение интеграла. Если присоединить к нему второй член, то сумма их

$$A_1 f(x_1) + \frac{8}{105} f^{(2)}(0) = \frac{16}{15} + \frac{8}{105} = \frac{8}{7} \approx 1,142\,857$$

даст интеграл с тремя верными знаками. Сумма же трех членов

$$A_1 f(x_1) + \frac{8}{105} f^{(2)}(0) + \frac{2}{945} f^{(4)}(0) = \frac{8}{7} + \frac{2}{945} = \frac{1082}{945} \approx 1,144\,974$$

будет отличаться от точного значения интеграла в шестом знаке.

Метод выделения из интеграла нескольких «последовательных главных частей», который был описан в настоящем параграфе в связи с увеличением точности механических квадратур, тесно связан с известной проблемой конструктивной теории функций, которую обычно называют задачей интерполи-

рования производными последовательных порядков, или задачей Абеля—Гончарова \*).

Пусть на отрезке  $[a, b]$  определена функция  $f$ , имеющая  $n+1$  производных и взяты  $n+1$  точек  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ . Нужно найти многочлен  $P(x)$  степени  $\leq n$ , удовлетворяющий условиям

$$P^{(i)}(\xi_i) = f^{(i)}(\xi_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (13.4.8)$$

Легко найти явное выражение для  $P(x)$ . Последнее из условий (13.4.8)

$$P^{(n)}(x) = f^{(n)}(\xi_n)$$

является тождеством относительно  $x$ , так как степень  $P$  не больше  $n$ . Интегрируем его в границах от  $\xi_{n-1}$  до  $x$  и воспользуемся при этом предпоследним условием (13.4.8):

$$P^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(\xi_{n-1}) + \int_{\xi_{n-1}}^x dt_n \cdot f^{(n)}(\xi_n).$$

Продолжая интегрировать дальше и учитывая при этом условия (13.4.8), после  $n$  шагов найдем

$$\begin{aligned} P(x) = & f(\xi_0) + f'(\xi_1) \int_{\xi_0}^x dt_1 + f''(\xi_2) \int_{\xi_0}^x dt_1 \int_{\xi_1}^{t_1} dt_2 + \dots \\ & \dots + f^{(n)}(\xi_n) \int_{\xi_0}^x dt_1 \int_{\xi_1}^{t_1} dt_2 \dots \int_{\xi_{n-1}}^{t_{n-1}} dt_n. \end{aligned} \quad (13.4.9)$$

Вводя обозначения

$$L_0(x) = 1, \quad L_i(x) = \int_{\xi_0}^x dt_1 \int_{\xi_1}^{t_1} dt_2 \dots \int_{\xi_{i-1}}^{t_{i-1}} dt_i,$$

можно записать  $P(x)$  в форме

$$P(x) = \sum_{i=0}^n f^{(i)}(\xi_i) L_i(x). \quad (13.4.10)$$

Рассмотрим теперь остаток интерполирования  $r(x) = f(x) - P(x)$ . При некоторых предположениях о функции  $f$ , для него может быть построено другое представление, более удобное для исследований и оценок.

Пусть точка  $x$  и узлы  $\xi_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) принадлежат отрезку  $[\alpha, \beta]$ . Если функция  $f$  имеет непрерывную производную порядка  $n+1$  на  $[\alpha, \beta]$ , то остаток интерполирования  $r(x)$  представим в виде:

$$r(x) = \int_{\xi_0}^x dt_1 \int_{\xi_1}^{t_1} dt_2 \dots \int_{\xi_n}^{t_n} f^{(n+1)}(t_{n+1}) dt_{n+1}. \quad (13.4.11)$$

\*) В. Л. Гончаров, Теория интерполирования и приближения функций, гл. 1 и 18, 1954. См. также М. А. Евграфов, Интерполяционная задача Абеля—Гончарова, М., Гостехиздат, 1954.

Справедливость этого вытекает из того обстоятельства, что в узлах  $\xi_i$  остаток  $r(x)$  должен удовлетворять условиям  $r(\xi_0) = 0$ ,  $r'(\xi_1) = 0$ , ...,  $r^{(n)}(\xi_n) = 0$  и, кроме того, для него должно выполняться тождество:  $r^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ .

Возвратимся теперь к разложению остатка квадратуры (13.4.1):

$$R(f) = \int_a^b f^{(m)}(x) K(x) dx, \quad (13.4.12)$$

Пусть, пользуясь некоторыми соображениями, для выделения «первой главной части» из  $R(f)$  мы избрали некоторую точку  $\xi_0$  и разделили  $f^{(m)}(x)$  на две части, положив

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= f^{(m)}(\xi_0) + [f^{(m)}(x) - f^{(m)}(\xi_0)] = f^{(m)}(\xi_0) + \int_{\xi_0}^x f^{(m+1)}(t) dt = \\ &= f^{(m)}(\xi_0) + \int_a^b f^{(m+1)}(t) [E(x-t) - E(\xi_0-t)] dt. \end{aligned}$$

Напомним, что раньше избранную точку мы обозначали  $\alpha_0$  и подбирали ее специальным образом стремясь к тому, чтобы в первой выделенной части остатка была сконцентрирована возможно большая его часть. Сейчас мы не будем рассматривать вопрос о выборе  $\xi_0$  и оставим эту точку произвольной.

Подставив указанное разложение  $f^{(m)}$  в (13.4.12), получим остаток  $R(f)$  в форме

$$\begin{aligned} R(f) &= f^{(m)}(\xi_0) \mathcal{D}_0 + \int_a^b f^{(m+1)}(x) N_1(x) dx, \\ \mathcal{D}_0 &= \int_a^b K(x) dx, \quad N_1(x) = \int_a^b K(t) [E(t-x) - E(\xi_0-x)] dt. \end{aligned}$$

Пусть вновь с целью выделить из  $R(f)$  «вторую главную часть» мы опять избрали некоторую точку  $\xi_1$  и разложили  $f^{(m+1)}(x)$  на две части

$$f^{(m+1)}(x) = f^{(m+1)}(\xi_1) + [f^{(m+1)}(x) - f^{(m+1)}(\xi_1)]$$

и т. д. После нескольких таких преобразований мы получим следующее разложение  $R(f)$ :

$$\begin{aligned} R(f) &= \mathcal{D}_0 f^{(m)}(\xi_0) + \mathcal{D}_1 f^{(m+1)}(\xi_1) + \dots + \mathcal{D}_{s-1} f^{(m+s-1)}(\xi_{s-1}) + \\ &\quad + \int_a^b f^{(m+s)}(x) N_s(x) dx, \quad (13.4.13) \end{aligned}$$

$$N_0(x) = K(x),$$

$$N_{i+1}(x) = \int_a^b N_i(t) [E(t-x) - E(\xi_i-x)] dt, \quad \mathcal{D}_i = \int_a^b N_i(x) dx.$$

Построенное сейчас разложение остатка, принципиально говоря, имеет ту же природу, что и разложение  $R(f)$ , которое было сделано раньше при построении формулы (13.4.3). Различие состоит лишь в том, что раньше выбор точек  $\alpha_0, \alpha_1, \dots$  был подчинен определенным целям, теперь же избираемые точки  $\xi_0, \xi_1, \dots$  мы оставляем произвольными и не налагаем на них никаких ограничений. Но вполне ясно, что если выбрать точки  $\xi_i$  особым образом, а именно считать  $\xi_0 = \alpha_0, \xi_2 = \alpha_1, \dots$ , то новое разложение (13.4.13) остатка  $R(f)$  совпадает с его прежним разложением.

Равенство (13.4.13) может быть получено другим путем, тесно связанным с указанной выше задачей Абеля—Гончарова. Примем точки  $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{s-1}$  за узлы и выполним интерполирование функции  $f^{(m)}(x)$  последовательными производными в них:

$$f^{(m)}(x) = \sum_{i=0}^{s-1} f^{(m+i)}(\xi_i) L_i(x) + r(x). \quad (13.4.14)$$

Если внести это разложение  $f^{(m)}(x)$  в (13.4.12), получим новое представление остатка  $R(f)$

$$R(f) = \sum_{i=0}^{s-1} f^{(m+i)}(\xi_i) \int_a^b K(x) L_i(x) dx + \int_a^b K(x) r(x) dx. \quad (13.4.15)$$

Оно, очевидно, должно совпадать с (13.4.13) для всякой  $m+s$  раз непрерывно дифференцируемой функции  $f$ . Поэтому должно быть

$$\mathcal{D}_i = \int_a^b K(x) L_i(x) dx, \quad \int_a^b f^{(m+s)}(x) N_s(x) dx = \int_a^b K(x) r(x) dx. \quad (13.4.16)$$

Такая связь интерполирования  $f^{(m)}$  с проблемой разложения остатка квадратуры по «главным частям» полезна в теории квадратур в частности в следующем отношении.

Если функция  $f$  дифференцируема бесконечное число раз, в равенстве (13.4.13) мы можем  $s$  увеличить неограниченно. В пределе из суммы

$\sum_{i=0}^{s-1} \mathcal{D}_i f^{(m+i)}(\xi_i)$  получится бесконечный ряд

$$R(f) \sim \mathcal{D}_0 f^{(m)}(\xi_0) + \mathcal{D}_1 f^{(m+1)}(\xi_1) + \dots \quad (13.4.17)$$

Вопрос о сходимости этого ряда к  $R(f)$  равносильен тому, чтобы при  $s \rightarrow \infty$  было

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_a^b f^{(m+s)}(x) N_s(x) dx = 0.$$

Последнее же ввиду (13.4.16), в свою очередь, равносильно тому, чтобы

$$\int_a^b K(x) r(x) dx \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty.$$

Таким образом вопрос о возможности разложения остатка  $R(f)$  в ряд (13.4.17) по «главным частям», т. е. вопрос о справедливости равенства

$$R(f) = \mathcal{D}_0 f^{(m)}(\xi_0) + \mathcal{D}_1 f^{(m+1)}(\xi_1) + \dots \quad (13.4.18)$$

тесно связан с вопросом о сходимости интерполирования Абеля — Гончарова (13.4.14) к функции  $f^{(m)}$  при  $s \rightarrow \infty$ .

В частности, если отрезок  $[a, b]$  конечный и

$$r(x) = f^{(m)}(x) - \sum_{i=0}^{s-1} f^{(m+i)}(\xi_i) L_i(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow \infty$$

равномерно относительно  $x$ , то разложение (13.4.18) наверное возможно.

Для ознакомления с проблемой сходимости интерполирования последовательными производными мы отсылаем читателя к специальной литературе \*).

## § 5. Увеличение скорости сходимости квадратурного процесса

В общей форме задача, которую мы будем рассматривать, может быть высказана в следующих словах. Предположим, что для вычисления интеграла избрано некоторое квадратурное правило, которое мы будем считать сходящимся:

$$I(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k^n f(x_k^n) = Q_n(f), \quad Q_n(f) \rightarrow I(f), \quad n \rightarrow \infty. \quad (13.5.1)$$

При помощи него может быть найдена последовательность приближенных значений интеграла  $Q_1(f), Q_2(f), \dots$ . Нужно найти способ преобразования ее в новую последовательность  $S_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ), сходящуюся к тому же пределу  $I(f)$ , но более быстро, чем последовательность  $Q_j(f)$ .

В основе правил преобразования, о которых будет говориться ниже, лежит идея интерполирования. Пусть выбраны  $k$  значений  $n$ :  $n_1, n_2, \dots, n_k$  и для них вычислены соответствующие значения  $Q_{n_1}, \dots, Q_{n_k}$ . По ним необходимо сделать заключение о неизвестном точном значении интеграла  $I(f)$ . Это есть некоторая задача интерполирования, понимаемая в весьма общем виде, так как в ней не поставлены никакие априорные предписания о выборе средств интерполирования. Выбор способа интерполирования остается в распоряжении исследователя. Особенностью задачи, затрудняющей решение, является то, что приближенные значения интеграла  $Q_{n_j}$  ( $j = 1, \dots, k$ ) в реальных вычислениях бывают, как правило, близкими между собой и мало отличающимися от предельного значения  $I(f)$ . Это налагает сильные ограничения на выбор способа интерполирования. Прежде всего мы должны стремиться к тому, чтобы погрешность избранного способа была значительно меньше ошибок приближенных значений  $I - Q_{n_j}$ , которые сами являются малыми величинами.

\*) См. в литературе, в конце настоящей главы книгу М. А. Евграфова,

В реальных вычислениях находят небольшое число значений квадратурной суммы  $Q_n$  — обычно два или три, и лицо, подготавливающее вычисления, обязано достигнуть высокой точности в указании  $I(f)$ , используя для этой цели малое число значений функции  $Q_n$ . Этого можно добиться, прежде всего, путем строгого согласования способа интерполирования с законом сходимости  $Q_n \rightarrow I$ .

Может оказаться, что избранный способ будет давать хорошую точность для квадратурных процессов одного типа и быть непригодным для процессов с другим законом сходимости. В этом смысле каждый метод улучшения сходимости должен быть специализированным и рассчитанным на некоторый класс последовательностей  $Q_n$ , обладающих близкими законами сходимости.

Лишь для немногих квадратурных процессов мы знаем законы стремления к точному значению  $Q_n \rightarrow I$  настолько полно, чтобы для них мы могли указать хорошие способы улучшения сходимости. Мы остановимся подробно только на одном типе процессов, часто встречающемся и достаточно простом, чтобы для него можно было с удовлетворительной точностью решить эту задачу.

Пусть рассматривается квадратурное правило с равноотстоящими узлами  $x_k = x_0 + kh$  и шагом  $h$ :

$$I(f) = \int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_k A_k(h) f(x_0 + kh) = Q(h, f), \quad (13.5.2)$$

$$h = \frac{1}{n} (b - a).$$

Предположим, что остаток  $R(h, f) = I(f) - Q(h, f)$  будет малой величиной порядка  $m$  относительно  $h$ :  $R(h, f) = h^m C(h)$ ,  $C(h) \rightarrow C \neq 0$  при  $h \rightarrow 0$ .

При всяком значении  $h$  выполняется точное равенство  $I(f) = Q(h, f) + h^m C(h)$ . Если же шаг  $h$  достаточно мал, то будет иметь малую погрешность приближенное равенство  $I(f) \approx Q(h, f) + h^m C$ .

Допустим теперь, что вычисления выполнены для двух значений  $h_1$  и  $h_2$  шага. Для них будут справедливы равенства  $I(f) \approx Q(h_1, f) + h_1^m C$  и  $I(f) \approx Q(h_2, f) + h_2^m C$ . После исключения из них неизвестной величины  $C$  получится

$$I(f) \approx \frac{h_1^m Q(h_2, f) - h_2^m Q(h_1, f)}{h_1^m - h_2^m} = S_1. \quad (13.5.3)$$

Если избрана бесконечная последовательность значений  $h$ :  $h_1, h_2, h_3, \dots$  и известны соответствующие им значения квадратурных сумм  $Q(h_i, f)$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ), то (13.5.3) можно рассматривать как пер-



вый шаг преобразования последовательности  $Q(h_i, f)$  в последовательность  $S_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Второй шаг ее есть

$$S_2 = \frac{h_2^m Q(h_3, f) - h_3^m Q(h_2, f)}{h_2^m - h_3^m}$$

и т. д. Последовательность  $S_i$  будет при некоторых условиях сходиться к  $I(f)$  более быстро, чем  $Q(h_i, f)$ .

В реальных вычислениях часто прибегают к делению всех частичных отрезков пополам: начинают с деления области интегрирования на некоторое число  $n$  одинаковых частичных отрезков и применяют для нахождения  $I(f)$  правило вида (13.5.2). Если результат неудовлетворителен или нуждается в проверке, то каждый частичный отрезок делят пополам и выполняют вычисления с удвоенным числом отрезков и т. д. В этом процессе  $h_1 = h$ ,  $h_2 = 0,5h$ ,  $h_3 = 0,25h$ , ... Правило (13.5.3) выполнения первого шага уточнения последовательности  $Q(h, f)$ ,  $Q(0,5h; f)$ ,  $Q(0,25h; f)$ , ... будет следующим:

$$S_1 = \frac{2^m Q(0,5h; f) - Q(h, f)}{2^m - 1} \approx I(f). \quad (13.5.4)$$

Второй шаг

$$S_2 = \frac{2^m Q(0,25h; f) - Q(0,5h; f)}{2^m - 1} \approx I(f)$$

и т. д.

Рассмотрим два примера применения этих равенств.

Из (6.4.4) или из формулы (13.3.16) следует, что если  $f'(b) - f'(a) \neq 0$ , остаток общего правила трапеций

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \approx h \left[ \frac{1}{2} f_0 + f_1 + \dots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n \right] = T(h, f) \\ (f_k = f(a + kh))$$

будет величиной порядка  $h^2$ . Здесь  $m = 2$  и равенство (13.5.4), позволяющее интерполировать  $I(f)$  по значениям  $T(h, f)$  и  $T(0,5h; f)$ , будет

$$S_1 = \frac{1}{3} [4T(0,5h; f) - T(h, f)] \approx I(f). \quad (13.5.5)$$

Из (6.4.10) и (13.3.23) вытекает, что при  $f^{(3)}(b) - f^{(3)}(a) \neq 0$  остаток правила Симпсона

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{3} [f_0 + f_n + 2(f_2 + f_4 + \dots) + \\ + 4(f_1 + f_3 + \dots)] = U(h, f)$$

будет величиной порядка  $h^4$ . Здесь мы должны считать  $m=4$ . Правило (13.5.4) интерполирования  $I(f)$  по значениям  $U(h, f)$  и  $U(0,5h; f)$  будет

$$S_1 = \frac{1}{15} [16U(0,5h; f) - U(h, f)] \approx I(f). \quad (13.5.6)$$

Эта формула применима и к общему правилу трех восьмых (6.4.15), так как остаточный член его также имеет четвертый порядок малости относительно  $h$ .

Выше мы говорили о самых простых способах ускорения сходимости, которые основаны на знании только степени малости остатка квадратуры. Интерполирование  $I(f)$  может быть сделано более точно, если наши сведения об остатке будут более содержательными.

Пусть вычисления выполнены для  $r+1$  значений  $h_1, h_2, \dots, h_{r+1}$  шага  $h$  и найдены  $Q(h_1, f), \dots, Q(h_{r+1}, f)$ .

Для многих правил интегрирования (13.5.2) остаток  $R(h, f)$  может быть представлен в виде суммы, расположенной по степеням  $h$ . При этом для большого числа практически важных правил в разложение будут входить только четные степени  $h$ , начиная с некоторой.

В этих условиях для интерполирования естественно воспользоваться многочленом вида

$$P(h) = a_0 + a_m h^m + a_{m+2} h^{m+2} + \dots + a_{m+2r-2} h^{m+2r-2},$$

подчинив его требованиям  $P(h_s) = Q(h_s, f)$  ( $s = 1, 2, \dots, r+1$ ), доставляющим для коэффициентов  $a_0, a_m, a_{m+2}, \dots$  линейную систему  $a_0 + a_m h_s^m + \dots + a_{m+2r-2} h_s^{m+2r-2} = Q(h_s, f)$  ( $s = 1, \dots, r+1$ ). Для наших целей достаточно найти только коэффициент  $a_0$ , так как

$$I(f) = \lim_{h \rightarrow 0} Q(h, f) \approx \lim_{h \rightarrow 0} P(h) = a_0 = \frac{\Delta(Q)}{\Delta} = S_1, \quad (13.5.7)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ h_1^m & h_2^m & \dots & h_{r+1}^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_1^{m+2r-2} & h_2^{m+2r-2} & \dots & h_{r+1}^{m+2r-2} \end{vmatrix},$$

$$\Delta Q = \begin{vmatrix} Q(h_1, f) & Q(h_2, f) & \dots & Q(h_{r+1}, f) \\ h_1^m & h_2^m & \dots & h_{r+1}^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_1^{m+2r-2} & h_2^{m+2r-2} & \dots & h_{r+1}^{m+2r-2} \end{vmatrix}.$$

При  $r=1$  отсюда получается двухчленное интерполяционное правило улучшения сходимости (13.5.3). Если положить  $r=2$ , мы получим

трехчленное правило, имеющее более высокую степень точности:

$$S_1 = \frac{[Q(h_1, f) h_2^m h_3^m (h_3^2 - h_2^2) + Q(h_2, f) h_3^m h_1^m (h_1^2 - h_3^2) + Q(h_3, f) h_1^m h_2^m (h_2^2 - h_1^2)]}{[h_2^m h_3^m (h_3^2 - h_2^2) + h_3^m h_1^m (h_1^2 - h_3^2) + h_1^m h_2^m (h_2^2 - h_1^2)]} \approx I(f), \quad (13.5.8)$$

Оно значительно упрощается, если при вычислениях на каждом шаге  $h$  делится пополам:  $h_1 = h$ ,  $h_2 = 0,5h$ ,  $h_3 = 0,25h$ :

$$S_1 = \frac{Q(h, f) - 5 \cdot 2^m Q(0,5h; f) + 2^{2m+2} Q(0,25h; f)}{1 - 5 \cdot 2^m + 2^{2m+2}} \approx I(f). \quad (13.5.9)$$

Для формулы трапеций и Симпсона это правило принимает соответственно форму:

$$m=2, \quad S_1 = \frac{1}{45} [Q(h, f) - 20Q(0,5h; f) + 64Q(0,25h; f)] \approx I(f),$$

$$m=4, \quad S_1 = \frac{1}{945} [Q(h, f) - 80Q(0,5h; f) + 1024Q(0,25h; f)] \approx I(f).$$

Если остаток не будет четной функцией от  $h$  и в его разложении по степеням  $h$  будут содержаться члены с нечетными степенями, то для интерполирования  $I(f)$  можно воспользоваться многочленом вида  $P(h) = a_0 + a_m h^m + a_{m+1} h^{m+1} + \dots + a_{m+r-1} h^{m+r-1}$ , подчинив его прежним условиям:  $P(h_s) = Q(h_s, f)$  ( $s = 1, 2, \dots, r+1$ ). Вычисления, аналогичные проделанным выше, приведут к нижеследующему правилу преобразования:

$$I(f) \approx a_0 = \frac{\delta(Q)}{\delta} = S_1,$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ h_1^m & \dots & h_{r+1}^m \\ \vdots & \dots & \vdots \\ h_1^{m+r-1} & \dots & h_{r+1}^{m+r-1} \end{vmatrix}, \quad \delta(Q) = \begin{vmatrix} Q(h_1, f) & \dots & Q(h_{r+1}, f) \\ h_1^m & \dots & h_{r+1}^m \\ \vdots & \dots & \vdots \\ h_1^{m+r-1} & \dots & h_{r+1}^{m+r-1} \end{vmatrix}.$$

Трехчленное правило преобразования, соответствующее  $r=2$ , будет сходным с (13.5.8), но несколько проще него:

$$I(f) \approx \frac{[Q(h_1, f) h_2^m h_3^m (h_3 - h_2) + Q(h_2, f) h_3^m h_1^m (h_1 - h_3) + Q(h_3, f) h_1^m h_2^m (h_2 - h_1)]}{[h_2^m h_3^m (h_3 - h_2) + h_3^m h_1^m (h_1 - h_3) + h_1^m h_2^m (h_2 - h_1)]} = S_1$$

и в случае деления шага  $h$  пополам:  $h_1 = h$ ,  $h_2 = 0,5h$ ,  $h_3 = 0,25h$ :

$$I(f) \approx \frac{Q(h, f) - 3 \cdot 2^m Q(0,5h; f) + 2^{2m+1} Q(0,25h; f)}{1 - 3 \cdot 2^m + 2^{2m+1}} = S_1.$$

Мы закончим настоящий параграф указанием на возможность перенесения полученных правил улучшения сходимости процесса квадратур на некоторые другие случаи. Все предыдущие результаты опирались на возможность разложения остатка квадратуры  $R(h, f)$  по степеням некоторой малой величины  $h$  такой, чтобы при  $h \rightarrow 0$  имела место сходимость  $Q(h, f) \rightarrow I(f)$ . Вид квадратурного правила (13.5.2) и, в частности, тот факт, что его узлы считаются равноотстоящими и  $h$  есть длина частичного отрезка, при получении правил не использовались.

Возвратимся к общему правилу интегрирования (13.5.1). Его остаток будет, вообще говоря, весьма сложно зависеть от  $n$ . Но в некоторых простых случаях он может быть разложен по степеням  $\frac{1}{n}$ :  $R_n(f) = I(f) - Q_n(f) = c_1 n^{-s_1} + c_2 n^{-s_2} + \dots + [c_k + \gamma_k(n)] n^{-s_k}$ ,  $[\gamma_k(n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty]$ . В этом случае для интерполирования точного значения  $I(f)$  рационально воспользоваться многочленом  $P\left(\frac{1}{n}\right)$ , содержащим свободный член и члены с теми же степенями  $\frac{1}{n}$ , что и в остатке  $R_n(f)$ :

$$P\left(\frac{1}{n}\right) = a_0 + a_1 n^{-s_1} + a_2 n^{-s_2} + \dots + a_k n^{-s_k}.$$

К такому типу среди многих других принадлежат квадратурные правила, получающиеся в результате кратного применения какой-либо формулы, например, формулы Гаусса: область интегрирования  $[a, b]$  делят на некоторое число  $m$  одинаковых частей, к интегралу по каждому частичному отрезку применяют избранную формулу и затем складывают квадратурные суммы по всем отрезкам. Если во взятой формуле было  $p$  узлов, то после суммирования получится правило интегрирования с  $mp$  узлами.

При неограниченном увеличении числа  $m$  частичных отрезков мы будем иметь некоторый квадратурный процесс. Возможность разложения  $R_n(f)$  следует из представления остатка (5.2.6). Чтобы сделать изложение определенным и запись наглядной, предположим, что для интегрирования по частичным отрезкам было избрано правило Гаусса с  $p$  узлами. Степень точности его равна  $2p - 1$ .

Допустим сначала, что это правило применяется к стандартному отрезку  $[-1, 1]$  и интегрируемая функция есть  $F$ . Погрешность правила Гаусса представима интегралом вида  $\int_{-1}^1 F^{(2p)}(t) K(t) dt$ . Явное выражение ядра остатка  $K(t)$  указано в (5.2.7).

Пусть  $[a, b]$  делится на части точками  $a_i = a + iH$ ,  $H = \frac{1}{m}(b - a)$ . Чтобы записать остаток приближенной квадратуры для частичного

отрезка  $[a_i, a_{i+1}]$ , переведем его в  $[-1, 1]$  линейным преобразованием  $x = a_i + 0,5H(1+t)$ . При этом интеграл по отрезку преобразуется

$$\text{так: } \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx = \frac{1}{2} H \int_{-1}^1 f \left[ a_i + \frac{1}{2} H(1+t) \right] dt. \text{ Так как в нашей}$$

задаче

$$F^{(2p)}(t) = \frac{d^{2p}}{dt^{2p}} f \left[ a_i + \frac{1}{2} H(1+t) \right] = \left( \frac{H}{2} \right)^{2p} f^{(2p)} \left[ a_i + \frac{1}{2} H(1+t) \right],$$

то погрешность вычисления интеграла по отрезку  $[a_i, a_{i+1}]$  равна  $\left( \frac{H}{2} \right)^{2p+1} \int_{-1}^1 f^{(2p)} \left[ a_i + \frac{1}{2} H(1+t) \right] K(t) dt$ . Погрешность же интегрирования по всей области  $[a, b]$  есть

$$R_n(f) = \left( \frac{H}{2} \right)^{2p+1} \int_{-1}^1 K(t) \sum_{i=0}^{m-1} f^{(2p)} \left[ a_i + \frac{1}{2} H(1+t) \right] dt.$$

После этого, если считать, что  $f$  имеет непрерывные производные достаточно высокого порядка, к интегралу

$$\int_{-1}^1 K(t) \sum_{i=0}^{m-1} f^{(2p)} \left[ a_i + \frac{1}{2} H(1+t) \right] dt$$

достаточно применить эйлерово преобразование (13.3.6), описанное в гл. 13 § 3, чтобы установить возможность следующего разложения остатка:

$$H = \frac{1}{m}(b-a) = \frac{1}{n} p(b-a),$$

$$R_n(f) = [p(b-a)]^{2p} n^{-2p} C_0 [f^{(2n-1)}(b) - f^{(2n-1)}(a)] + \\ + [p(b-a)]^{2p+2} n^{-2p-2} C_2 [f^{(2n+1)}(b) - f^{(2n+1)}(a)] + \dots$$

Коэффициенты  $C_0, C_2, \dots$  могут быть вычислены при помощи равенства (13.3.7), которое в нашей задаче примет форму

$$C_i = \frac{2^{i-1}}{i!} \int_{-1}^1 K(t) B_i \left( \frac{t+1}{2} \right) dt.$$

Ввиду свойства симметрии абсцисс и коэффициентов Гаусса, ядро  $K(t)$  является четной функцией  $t$ . Если  $i$  — число нечетное, то  $B_i \left( \frac{t+1}{2} \right)$  есть нечетная функция  $t$ . Поэтому все коэффициенты  $C_i$

нечетных номеров обращаются в нуль и в разложении  $R_n(f)$  сохраняются только члены с четными степенями  $\frac{1}{n}$ . Численные значения  $C_0$ ,  $C_2$  можно найти в конце § 3 гл. 13 в том месте, где приведена формула эйлерова вида для правила Гаусса.

## Л и т е р а т у р а

Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, М., Гостехиздат, 1954.

Канторович Л. В., О приближенном вычислении некоторых типов определенных интегралов и других применениях метода выделения особенностей, Матем. сб. 41: 2 (1934), 235—245.

Стефенсен И. Ф., Теория интерполирования, гл. XIII, М. — Л. ОНТИ, 1935.

Крылов В. И., Увеличение точности механических квадратур. Формулы эйлерова вида, ДАН СССР 96, № 3 (1954).

Крылов В. И., Увеличение точности механических квадратур при наличии главного участка интегрирования малой длины в интегральном представлении остатка квадратуры, ДАН СССР 101, № 6 (1955).

Смирнов В. Н., 1) Увеличение точности формул механических квадратур типа Чебышёва — Эрмита. Увеличение точности квадратур Чебышёва — Лягерра. Сб. трудов Куйбыш. индустр. ин-та, № 5 (1955). 2) О квадратурных формулах Гаусса, там же, № 6 (1956).

Евграфов М. А., Интерполяционная задача Абеля — Гончарова. М., Гостехиздат, 1954.

## ГЛАВА 14

### ЧИСЛЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

#### § 1. Преобразование Фурье на конечном отрезке и вычисление коэффициентов Фурье гладкой периодической функции

Ввиду большого значения, которое имеют ряды и интегральное преобразование Фурье для многих разделов механики, физики и инженерных наук, задаче численного нахождения коэффициентов и вычисления интеграла Фурье было посвящено много работ и предложено большое количество методов вычислений, основанных на самых разнообразных принципах. Мы изложим только некоторые из методов, которым, нам кажется, можно отдать предпочтение по их точности и удобству применения.

Для каждой функции  $f(x)$ , определенной на отрезке  $0 \leq x \leq 2\pi$  и абсолютно интегрируемой там, можно вычислить соответствующие ей коэффициенты Фурье

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (14.1.1)$$

Часто пользуются комплексными коэффициентами Фурье

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} \, dx \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (14.1.2)$$

Последнее равенство можно рассматривать как преобразование функции  $f(x)$ , определенной на  $[0, 2\pi]$ , в функцию  $c_k$ , определенную в целых точках  $k = 0, \pm 1, \dots$ .

Прямой задачей преобразования является проблема вычисления по заданной функции  $f$  ее коэффициентов Фурье  $a_k$ ,  $b_k$  или  $c_k$ .

Обратная же задача есть проблема восстановления функции  $f$  по ее коэффициентам Фурье. В весьма общих предположениях об  $f$ , которые выясняются в курсах анализа, она решается при помощи

ряда Фурье, а именно доказывается, что  $f$  будет суммой следующего ряда \*):

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}. \quad (14.1.3)$$

Последняя из сумм понимается в смысле главного ее значения. Мы будем заниматься исключительно задачей нахождения коэффициентов Фурье и оставим в стороне обратную проблему, как выходящую за рамки книги.

Для вычисления интегралов (14.1.1) — (14.1.2) могут быть, принципиально говоря, применены многие правила, о которых говорилось в предшествующих главах: правила трапеций и Симпсона, формула Гаусса и другие. Но применение их будет затруднять наличие под знаком интеграла множителей  $\cos kx$  и  $\sin kx$ . Уже при небольших значениях  $k$  они вызовут значительные колебания интегрируемой функции и, чтобы учесть их с достаточной точностью, на отрезке интегрирования пришлось бы взять большое число узлов в квадратурном правиле.

Это обстоятельство побудило для вычисления коэффициентов Фурье построить правила квадратур, которые заранее учитывают наличие у интегрируемой функции указанных множителей.

Рассмотрим сначала методы, основанные на идее приближения  $f$  тригонометрическими многочленами. Такие многочлены предназначены по своей природе для приближения периодических функций. Продолжим  $f$  периодически с отрезка  $[0, 2\pi]$  на всю ось. Чтобы сделать операцию продолжения однозначной, нужно условиться о выборе значения, которое мы припишем функции  $f$  в точках  $x=0$  и  $x=2\pi$ . Для определенности и простоты будем считать, что мы продолжаем  $f$  с отрезка  $[0, 2\pi]$ , открытого справа. Заметим попутно, что если существуют предельные значения  $f(+0)$  и  $f(2\pi-0)$ , то обычно полагают  $f(0) = f(2\pi) = 0,5 [f(+0) + f(2\pi-0)]$ .

Под знаком каждого из интегралов (14.1.1) будет стоять периодическая функция и для вычисления интегралов естественно воспользоваться правилами интегрирования периодических функций, имеющими наивысшую тригонометрическую степень точности.

---

\*) Если ряд Фурье функции  $f$  расходится, то задача восстановления  $f$  по ряду принадлежит теории обобщенного суммирования. Доказывается, например, что для всякой абсолютно интегрируемой по Лебегу на  $[0, 2\pi]$  функции  $f$  почти везде (во всех точках, где  $f$  есть производная от своего неопределенного интеграла) на  $[0, 2\pi]$  будет

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \left[ \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] = f(x).$$



В вычислениях обычно используют простейшее из таких правил. Чтобы были понятны мотивы его выбора, полезно сделать предварительное замечание. В интегралах (14.1.1) множители  $\cos kx$  и  $\sin kx$  не зависят от выбора функции  $f$  и их можно было бы принять за весовые функции. Знакопеременности весов легко избежать, так как они могут быть заменены на  $1 - \cos kx$  и  $1 - \sin kx$  соответственно, при этом замена не увеличила бы количества труда вычислителя ввиду

того, что интеграл  $\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$  входит в число вычисляемых величин. Затем все интегралы вычислить с одной и той же степенью точности.

Этот путь не был принят в вычислительной практике по нескольким причинам. Главная из них состоит в том, что каждой весовой функции  $1 - \cos kx$  или  $1 - \sin kx$  ( $k=0, 1, \dots$ ) будут отвечать свои абсциссы, дающие наивысшую степень точности, а каждый из коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$  должен вычисляться со своими значениями функции  $f$ . Это потребовало бы нахождения большого числа значений  $f$ .

Чтобы свести необходимое количество значений  $f$  к минимуму, во всех интегралах (14.1.1) весовую функцию принимают равной единице и присоединяют множители  $\cos kx$  и  $\sin kx$  к интегрируемой функции  $f$ . Для постоянной весовой функции, как выяснилось выше, наивысшую тригонометрическую степень точности имеет правило (8.3.9) с равноотстоящими узлами  $x_k$  и равными коэффициентами. Параметр  $x_0$  правила мы положим, по соображениям простоты, равным нулю, так как при общей постановке задачи о вычислении  $a_k$  и  $b_k$  нет бесспорных соображений, побуждающих иначе выбрать  $x_0$ , и правило возьмем в виде

$$\int_0^{2\pi} F(x) dx \approx \frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Оно дает точное значение интеграла, когда  $F$  есть произвольный тригонометрический многочлен степени  $n-1$ . Кроме того, это равенство, очевидно, верно для  $F(x) = \sin nx$  и не верно для  $F(x) = \cos nx$ . Применительно к интегралам (14.1.1) это правило дает:

$$a_s \approx \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \cos \frac{2ks\pi}{n}, \quad b_s \approx \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \sin \frac{2ks\pi}{n}. \quad (14.1.4)$$

Что касается значений, которые нужно приписывать индексу  $s$ , то они выясняются в излагаемых ниже соображениях. Проследим потерю степени точности, которая происходит в нахождении  $a_s$  и  $b_s$ . При

вычислении  $a_0$  с помощью (14.1.4) мы полагаем  $F(x) = \frac{1}{\pi} f(x)$ . Поэтому равенство  $a_0 \approx \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$  будет точным для всех тригонометрических многочленов степени  $n-1$ . Когда мы вычисляем  $a_1$  и  $b_1$ , мы полагаем  $F$  равным соответственно  $F(x) = \frac{1}{\pi} f(x) \cos x$  и  $F(x) = \frac{1}{\pi} f(x) \sin x$ . Результат вычисления будет точным, если  $f(x)$  есть многочлен степени  $n-2$ , и т. д. Равенства (14.1.4) дадут точные значения  $a_k$  и  $b_k$ , когда  $f$  будет многочленом степени  $n-k-1$ . Коэффициенты  $a_{n-1}$  и  $b_{n-1}$  будут найдены с нулевой степенью точности.

Потеря степени точности при увеличении  $s$  заставляет в приложениях ограничить область применения правил (14.1.4).

Пусть рассматривается тригонометрический многочлен

$$f = T_m(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{j=1}^m (a_j \cos jx + b_j \sin jx)$$

степени  $m \leq n-1$ . Если  $m = n-1$ , то при помощи равенств (14.1.4) по значениям  $f\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$  ( $k=0, 1, \dots, n-1$ ) точно будет найден только коэффициент  $a_0$ . Значения остальных коэффициентов могут содержать ошибки. При  $m = n-2$  равенства (14.1.4) дадут верное точные значения лишь для  $a_0, a_1, b_1$  и т. д. Наиболее благоприятным при применении (14.1.4) будет тот случай, когда будут получаться точные значения всех коэффициентов многочлена  $T_m$ . Равенства (14.1.4) тогда позволят точно восстановить многочлен  $f = T_m$  по числам  $f\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ . Чтобы это имело место, достаточно выполнить неравенство  $m \leq n-m-1$  или  $2m \leq n-1$ .

В приложениях число  $n$  значений функции  $f$  берут обычно четным. На этом частном случае мы остановимся подробнее и положим  $m = 0,5n - 1$ . Для любого многочлена  $f = T_{0,5n-1}$  равенства (14.1.4) будут выполняться точно.

Нас будут интересовать, кроме того, коэффициенты Фурье  $a_{0,5n}$  и  $b_{0,5n}$ . Так как при  $s = 0,5n$  для всяких  $k$   $\sin \frac{2ks\pi}{n} = 0$ , второе равенство (14.1.4) для любой функции  $f$  дает  $b_{0,5n} = 0$ . Этот результат нельзя считать приемлемым и поэтому  $b_{0,5n}$  при помощи (14.1.4) не вычисляется.

Допустим, что  $f$  есть гармоника частоты  $k = 0,5n$ :

$$f = a_{0,5n} \cos 0,5nx + b_{0,5n} \sin 0,5nx.$$

Вычислим для нее правую часть первого равенства (14.1.4), полагая там  $s = 0,5n$ :

$$\begin{aligned} \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos k\pi f\left(\frac{2k\pi}{n}\right) &= \\ &= \frac{2}{n} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2 k\pi a_{0,5n} + \sum_{k=0}^{n-1} \cos k\pi \sin k\pi b_{0,5n} \right] = 2a_{0,5n}. \end{aligned}$$

Мы получили удвоенное значение коэффициента  $a_{0,5n}$ .

Все изложенные соображения побуждают в приложениях равенства (14.1.4) заменить следующими:

$$a_s \approx \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \cos \frac{2ks\pi}{n}, \quad b_s \approx \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \sin \frac{2ks\pi}{n} \quad (14.1.4')$$

( $s = 0, 1, \dots, 0,5n - 1$ ),

$$a_{0,5n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \cos k\pi = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Сделаем еще замечание об условиях, при выполнении которых можно ожидать удовлетворительной точности приближенных равенств (14.1.4') и достаточно быстрой сходимости сумм к точным значениям коэффициентов Фурье. Каждая из сумм является простейшей интегральной суммой Римана для соответствующего интеграла (14.1.1), если в последнем  $k$  заменить на  $s$ . Поэтому для каждой функции  $f$ , интегрируемой в римановом смысле на  $[0, 2\pi]$ , и при каждом фиксированном значении  $s$  суммы будут сходиться к точным значениям коэффициентов Фурье  $a_s$  или  $b_s$ . Это позволяет сказать, что равенства (14.1.4') дают возможность вычислить  $a_s$  и  $b_s$  сколь угодно точно, если взять достаточно большое  $n$ . Но если функция  $f$  недостаточно гладкая, то для получения удовлетворительного результата может потребоваться весьма большое число абсцисс. Тогда естественно возникает потребность в предварительной подготовке  $f$  путем устранения ее особенностей. Здесь важно выяснить, как скорость сходимости связана со свойствами функции  $f$ .

Вспомним, что в основе построения применяемого правила интегрирования лежит идея замены периодической функции приближающим ее тригонометрическим многочленом. Так как при возрастании степени многочлена точность приближения будет, вообще говоря, возрастать тем быстрее, чем более гладкой будет периодическая функция, т. е. чем более высокий порядок дифференцируемости она будет иметь, можно в первую очередь пытаться увеличить точность правил (14.1.4') путем улучшения дифференциальных свойств  $f$ .

Основные идеи увеличения точности правил интегрирования были изложены в главе 13. С тем, как эти идеи применяются к улучшению правил вычисления коэффициентов Фурье, мы ознакомимся в § 4 настоящей главы. Сейчас же остановимся только на одном пункте этой проблемы, специфическом для правил (14.1.4').

При постановке задачи о вычислении коэффициентов Фурье мы считали функцию  $f$  заданной на отрезке  $[0, 2\pi]$ . Допустим, что она обладает непрерывными производными до порядка  $m$  включительно. Чтобы была  $m$ -кратно непрерывно дифференцируемой на всей оси  $x$  функция, получающаяся после  $2\pi$ -периодического продолжения  $f$ , необходимо выполнение следующих  $m+1$  условий:

$$f(2\pi) = f(0), \quad f'(2\pi) = f'(0), \quad \dots, \quad f^{(m)}(2\pi) = f^{(m)}(0). \quad (14.1.5)$$

Если не выполнено первое из условий, то график периодической функции будет иметь разрывы в точках  $x = 2k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \dots$ ). При выполнении первого условия и невыполнении второго график будет непрерывной линией, но будет иметь угловые точки при  $x = 2k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \dots$ ) и т. д.

При подготовке функции  $f$  к вычислению ее коэффициентов Фурье мы заинтересованы не только в том, чтобы сделать достаточно высоким порядок  $m$  ее дифференцируемости на отрезке  $[0, 2\pi]$ , но также в том, чтобы выполнялись условия (14.1.5) до того же порядка  $m$  или близкого к нему. Если условия (14.1.5) не соблюдаются, то  $f$  можно разложить на два слагаемых:  $f(x) = P(x) + f_1(x)$ , для первого из которых точно находятся его коэффициенты Фурье и выполняются равенства:  $P^{(j)}(2\pi) - P^{(j)}(0) = f^{(j)}(2\pi) - f^{(j)}(0)$  ( $j = 0, 1, \dots, m$ ). Второе же слагаемое  $f_1(x)$  должно удовлетворять условиям (14.1.5).

Для построения  $P$  можно воспользоваться, например, многочленами Бернулли  $B_n(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ). Они обладают полезными для нас перечисляемыми ниже свойствами:

$$1) \quad B_1(t) = t - \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad B_1(1) - B_1(0) = 1,$$

$$2) \quad B_n(1) - B_n(0) = 0 \quad (n = 2, 3, \dots),$$

$$3) \quad B'_n(t) = nB_{n-1}(t),$$

которые позволяют сразу же убедиться в том, что в качестве  $P$  может быть взят многочлен степени  $m+1$ :

$$P(x) = \sum_{k=0}^m \frac{(2\pi)^k}{(k+1)!} B_{k+1}\left(\frac{x}{2\pi}\right) [f^{(k)}(2\pi) - f^{(k)}(0)].$$

Что же касается разложения  $P$  в ряд Фурье, то оно строится точно при помощи известных разложений в этот ряд многочленов Бернулли (1.3.1) и (1.3.2).

После этого достаточно положить  $f_1(x) = f(x) - P(x)$ . Функция  $f_1(x)$  будет иметь тот же порядок дифференцируемости, что и  $f$ , но будет удовлетворять требованиям (14.1.5). Вычисление для нее коэффициентов Фурье  $a_s$  и  $b_s$  при помощи правил (14.1.4) будет более точным, чем для  $f$  с тем же значением  $n$ .

## § 2. О вычислении вспомогательных интегралов, содержащих тригонометрические множители

Для последующего нам будут полезны некоторые просто проверяемые вычислительные результаты об интегралах вида

$$\int_A^B f(x) \cos px \, dx, \quad \int_A^B f(x) \sin px \, dx. \quad (14.2.1)$$

Если  $f$  есть многочлен какой-либо степени, то при помощи интегрирования по частям можно получить равенства, дающие возможность вычислить интегралы по значениям многочлена  $f$  и производных от него на концах отрезка интегрирования:

$$\begin{aligned} \int_A^B f(x) \cos px \, dx &= \cos pC \left\{ \left[ \frac{f'(B) - f'(A)}{p^2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{f'''(B) - f'''(A)}{p^4} + \frac{f^{(5)}(B) - f^{(5)}(A)}{p^6} - \dots \right] \cos pl + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{f(B) + f(A)}{p} - \frac{f''(B) + f''(A)}{p^3} + \frac{f^{(4)}(B) + f^{(4)}(A)}{p^5} - \dots \right] \sin pl \right\} - \\ &\quad - \sin pC \left\{ \left[ - \frac{f(B) - f(A)}{p} + \frac{f''(B) - f''(A)}{p^3} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{f^{(4)}(B) - f^{(4)}(A)}{p^5} + \dots \right] \cos pl + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{f'(B) + f'(A)}{p^2} - \frac{f'''(B) + f'''(A)}{p^4} + \frac{f^{(5)}(B) + f^{(5)}(A)}{p^6} - \dots \right] \sin pl \right\} = \\ &= \cos pC I_c(f) - \sin pC I_s(f), \quad (14.2.2) \end{aligned}$$

$$\int_A^B f(x) \sin px \, dx = \cos pC I_s(f) + \sin pC I_c(f), \quad (14.2.3)$$

$$C = 0,5(A + B), \quad l = 0,5(B - A).$$

Это правило будет играть только промежуточную роль, и на нем более подробно мы не будем останавливаться.

Если  $f$  не является многочленом, то для вычисления интегралов (14.2.1) могут быть применены, например, интерполяционные правила. Возьмем на  $[A, B]$   $n+1$  произвольно расположенных узлов  $A \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq B$  и интерполируем  $f$  по ее значениям в этих точках:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\omega(x)}{(x-x_k)\omega'(x_k)} f(x_k) + r_n(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k(x) f(x_k) + r_n(x).$$

Отсюда сразу же получается интерполяционное правило вычисления рассматриваемых интегралов:

$$\left. \begin{aligned} \int_A^B f(x) \cos px \, dx &= \sum_{k=0}^n C_k(p) f(x_k) + R_n, \\ C_k(p) &= \int_A^B \lambda_k(x) \cos px \, dx, \quad R_n = \int_A^B r_n(x) \cos px \, dx. \end{aligned} \right\} \quad (14.2.4)$$

Так как  $\lambda_k(x)$  есть многочлен степени  $n$ , для  $C_k(p)$  может быть выписано при помощи (14.2.2) его явное выражение через параметры задачи. Оно имеет сложное строение и некоторые указания о его использовании для вычислений будут сделаны в конце параграфа. Сейчас же мы займемся частными случаями, когда вычисления могут быть доведены до конца или упрощаются.

Изберем сначала равноотстоящие узлы  $x_k = A + kh$ ,  $h = \frac{1}{n}(B-A)$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ). Соответствующее им правило вычисления интегралов будет правилом Котеса с весовыми функциями  $\cos px$  и  $\sin px$ . Общая теория правила рассматривалась в гл. 6, здесь же мы остановимся лишь на его частных случаях.

Пусть  $n=1$ . Интерполирование выполняется линейно по двум значениям  $f$  на концах отрезка  $[A, B]$ . Их мы обозначим соответственно  $f_0 = f(A)$  и  $f_1 = f(B)$ ;  $f(x) = \frac{x-B}{A-B} f_0 + \frac{x-A}{B-A} f_1 + r_1(x)$ . Выражение для остатка  $r_1(x)$  в удобном для нас виде может быть получено на основании общей формулы (5.2.6), или, если воспользоваться следующим простым представлением функции  $f$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(A) + (x-A)f'(A) + \int_A^x f''(t)(x-t) \, dt = \\ &= f(A) + (x-A)f'(A) + \int_A^B f''(t)E(x-t)(x-t) \, dt \end{aligned}$$

Первые два члена интерполируются точно и остаток  $r_1(x)$  будет равен остатку интерполирования интеграла:

$$r_1(x) = \int_A^B f''(t) \left[ E(x-t)(x-t) - \frac{x-A}{B-A} (B-t) \right] dt.$$

Подстановка указанного выше выражения  $f(x)$  под знак интеграла даст правило вычисления, аналогичное простейшему правилу трапеций (6.4.1):

$$\begin{aligned} \int_A^B f(x) \cos px \, dx &= f_0 \left[ \frac{1 - \cos ph}{hp^2} \cos pA - \frac{1}{p} \left( 1 - \frac{\sin ph}{ph} \right) \sin pA \right] + \\ &+ f_1 \left[ \frac{1}{p} \left( 1 - \frac{\sin ph}{ph} \right) \sin pB + \frac{1 - \cos ph}{hp^2} \cos pB \right] + R, \quad (14.2.5) \end{aligned}$$

$$h = B - A,$$

$$R = \frac{h}{p^2} \int_0^1 f''(A + hu) \{ u \cos pB + (1-u) \cos pA - \cos p(A + hu) \} du.$$

Если отрезок интегрирования  $[A, B]$  разделить на  $n$  равных частей  $\frac{B-A}{n} = h$  точками  $x_k = A + kh$ , к каждому частичному отрезку  $[x_k, x_{k+1}]$  применить правило (14.2.5) и интегралы по частичным отрезкам сложить, получим правило интегрирования, аналогичное общему правилу трапеций (6.4.4):

$$\begin{aligned} \int_A^B f(x) \cos px \, dx &= f_0 \left[ \frac{1 - \cos ph}{hp^2} \cos pA - \frac{1}{p} \left( 1 - \frac{\sin ph}{ph} \right) \sin pA \right] + \\ &+ 2 \frac{1 - \cos ph}{hp^2} \sum_{k=1}^{n-1} f_k \cos px_k + \\ &+ f_n \left[ \frac{1}{p} \left( 1 - \frac{\sin ph}{ph} \right) \sin pB + \frac{1 - \cos ph}{hp^2} \cos pB \right] + R, \quad (14.2.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &= \frac{h}{p^2} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} f''(x_k + hu) [u \cos px_{k+1} + \\ &+ (1-u) \cos px_k - \cos p(x_k + hu)] du, \quad f_k = f(A + kh). \end{aligned}$$

Сходные вычисления для интеграла с весовой функцией  $\sin px$  приведут к следующему аналогу формулы трапеций:

$$\begin{aligned} \int_A^B f(x) \sin px \, dx &= f_0 \left[ \frac{1}{p} \left( 1 - \frac{\sin ph}{hp} \right) \cos pA + \frac{1 - \cos ph}{hp^2} \sin pA \right] + \\ &+ 2 \frac{1 - \cos ph}{hp^2} \sum_{k=1}^{n-1} f_k \sin px_k + \\ &+ f_n \left[ \frac{1 - \cos ph}{hp^2} \sin pB - \frac{1}{p} \left( 1 - \frac{\sin ph}{hp} \right) \cos pB \right] + R, \\ R &= \frac{h}{p^2} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} f''(x_k + hu) [u \sin px_{k+1} + \\ &+ (1-u) \sin px_k - \sin p(x_k + hu)] \, du, \quad (14.2.7) \end{aligned}$$

$n=2$ . Интерполирование  $f$  выполняется по значениям в трех точках — в концах  $A$  и  $B$  отрезка и в его средней точке  $C = 0,5(A+B)$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-C)(x-B)}{(A-C)(A-B)} f_0 + \frac{(x-A)(x-B)}{(C-A)(C-B)} f_1 + \\ &+ \frac{(x-A)(x-C)}{(B-A)(B-C)} f_2 + r_2(x), \\ f_k &= f(A + kh), \quad h = 0,5(B-A). \end{aligned}$$

Подстановка этого выражения в интеграл приведет к правилу интегрирования, аналогичному формуле Симпсона

$$\int_A^B f(x) \cos px \, dx = D_0 f_0 + D_1 f_1 + D_2 f_2 + R, \quad (14.2.8)$$

$$D_0 = \mu \cos pA - \nu \sin pA, \quad D_1 = \lambda \cos pC, \quad D_2 = \mu \cos pB + \nu \sin pB,$$

$$\lambda = 4h(ph)^{-2} [(ph)^{-1} \sin ph - \cos ph],$$

$$\mu = h(ph)^{-2} [1 + \cos^2 ph - (ph)^{-1} \sin 2ph],$$

$$\nu = p^{-1} [1 + (2ph)^{-1} \sin 2ph - (ph)^{-2} 2 \sin^2 ph].$$



Для нахождения остатка  $R$  можно воспользоваться равенством

$$f(x) = f(A) + (x - A)f'(A) + \frac{1}{2}(x - A)^2 f''(A) + \\ + \frac{1}{2} \int_A^B f'''(t) E(x - t)(x - t)^2 dt.$$

Первые три члена по правилу (14.2.8) интегрируются точно. Поэтому остаток интегрирования  $f$  совпадает с остатком интегрирования последнего члена и, следовательно, выразится через остаток интегрирования по  $x$  функции  $0,5E(x - t)(x - t)^2$ . Поэтому остаток  $R$  представим в форме следующего интеграла

$$R = \int_A^B f'''(t) K_c(t, A, h, p) dt,$$

где

$$K_c(t, A, h, p) = \frac{1}{2} \int_t^B (x - t)^2 \cos px dx - \\ - D_1 \cdot 0,5E(C - t)(C - t)^2 - D_2 \cdot 0,5(B - t)^2.$$

Наконец, если отрезок интегрирования  $[A, B]$  разделить на четное число  $n$  частей  $h = \frac{1}{n}(B - A)$  точками  $x_k = A + kh$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ), объединить части попарно, к каждой паре применить равенство (14.2.8) и результаты сложить, получим аналог общего правила Симпсона:

$$\int_A^B f(x) \cos px dx = (\mu \cos pA - \nu \sin pA) f(A) + \\ + 2\mu \sum_{j=1}^{0,5n-1} f(A + 2jh) \cos p(A + 2jh) + \\ + \lambda \sum_{j=0}^{0,5n-1} f[A + (2j + 1)h] \cos p[A + (2j + 1)h] + \\ + (\mu \cos pB + \nu \sin pB) f(B) + R, \quad (14.2.9)$$

$$R = \sum_{j=0}^{0,5n-1} \int_{A+2jh}^{A+(2j+2)h} f'''(t) K_c(t, A + 2jh, h, p) dt.$$

Сходное правило вычислений может быть построено для интеграла с функцией синус

$$\begin{aligned} \int_A^B f(x) \sin px \, dx = & (\mu \sin pA + \nu \cos pA) f(A) + \\ & + 2\mu \sum_{j=1}^{0,5n-1} f(A + 2jh) \sin p(A + 2jh) + \\ & + \lambda \sum_{j=0}^{0,5n-1} f[A + (2j+1)h] \sin p[A + (2j+1)h] + \\ & + (\mu \sin pB - \nu \cos pB) f(B) + R, \quad (14.2.10) \end{aligned}$$

$$R = \sum_{j=0}^{0,5n-1} \int_{A+2jh}^{A+(2j+2)h} f'''(t) K_s(t, A + 2jh, h, p) \, dt,$$

$$\begin{aligned} K_s(t, A, h, p) = & \frac{1}{2} \int_t^{A+2h} (x-t)^2 \sin px \, dx - \\ & - S_1 \frac{1}{2} E(C-t)(C-t)^2 - S_2 \frac{1}{2} (A+2h-t)^2, \\ A \leq t \leq A+2h, \quad S_1 = \lambda, \quad S_2 = \mu \sin pB - \nu \cos pB. \end{aligned}$$

Мы ограничились рассмотрением правила котесова типа для случаев интерполирования  $f$  по ее значениям в двух и трех узлах. Известны также коэффициенты правил интегрирования при интерполировании по значениям  $f$  в четырех и пяти узлах и для некоторых случаев интерполирования по значениям функции  $f$  и ее производной  $f'$ . Сложность таких правил быстро возрастает с увеличением степени точности интерполирования, их мы не будем приводить и отошлем читателя к справочным книгам по интегрированию.

Закончим настоящий параграф указанием еще на один возможный метод вычисления интегралов с тригонометрическими множителями.

Мы рассматривали случай равноотстоящих узлов. Хорошо известно, что в задаче интегрирования равноотстоящие узлы не являются самыми благоприятными, и вычисления с ними часто бывают связаны с потерей верных значащих цифр. Поэтому можно поднять вопрос о таком выборе узлов в правиле (14.2.4), при котором можно было бы ожидать лучшей точности вычисления, сравнительно с равноотстоящими узлами.

Напомним, что мы предполагали функцию  $f$  достаточно гладкой всюду на отрезке  $[A, B]$ . При вычислении интеграла  $\int_A^B f(x) \, dx$  с по-

стоянной весовой функцией хорошего результата можно ожидать при применении правила Гаусса, имеющего наивысшую алгебраическую степень точности. Узлы такого правила будут лежать в точках  $x_k$ , получающихся из корней  $t_k$  многочлена Лежандра  $P_{n+1}(t)$  при помощи линейного преобразования  $x = 0,5(B+A) + 0,5(B-A)t$ , которое переводит отрезок  $[-1, 1]$  в  $[A, B]$ .

В интегралах (14.2.1) роль весовых функций играют множители  $\cos px$  и  $\sin px$ . Поведение их на  $[A, B]$  таково, что если мы хотим взять узлы в правиле (14.2.4) одинаковыми для всех  $p$ , у нас, по-видимому, нет оснований отказаться от использования в первую очередь гауссовых узлов, или, по меньшей мере, от их испытания наряду с некоторыми другими.

Рассмотрим произвольную неотрицательную весовую функцию  $\rho(x)$  на  $[A, B]$  и соответствующую ей систему ортонормированных многочленов  $P_n(x)$ . За абсциссы  $x_k$  примем корни многочлена  $P_{n+1}(x)$  степени  $n+1$ . Лагранжев множитель  $\lambda_k(x)$ , участвующий в интерполяционном многочлене, будет иметь следующее выражение через многочлен  $P_{n+1}(x)$ :  $\lambda_k(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{(x-x_k)P'_{n+1}(x_k)}$ . Ему можно придать

другую форму, более удобную для вычислений. Напомним, что  $\lambda_k(x)$  в нашей задаче характеризуется перечисляемыми ниже свойствами: 1)  $\lambda_k(x)$  есть многочлен степени  $n$ , 2) если  $l \neq k$ , то  $\lambda_k(x_l) = 0$ ,

3)  $\lambda_k(x_k) = 1$ . Рассмотрим многочлен  $s_k(x) = \sum_{j=0}^n P_j(x) P_j(x_k)$ , имеющий степень  $n$ . Если в равенстве Кристоффеля — Дарбу

$$\sum_{j=0}^n P_j(x) P_j(t) = \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x) P_n(t) - P_n(x) P_{n+1}(t)}{x-t}$$

положить  $x = x_k$  и  $t = x_l$  ( $k \neq l$ ), то будет ясно, что  $s_k(x_l) = 0$ . После этого становится очевидным, что

$$\lambda_k(x) = \sum_{j=0}^n P_j(x) P_j(x_k) \left[ \sum_{j=0}^n P_j^2(x_k) \right]^{-1}.$$

Это выражение достаточно удобно для вычисления производных от  $\lambda_k(x)$  в точках  $A$  и  $B$  и позволяет просто применить равенства (14.2.2) к вычислению коэффициентов  $C_k(p)$  в правиле квадратур (14.2.4).

Возвратимся к выражениям (14.2.4) для  $C_k(p)$  при любых  $x_k$ .

Если для сокращения записи ввести величины:

$$\left. \begin{aligned} D_k^{(i)} &= \lambda_k^{(i)}(B) + \lambda_k^{(i)}(A), \quad D_k^{\prime(i)} = \lambda_k^{(i)}(B) - \lambda_k^{(i)}(A) \\ &\quad (i = 0, 1, \dots, n), \\ H_k &= \left[ \frac{D_k^{\prime(1)}}{p^2} - \frac{D_k^{\prime(3)}}{p^4} + \frac{D_k^{\prime(5)}}{p^6} - \dots \right] \cos ph + \\ &\quad + \left[ \frac{D_k^{(0)}}{p} - \frac{D_k^{(2)}}{p^3} + \frac{D_k^{(4)}}{p^5} - \dots \right] \sin ph, \\ H'_k &= \left[ -\frac{D_k^{\prime(0)}}{p} + \frac{D_k^{\prime(2)}}{p^3} - \frac{D_k^{\prime(4)}}{p^5} + \dots \right] \cos ph + \\ &\quad + \left[ \frac{D_k^{(1)}}{p^2} - \frac{D_k^{(3)}}{p^4} + \frac{D_k^{(5)}}{p^6} - \dots \right] \sin ph, \end{aligned} \right\} \quad (14.2.11)$$

коэффициенты  $C_k(p)$  формулы (14.2.4) получают следующие выражения

$$C_k(p) = H_k \cos pC - H'_k \sin pC. \quad (14.2.12)$$

Аналогично для правила вычисления второго из интегралов (14.2.1):

$$\int_A^B f(x) \sin px \, dx = \sum_{k=0}^n S_k(p) f(x_k) + R_n, \quad (14.2.13)$$

$$S_k(p) = \int_A^B \lambda_k(x) \sin px \, dx, \quad R_n = \int_A^B r_n(x) \sin px \, dx.$$

Коэффициенты  $S_k(p)$  имеют значения:

$$S_k(p) = H'_k \cos pC + H_k \sin pC. \quad (14.2.14)$$

Величины  $D_k^{(i)}$  и  $D_k^{\prime(i)}$ , не зависящие от частоты  $p$  и функции  $f$ , могут быть вычислены заранее.

### § 3. Применение алгебраического интерполирования к вычислению коэффициентов Фурье

В том случае, когда функция  $f$  имеет высокий порядок гладкости на отрезке  $[0, 2\pi]$ , но не выполняет условия (14.1.5) возможности ее гладкого периодического продолжения, для вычисления ее коэффициентов Фурье целесообразно, по крайней мере в некоторых случаях, применять алгебраическое интерполирование  $f$  на  $[0, 2\pi]$  и пользоваться соответствующими ему правилами квадратур.

Численные значения коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$  даются интегралами (14.1.1), имеющими форму (14.2.1). Интерполяционные методы вычисления их были описаны в § 2. Сначала рассмотрим правила котесова вида. Допустим, что отрезок  $[0, 2\pi]$  разделен на  $n$  одинаковых частей точками  $x_k = \frac{2k\pi}{n}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ).

Если мы выполним линейное интерполирование  $f$  в каждом частичном отрезке по значениям  $f_k$ , которые принимает  $f$  в точках деления, то для вычисления интегралов (14.1.1) мы можем воспользоваться аналогами правила трапеций (14.2.6) и (14.2.7)

$$\left. \begin{aligned} \pi a_p &= 2 \frac{1 - \cos ph}{hp^2} \left[ \frac{1}{2} f_0 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{n-1} f_k \cos p \frac{2k\pi}{n} + \frac{1}{2} f_n \right] + R_c, \quad h = \frac{2k\pi}{n}, \\ R_c &= \frac{h}{p^2} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} f'' \left( \frac{2k\pi}{n} + hu \right) \left[ u \cos p \frac{2(k+1)\pi}{n} + \right. \\ &\quad \left. + (1-u) \cos p \frac{2k\pi}{n} - \cos p \left( \frac{2k\pi}{n} + hu \right) \right] du, \end{aligned} \right\} \quad (14.3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \pi b_p &= \frac{1}{p} \left( 1 - \frac{\sin ph}{ph} \right) f_0 + \\ &\quad + 2 \frac{1 - \cos ph}{hp^2} \sum_{k=1}^{n-1} f_k \sin p \frac{2k\pi}{n} - \frac{1}{p} \left( 1 - \frac{\sin ph}{ph} \right) f_n + R_s, \\ R_s &= \frac{h}{p^2} \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} f'' \left( \frac{2k\pi}{n} + hu \right) \left[ u \sin p \frac{2(k+1)\pi}{n} + \right. \\ &\quad \left. + (1-u) \sin p \frac{2k\pi}{n} - \sin p \left( \frac{2k\pi}{n} + hu \right) \right] du. \end{aligned} \right\} \quad (14.3.2)$$

Перейдем теперь к правилам вычисления  $a_p$  и  $b_p$ , аналогичным формуле Симпсона. Будем считать  $n$  числом четным. Объединим попарно смежные частичные отрезки и на каждой паре отрезков выполним квадратичное интерполирование  $f$  по значениям в точках деления  $x_k = \frac{2k\pi}{n}$ . Для вычисления  $a_p$  и  $b_p$  здесь можно применить общие правила парабол (14.2.9) и (14.2.10), которые дают для них

равенства:

$$\left. \begin{aligned} \pi a_p &= \mu f_0 + 2\mu \sum_{j=1}^{0,5n-1} f(2jh) \cos p2jh + \\ &+ \lambda \sum_{j=0}^{0,5n-1} f[(2j+1)h] \cos p(2j+1)h + \mu f_n + R_c, \\ R_c &= \sum_{j=0}^{0,5n-1} \int_{2jh}^{(2j+2)h} f'''(x) K_c(x, 2jh, h, p) dx; \end{aligned} \right\} \quad (14.3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \pi b_p &= \nu f_0 + 2\mu \sum_{j=1}^{0,5n-1} f(2jh) \sin p2jh + \\ &+ \lambda \sum_{j=0}^{0,5n-1} f[(2j+1)h] \sin p(2j+1)h - \nu f_n + R_s, \\ R_s &= \sum_{j=0}^{0,5n-1} \int_{2jh}^{(2j+2)h} f'''(x) K_s(x, 2jh, h, p) dx. \end{aligned} \right\} \quad (14.3.4)$$

Могут быть построены правила, аналогичные формулам котесова типа более высокой степени точности, такие, как правило трех восьмых и др.

Как отмечалось в § 1, при вычислении  $a_p$  и  $b_p$  по правилам (14.1.4) степень точности будет уменьшаться при увеличении индекса  $p$ .

Другую природу имеют правила (14.3.1) — (14.3.4). Точность их определяется преимущественно точностью кусочно линейного или кусочно квадратичного интерполирования функции  $f$ , которое выполняется при построении этих правил. Эта точность не зависит от индекса коэффициента  $p$ . Поэтому, как можно предвидеть, с ростом  $p$  точность вычисления  $a_p$  и  $b_p$  по правилам (14.3.1) — (14.3.4) будет убывать медленнее, чем для правил (14.1.4).

В заключение рассмотрим вопрос об использовании корней ортогональных многочленов при интерполяционном вычислении коэффициентов Фурье. Здесь удобно отрезок интегрирования  $[A, B]$  привести к  $[-1, 1]$  и брать  $a_s$  и  $b_s$  в форме

$$a_s = \int_{-1}^1 f(x) \cos s\pi x dx, \quad b_s = \int_{-1}^1 f(x) \sin s\pi x dx. \quad (14.3.5)$$

Пусть  $p(x)$  есть произвольная неотрицательная весовая функция на  $[-1, 1]$  и за узлы  $x_k$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ) правила вида (14.2.4) приняты корни многочлена  $p_{n+1}(x)$  степени  $n+1$  из ортогональной системы  $p_n(x)$  ( $n=0, 1, \dots$ ), отвечающей весу  $p(x)$ .

Равенства (14.2.12) и (14.2.14), по которым находятся значения коэффициентов квадратурных правил (14.2.4) и (14.2.13), в нашем

случае упрощаются. Мы должны считать  $p = s\pi$ ,  $B = -A = 1$ ,  $h = 1$ ,  $C = 0$ . Поэтому

$$\left. \begin{aligned} C_s(s\pi) &= (-1)^s \left[ \frac{D_s^{(1)}}{s^2\pi^2} - \frac{D_s^{(3)}}{s^4\pi^4} + \frac{D_s^{(5)}}{s^6\pi^6} - \dots \right], \\ S_s(s\pi) &= (-1)^s \left[ -\frac{D_s^{(0)}}{s\pi} + \frac{D_s^{(2)}}{s^3\pi^3} - \frac{D_s^{(4)}}{s^5\pi^5} + \dots \right]. \end{aligned} \right\} \quad (14.3.6)$$

Особенно важен частный случай, когда в качестве узлов  $x_k$  берутся корни многочлена Лежандра  $P_{n+1}(x)$ . Весовая функция постоянна:  $p(x) \equiv 1$ , и ортонормальная система многочленов будет

$$p_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x);$$

$$\lambda_k(x) = \left[ \sum_{j=0}^n (2j+1) P_j(x) P_j(x_k) \right] \cdot \left[ \sum_{j=0}^n (2j+1) P_j^2(x_k) \right]^{-1}.$$

Числа  $D_s^{(j)}$ , входящие в выражения коэффициентов  $C_s$  и  $S_s$ , вычислены для  $n = 1(1) \dots$ . Таблица их приведена в справочной книге Л. Г. Кругликовой и В. И. Крылова (см. литературу).

#### § 4. Увеличение точности вычисления коэффициентов Фурье путем предварительной подготовки функции

Способы вычисления, которые были изложены в §§ 1 и 3, основаны на замене функции  $f$  или произведений  $f \cos kx$  и  $f \sin kx$  на алгебраические и тригонометрические многочлены, интерполирующие их по значениям в некоторой системе узлов. При такой замене вычисление  $a_k$  и  $b_k$  будет, вообще говоря, тем более точным, чем более «гладкой» будет функция  $f$ .

Один из возможных способов увеличения точности состоит в том, чтобы устранить у функции все ее особенности или, по меньшей мере, значительно их ослабить. Напомним, что достигается это путем разложения  $f$  на две части:  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ , где  $f_1(x)$  имеет такие же особенности, как  $f(x)$ , причем коэффициенты Фурье ее должны быть известны или находились бы точно;  $f_2(x)$  должна быть настолько гладкой функцией, чтобы коэффициенты Фурье для нее могли быть вычислены с достаточной точностью.

Рассмотрим сначала случай простейших особенностей — наличие у  $f$  и производных разрывов первого рода. Допустим, что функция  $f$  и ее производные до порядка  $m$  являются кусочно непрерывными функциями и могут иметь разрывы первого рода в точках  $x_1, \dots, x_q$ . Будем считать, что эти точки лежат внутри отрезка  $[0, 2\pi]$  и  $0 < x_1 < \dots < x_q < 2\pi$ . При применении правил вычисления,

рассмотренных в § 3 и основанных на алгебраическом интерполировании  $f$ , наличие у  $f$  точек разрыва при  $x=0$  и  $x=2\pi$  не имеет значения. Чтобы устранить их, достаточно считать, что  $f$  в этих точках принимает значения соответственно  $f(+0)$  и  $f(2\pi-0)$ .

При применении же правил (14.1.4) мы должны выполнить  $2\pi$ -периодическое продолжение  $f$  на всю ось. При этом могут возникнуть разрывы у  $f$  или производных от нее в точках  $x=0, \pm 2\pi, \dots$ , если не выполняются условия (14.1.5) возможности гладкого до порядка  $m$  периодического продолжения  $f$ . Как можно устранить у  $f$  негладкости такого рода, говорилось в конце первого параграфа. Будем считать, что в окрестности точек 0 и  $2\pi$  функция  $f$  является достаточно гладкой.

Для устранения разрывов у  $f, f', \dots, f^{(m)}$  в точках  $x_j$  ( $j=1, \dots, q$ ) можно воспользоваться, например, периодическими функциями  $B_n^*(t)$ , связанными с многочленами Бернулли. Они являются 1-периодическим продолжением многочленов  $B_n(t)$  с отрезка  $0 \leq t < 1$ . Нам полезно отметить следующие их свойства:

1.  $B_1(t) = t - 0.5$ . Функция  $B_1^*(t)$  есть кусочно линейная функция, имеющая в целых точках  $t=k$  скачки, равные отрицательной единице:  $B_1^*(k+0) - B_1^*(k-0) = -1$ .

2.  $B_n^*(t)$  при  $n > 1$  есть непрерывная функция.

3.  $B_n^*(t) = nB_{n-1}^*(t)$ .

4. Тригонометрические ряды (1.3.1) — (1.3.2) представляют функции  $B_n^*(t)$  на всей оси.

Возьмем точку  $x_j$  и построим  $2\pi$ -периодическую функцию

$$P_j(x) = - \sum_{k=0}^m \frac{(2\pi)^k}{(k+1)!} B_{k+1}^* \left( \frac{x-x_j}{2\pi} \right) [f^{(k)}(x_j+0) - f^{(k)}(x_j-0)]. \quad (14.4.1)$$

В точке  $x_j$  функция  $P_j$  и производные от нее до порядка  $m$  включительно будут иметь такие же скачки, как и у функции  $f$  и соответствующих производных  $f', \dots, f^{(m)}$ . Справа и слева от  $x_j$  на отрезке  $[0, 2\pi]$   $P_j(x)$  будет некоторым многочленом степени  $m+1$ .

Чтобы устранить у  $f, f', \dots, f^{(m)}$  скачки во всех точках  $x_j$ , достаточно положить  $f_1(x) = \sum_{j=1}^q P_j(x)$  и  $f_2(x) = f(x) - f_1(x) = f(x) - \sum_{j=1}^q P_j(x)$ . Построенная так функция  $f_2$  будет иметь на  $[0, 2\pi]$  непрерывные производные до порядка  $m$ , и ее коэффициенты



Фурье будут вычисляться при помощи правил, изложенных выше, вообще говоря, более точно, чем для  $f$ .

Пусть мы хотим устранить только разрывы самой функции. В этом случае  $m=0$  и  $P_j(x) = -B_1^*\left(\frac{x-x_j}{2\pi}\right)[f(x_j+0) - f(x_j-0)]$ , где

$$B_1^*\left(\frac{x-x_j}{2\pi}\right) = \begin{cases} \frac{x-x_j}{2\pi} - \frac{1}{2}, & x_j \leq x \leq 2\pi, \\ -\frac{x-x_j}{2\pi} + \frac{1}{2}, & 0 \leq x < x_j. \end{cases}$$

Разложение  $B_1^*\left(\frac{x-x_j}{2\pi}\right)$  в тригонометрический ряд получится из (1.3.2) при  $k=0$

$$\begin{aligned} B_1^*\left(\frac{x-x_j}{2\pi}\right) &= -\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\sin v(x-x_j)}{\pi v} = \\ &= \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\pi v} (\sin vx_j \cos vx - \cos vx_j \sin vx), \end{aligned}$$

$$f_1(x) = -\sum_{j=1}^q B_1^*\left(\frac{x-x_j}{2\pi}\right) [f(x_j+0) - f(x_j-0)].$$

Значения  $f_1(x)$  могут быть найдены при помощи приведенного выше выражения  $B_1^*\left(\frac{x-x_j}{2\pi}\right)$ . Коэффициенты Фурье для  $f_1(x)$  будут следующими:

$$a_{1,v} = -\frac{1}{\pi v} \sum_{j=1}^q \sin vx_j [f(x_j+0) - f(x_j-0)],$$

$$b_{1,v} = \frac{1}{\pi v} \sum_{j=1}^q \cos vx_j [f(x_j+0) - f(x_j-0)].$$

Если бы мы хотели уничтожить у функции  $f$  разрывы самой функции и ее первой производной, следовало положить

$$\begin{aligned} P_j(x) &= -B_1^*\left(\frac{x-x_j}{2\pi}\right) [f(x_j+0) - f(x_j-0)] - \\ &\quad - \pi B_2^*\left(\frac{x-x_j}{2\pi}\right) [f'(x_j+0) - f'(x_j-0)], \end{aligned}$$

$$B_2^*\left(\frac{x-x_j}{2\pi}\right) = \begin{cases} \frac{x-x_j}{2\pi} \left(1 - \frac{x-x_j}{2\pi}\right) + \frac{1}{6}, & x_j \leq x \leq 2\pi, \\ \frac{x_j-x}{2\pi} \left(1 - \frac{x_j-x}{2\pi}\right) + \frac{1}{6}, & 0 \leq x < x_j. \end{cases}$$

Разложение  $B_2^*\left(\frac{x-x_j}{2\pi}\right)$  в ряд Фурье на основании (1.3.1) будет:

$$\begin{aligned} B_2^*\left(\frac{x-x_j}{2\pi}\right) &= \frac{1}{\pi^2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\cos v(x-x_j)}{v^2} = \\ &= \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 v^2} (\cos vx_j \cos vx + \sin vx_j \sin vx), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= - \sum_{j=1}^q \left\{ B_1^*\left(\frac{x-x_j}{2\pi}\right) [f(x_j+0) - f(x_j-0)] + \right. \\ &\quad \left. + \pi B_2^*\left(\frac{x-x_j}{2\pi}\right) [f'(x_j+0) - f'(x_j-0)] \right\}. \end{aligned}$$

Численные значения  $f_1$  просто находятся при помощи указанных выше выражений для  $B_1^*$  и  $B_2^*$ . Если же воспользоваться тригонометрическими рядами для  $B_1^*$  и  $B_2^*$ , можно просто найти коэффициенты Фурье функции  $f_1$ .

Менее благоприятна для вычислений задача об ослаблении степенных особенностей. Ограничимся изучением случая, когда функция  $f$  имеет особенности такого вида на концах отрезка интегрирования  $[0, 1]$ . Пусть  $f$  представима в виде  $f(x) = x^\mu \varphi(x)$  ( $\mu > -1$ ), где  $\varphi$  есть достаточно гладкая функция всюду на замкнутом отрезке  $0 \leq x \leq 1$ .

Если  $\mu$  не есть целое число, то либо сама функция  $f$ , либо ее производная некоторого порядка обратится в бесконечность в точке  $x=0$ , и при небольших значениях  $\mu$  методы вычисления коэффициентов Фурье, описанные в §§ 1 и 3, будут медленно сходящимися и потребуют большого числа узлов для получения хорошей точности. Можно, как это делалось в § 2 гл. 13, пытаться улучшить точность результата при помощи выделения из  $f$  особенной части и перехода от  $f$  к другой функции, обладающей более высоким порядком гладкости.

Для облегчения записи будем рассматривать комплексные коэффициенты Фурье

$$c_k = \int_0^1 f(x) e^{-i2k\pi x} dx \quad (k=0, \pm 1, \dots). \quad (14.4.2)$$

Разложим  $\varphi(x)$  около  $x=0$  по формуле Тейлора и положим

$f(x) = f_0(x) + f^*(x)$ , где

$$f_0(x) = x^\mu \sum_{j=0}^{m-1} \frac{x^j}{j!} \varphi^{(j)}(0),$$

$$f^*(x) = f(x) - f_0(x) = x^\mu \left[ \varphi(x) - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{x^j}{j!} \varphi^{(j)}(0) \right].$$

Тогда

$$c_k = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} \varphi^{(j)}(0) \int_0^1 x^{\mu+j} e^{-i2k\pi x} dx + \int_0^1 f^*(x) e^{-i2k\pi x} dx. \quad (14.4.3)$$

Последний интеграл есть коэффициент Фурье для  $f^*$ , и так как  $f^*$  имеет более высокий порядок гладкости нежели  $f$ , он может быть вычислен при помощи правил §§ 1 и 3 с большей точностью, чем  $c_k$ .

Интегралы же, входящие в сумму, имеют форму  $I_s(k) = \int_0^1 x^s e^{-i2k\pi x} dx$ . Для них может быть легко построено правило понижения показателя степени  $s$ , позволяющее вычисление их привести к случаю  $0 \leq s < 1$ . Таблицы значений интегралов такого вида, облегчающие применение равенства (14.4.2), насколько известно автору, еще не составлены \*).

\*) Для расчетов полезно отметить, что если экспоненту под знаком интеграла разложить в ряд по степеням  $x$  и интегрировать почленно, получится степенной ряд по степеням  $k$  для интеграла  $I$ :

$$I_s(k) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!(v+s+1)} (-2k\pi i)^v = (s+1)^{-1} {}_1F_1(s+1, s+2, -i2k\pi).$$

При помощи него могут быть найдены значения  $I_s(k)$  для нескольких больших значений  $k$ . Для больших  $k$  вычисления будут связаны с потерей точности. Если в  $I_s(k)$  параметр  $k$  рассматривать как непрерывную переменную, можно построить дифференциальное уравнение для  $I_s(k)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dk} &= -2\pi i \int_0^1 x^{s+1} e^{-i2k\pi x} dx = \\ &= -2\pi i \left[ -\frac{x^{s+1}}{2k\pi i} e^{-i2k\pi x} \Big|_0^1 + \frac{s+1}{2k\pi i} \int_0^1 x^s e^{-i2k\pi x} dx \right] = \\ &= \frac{1}{k} e^{-i2k\pi} - \frac{s+1}{k} I; \\ \frac{dI}{dk} + \frac{s+1}{k} I &= \frac{1}{k} e^{-i2k\pi}. \end{aligned}$$

Зная значение  $I_s(k)$  при каком-либо положительном  $k$ , не близком к нулю, можно найти  $I_s(k)$  для больших  $k$  при помощи численного решения этого уравнения.

Допустим теперь, что  $f$  имеет степенные особенности на обоих концах отрезка  $[0, 1]$  и представима либо в виде  $f(x) = x^u \varphi(x)$ , либо  $f(x) = (1-x)^v \psi(x)$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  есть функции достаточно высокого порядка гладкости на  $[0, 1]$ . В этом случае мы можем ослабить обе особенности функции  $f$ , разложив ее на сумму трех слагаемых  $f(x) = f_0(x) + f_1(x) + f^*(x)$ , где  $f_0$  имеет указанное выше значение,

$$f_1(x) = (1-x)^v \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{(1-x)^j}{j!} \psi^{(j)}(1)$$

и  $f^*(x) = f(x) - f_0(x) - f_1(x)$ ,

$$c_k = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{j!} \varphi^{(j)}(0) \int_0^1 x^{u+j} e^{-i2k\pi x} dx + \\ + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j}{j!} \psi^{(j)}(1) \int_0^1 (1-x)^{v+j} e^{-i2k\pi x} dx + \int_0^1 f^*(x) e^{-i2k\pi x} dx.$$

Первая из сумм имеет ту же форму, что и в предыдущем случае. Интеграл во второй сумме при помощи замены  $1-x=t$  приводится

к  $\int_0^1 x^{v+j} e^{i2k\pi x} dx$  и несущественно отличается от  $I_{v+j}(k)$ .

Функция  $f^*$  будет иметь порядок гладкости выше, нежели  $f$ .

## § 5. Интегральные преобразования Фурье и интерполяционные методы их численного осуществления

В этом и следующих параграфах будет рассматриваться задача вычисления косинус- и синус-преобразований Фурье, понимаемых в их простейшем определении.

Пусть на полуоси  $0 \leq x < \infty$  дана абсолютно интегрируемая функция  $f$ . Ее *косинус-* и *синус-преобразованиями* называются интегралы \*)

$$C(p; f) = C(p) = \int_0^{\infty} f(x) \cos px \, dx, \quad (14.5.1)$$

$$S(p; f) = S(p) = \int_0^{\infty} f(x) \sin px \, dx, \quad (14.5.2)$$

\*) Более часто, чтобы придать преобразованию Фурье и его обращению симметричный вид, перед интегралами ставят множитель  $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ , полагая, например,  $C(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos px \, dx$ . Не имеющий для нас значения постоянный множитель мы присоединяем к функции  $f$ .

сходящиеся при всех действительных значениях  $p$ . Первый из них является четной функцией  $p$ , второй же — нечетной функцией и их достаточно рассматривать при  $p \geq 0$ . Каждый из интегралов есть непрерывная функция  $p$ , стремящаяся к нулю при  $p \rightarrow \infty$ .

Если функция  $f$  определена на оси  $-\infty < x < +\infty$  и абсолютно интегрируема там, то ее общим преобразованием Фурье мы будем называть интеграл

$$F(p; f) = F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx. \quad (14.5.3)$$

Разлагая  $f$  на сумму четной и нечетной частей

$$f_{\text{ч}}(x) = 0,5 [f(x) + f(-x)], \quad f_{\text{н}}(x) = 0,5 [f(x) - f(-x)], \\ f(x) = f_{\text{ч}}(x) + f_{\text{н}}(x),$$

можно интеграл (14.5.3) привести к (14.5.1) и (14.5.2):

$$F(p) = 2 \int_0^{\infty} f_{\text{ч}}(x) \cos px \, dx - 2i \int_0^{\infty} f_{\text{н}}(x) \sin px \, dx.$$

Поэтому преобразование (14.5.3) допустимо, по меньшей мере в некоторых вопросах вычислений, не рассматривать отдельно и ограничиться изучением численного осуществления только преобразований (14.5.1) и (14.5.2).

Сначала займемся изучением интерполяционных методов и рассмотрим случай задания функции  $f$  в равноотстоящих точках  $x_k = kh$ ,  $h > 0$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Чтобы выяснить причины, побудившие избрать тот или иной способ интерполирования, нужно высказать сначала предположения о функции  $f$ , заставившие сделать этот выбор. Функция  $f$  предполагалась любой, обеспечивающей абсолютную сходимость интегралов (14.5.1) — (14.5.2). Среди них для приложений особенно важны функции, достаточно быстро стремящиеся к нулю при неограниченном росте  $x$ .

Для абсолютной сходимости достаточно, например, чтобы при больших  $x$  выполнялось неравенство

$$|f(x)| \leq Mx^{-s}, \quad s > 1. \quad (14.5.4)$$

Всюду ниже мы будем считать его выполненным. Для гладких функций, обладающих этим свойством, алгебраическое интерполирование может дать удовлетворительную точность только на конечном участке, и при применении его полуось  $[0, \infty)$  обычно делят на участки равной длины и на каждом участке выполняют интерполирование какой-либо степени, одинаковой — для единообразия вычислений — на всех участках.

Интегралы (14.5.1) и (14.5.2) являются частными случаями интеграла (14.2.1), рассмотренного в § 2, для  $A=0$  и  $B=\infty$ . К ним применимы правила вычислений, о которых говорилось в § 2.

Если на каждом отрезке  $[0, h]$ ,  $[h, 2h]$ , ... линейно интерполировать  $f$  по ее значениям в конечных точках отрезков, можно построить для интегралов Фурье аналоги правила трапеций. Они получаются из равенств (14.2.6) — (14.2.7) при  $A=0$  и  $B \rightarrow \infty$ :

$$\left. \begin{aligned} C(p) &= \frac{1 - \cos ph}{hp^2} \left[ f_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos pkh \right] + R_C, \\ R_C &= \frac{h}{p^2} \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} f''(kh + hu) [u \cos p(k+1)h + \\ &\quad + (1-u) \cos pkh - \cos p(kh + hu)] du, \end{aligned} \right\} \quad (14.5.5)$$

$$\left. \begin{aligned} S(p) &= \frac{1}{p} \left( 1 - \frac{\sin ph}{hp} \right) f_0 + 2 \frac{1 - \cos ph}{hp^2} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin pkh + R_S, \\ R_S &= \frac{h}{p^2} \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} f''(kh + hu) [u \sin p(k+1)h + \\ &\quad + (1-u) \sin pkh - \sin p(kh + hu)] du. \end{aligned} \right\} \quad (14.5.6)$$

Аналоги правила Симпсона получаются из равенств (14.2.9) и (14.2.10) при  $A=0$  и  $B \rightarrow \infty$ :

$$\left. \begin{aligned} C(p) &= \mu f_0 + 2\mu \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k} \cos 2pkh + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k-1} \cos p(2k-1)h + R_C, \\ R_C &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2kh}^{2(k+1)h} f'''(x) K_C(x, 2kh, h, p) dx, \end{aligned} \right\} \quad (14.5.7)$$

$$\left. \begin{aligned} S(p) &= \nu f_0 + 2\mu \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k} \sin 2pkh + \\ &\quad + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k-1} \sin p(2k-1)h + R_S, \\ R_S &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2kh}^{2(k+1)h} f'''(x) K_S(x, 2kh, h, p) dx. \end{aligned} \right\} \quad (14.5.8)$$

$\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  имеют значения, указанные в равенствах (14.2.8).

Приведем без вывода еще одно правило вычислений интегралов Фурье, аналогичное правилу трех восьмых. Оно получается при замене функции  $f$  на каждом из отрезков  $[0, 3h], [3h, 6h], \dots$  алгебраическим многочленом третьей степени, интерполирующим  $f$  по четырем значениям. Это правило имеет более высокую степень точности, чем (14.5.7) — (14.5.8), и может применяться не только как контрольное, но и как основное вычислительное правило:

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= 2(3 - p^2 h^2) \sin 3ph - 6ph \cos 3ph - 6ph(2 - p^2 h^2), \\ \mu_0 &= 2(3 - p^2 h^2) \cos 3ph + 6ph \sin 3ph - (6 - 11p^2 h^2), \\ \lambda_1 &= 8ph \cos 2ph - 3(2 - p^2 h^2) \sin 2ph + \\ &\quad + 10ph \cos ph - 6(1 - p^2 h^2) \sin ph, \\ \mu_1 &= -3(2 - p^2 h^2) \cos 2ph - 8ph \sin 2ph + \\ &\quad + 6(1 - p^2 h^2) \cos ph + 10ph \sin ph,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C(p) &= \frac{\mu_0}{6p^4 h^3} f_0 + \frac{\mu_0}{3p^4 h^3} \sum_{k=1}^{\infty} f_{3k} \cos 3pkh + \\ &\quad + \frac{\mu_1}{2p^4 h^3} \sum_{k=0}^{\infty} [f_{3k+2} \cos p(3k+2)h + f_{3k+1} \cos p(3k+1)h] + \\ &\quad + \frac{\lambda_1}{2p^4 h^3} \sum_{k=0}^{\infty} [f_{3k+2} \sin p(3k+2)h - f_{3k+1} \sin p(3k+1)h] + R_C,\end{aligned}\quad (14.5.9)$$

$$\begin{aligned}S(p) &= \frac{\lambda_0}{6p^4 h^3} f_0 + \frac{\mu_0}{3p^4 h^3} \sum_{k=1}^{\infty} f_{3k} \sin 3pkh + \\ &\quad + \frac{\mu_1}{2p^4 h^3} \sum_{k=0}^{\infty} [f_{3k+1} \sin p(3k+1)h + f_{3k+2} \sin p(3k+2)h] + \\ &\quad + \frac{\lambda_1}{2p^4 h^3} \sum_{k=0}^{\infty} [f_{3k+1} \cos p(3k+1)h - f_{3k+2} \cos p(3k+2)h] + R_S.\end{aligned}\quad (14.5.10)$$

Правила вычислений, получающиеся из формул котесова вида, алгебраическая степень точности которых выше третьей, имеют более сложное строение, и мы их приводить не будем.

Рассмотрим теперь более частный класс функций  $f$ , которые могут быть представлены в форме  $f(x) = (x+a)^{-s} \varphi(x)$ , где  $a > 0$ ,  $s > 1$ , а  $\varphi(x)$  обладает высоким порядком гладкости на полуоси  $0 \leq x < \infty$  и имеет предельное значение при  $x \rightarrow \infty$ . Численный параметр  $a$ , зависящий от гладкости поведения  $f$  и  $\varphi$  вблизи нуля, всегда может быть приведен к 1. Но так как мы не имеем в виду доводить сразу же излагаемый ниже метод вычисления до конкретных расчетных правил

с численными коэффициентами, мы оставим на некоторое время  $a$  произвольным.

Все, что ниже будет сказано о косинус-преобразовании  $C(p)$ , может быть перенесено без существенных изменений на функцию  $S(p)$ :

$$C(p; f) = C(p) = \int_0^{\infty} \varphi(x) \frac{\cos px}{(x+a)^s} dx. \quad (14.5.11)$$

Для интерполирования  $\varphi$  рационально воспользоваться не целыми многочленами, а дробными функциями, ограниченными на полуоси  $0 \leq x < \infty$ . Чтобы сохранить в вычислениях привычный аппарат, в основу интерполирования была положена система степеней дробно-линейной функции  $z = \frac{1}{x+a}$  и взята линейная комбинация их:

$$M_n(x) = c_0 + \frac{c_1}{x+a} + \dots + \frac{c_n}{(x+a)^n}.$$

Пусть на полуоси  $[0, \infty)$  выбрано  $n+1$  произвольно расположенных узлов интерполирования:  $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n < \infty$ . Коэффициенты  $c_k$  определяют из обычных условий интерполирования  $M_n(x_j) = \varphi(x_j)$  ( $j=0, 1, \dots, n$ ):

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{k=0}^n \lambda_k(x) \varphi(x_k) + \rho_n(x), \\ \lambda_k(x) &= \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)} = \frac{q_k(x)}{(x+a)^n}, \\ \omega_k(x) &= \left( \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x_0+a} \right) \dots \left( \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x_{k-1}+a} \right) \times \\ &\quad \times \left( \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x_{k+1}+a} \right) \dots \left( \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x_n+a} \right). \end{aligned} \right\} \quad (14.5.12)$$

Подстановка этого выражения  $\varphi$  в интеграл (14.5.11) и почленное интегрирование приведут к правилу нахождения косинус-преобразования  $f$  по нескольким значениям функции  $\varphi$ :

$$\left. \begin{aligned} C(p; f) &= \sum_{k=0}^n A_k(p) \varphi(x_k) + R_n, \\ A_k(p) &= \int_0^{\infty} \lambda_k(x) \frac{\cos px}{(x+a)^s} dx, \quad R_n = \int_0^{\infty} \rho_n(x) \frac{\cos px}{(x+a)^s} dx. \end{aligned} \right\} \quad (14.5.13)$$

Для вычисления и табулирования коэффициентов  $A_k(p)$  можно воспользоваться нижеследующими упрощающими задачу фактами. Па-



параметр  $a$  находится или задается вычислителем предварительно, в зависимости от свойств функции  $f$  так, чтобы достигнуть возможно большей гладкости поведения  $\varphi$  вблизи  $x=0$ . После того как значение  $a$  определено, этот параметр для получения расчетного правила в стандартной форме обычно приводят линейным преобразованием  $x=ax'$  к единице. Такое преобразование мы будем считать выполненным и положим  $a=1$ .

Если разложить многочлен  $q_k(x)$  по формуле Тейлора по степеням  $x+1$ :

$$q_k(x) = \sum_{i=0}^n \mu_{ki}(x+1)^i, \quad \mu_{ki} = \frac{1}{i!} q_k^{(i)}(-1),$$

для коэффициентов  $A_k(p)$  мы получим следующее выражение:

$$A_k(p) = \sum_{i=0}^n \mu_{ki} \int_0^{\infty} \frac{\cos px}{(x+1)^{s+n-i}} dx;$$

$\mu_{ki}$  зависят только от  $x_j$  и при каждом способе выбора узлов для них может быть составлена таблица в зависимости от  $n$ ,  $k$  и  $i$ .

Интегральный множитель имеет форму  $\int_0^{\infty} (x+1)^{-k} e^{ipx} dx$  ( $k=$   
 $=s+n-i$ ). Путем интегрирования по частям показатель  $k$  можно привести к интервалу  $0 < k \leq 1$ . Заменой  $p(x+1)=x'$  интеграл

приводится к  $\int_p^{\infty} x^{-k} e^{ix} dx$ . При  $0 < k < 1$  он табулирован недоста-

точно полно, но можно легко указать простые и достаточно эффективные при небольших значениях  $p$  методы его вычисления. При  $k=1$ , что отвечает целым значениям  $s$ , имеющим наибольший интерес для приложений, он приводится к интегральным косинусу и синусу, для которых составлены подробные таблицы.

## § 6. Правила наивысшей степени точности

В связи с нахождением правил, позволяющих получить  $C(p; f)$  и  $S(p; f)$  с погрешностью, меньшей заданной границы, при возможно малом числе значений функции  $f$ , были сделаны попытки построения правил, имеющих наивысшую степень точности в частных классах рациональных функций.

Вновь рассмотрим класс функций  $f$ , которые могут быть представлены в форме  $f(x) = \frac{\varphi(x)}{(1+x)^s}$ ,  $s > 1$ , и  $\varphi$  — гладкая на полуоси  $0 \leq x < \infty$  функция, имеющая предельное значение при  $x \rightarrow \infty$ :  
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \varphi(\infty)$ .

Предварительно приведем интегралы Фурье  $C(p; f)$  и  $S(p; f)$  к нужной нам канонической форме и проделаем это на примере  $C(p; f)$ . Чтобы избежать перемены знака весовой функции  $\cos px$  и сделать вес положительным, положим

$$C(p; f) = \int_0^{\infty} f(x)(1 + \cos px) dx - \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

Второй интеграл  $\int_0^{\infty} f dx = \int_0^{\infty} \varphi(x)(1+x)^{-s} dx$  не зависит от частоты  $p$ .

Подстановкой  $x = t^{-1} - 1$  он приводится к интегралу  $\int_0^1 t^{s-2} \varphi\left(\frac{1}{t} - 1\right) dt$ ,

имеющему весовую функцию якобиева типа  $p(t) = t^{s-2}$ . Его можно вычислить, например, при помощи квадратурного правила вида (7.3.2) наивысшей алгебраической степени точности.

Интеграл  $\int_0^{\infty} f(x)(1 + \cos px) dx$  (ввиду его зависимости от  $p$ )

более сложен для вычислений, и на нем мы сосредоточим внимание.

Чтобы сделать абсциссы и коэффициенты правила вычисления, которое мы получим ниже, не зависящими от параметра  $p$ , выполним

замену  $x' = px$  и приведем интеграл к виду  $\int_0^{\infty} (1 + \cos x) F(x) dx$ ,

где  $F(x) = \frac{1}{p} f\left(\frac{x}{p}\right)$ .

В силу сделанного предположения об  $f$  функция  $F(x)$  может быть представлена в форме  $F(x) = \frac{\Phi(x)}{(1+x)^s}$ , где  $\Phi(x) = p^{s-1} \varphi\left(\frac{x}{p}\right) \left(\frac{1+x}{p}\right)^s$  есть функция, непрерывная на полуоси  $0 \leq x < \infty$  и  $F(\infty) = p^{s-1} \varphi(\infty)$ .

Ниже мы будем рассматривать интеграл  $\int_0^{\infty} \Phi(x) \frac{1 + \cos x}{(1+x)^s} dx$  и для него будем строить правило вычислений вида

$$\int_0^{\infty} \Phi(x) \frac{1 + \cos x}{(1+x)^s} dx \approx \sum_{k=1}^n A_k \Phi(x_k). \quad (14.6.1)$$

Параметры  $A_k$  и  $x_k$  формулы выбираются так, чтобы равенство выполнялось точно в том случае, когда  $\Phi$  — любая из следующих рациональных функций  $\Phi = (1+x)^{-i}$  ( $i = 0, 1, \dots, 2n-1$ ). Возможность такого выбора следует из теорем о квадратурах наивысшей

алгебраической степени точности, доказанных в § 1 гл. 7. В самом деле, если в равенстве (14.6.1) заменить переменную  $x$ , положив  $x = \frac{1}{t} - 1$ ,  $t = \frac{1}{1+x}$  ( $1 \geq t > 0$ ), мы приведем его к виду

$$\int_0^1 \Phi^*(t) t^{s-2} (1 + \cos x) dt \approx \sum_{k=1}^n A_k \Phi^*(t_k),$$

где  $\Phi^*(t) = \Phi(x)$  и  $x_k = \frac{1}{t_k} - 1$ . Параметры  $A_k$  и  $t_k$  должны быть выбраны так, чтобы равенство выполнялось точно при  $\Phi^* = t^i$  ( $i = 0, 1, \dots, 2n-1$ ), т. е. имело бы наивысшую алгебраическую степень точности. Так как весовая функция  $p(t) = t^{s-2} (1 + \cos x)$  — положительная, из указанных теорем вытекают перечисляемые ниже факты о правиле (14.6.1):

1. При всяких  $n = 1, 2, \dots$  параметры  $A_k$  и  $x_k$  ( $0 < x_k < \infty$ ) могут быть выбраны так, чтобы правило выполнялось точно для  $\Phi = (x+1)^{-i}$  ( $i = 0, 1, \dots, 2n-1$ ). Это условие вполне определяет  $A_k$  и  $x_k$ , а именно,  $x_k$  должны быть корнями многочлена  $\Omega\left(\frac{1}{1+x}\right)$  степени  $n$  от  $\frac{1}{1+x}$ , ортогонального по весу  $\frac{1+\cos x}{(1+x)^s}$  ко всякому многочлену  $Q\left(\frac{1}{1+x}\right)$  степени, меньшей  $n$ , на полуоси  $0 \leq x < \infty$ :

$$\int_0^\infty \Omega\left(\frac{1}{1+x}\right) Q\left(\frac{1}{1+x}\right) \frac{1+\cos x}{(1+x)^s} dx = 0.$$

Коэффициенты  $A_k$  должны иметь значения

$$A_k = \int_0^\infty \Omega_k\left(\frac{1}{1+x}\right) \frac{1+\cos x}{(1+x)^s} dx, \quad \Omega_k\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{\Omega\left(\frac{1}{1+x}\right)}{(1+x)^{-1} - (1+x_k)^{-1}}.$$

2. Все коэффициенты  $A_k$  положительны.

3. Ни при каких  $A_k$  и  $x_k$  равенство (14.6.1) не может быть точным для многочленов степени  $2n$  от  $\frac{1}{1+x}$ .

4. Если равенство (14.6.1) верно для  $\Phi(x) = (1+x)^{-i}$  ( $i = 0, \dots, 2n-1$ ), то при всякой функции  $\Phi$ , непрерывной при  $0 \leq x < \infty$  и имеющей предельное значение  $\Phi(\infty)$  при  $x \rightarrow \infty$ , имеет место сходимость квадратурного процесса:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k \Phi(x_k) = \int_0^\infty \Phi(x) \frac{1+\cos x}{(1+x)^s} dx.$$

Сходные преобразования и рассуждения могут быть проделаны для синус-преобразования Фурье  $S(p; f)$  и для него построено правило вычисления вида

$$\int_0^{\infty} \Phi(x) \frac{1 + \sin x}{(1+x)^5} dx \approx \sum_{k=1}^n A_k \Phi(x_k),$$

верное при  $\Phi = (1+x)^{-l}$  ( $l = 0, 1, \dots, 2n-1$ ).

## § 7. Увеличение точности вычисления интегралов Фурье при помощи предварительной подготовки функции

При вычислении интеграла Фурье, как и при нахождении коэффициентов Фурье, обычно стремятся выделить из функции  $f$  ее особую часть, для которой преобразование Фурье находится точно. Выделение выполняется так, чтобы оставшаяся часть функции имела достаточно высокий порядок гладкости. Задача разложения  $f$  на особую и гладкую части для интегралов Фурье осложнена дополнительным требованием, которое отсутствует в задаче о вычислении коэффициентов Фурье: каждая из частей должна быть абсолютно интегрируемой на полуоси  $0 \leq x < \infty$ .

Неограниченность отрезка интегрирования ставит еще одну проблему предварительной подготовки функции, которая является другой стороной задачи увеличения точности приближенного интегрирования. Ее содержание может быть с достаточной полнотой выяснено на примере простейшего правила (14.5.5). При получении его мы предполагали, что  $f(x)$  достаточно быстро стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$ . В бесконечной сумме, входящей в приближенное выражение косинус-преобразования  $S(p)$ , берутся лишь те члены, которые в пределах принятой точности будут отличны от нуля. Число таких членов зависит от скорости стремления к нулю  $f(x)$ : чем более быстро будет убывать  $|f(x)|$ , тем меньше можно взять членов в сумме  $\sum f_k \cos pkh$  и, стало быть, затратить меньше вычислительной работы. Если же мы сохраним число значений  $f_k$ , то вычисления можно выполнить с меньшим шагом  $h$  и, следовательно, с большей точностью. Эти причины побуждают при подготовке вычислений разлагать  $f$  на две части, первая из которых убывает при  $x \rightarrow \infty$  столь же быстро, как  $f$ , и для которой ее преобразование Фурье легко находится в известных функциях. Вторая же часть должна быть более быстро стремящейся к нулю при  $x \rightarrow \infty$ .

С целью упростить запись формул мы объединим косинус- и синус-преобразования в один комплексный интеграл, для которого

будем рассматривать задачу об увеличении точности вычисления:

$$F(p; f) = F(p) = C(p) + iS(p) = \int_0^{\infty} f(x) e^{ipx} dx. \quad (14.7.1)$$

Рассмотрим сначала случай разрывов первого рода у  $f$  и ее производных. Допустим, что функция  $f$  непрерывна всюду на  $[0, \infty)$ , за исключением точки  $x = a$  ( $a > 0$ ), где  $f$  и производные до порядка  $m$  имеют разрывы первого рода. Положим

$$\begin{aligned} f_a(x) = & -E(a-x) \left\{ [f(a+0) - f(a-0)] + \right. \\ & + (x-a) [f'(a+0) - f'(a-0)] + \dots \\ & \left. + \frac{(x-a)^m}{m!} [f^{(m)}(a+0) - f^{(m)}(a-0)] \right\}. \end{aligned} \quad (14.7.2)$$

Функция  $f_a$  на отрезке  $0 \leq x \leq a$  есть многочлен степени  $m$  и тождественно равна нулю при  $x > a$ . В точке  $x = a$   $f_a, f'_a, \dots, f_a^{(m)}$  имеют разрывы первого рода с такими же скачками, что и  $f, f', \dots, f^{(m)}$ . Путем интегрирования по частям можно показать, что

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} E(a-x) \frac{(x-a)^j}{j!} e^{ipx} dx = \\ = \int_0^a \frac{(x-a)^j}{j!} e^{ipx} dx = -(-1)^j \sum_{s=0}^j \frac{a^{j-s}}{(ip)^{s+1} (j-s)!} + \frac{(-1)^j}{(ip)^{j+1}} e^{ipa} = \\ = (-1)^j \frac{a^{j+1}}{(j+1)!} {}_1F_1(1, j+2; ipa). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} F(p; f_a) = \sum_{j=0}^m (-1)^j [f^{(j)}(a+0) - f^{(j)}(a-0)] \times \\ \times \left[ \sum_{s=0}^j \frac{a^{j-s}}{(ip)^{s+1} (j-s)!} - \frac{e^{ipa}}{(ip)^{j+1}} \right] = \\ = - \sum_{j=0}^m (-1)^j [f^{(j)}(a+0) - f^{(j)}(a-0)] \frac{a^{j+1}}{(j+1)!} {}_1F_1(1, j+2; ipa). \end{aligned} \quad (14.7.3)$$

Если мы хотим ограничиться устранением разрыва только самой функции  $f$ , следует считать  $m = 0$  и положить  $f_a(x) = -E(a-x) \times [f(a+0) - f(a-0)]$ . Здесь  $F(p; f_a) = \frac{1}{ip} (1 - e^{ipa}) [f(a+0) -$

—  $f(a-0)$ ]. Когда же мы намерены устранить разрывы  $f$  и  $f'$ , нужно положить  $m=1$ ,  $f_a(x) = -E(a-x) \{ [f(a+0) - f(a-0)] + + (x-a)[f'(a+0) - f'(a-0)] \}$ . В этом случае

$$F(p; f_a) = \frac{1}{ip} (1 - e^{ipa}) [f(a+0) - f(a-0)] + + \left( \frac{1}{p^2} + i \frac{a}{p} - \frac{1}{p^2} e^{ipa} \right) [f'(a+0) - f'(a-0)].$$

Возвратимся к произвольному  $m$ . Полагая  $f_* = f - f_a$ , мы получим разложение  $f$  на сумму двух частей  $f = f_a + f_*$ , при этом часть  $f_*$  будет иметь непрерывные производные до порядка  $m$  включительно. Если  $f, f', \dots$  имеют несколько точек разрыва первого рода:  $a, b, c, \dots$ , для каждой из них по правилу (14.7.2) составляют вспомогательную функцию соответственно  $f_a, f_b, f_c, \dots$  и после этого полагают  $f = f_a + f_b + \dots + f_*$ . Функция  $f_*$  будет иметь непрерывные производные до тех порядков, какие были предусмотрены нами при составлении  $f_a, f_b, \dots$ .

Теперь рассмотрим задачу ослабления у функции  $f$  степенной особенности, лежащей в начале координат. Пусть  $f(x) = x^\lambda \varphi(x)$ , где  $\lambda > -1$  и  $\varphi(x)$  есть функция, достаточно гладкая в окрестности нуля.

Неограниченность области интегрирования заставляет изменить по сравнению с § 4 форму особой части, которую выделяют из  $f$  для ослабления особенности в точке  $x=0$ . Выберем как-либо число  $\alpha > 0$  и рассмотрим функцию  $f_0(x) = e^{-\alpha x} (c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m)$ . Коэффициенты  $c_j$  ( $j=0, \dots, m$ ) избираются так, чтобы ее разложение по степеням  $x$  совпадало бы с разложением  $\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{x}{1!} \varphi'(0) + \dots + \frac{x^m}{m!} \varphi^{(m)}(0) + \dots$  до члена с  $x^m$  включительно. Сравнение коэффициентов при  $x^j$  ( $j=0, \dots, m$ ) обоих разложений приводит к системе уравнений, из которой последовательно могут быть найдены  $c_j$ :

$$c_0 = \varphi(0),$$

$$c_1 - \alpha c_0 = \varphi'(0),$$

$$c_2 - \alpha c_1 + \frac{1}{2} \alpha^2 c_0 = \frac{1}{2} \varphi''(0),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$c_m - \alpha c_{m-1} + \frac{1}{2} \alpha^2 c_{m-2} - \dots + \frac{(-1)^m}{m!} \alpha^m c_0 = \frac{1}{m!} \varphi^{(m)}(0).$$

При решении системы параметру  $\alpha$  стремятся придать такое значение, чтобы  $c_j$  были бы небольшими по абсолютной величине. После того как  $c_j$  найдены, можно положить  $f(x) = x^\lambda f_0(x) + f_*(x)$ ,

$f_*(x) = f(x) - x^\lambda f_0(x)$ . Функция  $f_*$  будет иметь в точке нуль порядок дифференцируемости на  $m$  единиц выше, чем  $f$ .

Для нахождения преобразования Фурье  $x^\lambda f_0(x)$  предварительно заметим, что интеграл  $I_\nu = \int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-\alpha x} e^{ipx} dx$  ( $\alpha > 0$ ,  $p > 0$ ,  $\arg x = 0$ )

линейной заменой  $(\alpha - ip)x = t$  и преобразованием контура интегрирования в полуось  $0 \leq t < \infty$  приводится к эйлерову интегралу второго рода.

Вычисления для него дают значение:  $I_\nu = \Gamma(\nu) r^{-\nu} e^{i\nu\psi}$ , где  $r = |\alpha + ip| = \sqrt{\alpha^2 + p^2}$ ,  $\psi = \arg(\alpha + ip) = \operatorname{arctg} \frac{p}{\alpha}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} F(p; x^\lambda f_0) &= \sum_{j=0}^m c_j \int_0^\infty x^{\lambda+j} e^{-\alpha x} e^{ipx} dx = \\ &= \sum_{j=0}^m c_j \Gamma(\lambda + j + 1) r^{-\lambda-j-1} e^{i(\lambda+j+1)\psi}. \end{aligned}$$

Более сложным является случай, когда  $f$  имеет степенную особенность внутри области интегрирования. Допустим, что при некотором выборе ветвей степенной функции будет  $f(x) = (x-a)^\lambda \varphi(x)$  ( $\alpha > 0$ ,  $\lambda > -1$ ) и  $\varphi$  обладает достаточно высоким порядком гладкости. Полуось интегрирования, по-видимому, целесообразно разбить на участки  $[0, a]$ ,  $[a, \infty)$ :

$$F(p, f) = \int_0^a (x-a)^\lambda \varphi(x) e^{ipx} dx + \int_a^\infty (x-a)^\lambda \varphi(x) e^{ipx} dx.$$

Второй из этих интегралов заменой  $x = a + t$  приводится к  $e^{ipa} \int_0^\infty t^\lambda \varphi(a+t) e^{ipt} dt$  и в этой форме он был рассмотрен несколькими строками выше. Первый же интеграл после замены  $x - a = -at$  ( $1 \geq t \geq 0$ ) перейдет в  $-(-a)^{\lambda+1} e^{ipa} \int_0^1 t^\lambda \varphi(a-at) e^{-ipat} dt$ . А этот

последний интеграл имеет форму, рассмотренную\*) в § 4. Там были высказаны в основном тексте и в сноске некоторые соображения о его вычислении.

Закончим параграф разбором задачи о выделении из функции  $f$  части, более быстро стремящейся к нулю при  $x \rightarrow \infty$ . Наибольший интерес здесь имеет, по-видимому, случай, когда убывание  $f$  происходит по степенному закону.

\*) См. (14.4.2) при условии, когда  $k$  считается произвольным.

Чтобы выполнять вычисления с функциями, не имеющими нигде особенностей на полуоси  $0 \leq x < \infty$ , целесообразно отказаться от отрицательных степеней  $x$  и воспользоваться функциями  $(a^2 + x^2)^{-\nu-0,5}$ . Они имеют достаточно простое строение и для них известны правила преобразования Фурье:

$$\int_0^{\infty} (a^2 + x^2)^{-\nu-0,5} \cos px \, dx = \sqrt{\pi} \left( \frac{p}{2a} \right)^{\nu} [\Gamma(0,5 + \nu)]^{-1} K_{\nu}(ap),$$

$$\operatorname{Re} \nu > -0,5; \quad (14.7.4)$$

$$\int_0^{\infty} (a^2 + x^2)^{-\nu-0,5} \sin px \, dx =$$

$$= \sqrt{\pi} 2^{-\nu-1} \Gamma(0,5 - \nu) p^{\nu} a^{-\nu} [I_{\nu}(ap) - L_{-\nu}(ap)],$$

$$\operatorname{Re} \nu > -0,5; \nu \neq 0,5; 1,5; 2,5; \dots;$$

$$\int_0^{\infty} (a^2 + x^2)^{-1} \sin px \, dx = - \left( \frac{\pi p}{2a} \right)^{0,5} \left\{ I_{1/2}(ap) \ln \frac{ap}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{ap}{2} \right)^{2m+0,5}}{m! \Gamma(m+1,5)} \left[ \frac{\Gamma'(m+1)}{\Gamma(m+1)} + \frac{\Gamma'(m+1,5)}{\Gamma(m+1,5)} \right] \right\},$$

$$\int_0^{\infty} (a^2 + x^2)^{-2} \sin px \, dx = \sqrt{\pi} \left( \frac{p}{2a} \right)^{1,5} \left\{ I_{3/2}(ap) \ln \frac{ap}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\Gamma(1,5)} \left( \frac{ap}{2} \right)^{-0,5} - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{ap}{2} \right)^{2m+1,5}}{m! \Gamma(m+2,5)} \left[ \frac{\Gamma'(m+1)}{\Gamma(m+1)} + \frac{\Gamma'(m+2,5)}{\Gamma(m+2,5)} \right] \right\},$$

$$\int_0^{\infty} (a^2 + x^2)^{-q-1} \sin px \, dx = \frac{(-1)^{q+1} \sqrt{\pi}}{q!} \left( \frac{p}{2a} \right)^{q+0,5} \times$$

$$\times \left\{ I_{q+\frac{1}{2}}(ap) \ln \frac{ap}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{(-1)^{q-k} (q-1-k)!}{\Gamma(k+1,5)} \left( \frac{ap}{2} \right)^{2k+0,5-q} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{ap}{2} \right)^{2m+q+0,5}}{m! \Gamma(m+q+1,5)} \left[ \frac{\Gamma'(m+1)}{\Gamma(m+1)} + \frac{\Gamma'(m+q+1,5)}{\Gamma(m+q+1,5)} \right] \right\},$$

$$(q = 0, 1, 2, \dots).$$



Здесь  $I_\nu(z)$ ,  $K_\nu(z)$  — цилиндрические функции:

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)},$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(iz) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} [J_\nu(iz) + iY_\nu(iz)].$$

и  $L_\nu(z)$  — функция Струве:

$$L_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k+1}}{\Gamma(k+1,5) \Gamma(\nu+k+1,5)}.$$

Пусть существует число  $\nu$  такое, что при  $x \rightarrow \infty$  будет  $f(x): (a^2 + x^2)^{-\nu-0,5} \rightarrow c_1 \neq 0$  и, следовательно,  $f$  представима в форме  $f(x) = c_1(a^2 + x^2)^{-\nu-0,5} + f_*(x)$ , где  $f_*(x): (a^2 + x^2)^{-\nu-0,5} \rightarrow 0$ . Преобразование Фурье первого слагаемого находится точно при помощи (14.7.4). Второе же слагаемое  $f_*$  убывает более быстро, нежели  $f$ , и может оказаться, что правила численного преобразования можно применять к нему с лучшим результатом, чем к  $f$ . Если окажется, что  $f_*$  убывает при  $x \rightarrow \infty$  недостаточно быстро, то к  $f_*$  можно применить тот же способ выделения быстро убывающей части. Параметр  $a$ , входящий в функцию  $(a^2 + x^2)^{-\nu-0,5}$ , выбирается в зависимости от поведения функции  $f$  около начала координат\*). Для большого числа гладких при малых  $x$  функций  $f$  достаточно считать, по-видимому,  $a = 1$ .

Рассмотрим важное для приложений множество функций, которые при больших  $x$  имеют форму  $f(x) = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2} + \dots + [c_m + \gamma_m(x)] x^{-m}$  ( $\gamma_m(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ ). Так как переменная  $(a^2 + x^2)^{-0,5} = x^{-1} - \frac{1}{2} a^2 x^{-3} + \frac{3}{8} a^4 x^{-5} - \dots$  при больших  $x$  эквивалентна  $x^{-1}$ , то в этой переменной представление  $f$  будет следующим:  $f(x) = a_1(a^2 + x^2)^{-0,5} + a_2(a^2 + x^2)^{-1} + a_3(a^2 + x^2)^{-1,5} + \dots + [a_m + \delta_m(x)](a^2 + x^2)^{-0,5m} = \sum_{j=1}^m a_j(a^2 + x^2)^{-0,5j} + f_*(x)$ . Уже

---

\*) Чем меньше будет  $a$ , тем большие значения будет принимать  $(a^2 + x^2)^{-\nu-0,5}$  вблизи начала координат и тем менее гладким там будет поведение  $f_*$ . При увеличении  $a$  будет увеличиваться гладкость этой функции, но вместе с тем будет возрастать аргумент цилиндрических функций в (14.7.4), что может затруднить их вычисление.

при небольших значениях  $m$  функция  $f_*$  будет достаточно быстро убывать при неограниченном росте  $x$ . Что же касается членов суммы  $a_j (a^2 + x^2)^{-0,5j}$ , то их преобразование Фурье будет согласно (14.7.4) выражаться через цилиндрические функции целого и полуцелого индексов, которые табулированы с большей подробностью, нежели для других значений индексов.

В частности, когда в представлении  $f$  участвуют только четные степени  $x$ :  $f(x) = c_2 x^{-2} + c_4 x^{-4} + \dots$ , в выражении ее через  $a^2 + x^2$  будут содержаться только целые степени этой функции:  $f(x) = a_2 (a^2 + x^2)^{-1} + a_4 (a^2 + x^2)^{-2} + \dots + f_*(x)$ . Преобразование Фурье  $(a^2 + x^2)^{-j}$  будет выражаться через цилиндрические функции  $I_{j-\frac{1}{2}}$  и  $K_{j-\frac{1}{2}}$  полуцелого индекса, которые просто выражаются через степенные и показательные функции.

В задаче об увеличении скорости убывания преобразуемой функции при  $x \rightarrow \infty$  мы воспользовались функциями  $(x^2 + a^2)^{-\nu-0,5}$  ввиду того, что их преобразования Фурье выражаются через хорошо изученные и во многих случаях подробно табулированные функции Бесселя.

Иногда предпочтительнее воспользоваться более простыми функциями  $(x+a)^{-k}$ . Если  $f$  представима в виде  $f(x) = A(x+a)^{-k} + \dots + D(x+a)^{-l} + [E + \gamma(x)](x+a)^{-m}$  ( $a > 0$ ,  $0 < k < \dots < l < m$ ;  $\gamma(x) \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow \infty$ ), то можно положить  $f_1(x) = A(x+a)^{-k} + \dots + E(x+a)^{-m}$ ,  $f_*(x) = (x+a)^{-m}\gamma(x)$ ,  $f(x) = f_1(x) + f_*(x)$ . Для осуществления преобразования первого слагаемого  $f_1$  в правой части последнего равенства необходимо умение вычислять интегралы вида

$$I_s(p) = \int_0^\infty (x+a)^{-s} e^{ipx} dx = e^{-ipa} p^{s-1} \int_{pa}^\infty t^{-s} e^{it} dt \quad (s > 0).$$

Последний интеграл подробно табулирован лишь при  $s=1$ .

При помощи интегрирования по частям для  $I_s(x) = \int_x^\infty t^{-s} e^{it} dt$  можно получить правило понижения показателя степени  $s$ :  $I_{s+1} = \frac{1}{s} x^{-s} e^{ix} + \frac{i}{s} I_s$ , которое дает возможность вычисления при любом  $s > 0$  привести к значениям  $s$  на отрезке  $0 < s \leq 1$ . При  $s=1$   $I_1(x)$  выражается через интегральные синус и косинус. Это позволяет

достаточно просто выполнить преобразование  $f_1(x)$  в том случае, когда  $k, \dots, m$  есть целые числа.

Пусть  $0 < s < 1$ . Так как  $\int_0^{\infty} t^{-s} e^{it} dt = \Gamma(1-s) e^{i \frac{\pi}{2}(1-s)}$ , то

$$I_s(x) = \Gamma(1-s) e^{i \frac{\pi}{2}(1-s)} - \int_0^x t^s e^{it} dt =$$

$$= \Gamma(1-s) e^{i \frac{\pi}{2}(1-s)} - \sum_{v=0}^{\infty} \frac{i^v x^{v+1-s}}{v!(v+1-s)}.$$

Полученный ряд может быть использован для вычислений  $I_s(x)$  при «небольших» значениях  $x$ . При «больших»  $x$  полезным в вычислениях может оказаться асимптотический ряд для  $I_s(x)$

$$I_s(x) = \int_x^{\infty} t^{-s} e^{it} dt \sim e^{ix} \left[ \frac{i}{x^s} - \frac{i^2 s}{x^{s+1}} + \frac{i^3 s(s+1)}{x^{s+2}} - \dots \right].$$

Наконец, для «средних» значений  $x$  к нахождению  $\int_0^x t^{-s} e^{it} dt$  может быть, например, применено одно из правил неопределенного интегрирования.

## Л и т е р а т у р а

Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, гл. V, §§ 54—59, М., Гостехиздат, 1954.

Серебренников М. Г., Гармонический анализ, М. — Л., Гостехиздат, 1948.

Ландош К., Практические методы прикладного анализа, гл. IV, М., Физматгиз, 1961.

Крылов В. И., Шульгина Л. Т., Справочная книга по численному интегрированию, гл. 7, М., Изд. «Наука», 1966.

Диткин В. А., Прудников А. П., Интегральные преобразования и операционное исчисление, М., Физматгиз, 1961.

Кругликова Л. Г., Крылов В. И., Справочная книга по численному гармоническому анализу, Изд. «Наука и техника», БССР, 1967.

## ГЛАВА 15

### ЧИСЛЕННОЕ ОБРАЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

#### § 1. Преобразование Лапласа, задача его обращения и связь ее с преобразованием Фурье

Мы будем рассматривать задачу обращения преобразования Лапласа только в той ее части, где она связана с приближенным вычислением интегралов. Сначала напомним некоторые хорошо известные факты теории преобразования. Пусть на полуоси  $0 \leq x < \infty$  определена произвольная функция  $F$  и  $p$  есть комплексный параметр  $p = \sigma + i\tau$ . Их мы предполагаем такими, чтобы был абсолютно сходящимся интеграл

$$f(p) = \int_0^{\infty} F(x) e^{-px} dx. \quad (15.1.1)$$

Если интеграл абсолютно сходится для некоторого значения  $p = p_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ , то он будет абсолютно и равномерно сходящимся в полуплоскости  $\operatorname{Re} p = \sigma \geq \sigma_0$ . Это сразу же следует из неравенства  $|F(x) e^{-px}| \leq |F(x) e^{-p_0 x}| e^{-(\sigma - \sigma_0)x}$ . Для каждого интеграла (15.1.1) будет существовать такое конечное или бесконечное число  $\alpha$ , что интеграл будет абсолютно сходящимся в полуплоскости  $\operatorname{Re} p = \sigma > \alpha$ , при этом сходимость будет равномерной во всякой полуплоскости  $\sigma \geq \alpha + \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ). Если же  $\sigma < \alpha$ , интеграл от  $|F e^{-px}|$  будет расходиться.

При  $\alpha = -\infty$  интеграл будет абсолютно сходиться всюду в комплексной плоскости  $p$ . Для  $\alpha = \infty$  интеграл не будет абсолютно сходиться ни при каких  $p$ . Этот случай был нами исключен раньше и ниже мы будем рассматривать только такие функции  $F$ , для которых  $\alpha < \infty$ . Так как  $F(x) e^{-px}$  есть целая функция  $p$  при любом  $x$  и интеграл сходится равномерно относительно  $p$  при  $\sigma \geq \alpha + \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ), функция  $f(p)$  будет регулярной всюду в полуплоскости  $\sigma > \alpha$ .

Если точка  $p$  будет удаляться на бесконечность, оставаясь в полуплоскости  $\sigma > \alpha$ , при этом так, что вещественная часть  $p$  неограни-

ченно возрастает,  $f(p)$  будет стремиться к нулю. Действительно, пусть  $\sigma \geq c > \alpha$ ,

$$|f(p)| \leq \int_0^{\infty} |F(x)| e^{-cx} e^{-(\sigma-c)x} dx.$$

Ввиду  $\int_0^{\infty} |F(x)| e^{-cx} dx < \infty$  правая часть неравенства будет, очевидно, стремиться к нулю при неограниченном росте  $\sigma$ .

Равенство (15.1.1) можно рассматривать как преобразование функции  $F(x)$ , определенной на полуоси  $[0, \infty)$ , в функцию  $f(p)$  комплексной переменной  $p$ , регулярную в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > \alpha$ ;  $F(x)$  называют *оригиналом*, а  $f(p)$  — *изображением*.

Можно указать правило, позволяющее по изображению  $f(p)$  найти оригинал  $F(x)$ , верное при весьма общих предположениях о свойствах оригинала.

Если выполняются условия: 1) при некотором  $c$  функция  $F(x)e^{-cx}$  абсолютно интегрируема на полуоси  $0 \leq x < \infty$ ; 2)  $F(x)e^{-cx}$  представима при  $x \geq 0$  двойным интегралом Фурье \*)

$$\frac{1}{2} [F(x+0) + F(x-0)] e^{-cx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau x} \int_0^{\infty} F(t) e^{-ct} e^{-i\tau t} dt d\tau, \quad (15.1.2)$$

где интегрирование по  $\tau$  понимается в смысле главного значения, тогда при  $x \geq 0$  верно следующее равенство, в котором справа стоит главное значение интеграла:

$$\frac{1}{2} [F(x+0) + F(x-0)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(p) e^{px} dp. \quad (15.1.3)$$

\*) Функция  $F(x)$  определена на полуоси  $[0, \infty)$ . Мы продолжили ее на отрицательную полуось  $[0, -\infty)$ , положив там  $F(x) \equiv 0$ , и в соответствии с этим внутренний интеграл в равенстве (15.1.2) взяли в границах  $(0, \infty)$ .

Как выясняется в теории интеграла Фурье, для представимости  $F(x)e^{-cx}$  формулой (15.1.2) достаточно, чтобы эта функция выполняла следующие требования: а)  $F(x)e^{-cx}$  абсолютно интегрируема на полуоси  $[0, \infty)$ ; б)  $F(x)e^{-cx}$  имеет точки разрыва только первого рода и на каждом конечном отрезке их лишь конечное число; в) любой конечный отрезок можно разделить на конечное число частей так, чтобы  $F(x)e^{-cx}$  была монотонной на каждой из частей. Требования б) — в) могут быть заменены условием, чтобы  $F(x)$  и производная  $F'(x)$  имели точки разрыва только первого рода и на любом конечном отрезке полуоси  $[0, \infty)$  их было конечное число.

В самом деле, умножив обе части (15.1.2) на  $e^{cx}$  и заметив, что внутренний интеграл есть не что иное, как  $f(c + i\tau)$ , можно это равенство переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [F(x+0) + F(x-0)] &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(c + i\tau) e^{(c+i\tau)x} d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(p) e^{px} dp. \end{aligned}$$

Равенство (15.1.3) дает обращение преобразования Лапласа (15.1.1).

В приложениях задача обращения вызывает затруднения более часто, чем само преобразование. Это связано с тем, что при решении дифференциальных, интегральных, разностных и других уравнений обычно применяют преобразование непосредственно к этим уравнениям, переходя в них от оригиналов к изображениям. Полученное для изображений уравнение часто бывает значительно проще исходного и его нередко удается решить в простых по своему строению функциях.

После этого необходимо бывает вернуться от изображений к оригиналам. Это можно сделать, например, при помощи равенства (15.1.3). Но оно требует умения вычислять контурный интеграл, который в него входит. Найти его точное выражение через известные функции удается далеко не всегда.

В связи с этим возникла потребность в построении приближенных методов, позволяющих вычислять интеграл в широком классе случаев.

При записи (15.1.3) предполагалось, что линией интегрирования является прямая, параллельная мнимой оси:  $\operatorname{Re} p = c$ . Но так как функция  $f(p) e^{px}$  регулярно зависит от  $p$  в окрестности любого конечного ее отрезка, линия интегрирования может быть деформирована как угодно, без нарушения некоторых условий, выясняемых в теории аналитических функций комплексного аргумента. Абсцисса  $x$ , являющаяся аргументом оригинала  $F(x)$ , входит в интеграл как параметр.

Проблема обращения преобразования, если пользоваться равенством (15.1.3), приводится к некоторой частной задаче вычисления контурного интеграла от регулярной функции, зависящего от параметра  $x$ . Главнейшими фактами, затрудняющими вычисление, будут, во-первых, неограниченность контура интегрирования, и, во-вторых, колебания множителя  $e^{px}$  вдоль контура. Устранить колебания  $e^{px}$  путем деформации контура можно только в отдельных немногочисленных случаях.

Упрощающим вычисления обстоятельством является то, что  $f(p)$  не есть произвольная функция, регулярная на контуре, а есть «изображение», т. е. функция вида (15.1.1) с неизвестным нам оригиналом  $F(x)$ . Напомним, что функции такого типа регулярны всюду справа от прямой  $\operatorname{Re} p = c$  и при удалении  $p$  на бесконечность так,

чтобы действительная часть  $p$  при этом неограниченно возрастала, стремятся к нулю. При построении метода вычисления интеграла оба эти свойства  $f(p)$  могут быть приняты заранее во внимание.

Вычисление всякого контурного интеграла, после того как выбор контура фиксирован, может быть приведено к вычислению некоторого определенного интеграла. В зависимости от вида его, к вычислению можно применить те или иные правила квадратур, изучению которых посвящена вторая часть книги. Один из возможных способов таких вычислений мы опишем несколькими строками ниже.

При применении этих методов следует иметь в виду, что все они предполагают задание интегрируемой функции только на линии интегрирования и мало, или совсем не учитывают поведение ее вне этой линии. В частности, в них не принимаются во внимание свойства  $f(p)$ , указанные выше. О правилах вычислений (15.1.3), учитывающих эти свойства изображений, будет говориться в дальнейших параграфах главы.

Положив в интеграле (15.1.3)  $p = c + i\tau$  и считая, для простоты записи, что  $F(x)$  непрерывна в точке  $x$ , мы можем это равенство переписать в виде

$$F(x) = \frac{e^{cx}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(c + i\tau) e^{ix\tau} d\tau. \quad (15.1.4)$$

Интеграл, стоящий справа, дает преобразование Фурье функции  $f(c + i\tau)$ . Оно отличается от преобразования (14.4.3), рассмотренного в § 4 гл. 14, только тем, что под знаком интеграла стоит комплексная функция  $f(c + i\tau)$ .

Если ось  $-\infty < \tau < \infty$  разделить на участки  $(-\infty, 0)$  и  $(0, \infty)$ , в интеграле по отрицательной полуоси заменить переменную  $\tau$  на  $-\tau$  и показательные функции  $e^{\pm i x \tau}$  выразить через тригонометрические, можно (15.1.4) привести к виду:

$$F(x) = \frac{e^{cx}}{2\pi} \int_0^{\infty} \{ [f(c + i\tau) + f(c - i\tau)] \cos x\tau + \\ + i[f(c + i\tau) - f(c - i\tau)] \sin x\tau \} d\tau. \quad (15.1.5)$$

После этого становится очевидным, что для вычисления  $F(x)$  может быть применено большинство правил для численного косинус- и синус-преобразований Фурье, о которых говорилось в §§ 4—5 гл. 14.

В приложениях наиболее часто оригинал  $F(x)$  имеет действительные значения, и равенство (15.1.5) упрощается. Изображение  $f(p)$  при действительных  $p$  будет также иметь действительные значения. Поэтому, в силу принципа симметрии,  $f(c - i\tau) = \overline{f(c + i\tau)}$ , и если

положить  $f(p) = u(\sigma, \tau) + iv(\sigma, \tau)$ , то

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{e^{cx}}{\pi} \int_0^{\infty} [u(c, \tau) \cos x\tau - v(c, \tau) \sin x\tau] d\tau = \\ &= \frac{e^{cx}}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} f(c + i\tau) e^{ix\tau} d\tau. \quad (15.1.6) \end{aligned}$$

Настоящий параграф мы закончим указанием на связь между преобразованием Лапласа и коэффициентами Фурье. Можно построить простую зависимость между значениями изображения  $f(p)$  в равноотстоящих точках и коэффициентами Фурье оригинала  $F(x)$  с преобразованным аргументом. Такая связь может быть полезной в задаче обращения преобразования Лапласа.

Не ограничивая общности результата, можно считать, что изображение  $f(p)$  есть регулярная функция в правой полуплоскости  $\operatorname{Re} p > 0$ . Для достижения этого достаточно взять любое число  $a \geq \alpha$  и рассмотреть изображение  $f(a + p)$ , что равносильно замене оригинала  $F(x)$  на  $F(x)e^{-ax}$ . Ниже нам придется рассматривать разложение  $F$  в ряд по синусам кратных дуг. Чтобы улучшить сходимость такого разложения, полезно заранее привести значение  $F(+0)$  к нулю. Для этого достаточно  $F(x)$  заменить на  $F(x) - F(+0)$ , что приводит к замене изображения  $f(p)$  на  $f(p) - p^{-1}F(+0)$ .

Рассмотрим теперь преобразование Лапласа  $f(p) = \int_0^{\infty} F(x)e^{-px} dx$ , выберем какое-либо число  $h > 0$  и выполним в нем подстановку  $e^{-hx} = \cos \vartheta$ ,  $F(-h^{-1} \ln \cos \vartheta) = \Phi(\vartheta)$ :

$$hf(p) = \int_0^{\pi/2} \Phi(\vartheta) [\cos \vartheta]^{\frac{p}{h}-1} \sin \vartheta d\vartheta.$$

Чтобы под знаком интеграла получить четную степень  $\cos \vartheta$ , которая легко выразится через  $\sin \vartheta$ , положим  $p = (2k + 1)h$ ,

$$hf[(2k + 1)h] = \int_0^{\pi/2} \Phi(\vartheta) \cos^{2k} \vartheta \sin \vartheta d\vartheta. \quad (15.1.7)$$

Функции  $\sin(2v + 1)\vartheta$  образуют на отрезке  $[0, \frac{\pi}{2}]$  замкнутую ортогональную систему \*) и если  $\Phi(\vartheta)$  — достаточно гладкая функция,

\*) Если  $\psi(\vartheta)$  определена на отрезке  $[0, \pi]$  и удовлетворяет там некоторым условиям, например, условиям Дирихле, она может быть разложена в ряд по синусам:  $\psi(\vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k\vartheta$ . Пусть взят частный класс функций  $\psi(\vartheta)$ , значения которых в точках, одинаково отстоящих от концов отрезка  $[0, \pi]$ , равны:  $\psi(\pi - \vartheta) = \psi(\vartheta)$ . Такие функции определяются значениями,



то ее можно разложить в ряд по этим функциям:  $\Phi(\vartheta) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v \sin(2v+1)\vartheta$ , коэффициенты которого  $c_v$  могут быть найдены при помощи равенств

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2v+1)\vartheta \sin(2\mu+1)\vartheta d\vartheta = \begin{cases} 0, & v \neq \mu, \\ \frac{\pi}{4}, & v = \mu. \end{cases}$$

Если в интеграл (15.1.7) внести вместо  $\Phi(\vartheta)$  его разложение в ряд и ядро интеграла заменить тригонометрической суммой

$$\begin{aligned} \cos^{2n}\vartheta \sin\vartheta &= \\ &= 2^{-2n} \sum_{k=0}^n \left[ \binom{2n}{k} - \binom{2n}{k-1} \right] \sin[2(n-k)+1]\vartheta, \quad \left( \binom{2n}{-1} = 0 \right), \end{aligned}$$

получится, ввиду ортогональности синусов разных частот, равенство

$$\begin{aligned} \left[ \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} \right] c_0 + \dots + \left[ \binom{2n}{k} - \binom{2n}{k-1} \right] c_{n-k} + \dots + c_n &= \\ &= \frac{4^{n+1}}{\pi} h f[(2n+1)h]. \end{aligned}$$

Полагая последовательно  $n=0, 1, 2, \dots$ , построим бесконечную треугольную систему уравнений, из которой находятся коэффициенты  $c_v$ :

$$c_0 = \frac{4}{\pi} h f(h),$$

$$c_0 + c_1 = \frac{4^2}{\pi} h f(3h),$$

$$2c_0 + 3c_1 + c_2 = \frac{4^3}{\pi} h f(5h),$$

$$5c_0 + 9c_1 + 5c_2 + c_3 = \frac{4^4}{\pi} h f(7h),$$

$$14c_0 + 28c_1 + 20c_2 + 7c_3 + c_4 = \frac{4^5}{\pi} h f(9h),$$

$$42c_0 + 90c_1 + 75c_2 + 35c_3 + 9c_4 + c_5 = \frac{4^6}{\pi} h f(11h),$$

$$132c_0 + 297c_1 + 275c_2 + 154c_3 + 54c_4 + 11c_5 + c_6 = \frac{4^7}{\pi} h f(13h),$$

.....

Функция  $F(-h^{-1} \ln \cos \vartheta) = \Phi(\vartheta)$  после этого восстанавливается при помощи ряда Фурье, указанного выше.

которые они принимают на  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , и эти значения могут быть заданы произвольно. В разложении такой функции сохраняются только синусы нечетной кратности  $\sin(2v+1)\vartheta$ , которые обладают тем же свойством симметрии, что и  $\psi(\vartheta)$ .

## § 2. Интерполяционные правила

В этом параграфе будут рассматриваться правила вычисления интеграла

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(p) e^{px} dp, \quad (15.2.1)$$

основанные на интерполировании изображения  $f(p)$  по его значениям в нескольких точках. Точность результата здесь, как обычно, будет зависеть от выбора системы функций, положенных в основу интерполирования, и от выбора узлов. И то, и другое должно быть согласовано со свойствами изображений  $f(p)$  и с практикой вычислений.

Будем рассматривать часто встречающийся в приложениях случай, когда  $f(p)$  представима в виде

$$f(p) = \frac{\varphi(p)}{(p-a)^s} \quad (s > 0),$$

где  $\varphi(p)$  регулярна в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > a$  и имеет предельное значение  $\lim_{p \rightarrow \infty} \varphi(p) = \varphi(\infty)$ . Если  $s$  — дробное число, то под  $(p-a)^s$

понимается та ветвь, для которой  $\arg(p-a) = 0$  при  $p > a$ . Параметр  $a$  должен удовлетворять условию  $\operatorname{Re} a \leq a$  и выбирается так, чтобы функция  $\varphi(p)$  была бы возможно более гладкой в указанной полуплоскости.

С целью упростить запись формул, можно выполнить замену  $p-a = p'$  и считать  $a=0$ ,  $c > a \geq 0$ . При этом равенство (15.2.1) приведет к следующему виду:

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \varphi(p) p^{-s} e^{xp} dp, \quad (15.2.2)$$

$\arg p = 0$  при  $p > 0$ . Выделяющийся в интеграле при замене переменной  $p$  множитель  $e^{ax}$  был присоединен к функции  $F(x)$ .

Так как  $\varphi(p)$  предполагается непрерывной в полуплоскости  $\operatorname{Re} p \geq c$  при любом  $c > a$ , за аппарат для приближения  $\varphi(p)$  естественно принять не многочлены, а рациональные функции от  $p$ , ограниченные при  $p \rightarrow \infty$ , полюсы которых лежат в полуплоскости  $\operatorname{Re} p \leq a$ .

Система рациональных функций, избираемых для этого, должна обладать свойством полноты: для всякой функции  $\varphi(p)$ , регулярной в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > a$ , ограниченной в полуплоскости  $\operatorname{Re} p \geq c$  ( $c > a$ ), и всякого  $\varepsilon$  должна существовать такая функция системы, которая отличается от  $\varphi(p)$  при  $\operatorname{Re} p \geq c$  по модулю меньше, чем на  $\varepsilon$ .

Кроме того, они должны удовлетворять важному техническому требованию: вычисления с ними должны быть достаточно простыми.

Наконец, чтобы можно было при заданной степени числителя и знаменателя рациональной функции достигнуть возможно хорошего приближения  $\varphi(p)$ , следует признать желательным некоторое согласование свойств системы рациональных функций со свойствами  $\varphi(p)$ . Так как нами не сделано никаких предположений о  $\varphi(p)$ , вопрос о согласовании свойств мы оставим в стороне и будем принимать во внимание лишь требования полноты и простоты вычислений. Наиболее же простыми вычисления будут в том случае, когда в качестве рациональных функций принимаются многочлены от  $\frac{1}{p}$ .

Возьмем  $n$  точек  $p_1, \dots, p_n$ , лежащих справа от прямой  $\operatorname{Re} p = c$ , и рассмотрим многочлен  $P_{n-1}\left(\frac{1}{p}\right)$  степени не больше  $n-1$ , интерполирующий  $\varphi$  по значениям во взятых точках:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(p) &= P_{n-1}\left(\frac{1}{p}\right) + r(p) = \sum_{k=1}^n l_k\left(\frac{1}{p}\right) \varphi(p_k) + r(p), \\ l_k\left(\frac{1}{p}\right) &= \frac{\omega_k\left(\frac{1}{p}\right)}{\omega_k\left(\frac{1}{p_k}\right)}, \quad \omega_k\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{\omega\left(\frac{1}{p}\right)}{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_k}}, \\ \omega\left(\frac{1}{p}\right) &= \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_j}\right). \end{aligned} \right\} \quad (15.2.3)$$

Подстановка этого выражения  $\varphi(p)$  в интеграл (15.2.2) приводит к следующему правилу его вычисления:

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=1}^n A_k(x) \varphi(p_k) + R, \quad R = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} r(p) p^{-s} e^{xp} dp, \\ A_k(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} l_k\left(\frac{1}{p}\right) p^{-s} e^{xp} dp, \end{aligned} \right\} \quad (15.2.4)$$

$l_k\left(\frac{1}{p}\right)$  есть многочлен степени  $n-1$  от  $\frac{1}{p}$ . Если его разложение по степеням  $\frac{1}{p}$  есть

$$l_k\left(\frac{1}{p}\right) = a_{k0} + a_{k1}p^{-1} + \dots + a_{k, n-1}p^{-n+1},$$

то

$$A_k(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{kj} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{xp} p^{-s-j} dp = \sum_{j=0}^{n-1} a_{kj} I_{s+j}(x).$$

Можно проверить, что интеграл  $I_{s+j}(x) = \frac{x^{s+j-1}}{\Gamma(s+j)}$ . В самом деле, пусть  $u$  есть действительная переменная. Интеграл  $I_u(x) =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{xp} p^{-u} dp, \text{ понимаемый как главное значение, сходится}$$

при  $u > 0$  и есть аналитическая функция  $u$ .

Будем, для упрощения рассуждений, считать  $u > 1$ . Так как функция  $e^{xp}$  в левой полуплоскости  $\operatorname{Re} p \leq c$  ограничена по модулю и  $p^{-u}$  достаточно быстро стремится к нулю при  $p \rightarrow \infty$ , прямолинейный контур интегрирования  $\operatorname{Re} p = c$  может быть преобразован в следующий контур: проведем разрез вдоль полуоси  $(-\infty, 0)$  и различим два борта разреза. Рассмотрим теперь контур  $l$ , состоящий из отрезка нижнего борта разреза  $(-\infty, -\varepsilon)$ , окружности радиуса  $\varepsilon$  с центром в нулевой точке, проходимой против часовой стрелки, и из отрезка верхнего борта разреза  $(-\varepsilon, -\infty)$ . Контур  $l: x$  получается из него подобным преобразованием с центром в  $p = 0$  и коэффициентом  $\frac{1}{x}$ ;  $I_u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{e: x} e^{xp} p^{-u} dp$ . При этом мы должны счи-

тать  $\arg p = -\pi$  на нижнем борте разреза и  $\arg p = \pi$  на верхнем борте. Наконец, если заменить  $p$ , положив  $xp = t$ ,  $p = x^{-1}t$  ( $x > 0$ ),

то в переменной  $t$  контурный интеграл будет  $\frac{x^{u-1}}{2\pi i} \int e^t t^{-u} dt$ . По-

следний же интеграл, как хорошо известно в теории функции  $\Gamma(z)$ , равен  $\frac{x^{u-1}}{\Gamma(u)}$ . Таким образом, окончательно

$$I_u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{xp} p^{-u} dp = \frac{x^{u-1}}{\Gamma(u)}. \quad (15.2.5)$$

В силу аналитичности это равенство остается верным всюду, где сходится интеграл  $I_u(x)$ . Для коэффициента  $A_k(x)$  квадратурного правила (15.2.4) мы получили следующее выражение:

$$A_k(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{kj} \frac{x^{s+j-1}}{\Gamma(s+j)}. \quad (15.2.6)$$

Оно удобно для вычисления значений  $A_k(x)$  при любых значениях  $x$  и требует знания только  $a_{kj}$ . Последние же зависят исключительно от узлов  $p_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Их можно заранее табулировать для наиболее распространенных способов выбора узлов. Значения их могут быть найдены при помощи равенств (15.2.3). Вычисления упрощаются, когда известно разложение  $\omega\left(\frac{1}{p}\right)$  по степеням  $\frac{1}{p}$ :  $\omega\left(\frac{1}{p}\right) = p^{-n} + a_{n-1}p^{-n+1} + \dots + a_0$ . Если в равенстве  $\omega_k\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_k}\right) = \omega\left(\frac{1}{p}\right)$  произвести сравнение коэффициентов при степенях  $\frac{1}{p}$ , получится система уравнений для нахождения коэффициентов многочлена  $\omega_k\left(\frac{1}{p}\right) = p^{-n+1} + b_{k, n-2}p^{-n+2} + \dots + b_{k0}$ , из которой они последовательно могут быть найдены:  $-p_k^{-1}b_{k0} = a_0$ ,  $b_{k0} - p_k^{-1}b_{k1} = a_1$ ,  $b_{k1} - p_k^{-1}b_{k2} = a_2, \dots$ . По  $b_{kj}$  находятся коэффициенты  $l_k\left(\frac{1}{p}\right)$ :  $a_{kj} = \frac{1}{\omega_k(p_k^{-1})} b_{kj}$ .

Мы рассмотрим два способа выбора  $p_k$  и начнем с равноотстоящих узлов. Пусть на действительной оси выбраны  $n$  точек  $x_0, x_0 + h, \dots, x_0 + (n-1)h$  ( $x_0 > a$ ),

$$\omega\left(\frac{1}{p}\right) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{x_0}\right) \dots \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{x_0 + nh - h}\right),$$

$$\omega_k\left(\frac{1}{p}\right) = -\frac{p(x_0 + kh)}{p - x_0 - kh} \omega\left(\frac{1}{p}\right),$$

$$l_k\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{(-1)^{n-k-1} (x_0 + kh)^{n-1}}{h^{n-1} k! (n-k-1)!} \times \\ \times \frac{(p-x_0)(p-x_0-h) \dots (p-x_0-nh+h)}{p^{n-1}(p-x_0-kh)}.$$

При помощи этого равенства могут быть найдены коэффициенты  $a_{kj}$  разложения  $l_k\left(\frac{1}{p}\right)$  по степеням  $\frac{1}{p}$ . Выражение  $l_k\left(\frac{1}{p}\right)$  упрощается после введения вспомогательных переменных  $p = hq$ ,  $x_0 = h\xi$

$$l_k\left(\frac{1}{hq}\right) = \frac{(-1)^{n-k-1} (k+\xi)^{n-1}}{k! (n-k-1)!} \frac{(q-\xi)(q-\xi-1) \dots (q-\xi-n+1)}{q^{n-1}(q-\xi-k)}.$$

При  $x_0 = h$ ,  $\xi = 1$  коэффициенты  $l_k\left(\frac{1}{hq}\right)$  будут тесно связаны с факториальными многочленами, хорошо известными в теории конечных разностей и теории интерполирования.

Задача нахождения на действительной оси узлов  $p_k$ , которые могли бы дать в широком классе функций  $\varphi(p)$  результаты, более

точные, чем равноотстоящие узлы, ввиду сравнительной сложности вычислений при обращении преобразования Лапласа, имеет, по-видимому, не только теоретическое значение. Одна из попыток решения этой задачи излагается ниже. Она основана на наглядных, хотя и нестрогих соображениях. Возвратимся к представлению оригинала  $F(x)$  с произвольным значением параметра  $a$ :

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \varphi(p) (p-a)^{-s} e^{xp} dp. \quad (15.2.7)$$

Выполним дробно-линейное преобразование  $p = \frac{A + (A-2a)t}{1-t}$  ( $A > a$ ), переводящее полуплоскость  $\operatorname{Re} p \geq a$  в единичный круг  $|t| \leq 1$ . Полупрямая  $a \leq p \leq \infty$  перейдет в диаметр  $-1 \leq t \leq 1$  и точки  $a, A, \infty$  — соответственно в  $t = -1, 0, 1$ . Прямая  $\operatorname{Re} p = a$  преобразуется в единичную окружность  $|t| = 1$  и линия интегрирования  $\operatorname{Re} p = c$  перейдет в окружность, лежащую внутри круга  $|t| \leq 1$ , ортогональную к диаметру и касающуюся окружности  $|t| = 1$  в точке  $t = 1$ . Она может быть сделана сколь угодно близкой к  $|t| = 1$  при  $c$ , достаточно близком к  $a$ .  $\varphi(p)$  преобразуется в функцию  $\Phi\left(\frac{A + (A-2a)t}{1-t}\right) = \Phi(t)$ , регулярную при  $|t| < 1$  и непрерывную в точке  $t = 1$ .

Нам необходимо интерполировать  $\Phi(t)$  в круге по нескольким ее значениям на диаметре. В этой задаче, по-видимому, целесообразно воспользоваться алгебраическим интерполированием и принять за узлы корни многочлена Чебышёва первого рода  $t_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ):

$$\Phi(t) \approx \sum_{k=1}^n \frac{(t-t_1) \dots (t-t_{k-1})(t-t_{k+1}) \dots (t-t_n)}{(t_k-t_1) \dots (t_k-t_{k-1})(t_k-t_{k+1}) \dots (t_k-t_n)} \Phi(t_k).$$

Если возвратиться к переменной  $p$  и обозначить  $p_k$  значения, отвечающие узлам  $t_k$ , то будет:

$$\varphi(p) \approx \sum_{k=1}^n l_k(p) \varphi(p_k), \quad l_k(p) = \frac{(p_k + A - 2a)^{n-1} \omega_k(p)}{(p + A - 2a)^{n-1} \omega_k(p_k)},$$

$$\omega_k(p) = \frac{\omega(p)}{p - p_k}, \quad \omega(p) = (p - p_1) \dots (p - p_n).$$

В отличие от предыдущего случая, здесь выполнено интерполирование при помощи многочлена от  $\frac{1}{p-2a+A}$ , а не  $\frac{1}{p-a}$ .

Подстановка полученного приближенного выражения для  $\varphi(p)$  в интеграл (15.2.7) приводит к правилу его вычисления

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \varphi(p) (p-a)^{-s} e^{xp} dp \approx \sum_{k=1}^n A_k(x) \varphi(p_k), \\ A_k(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} l_k(p) (p-a)^{-s} e^{xp} dp. \end{aligned} \right\} \quad (15.2.8)$$

Коэффициенты  $A_k(x)$  зависят от двух параметров:  $a (< \alpha)$  и  $A (> \alpha)$ . Напомним, что первый из них  $a$  выбирается так, чтобы достигнуть возможно большей гладкости  $\varphi(p)$  при  $\operatorname{Re} p > a$ . Параметр  $A$  есть та точка полупрямой  $[\alpha, \infty)$ , в которую переходит центр круга  $|t| \leq 1$ . В плоскости  $t$  точки  $t_k$  расположены симметрично относительно  $t=0$ . При уменьшении  $A$  узлы  $p_k$  сгущаются около  $p=a$ . При увеличении же  $A$  точки  $p_k$  будут удаляться от  $a$  направо.

Вычисление  $A_k(x)$  приводится к табличным правилам обращения преобразования Лапласа. Действительно, если многочлен  $\omega_k(p)$ , имеющий степень  $n-1$ , разложить по степеням  $p-2\alpha+A$ , то для рациональной функции  $l_k(p)$  сразу получится разложение на сумму простых дробей

$$l_k(p) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_{kj}}{(p-2\alpha+A)^j}. \quad (15.2.9)$$

Следовательно,

$$A_k(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{kj} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (p-2\alpha+A)^{-j} (p-a)^{-s} e^{xp} dp.$$

Последний интеграл, как это показывается в операционном исчислении \*), равен  $\frac{x^{s+j-1}}{\Gamma(s+j)} e^{(2\alpha-A)x} {}_1F_1(s, s+j; (a-2\alpha+A)x)$ . Под  ${}_1F_1$  здесь, как и в сноске § 4 гл. 14, понимается вырожденная гипергеометрическая функция

$$\begin{aligned} {}_1F_1(\alpha, \beta; z) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+v)}{\Gamma(\beta+v)} \frac{z^v}{v!} \quad (|z| < \infty), \\ A_k(x) &= \sum_{j=0}^{n-1} a_{kj} \frac{x^{s+j-1}}{\Gamma(s+j)} e^{(2\alpha-A)x} {}_1F_1(s, s+j; (a-2\alpha+A)x). \end{aligned} \quad (15.2.10)$$

\*) См., например, Диткин В. А., Прудников А. П., Справочник по операционному исчислению, Изд. Высш. шк., 1965, гл. II, стр. 231 (22.146).

Коэффициенты  $a_{kj}$  не зависят от аргумента  $x$  и полученное выражение  $A_k(x)$  удобно, по меньшей мере в некоторых случаях, для вычислений.

Оно значительно упрощается в частном случае, когда  $a = 2a - A$  или  $a = 0,5(a + A)$  и точки  $a$  и  $A$  расположены симметрично относительно  $\alpha$ . Тогда

$$A_k(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{kj} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (p-a)^{-s-j} e^{xp} dp = \sum_{j=0}^{n-1} a_{kj} \frac{x^{s+j-1}}{\Gamma(s+j)} e^{ax}. \quad (15.2.11)$$

### § 3. Правило наивысшей степени точности

Чтобы получить в простейшем виде правило интегрирования, которое будет построено в этом параграфе, предварительно приведем

интеграл  $\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(p) e^{xp} dp$  к каноническому виду. Не ограничивая

общности вопроса, можно полагать  $a=0$  и функцию  $f(p)$  считать регулярной справа от мнимой оси:  $\operatorname{Re} p > 0$ . Для достижения этого достаточно выполнить преобразование  $p' = p - a$ .

За  $c$  может быть взято любое положительное число. Кроме того, можно значение  $x$  привести к единице, положив  $xp' = p''$ . Выделяющийся при этом вне интеграла множитель  $x^{-1}e^{ax}$  мы оставляем в сто-

роне и будем интеграл рассматривать в виде  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} f^*(p) e^p dp$ ,

$\varepsilon > 0$ ,  $f^*(p) = f\left(\frac{p}{x}\right)$ . Наконец, допустим, что  $f^*(p)$  представима

в виде  $f^*(p) = \frac{\varphi(p)}{p^s}$ , где  $s > 0$  и  $\varphi(p)$  регулярна в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > 0$  и имеет предельное значение  $\lim_{p \rightarrow \infty} \varphi(p) = \varphi(\infty)$ ;

$$I(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \varphi(p) p^{-s} e^p dp. \quad (15.3.1)$$

Для вычисления интеграла мы будем строить правило следующего вида:

$$I(s) \approx \sum_{k=1}^n A_k \varphi(p_k), \quad (15.3.2)$$

где  $p_k$  ( $k=1, \dots, n$ ) есть некоторые точки из правой полуплоскости  $\operatorname{Re} p > 0$ .



За аппарат приближения  $\varphi(p)$  были приняты многочлены от  $\frac{1}{p}$ . Параметры правила  $A_k$  и  $p_k$  избирались так, чтобы равенство (15.3.2) выполнялось точно для произвольного многочлена  $P\left(\frac{1}{p}\right)$  степени  $2n-1$  от  $\frac{1}{p}$ . Выясним сначала необходимые и достаточные условия, которым для этого должны удовлетворять  $A_k$  и  $p_k$ . Для сокращения записи обозначим  $\frac{1}{p} = t$  и  $\frac{1}{p_k} = t_k$ .

Рассмотрим интерполяционное правило вычисления интеграла (15.3.1) по значениям, которые принимает  $\varphi$  в точках  $p_k$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \varphi(p) p^{-s} e^p dp &\approx \sum_{k=1}^n A_k \varphi(p_k), \\ A_k &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} l_k(t) t^s e^p dp, \quad l_k(t) = \frac{\omega_k(t)}{\omega_k(t_k)}, \\ \omega_k(t) &= \frac{\omega(t)}{t-t_k}, \quad \omega(t) = (t-t_1) \dots (t-t_n). \end{aligned} \right\} \quad (15.3.3)$$

Оно характеризуется тем, что дает точное значение интеграла всякий раз, когда  $\varphi(p)$  есть произвольный многочлен степени  $n-1$  от  $t$ .

Повторяя рассуждения, указанные нами выше при доказательстве теоремы 1, § 1, гл. 7, можно доказать, что верна

**Теорема 1.** *Для того чтобы правило (15.3.2) было точным для всяких многочленов степени  $2n-1$  от  $t = p^{-1}$ , необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

1. *Правило является интерполяционным, т. е. его коэффициенты  $A_k$  имеют значения (15.3.3).*

2. *Для всякого многочлена  $Q(t)$  степени, меньшей  $n$ , выполняется равенство*

$$\int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} t^s e^p \omega(t) Q(t) dp = 0. \quad (15.3.4)$$

Первое из условий определяет коэффициенты  $A$ , второе же, как мы покажем ниже, определяет единственным образом многочлен  $\omega(t)$  и, следовательно, его корни  $t_k = \frac{1}{p_k}$ .

Будем искать  $\omega(t)$  в форме разложения по степеням  $t$ :  $\omega(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$ . Условие ортогональности (15.3.4)

$$L_n(y) = \begin{vmatrix} y & y' & \dots & y^{(n)} \\ x^{s+n-2} & (s+n-2)x^{s+n-3} & \dots & [(s+n-2)\dots(s-1)x^{s-2}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{s+2n-3} & (s+2n-3)x^{s+2n-4} & \dots & [(s+2n-3)\dots(s+n-2)x^{s+n-3}] \end{vmatrix} = 0.$$

Если разложить определитель по элементам первой строки и разделить обе части уравнения на  $x^n (s+n-3)$ , можно уравнение записать так:

$$c_0 x^n y^{(n)} + c_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + c_n y = 0. \quad (15.3.5)$$

В самом деле, рассмотрим алгебраическое дополнение элемента  $y$ , являющегося первым элементом первой строки. Оно получится путем вычеркивания в определителе первых строки и столбца. Из первого, второго, ...,  $n$ -го столбцов вынесем за знак определителя соответственно  $x^{s+n-3}$ ,  $x^{s+n-4}$ , ...,  $x^{s-2}$ . Затем из элементов строк оставшегося определителя вынесем множители  $1$ ,  $x$ , ...,  $x^{n-1}$ . В результате получим для алгебраического дополнения форму

$$x^{n(n+s-3)} \begin{vmatrix} s+n-2 & \dots & [(s+n-2) \dots (s-1)] \\ \dots & \dots & \dots \\ s+2n-3 & \dots & [(s+2n-3) \dots (s+n-2)] \end{vmatrix} = c_n x^{n(s+n-3)}.$$

Аналогично показывается, что алгебраическое дополнение  $y'$  равно  $c_{n-1} x^{n(s+n-3)+1}$  и т. д. Этим доказывается (15.3.5).

Уравнение (15.3.5) принадлежит эйлерову виду и имеет две особые точки:  $x=0$ ,  $x=\infty$ . Определитель Вронского для решений  $x^{s+n-2}$ , ...,  $x^{s+2n-3}$ :

$$W(x^{s+n-2}, \dots, x^{s+2n-3}) = \begin{vmatrix} x^{s+n-2} & (s+n-2) x^{s+n-3} & \dots & [(s+n-2) \dots s x^{s-1}] \\ x^{s+n-1} & (s+n-1) x^{s+n-2} & \dots & [(s+n-1) \dots (s+1) x^s] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{s+2n-3} & (s+2n-3) x^{s+2n-4} & \dots & [(s+2n-3) \dots (s+n-1) x^{s+n-2}] \end{vmatrix}$$

ввиду их линейной независимости может равняться нулю только в особых точках уравнения. Он отличен от нуля, в частности, в точке  $x=1$ . Но при  $x=1$   $W(x^{s+n-2}, \dots)$  совпадает с  $\Delta$  и поэтому  $\Delta \neq 0$ .

Для получения явного выражения  $\omega(t)$  рассмотрим следующий многочлен степени  $n$ , который мы определим равенством типа формулы Родрига:

$$P_n \left( \frac{1}{p} \right) = (-1)^n e^{-p} p^{n+s-1} \frac{d^n}{dp^n} (e^p p^{-n-s+1}) = \\ = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k} (n+s-1) \dots (n+s+k-2)}{p^k}. \quad (15.3.6)$$

и покажем, что для него выполняются равенства

$$\int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^p p^{-s} P_n \left( \frac{1}{p} \right) p^{-m} dp = 0 \quad (m=0, 1, \dots, n-1).$$

Отсюда ввиду единственности многочлена  $\omega(t)$ , удовлетворяющего условию (15.3.4), следует, что  $P_n\left(\frac{1}{p}\right)$  будет отличаться от  $\omega(t)$  множителем, равным старшему коэффициенту  $P_n$ :  $P_n\left(\frac{1}{p}\right) = (n+s-1) \dots (2n+s-2) \omega(t)$ .

Если в последний интеграл вместо  $P_n$  внести его выражение (15.3.6) и выполнить интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} e^p p^{-s} P_n\left(\frac{1}{p}\right) p^{-m} dp &= (-1)^n \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} p^{n-m-1} \frac{d^n}{dp^n} (e^p p^{-n-s+1}) dp = \\ &= (-1)^n p^{n-m-1} \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} (e^p p^{-n-s+1}) \Big|_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} - \\ &- (-1)^n (n-m-1) \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} p^{n-m-2} \frac{d^{n-1}}{dp^{n-1}} (e^p p^{-n-s+1}) dp. \end{aligned}$$

Внеинтегральный член здесь равен нулю, так как если выполнить дифференцирование произведения, стоящего в скобках, то будет видно, что каждый член будет содержать в знаменателе  $p$  по меньшей мере в степени  $s$ . На прямой интегрирования функция  $e^p$  ограничена, и при удалении точки  $p$  вверх и вниз по прямой каждый из членов под знаком подстановки будет стремиться к нулю.

После интегрирования по частям  $n-m-1$  раз, для интеграла получится значение

$$\pm (n-m-1)! \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \frac{d^{m+1}}{dp^{m+1}} (e^p p^{-n-s+1}) dp = \frac{d^m}{dp^m} (e^p p^{-n-s+1}) \Big|_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty}.$$

Ввиду  $n \geq 1$  и  $s > 0$ , подстановка равна нулю. Это доказывает высказанное выше утверждение о  $P_n\left(\frac{1}{p}\right)$ .

Чтобы завершить исследование возможности построения правила интегрирования (15.3.2), точного для многочленов от  $\frac{1}{p}$  степени  $2n-1$ , необходимо показать, что корни многочлена  $P_n\left(\frac{1}{p}\right)$  все лежат справа от мнимой оси. Доказательство для любых положительных значений  $s$  здесь, по-видимому, еще не найдено. Исследованы были только целые

значения  $s$ , большие единицы, и в этом случае удалось показать, что при любых  $n = 1, 2, \dots$  всегда будет  $\operatorname{Re} p_k > 0$ . Так как эти исследования имеют лишь частное значение, мы не будем их воспроизводить в книге.

Численные значения  $p_k$  были найдены при  $0,01 \leq s \leq 3$ ,  $n = 1(1)10$ , и всегда оказывалось, что  $\operatorname{Re} p_k > 0$ .

#### § 4. Квадратурное правило с равными коэффициентами

Будем рассматривать задачу об обращении преобразования Лапласа при тех же предположениях, что и в предыдущем параграфе, и допустим, что задача нахождения оригинала приведена к вычислению интеграла (15.3.1). По аналогии с формулами квадратур, рассмотренными в главе 10, были построены правила вычислений, все коэффициенты которых одинаковы:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} \varphi(p) p^{-s} e^p dp \approx \frac{1}{n\Gamma(s)} \sum_{k=1}^n \varphi(p_k). \quad (15.4.1)$$

Множитель  $\frac{1}{n\Gamma(s)}$ , стоящий перед суммой, был избран так, чтобы равенство выполнялось точно, когда  $\varphi$  есть постоянная величина. Сумма содержит  $n$  параметров  $p_k$ . Их избирают так, чтобы правило давало точный результат в том случае, когда  $\varphi$  есть произвольный многочлен степени  $n$  от  $\frac{1}{p}$ , что равносильно, ввиду (15.2.5), выполнению системы уравнений

$$\sum_{k=1}^n p_k^{-\nu} = \frac{n\Gamma(s)}{2\pi i} \int_{\varepsilon - i\infty}^{\varepsilon + i\infty} p^{-\nu-s} e^p dp = \frac{n\Gamma(s)}{\Gamma(\nu+s)} \quad (\nu = 1, \dots, n). \quad (15.4.2)$$

Из этой системы сразу же следует, что указанный выбор  $p_k$  возможен и единствен при любом  $n$ . Действительно, введем величины  $x = p^{-1}$ ,  $x_k = p_k^{-1}$  и рассмотрим многочлен  $\omega(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_n$ , для которого  $x_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) будут корнями. Равенства (15.4.2) дают численные значения сумм степеней величин  $x_k$ :  $s_\nu = \sum_k x_k^\nu = \frac{n\Gamma(s)}{\Gamma(\nu+s)}$ . Соотношения Ньютона между  $s_k$  и коэффициентами  $A_k$

дадут систему уравнений:

[illegible]

из которой последовательно могут быть найдены  $A_k$ . Значение  $A_k$  легко можно записать в форме определителя порядка  $k$ , вычисление же его при произвольном значении параметра  $s$  приводит к сложным выражениям:

$$A_1 = -\frac{n}{s}, \quad k \geq 2,$$

$$A_k = - \frac{n^k \Gamma^k(s)}{k!} \begin{vmatrix} \frac{1}{n\Gamma(s)} & 0 & \cdots & \frac{1}{\Gamma(s+1)} \\ \frac{1}{\Gamma(s+1)} & \frac{2}{n\Gamma(s)} & \cdots & \frac{1}{\Gamma(s+2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\Gamma(s+k-2)} & \frac{1}{\Gamma(s+k-3)} & \cdots & \frac{1}{\Gamma(s+k-1)} \\ \frac{1}{\Gamma(s+k-1)} & \frac{1}{\Gamma(s+k-2)} & \cdots & \frac{1}{\Gamma(s+k)} \end{vmatrix}.$$

По-видимому, наибольший интерес имеют вычисления для случая  $s=1$ . Система (15.4.3) значительно упрощается:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{n} A_1 &= 0, \\ \frac{1}{2!} + A_1 + \frac{2}{n} A_2 &= 0, \\ \frac{1}{3!} + \frac{1}{2!} A_1 + A_2 + \frac{3}{n} A_3 &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} A_1 + \frac{1}{(n-2)!} A_2 + \dots + A_{n-1} + A_n &= 0. \end{aligned}$$

При  $n = 1$  система будет состоять из одного уравнения  $1 + A_1 = 0$ ,  
 $\omega(x) = x - 1$ .

При  $n = 2$  получатся два уравнения:  $1 + 0,5A_1 = 0$  и  $0,5 + A_1 + A_2 = 0$ ;  $A_1 = -2$ ,  $A_2 = 1,5$ ,  $\omega(x) = x^2 - 2x + 1,5$  и т. д.

Вычисления \*) были выполнены для  $n$  от 1 до 10

$n$	$k$	$p_k$
1	1	1,00000 000 + 0,00000 000 <i>i</i>
2	1,2	0,66666 667 ± 0,47140 452 <i>i</i>
3	1,2	0,46343 318 ± 0,66891 655 <i>i</i>
	3	0,62485 778 + 0,00000 000 <i>i</i>
4	1,2	0,31209 699 ± 0,78442 870 <i>i</i>
	3,4	0,54603 449 ± 0,22670 497 <i>i</i>
5	1,2	0,19029 304 ± 0,86260 499 <i>i</i>
	3,4	0,46724 697 ± 0,36843 448 <i>i</i>
	5	0,53392 634 + 0,00000 000 <i>i</i>
6	1,2	0,08786 626 ± 0,92009 404 <i>i</i>
	3,4	0,39416 727 ± 0,46819 799 <i>i</i>
	5,6	0,49826 825 ± 0,14769 920 <i>i</i>
7	1,2	-0,00076 496 ± 0,96470 825 <i>i</i>
	3,4	0,32727 973 ± 0,54346 944 <i>i</i>
	5,6	0,45588 935 ± 0,25464 118 <i>i</i>
	7	0,49224 949 + 0,00000 000 <i>i</i>
8	1,2	-0,07902 919 ± 1,00066 480 <i>i</i>
	3,4	0,26601 917 ± 0,60293 762 <i>i</i>
	5,6	0,41223 251 ± 0,33698 985 <i>i</i>
	7,8	0,47182 912 ± 0,10911 533 <i>i</i>
9	1,2	-0,14919 526 ± 1,03046 752 <i>i</i>
	3,4	0,20966 304 ± 0,65149 353 <i>i</i>
	5,6	0,36931 455 ± 0,40305 392 <i>i</i>
	7,8	0,44525 659 ± 0,19444 915 <i>i</i>
	9	0,46815 071 + 0,00000 000 <i>i</i>
10	1,2	-0,21284 773 ± 1,05570 953 <i>i</i>
	3,4	0,15754 418 ± 0,69213 469 <i>i</i>
	5,6	0,32790 360 ± 0,45764 025 <i>i</i>
	7,8	0,41610 417 ± 0,26374 950 <i>i</i>
	9,10	0,45488 509 ± 0,08636 297 <i>i</i>

Можно заметить, что в границах таблицы действительные части корней  $p_k$ , имеющих одинаковые номера  $k$ , убывают при возрастании  $n$  и, начиная с  $n = 7$ , некоторые из точек  $p_k$  переходят налево от мнимой оси. Весьма вероятно, что эти свойства  $p_k$  будут сохраняться и при  $n > 10$ . Указанные факты сильно ограничивают возможность применения правила (15.4.1) к вычислениям.

\*) Salzer [3].

## § 5. Замечания об увеличении точности вычислений при помощи предварительной подготовки изображения

Сначала дадим описание целей, которые мы будем преследовать при подготовке изображения.

Способы вычисления оригинала  $F$ , которые были изложены в настоящей главе, основаны либо на замене изображения  $f$  в контурном интеграле (15.1.3) некоторой специально подобранной рациональной функцией, интерполирующей  $f$  по ее значениям в избранной системе узлов, либо на сходной замене вспомогательной функции  $\varphi$ , связанной с  $f$  равенством  $f(p) = (p - a)^{-s} \varphi(p)$  и входящей в интеграл (15.2.7). Узлы интерполирования могут лежать на прямой интегрирования  $\operatorname{Re} p = c$  или располагаться справа от нее в полуплоскости регулярности изображения:  $\operatorname{Re} p > \alpha$ .

Можно ожидать, что такое интерполирование будет тем более точным, чем более плавным будет поведение функций  $f$  и  $\varphi$  в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > \alpha$ . Поэтому увеличение плавности поведения изображения  $f$  является первой задачей, которая ставится в предварительной подготовке  $f$ . Достигнуть же этого можно, как и в предыдущих двух главах, например, при помощи разложения  $f$  (или  $\varphi$ ) на слагаемые  $f(p) = f_1(p) + f^*(p)$ , первое из которых должно заключать в себе все или «почти все» «особенности» поведения  $f$  и быть таким, чтобы соответствующий ему оригинал  $F_1$  мог быть найден точно. Второе слагаемое  $f^*$  должно обладать поведением более плавным, чем  $f$ .

В главах 13 и 14, когда мы говорили о задаче улучшения квадратурных правил при помощи предварительной подготовки интегрируемой функции, мы стремились преимущественно к тому, чтобы увеличить порядок ее дифференцируемости. В разбираемом же вопросе функции  $f$  и  $\varphi$  являются аналитическими как на самой линии интегрирования, так и всюду справа от нее. Особенности в поведении  $f$  здесь вызываются наличием у  $f$  особых точек и их расположением. Увеличение плавности поведения может быть достигнуто либо путем устранения у изображения  $f$  особых точек, либо при помощи ослабления их влияния.

Поясним эту мысль примерами и начнем с задачи устранения полюсов. Пусть изображение  $f$  имеет полюсы в точках  $p_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) и предположим, что известны полярные части лорановых разложений  $f$

$$\text{в окрестности каждой точки } p_k: G_k\left(\frac{1}{p-p_k}\right) = \sum_{v=1}^{n_k} a_{kv}(p-p_k)^{-v}.$$

$$\text{Можно положить } f_1(p) = \sum_{k=1}^m G_k\left(\frac{1}{p-p_k}\right) \text{ и } f^*(p) = f(p) - f_1(p).$$



Оригинал  $F_1$  для  $f_1$  находится точно, если воспользоваться тем фактом, что для изображения  $(p - p_k)^{-v}$  оригиналом будет функция  $\frac{x^{v-1}}{\Gamma(v)} e^{p_k x}$ :

$$F_1(x) = \sum_{k=1}^m \sum_{v=1}^{n_k} a_{kv} \frac{x^{v-1}}{\Gamma(v)} e^{p_k x}.$$

Допустим теперь, что при  $p = a$  изображение  $f$  имеет точку ветвления степенного вида и  $f$  представима в форме  $f(p) = (p - a)^v g(p)$ , где  $g(p)$  регулярна в окрестности точки  $a$  и  $v$  не есть целое число. Чтобы ослабить влияние особой точки  $a$ , можно прибегнуть к излагаемому ниже использованию рациональных функций.

Рассмотрим отрезок тейлорова разложения  $g$  около точки  $a$ :  $g_0 + g_1 z + \dots + g_m z^m$ ,  $z = p - a$ ,  $g_k = \frac{1}{k!} g^{(k)}(a)$ . Возьмем затем точку  $b$ , лежащую слева\*) от  $a$ :  $\operatorname{Re}(a - b) > 0$ , и построим рациональную функцию  $\psi(p) = (p - b)^{-s} [c_0 + c_1 z + \dots + c_m z^m]$ , в которой  $c_0, c_1, \dots, c_m$  выберем так, чтобы ее разложение по степеням  $z$  совпадало бы с разложением  $g(p)$  до членов со степенью  $m$ . Для этого достаточно выполнить равенства  $\frac{1}{k!} \psi^{(k)}(a) = g_k$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ) или  $c_0(a - b)^{-s} = g_0$ ,  $1! c_1(a - b)^{-s} - c_0 s(a - b)^{-s-1} = g_1$ ,  $\dots$ ,  $m! c_m(a - b)^{-s} - \frac{m!}{1!} (m-1)! c_{m-1} s(a - b)^{-s-1} + \dots + (-1)^m \times \times c_0 s(s+1) \dots (s+m-1)(a - b)^{-s-m} = g_m$ . Из них последовательно могут быть найдены коэффициенты  $c_0, c_1, \dots$ .

После этого положим  $f_1(p) = (p - a)^v \psi(p) = \sum_{j=0}^m c_j (p - b)^{-s} \times \times (p - a)^{v+j}$  и  $f^*(p) = f(p) - f_1(p)$ . Показателю степени  $s$  придадим такое значение, чтобы часть  $f_1(p)$  при  $p \rightarrow \infty$  убывала не медленнее, чем  $f(p)$ . Отметим попутно, что для того чтобы было  $f_1(p) \rightarrow 0$  ( $p \rightarrow \infty$ ), необходимо считать  $s > m + v$ .

В точке  $p = a$   $f^*$  будет иметь производную порядка на  $m + 1$  единиц выше, чем  $f$ , и оригинал для  $f^*$  может быть найден по изложенным выше правилам, вообще говоря, более точно, чем для  $f$ . Что же касается части  $f_1$ , то для нее оригинал находится точно, так как для функции  $(p - a)^{v+j} (p - b)^{-s}$  оригинал известен\*\*) и равен

$$\frac{x^{s-v-j-1} e^{bx}}{\Gamma(s-v-j)} {}_1F_1[-v-j, s-v-j; (a-b)x].$$

\*) Во многих случаях достаточно положить  $b = a - 1$ .

\*\*) См. указанную в примечании на стр. 363 работу Диткина В. А., Прудникова А. П., § 22 (22.146).

Сделаем еще несколько дополнительных замечаний:

1. Ослабление особенности ветвления в точке  $a$  было связано с введением полярной особенности при  $p=b$ . Чтобы эта новая особенность не имела большого влияния на точность вычисления оригинала для  $f^*$ , желательно точку  $b$  выбирать лежащей значительно левее  $a$ . Но при выборе параметра  $b$  необходимо принять во внимание, что если  $b$  будет взято намного меньше, нежели  $a$ , то разность  $a-b$  будет большой и коэффициенты  $c_v$  могут, как видно из системы уравнений для их нахождения, оказаться большими по модулю, и это может затруднить вычисление значений  $\psi(p)$ .

2. Если показатель степени  $v$  отрицателен и мы берем настолько мало членов в тейлоровом разложении  $g(p)$ , чтобы было  $v+m < 0$ , то задача разложения  $f$  упрощается. В этом случае можно положить

$$f_1(p) = \sum_{j=0}^m g_j(p-a)^{v+j} \text{ и } f^* = f - f_1 = (p-a)^v \left[ g(p) - \sum_{j=0}^m g_j(p-a)^j \right].$$

Оригинал  $F_1$  для  $f_1$  здесь находится более просто:

$$F_1(x) = \sum_{j=0}^m g_j \frac{x^{-v-j-1}}{\Gamma(-v-j)} e^{ax}.$$

3. При некоторых частных значениях  $v$  и  $m$  разложение  $f$  может быть выполнено проще, чем в рассмотренном общем случае, при помощи известных в операционном исчислении правил обращения преобразования Лапласа. Краткая таблица вспомогательных формул, полезных в этой и других задачах, приведена на стр. 375.

Мы остановимся еще на одном вопросе увеличения точности вычисления. В конце § 1 мы обращали внимание на возможность вычисления (15.1.3) путем приведения его к интегралу Фурье (15.1.4). Если мы будем вычислять последний интеграл при помощи одного из правил, основанных на замене  $f$  многочленом на отдельных участках линии интегрирования, то для улучшения точности результата и облегчения вычислительного труда желательно преобразовать функцию  $f$  так, чтобы добиться возможно быстрого стремления  $f(p)$  к нулю при  $p \rightarrow \infty$ .

Как и в проблеме ослабления особенностей, здесь можно пытаться разложить  $f$  на сумму двух слагаемых  $f(p) = f_1(p) + f^*(p)$  таким способом, чтобы первое из них  $f_1$  стремилось к нулю при  $p \rightarrow \infty$  столь же быстро, как  $f$ , и было таким, чтобы оригинал  $F_1$  для него находился точно и достаточно просто. Второе же слагаемое  $f^*$  должно стремиться к нулю быстрее, чем  $f$ .

$f(p) = \int_0^{\infty} F(x) \times e^{-px} dx$	Оригинал $F(x)$	$f(p) = \int_0^{\infty} F(x) e^{-px} dx$	Оригинал $F(x)$
$\frac{1}{\sqrt{p+a}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-ax}$	$\frac{1}{(p+a)^v}$	$\frac{1}{\Gamma(v)} x^{v-1} e^{-ax},$ $\operatorname{Re} v > 0$
$\frac{1}{(p+a)^{n+\frac{1}{2}}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \frac{2^n x^n}{1 \cdot 3 \dots (2n-1)} e^{-ax}$	$\frac{1}{(p-a)^v (p-b)^\mu}$	$\frac{x^{v+\mu-1} e^{bx}}{\Gamma(v+\mu)} \times$ $\times {}_1F_1(v; v+\mu; (a-b)x),$ $\operatorname{Re}(v+\mu) > 0$
$\frac{\sqrt{p+a}}{p+b}$	$\frac{e^{-ax}}{\sqrt{\pi x}} + \sqrt{a-b} e^{-bx} \times$ $\times \operatorname{erf}[\sqrt{(a-b)x}]$	$\frac{1}{(p^2+a^2)^{v+\frac{1}{2}}}$	$\left(\frac{2x}{a}\right)^v \times$ $\times \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(2v+1)} J_v(ax),$ $\operatorname{Re} v > -\frac{1}{2}$
$\frac{1}{\sqrt{p+a(p+b)}}$	$\frac{1}{\sqrt{a-b}} e^{-bx} \times$ $\times \operatorname{erf} \sqrt{(a-b)x}$	$\frac{1}{p+a} \ln(p+a)$	$[\psi(1) - \ln x] e^{-ax}$
$\frac{1}{\sqrt{p^2+a^2}}$	$J_0(ax)$	$\frac{1}{(p+a)^2} \ln(p+a)$	$x [1 + \Gamma'(1) -$ $- \ln x] e^{-ax}$
$\frac{1}{(p^2+a^2)^{n+\frac{1}{2}}}$	$\frac{1}{1 \cdot 3 \dots (2n-1)} \times$ $\times \left(\frac{x}{a}\right)^n J_n(ax)$	$\frac{1}{\sqrt{p+a}} \ln(p+a)$	$-\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \times$ $\times (\ln x + c +$ $+ \ln 4) e^{-ax}$
$\frac{1}{(p^2-a^2)^{n+\frac{1}{2}}}$	$\frac{1}{1 \cdot 3 \dots (2n-1)} \times$ $\times \left(\frac{x}{a}\right)^n I_n(ax)$	$\frac{1}{(p+a)^v} \ln(p+a)$	$\frac{x^{v-1}}{\Gamma(v)} \times$ $\times [\psi(v) - \ln x] e^{-ax},$ $\operatorname{Re} v > 0.$

Пусть  $f(p)$ , например, представима в форме

$$f(p) = \sum_{j=1}^m c_j (p+a)^{-k_j} + (p+a)^{-k_m} \gamma_m(p)$$

$$(k_1 < k_2 < \dots < k_m; \quad \gamma(p) \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty).$$

В этом случае можно положить  $f_1(p) = \sum_{j=1}^m c_j (p+a)^{-k_j}$ . Соответствующий  $f_1$  оригинал есть  $F_1(x) = \sum_{j=1}^m c_j \Gamma^{-1}(k_j) x^{k_j-1} e^{-ax}$ .  $f^*(p) = f(p) - f_1(p) = \gamma_m(p)(p+a)^{-k_m}$  будет стремиться к нулю более быстро, чем  $f$ . Параметр  $a$  в представлении  $f$  избирается так, чтобы была обеспечена возможно лучшая гладкость  $f^*$  на линии интегрирования  $\operatorname{Re} p = c$ .

### Л и т е р а т у р а

Doetsch G., Handbuch der Laplace Transformation, Birkhäuser Verlag, Basel, 1950—1956.

Дёч Г., Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, М., «Наука», 1965.

Salzer H. E. 1) Orthogonal polynomials arising in the numerical evaluation of inverse Laplace transformation, МТАС 9, № 52 (1955). 2) Equally-weighted quadrature formulas for inversion integrals, МТАС 11, № 59 (1957). 3) Tables for calculation of inverse Laplace transforms, Journ. of Math. and Phys. 37, № 2 (1958). 4) Additional formulas and tables for orthogonal polynomials originating from inversion integrals, Journ. of Math. and Phys. 40 № 1 (1961).

Papoulis A., A new method of inversion of the Laplace transform. Quart. Appl. Math. 14, № 4 (1957).

Скобля Н. С., Таблицы для численного обращения преобразования Лапласа, Минск, Изд. «Наука и техника», 1964.

Скобля Н. С., О распределении корней многочленов, связанных с численным обращением преобразования Лапласа, ДАН БССР 9, № 5 (1965).

# ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

## ГЛАВА 16

### ВВЕДЕНИЕ

#### § 1. Предварительные замечания

Задача вычисления интеграла с переменными границами изучена в значительно меньшей степени, нежели аналогичная задача для определенного интеграла, которая рассматривалась во второй части книги.

Ниже приведено несколько примеров интегралов с переменными границами, встречающихся в приложениях. Будем иметь в виду тот случай, когда переменной является только одна граница интегрирования, вторая же граница фиксирована.

К простейшему интегралу такого вида приводит задача нахождения первообразной функции. Если дана функция  $f(x)$ , непрерывная на отрезке  $[x_0, X]$ , то любая первообразная для нее представима следующей формулой:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad x \in [x_0, X]. \quad (16.1.1)$$

и вычисление первообразной равносильно нахождению значений интеграла  $\int_{x_0}^x f(t) dt$ .

Более сложным примером является следующий интеграл, встречающийся во многих прикладных вопросах:

$$y(x) = \int_a^x K(x-t) f(t) dt \quad (16.1.2)$$

В нем  $K(x-t)$  имеет смысл весовой функции и значения этого веса на отрезке интегрирования  $a \leq t \leq x$  распределены так, что они зависят только от расстояния  $x-t$  от верхней границы  $x$ ;  $f$  есть произвольная функция некоторого класса.

Наконец, в интегральном уравнении Вольтерра

$$f(x) = \varphi(x) + \int_a^x K(x, t) f(t) dt$$

и некоторых других задачах приходится иметь дело с интегралом

$$y(x) = \int_a^x K(x, t) f(t) dt, \dots, \quad (16.1.3)$$

в котором весовая функция  $K(x, t)$  может зависеть от  $x$  и  $t$  произвольным образом.

Методы вычисления указанных интегралов должны быть согласованы со свойствами соответствующих им весовых функций. Например, расчетные схемы, построенные для (16.1.3), принципиально говоря, могут быть применены к вычислению интеграла (16.1.1), имеющему более частную форму. Но их для (16.1.1), по-видимому, нельзя будет признать наилучшими, так как они не будут рассчитаны на то, что весовая функция в (16.1.1) сохраняет постоянное значение. Для каждого из указанных интегралов должны быть развиты свои способы их вычислений.

Мы остановим внимание на интеграле (16.1.1) и в дальнейшем будем заниматься исключительно задачей вычисления первообразной функции.

Пусть нужно будет вычислить значения (16.1.1) для заданной сетки значений аргумента  $x$ :  $x_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Предположим, что вычисления начаты, доведены до шага номера  $n$  и составлена\*) следующая таблица значений  $y(x_n) = y_n$ .

$x$	$y$
$x_0$	$y_0$
$x_1$	$y_1$
$\dots$	$\dots$
$x_n$	$y_n$
$x_{n+1}$	

Нахождению подлежит  $y_{n+1}$ . Для этого могут быть использованы любые ранее найденные значения  $y_k$  ( $k \leq n$ ) и те значения  $f$ , которые разрешено вводить в вычисления.

Если функция  $f$  задана таблицей своих значений в узлах  $x_k$ , мы при вычислениях будем весьма стеснены в выборе значений  $f$  и проблема построения метода тогда будет принадлежать

области дискретного анализа. Одно из возможных решений задачи в этих условиях приведено в главе 17.

---

\*) В книге не рассматриваются вопросы составления начала и конца таблицы значений  $y(x)$  и изучается только задача продолжения таблицы.

Предположим теперь, что при нахождении  $y_{n+1}$  нам предоставлена возможность произвольно выбирать те точки, в которых берутся значения  $f$ , и мы ограничили себя только числом таких значений. Выбором точек тогда можно воспользоваться для получения возможно малой погрешности в  $y_{n+1}$ . Обычно стремятся распорядиться указанным произволом так, чтобы достигнуть наивысшей алгебраической степени точности. Так поступают по аналогии с задачей вычисления определенного интеграла, где этот путь был плодотворным и привел к ряду ценных результатов. На путь повышения степени точности мы многократно будем становиться в дальнейшем.

Напомним, что построение квадратурных формул наивысшей алгебраической степени точности связано с задачей получения определенного интеграла с погрешностью, не превышающей заданной величины, при возможно малом числе значений интегрируемой функции и, следовательно, с возможно малой затратой работы. В неопределенном интегрировании есть еще другой путь для сбережения вычислительного труда: можно стремиться к тому, чтобы каждое значение интегрируемой функции  $f$  применялось для нахождения не одного, а многих значений первообразной функции  $y(x)$ .

В главах 18, 19 книги сделаны попытки решить задачу о построении таких методов, которые позволяют использовать значения  $f$  или  $y_k$  на нескольких шагах вычислений. Исследования проведены в двух частных случаях и далеко не исчерпывают всей проблемы.

Укажем еще на одну особенность задачи вычисления интеграла с переменной границей. Обычно такие вычисления выполняются на большое число шагов. Допустим, что для нахождения значений функции  $y(x)$  нами принято какое-то правило. На каждом шаге вычисления, при нахождении следующего нужного нам значения  $y_{n+1}$ , мы совершим некоторую погрешность. Эти погрешности от шага к шагу будут накапливаться и, как правило, величина погрешности будет возрастать при увеличении числа шагов. Закон роста погрешности зависит от принятой вычислительной схемы и, если схема избрана недостаточно удачной, рост погрешности может быть весьма быстрым и уже через небольшое число шагов погрешность может достигнуть значительной величины.

Приведем весьма простой пример, показывающий, сколь быстрым может быть такой рост и насколько осторожным следует быть при выборе схемы для вычислений на много шагов. Методы счета, дающие удовлетворительные результаты на малом числе шагов, могут оказаться совершенно непригодными, когда число шагов становится большим.

Пусть для вычисления  $y(x_{n+1})$  мы хотим воспользоваться двумя предшествующими значениями функции  $y$ :  $y(x_n)$  и  $y(x_{n-1})$  и двумя значениями производной:  $y'(x_n) = f_n$  и  $y'(x_{n-1}) = f_{n-1}$ . Здесь естественно выполнить интерполирование  $y(x_{n+1})$  по указанным значениям. Это есть эрмитово интерполирование с двумя двухкратными

узлами  $x_n$  и  $x_{n-1}$ . Интерполяционная формула, как можно проверить при помощи (3.3.8), будет

$$y(x_{n+1}) = -4y(x_n) + 5y(x_{n-1}) + h(4f_n + 2f_{n-1}) + r_n.$$

Отбрасывая остаток  $r_n$ , получим следующую приближенную расчетную формулу

$$y_{n+1} = -4y_n + 5y_{n-1} + h(4f_n + 2f_{n-1}). \quad (16.1.4)$$

Она точна для всевозможных алгебраических многочленов третьей степени. Ее применение требует знания двух начальных значений  $y$ :  $y_0$  и  $y_1 = y(x_1)$ . Вычислим при помощи формулы (16.1.4) значения интеграла

$$y(x) = \int_0^x e^t dt = e^x - 1$$

на отрезке  $[0, 1]$ . Взяв сначала  $h = 0,2$  и считая  $y(0) = 0$  и  $y(0, 2) \approx 0,22140$  известными, получим, после вычислений, следующую таблицу. Наряду с найденными приближенными значениями функции в ней указаны также их погрешности.

$x$	$f$	$y$	Погрешность
0,0	1,000 00	0,000 00	
0,2	1,221 40	0,221 40	
0,4	1,491 82	0,491 52	+0,000 30
0,6	1,822 12	0,822 94	-0,000 82
0,8	2,225 54	1,220 26	+0,005 28
1,0	2,718 28	1,742 94	-0,024 66

Из результатов видно, что погрешность весьма быстро растет при удалении от начала таблицы. Все значения  $y_n$  вычислены с запасными знаками для того, чтобы показать, что большие погрешности вызваны не недостаточной точностью вычислений, а другой причиной.

Легко можно убедиться в том, что быстрый рост погрешностей не вызван большой величиной шага  $h$  и не может быть исправлен путем уменьшения шага. Действительно, пусть, желая получить более точные значения интеграла, мы уменьшим шаг вдвое и положим  $h = 0,1$ .

Примем, как выше, известными два первых значения:  $y(0) = 1$ ,  $y(0, 1) = 1,10517$  и составим новую таблицу.



$x$	$f$	$y$	Погрешность
0,0	1,000 00	0,000 00	
0,1	1,105 17	0,105 17	
0,2	1,221 40	0,221 39	+0,000 01
0,3	1,349 86	0,349 88	-0,000 02
0,4	1,491 82	0,491 65	+0,000 17
0,5	1,648 72	0,649 50	-0,000 78
0,6	1,822 12	0,818 10	+0,004 02
0,7	2,013 75	1,036 10	-0,022 35
0,8	2,225 54	1,116 02	+0,109 52
0,9	2,459 60	2,010 39	-0,550 79
1,0		-1,032 51	+2,750 79

Уменьшение шага позволило уточнить только одно из найденных раньше значений функции:  $y(0, 4)$ . Погрешности же других значений сильно возросли и рост их оказался настолько быстрым, что в конце таблицы ошибка превысила значение функции.

Проверим теперь, что быстрый рост погрешности здесь зависит исключительно от неудачного выбора расчетной формулы. Вычислим тот же интеграл другим способом. В равенстве

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f dt$$

применим к интегралу простейшую формулу трапеций и отбросим остаток:

$$y_{n+1} = y_n + 0,5h(f_n + f_{n+1}). \quad (16.1.5)$$

Полученное равенство наверное дает точный результат только в том случае, когда функция  $f$  линейная, и алгебраическая степень точности ее ниже, чем у (16.1.4). Можно было бы ожидать, что

$x$	Значения $y$ , найденные по формуле (16.1.5)	Погрешность	$x$	Значения $y$ , найденные по формуле (16.1.5)	Погрешность
0,0	0,000 00		0,6	0,822 80	63
0,1	0,105 26	-0,000 09	0,7	1,014 59	84
0,2	0,221 59	19	0,8	1,226 56	102
0,3	0,350 15	29	0,9	1,460 82	122
0,4	0,492 23	41	1,0	1,719 71	143
0,5	0,649 26	54			

значения  $y_n$ , найденные при помощи нее, будут менее точными, чем приближенные значения, найденные при помощи (16.1.4). Как видно из приведенной в конце стр. 381 таблицы, для нескольких первых шагов это действительно так и будет. Но в вычислениях при помощи (16.1.5) погрешности растут намного медленнее и значительно слабее искажают результат, чем в предшествующем случае.

Уже через небольшое число шагов становится ясным, что при счете на «большом промежутке» следует предпочесть формулу (16.1.5).

## § 2. Погрешность вычислений

Точные значения функции

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt$$

в узлах сетки  $x_k$  ( $k=0, 1, \dots$ ) будем обозначать  $y(x_k)$ . Пусть для нахождения их принята некоторая вычислительная схема. Приближенное значение  $y(x_k)$ , найденное по этой схеме, обозначим через  $y_k$ .

Предположим, что для вычисления  $y_{n+1}$  мы воспользовались несколькими предшествующими значениями  $y$  из числа  $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-p}$  и  $m = m(n)$  значениями  $f$  в точках  $\xi_{n,j}$  ( $j=1, \dots, m$ ).

Рассмотрим расчетную формулу следующего достаточно общего для наших целей вида \*)

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_{n,i} y_{n-i} + \sum_{j=1}^m B_{n,j} f(\xi_{n,j}). \quad (16.2.1)$$

Если вместо приближенных значений  $y_k$  подставить сюда точные значения функции  $y(x_k)$ , равенство не будет выполняться и для точного его выполнения в правую часть необходимо ввести дополнительный член

$$y(x_{n+1}) = \sum_{i=0}^p A_{n,i} y(x_{n-i}) + \sum_{j=1}^m B_{n,j} f(\xi_{n,j}) + r_n. \quad (16.2.2)$$

$r_n$  в дальнейшем будем называть погрешностью формулы (16.2.1). При написании (16.2.1) предполагалось, что вычисления ведутся с неокругленными числами, что бывает весьма редко. Формула должна быть дополнена указанием правила округления и если операцию округления условиться обозначать фигурными скобками, заключаю-

---

\*) Коэффициенты  $A_{n,i}$  и  $B_{n,j}$  этого равенства могут зависеть от  $n$  и расчетная формула может изменяться с каждым шагом. Равным образом вместе с  $n$  может изменяться и величина шага  $x_{n+1} - x_n = h_n$ . Равенство (16.2.1) есть уравнение в конечных разностях для  $y_k$  и для дальнейшего необходимо лишь то, что уравнение имеет некоторый фиксированный порядок  $p+1$ .

щими в себе округляемую величину, то действительная расчетная формула запишется так

$$y_{n+1} = \left\{ \sum_{i=0}^p A_{n,i} y_{n-i} + \sum_{j=1}^m B_{n,j} f(\xi_{n,j}) \right\}_n. \quad (16.2.3)$$

Индекс  $n$ , поставленный у скобок, указывает на то, что правило округления на каждом шаге может быть своим.

Применение (16.2.3) требует знания величин  $y_0, y_1, \dots, y_p$ . В дальнейшем они будут считаться известными. Рассмотрим погрешность приближенного значения  $y_k$ :

$$\varepsilon_k = y(x_k) - y_k$$

и составим для нее разностное уравнение.

Если обозначить через  $\alpha_n$  погрешность, допущенную при округлении, указанном в правой части (16.2.3), то для  $y_{n+1}$  вместо (16.2.3) можно написать

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_{n,i} y_{n-i} + \sum_{j=1}^m B_{n,j} f(\xi_{n,j}) - \alpha_n. \quad (16.2.4)$$

Почленное вычитание из (16.2.2) дает

$$\varepsilon_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_{n,i} \varepsilon_{n-i} + r_n + \alpha_n. \quad (16.2.5)$$

Начальные значения погрешности  $\varepsilon_k$  ( $k = 0, 1, \dots, p$ ), отвечающие приближенным значениям  $y_k$  ( $k = 0, 1, \dots, p$ ), образующим начало расчетной таблицы, будем предполагать известными. Все дальнейшие значения  $\varepsilon_k$  ( $k > p$ ) последовательно найдутся при помощи уравнения (16.2.5).

$\varepsilon_n$  ( $n > p$ ) определяется, во-первых, начальными значениями  $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_p$ , во-вторых, погрешностью округлений  $\alpha_k$  ( $k < n$ ) и, наконец, погрешностью формулы (16.2.1)  $r_k$  ( $k < n$ ).

Для анализа погрешности полезно разделить влияние на  $\varepsilon_n$  всех этих величин. Для достижения такой цели будем искать  $\varepsilon_n$  в форме суммы трех слагаемых, которые определяются перечисляемыми ниже условиями

$$\varepsilon_n = E_n + E'_n + E''_n. \quad (16.2.6)$$

Здесь  $E_n$  есть решение однородного уравнения

$$E_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_{n,i} E_{n-i}. \quad (16.2.7)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$E_k = \varepsilon_k \quad (k = 0, 1, \dots, p) \quad (16.2.8)$$

$E'_n$  удовлетворяет неоднородному уравнению

$$E'_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_{n,i} E'_{n-i} + \alpha_n \quad (16.2.9)$$

и имеет нулевые начальные значения

$$E'_k = 0 \quad (k=0, 1, \dots, p). \quad (16.2.10)$$

$E''_{n+1}$  есть решение неоднородного уравнения

$$E''_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_{n,i} E''_{n-i} + r_n \quad (16.2.11)$$

также с нулевыми начальными значениями

$$E''_k = 0 \quad (k=0, 1, \dots, p). \quad (16.2.12)$$

$E_n$  учитывает влияние на  $\varepsilon_n$  начальных погрешностей  $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_p$ .  $E'_n$  и  $E''_n$  зависят от погрешностей округления  $\alpha_n$  и погрешностей  $r_n$  формулы (16.2.1) соответственно.

Простое и достаточное для наших целей выражение для  $E_n$  через  $\varepsilon_k$  ( $k < p$ ) может быть построено следующим путем. Обозначим  $E_n^i$  решение однородного уравнения (16.2.7), выполняющее условия

$$E_k^0 = \begin{cases} 0, & k \neq i, \\ 1, & k = i \end{cases} \quad (i, k=0, 1, \dots, p).$$

Тогда, очевидно,

$$E_n = E_n^0 \varepsilon_0 + E_n^1 \varepsilon_1 + \dots + E_n^p \varepsilon_p. \quad (16.2.13)$$

Отсюда легко может быть получена оценка  $E_n$ . Точные значения погрешностей  $\varepsilon_k$  ( $k \leq p$ ) редко являются известными, но бывает известно, что они по абсолютной величине не превосходят некоторое число, обозначенное нами  $\varepsilon$ :

$$|\varepsilon_k| \leq \varepsilon, \quad k \leq p. \quad (16.2.14)$$

Если считать, что начальные погрешности  $\varepsilon_k$  могут иметь любые значения, удовлетворяющие условию (16.2.14), из равенства (16.2.13) для  $\varepsilon_n$  получится следующая точная оценка

$$|E_n| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^p |E_n^k|. \quad (16.2.15)$$

(16.2.13) или (16.2.15) позволяют выяснить, с какой точностью должны быть найдены начальные значения  $\varepsilon_k$  ( $k \leq p$ ), чтобы  $E_n$  не превышало предписанной заранее величины.

Займемся теперь второй частью  $E'_n$  погрешности. Она должна быть найдена из уравнения (16.2.9) и начальных условий (16.2.10). Сразу же видно, что  $E'_n$  является линейной комбинацией  $\alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{n-1}$ :

$$E'_n = \sum_{k=p}^{n-1} E_{n,k} \alpha_k. \quad (16.2.16)$$

Коэффициент  $E_{n,k}$  учитывает влияние, которое оказывает на  $E'_n$  погрешность округления, равная единице и сделанная при вычислении правой части (16.2.3) для  $n=k$ .  $E_{n,k}$  является функцией Грина, или функцией влияния для сформулированной выше задачи с начальными условиями.

В теории разностных уравнений\*) дается явное выражение  $E_{n,k}$  через независимые решения однородного уравнения (16.2.9). Мы не приводим это выражение ввиду его громоздкости.

Для дальнейшего полезно лишь заметить, что  $E_{n,k}$ , очевидно, есть решение уравнения

$$E_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_{n,i} E_{n-i} + \delta_n^k, \quad (16.2.17)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$E_i = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, p).$$

$\delta_n^k$  — символ Кронекера:

$$\delta_n^k = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ 1, & n = k. \end{cases}$$

Исследование суммы (16.2.16) позволит судить, как между собой должны быть связаны число шагов  $n$  и правило округления, чтобы значение  $E'_n$  не превосходило заданной величины.

Пусть известно, что на всех шагах вычисления погрешность  $\alpha_n$  не превосходит значения  $\alpha$ :

$$|\alpha_n| \leq \alpha.$$

Из (16.2.16), при этом условии, вытекает следующее неравенство для  $E'_n$ :

$$|E'_n| \leq \alpha \sum_{k=p}^{n-1} |E_{n,k}|. \quad (16.2.18)$$

\*) См. Марков А. А., Исчисление конечных разностей, отдел II, § 19, 1911, или Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, гл. III, § 3, № 6, М., Физматгиз, 1959.

Величины  $E_n$  и  $E'_n$  зависят от точности вычислений начальных значений  $y_0, y_1, \dots, y_p$  и правой части разностного уравнения. Увеличивая эту точность, мы можем сделать  $E_n$  и  $E'_n$  по модулю меньше любой наперед заданной границы при всяких  $n \leq N$ .

Обратимся, наконец, к последней части  $E''_n$  погрешности. Разностное уравнение (16.2.11) для нее получается из уравнения (16.2.9) для  $E'_n$  заменой свободного члена  $\alpha_n$  на  $r_n$ . Начальные же значения для  $E'_n$  и  $E''_n$  совпадают. Поэтому для  $E''_n$  должно быть верным представление вида (16.2.16) с заменой в нем  $\alpha_n$  на  $r_n$ :

$$E''_n = \sum_{k=p}^{n-1} E_{n,k} r_k, \quad (16.2.19)$$

$E''_n$  зависит исключительно от свойств расчетной формулы (16.2.1), или, если говорить более точно, от ее погрешности  $r_k$ , свойств коэффициентов  $A_{n,i}$  и от числа шагов  $n$ .

Ниже, при изучении сходимости процесса, сумма  $\sum_{k=p}^{n-1} E_{n,k} r_k$  будет рассмотрена более подробно.

В качестве примера выполним анализ погрешности разностного уравнения (16.1.4), которое в § 1 было применено к вычислению интеграла  $y = \int_0^x e^t dt$ .

Соответствующее ему уравнение вида (16.2.5) для  $\epsilon_n$  будет таким:  $\epsilon_{n+1} = -4\epsilon_n + 5\epsilon_{n-1} + r_n + \alpha_n$ . Это есть неоднородное разностное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и свободным членом  $r_n + \alpha_n$ . При решении его начальные значения погрешности  $\epsilon_0$  и  $\epsilon_1$  мы должны считать известными.

Найдем сначала часть  $E_n$  погрешности, зависящую от  $\epsilon_0$  и  $\epsilon_1$ . Однородное уравнение для  $E_n$  есть

$$E_{n+1} = -4E_n + 5E_{n-1}.$$

Его решение, удовлетворяющее начальным условиям  $E_0 = \epsilon_0$  и  $E_1 = \epsilon_1$ , имеет вид:

$$E_n = \frac{1}{6} (\epsilon_1 + 5\epsilon_0) + \frac{(-1)^n}{6} (\epsilon_0 - \epsilon_1) 5^n.$$

Если  $\epsilon_0 - \epsilon_1 \neq 0$ , то  $E_n$  с увеличением  $n$  будет быстро возрастать. При  $n = 10$ , т. е. всего только через 9 шагов вычислений, коэффициент при  $\epsilon_0 - \epsilon_1$  достигнет величины  $\frac{5^{10}}{6} \approx 1.5 \cdot 10^6$ , что может грозить потерей шести десятичных разрядов в точности.

Теперь разыщем другую часть  $E'_n$  погрешности, зависящую от ошибок округлений.

Неоднородное уравнение вида (16.2.9) для  $E'_n$  будет таким:

$$E'_{n+1} = -4E'_n + 5E'_{n-1} + \alpha_n.$$

Решение, имеющее нулевые начальные значения  $E'_0 = 0$ ,  $E'_1 = 0$ , легко находится

$$\begin{aligned} E'_n &= \frac{1}{6} \sum_{t=0}^{n-1} [1 - (5)^{n-t-1}] \alpha_{t+1} = \\ &= \frac{1}{6} \{ [1 - (-5)^{n-1}] \alpha_1 + [1 - (-5)^{n-2}] \alpha_2 + \dots \}. \end{aligned}$$

Сразу же видно, что при увеличении  $n$   $E'_n$  может быстро возрастать, подобно  $E_n$ , и увеличиться во много раз даже через небольшое число шагов. Аналогичное можно сказать и о  $E''_n$ .

Насколько быстро на самом деле может возрасти погрешность  $\epsilon_n$  для расчетной формулы (16.1.4), видно из примера, приведенного в конце § 1.

Возвратимся к общей задаче исследования погрешности  $\epsilon_n$ . Характер изменения  $\epsilon_n$  с ростом  $n$  существенно зависит от коэффициентов  $A_{n,i}$ .

Рассмотрим сейчас один частный случай, когда все коэффициенты  $A_{n,i}$  неотрицательны. Допустим, кроме того, что

$$\sum_{i=0}^p A_{n,i} = 1. \quad (16.2.20)$$

Это означает, что при вычислениях без округлений формула дает точный результат в том случае, когда  $f \equiv 0$  и функция  $u$  сохраняет постоянное значение.

При сделанных предположениях можно найти весьма простую и эффективную оценку  $\epsilon_n$ . Предположим, что начальные погрешности  $\epsilon_0, \dots, \epsilon_p$  по абсолютной величине не превосходят  $\epsilon$ :

$$|\epsilon_i| \leq \epsilon,$$

и покажем, что при любом  $n$  верно неравенство

$$|\epsilon_n| \leq \epsilon + \sum_{k=p}^{n-1} |\alpha_k + r_k|. \quad (16.2.21)$$

Для  $n = p + 1$  оно легко проверяется

$$\begin{aligned} |\epsilon_{p+1}| &= \left| \sum_{i=0}^p A_{p,i} \epsilon_i + \alpha_p + r_p \right| \leq \sum_{i=0}^p A_{p,i} \epsilon + |\alpha_p + r_p| = \\ &= \epsilon + |\alpha_p + r_p|. \end{aligned}$$

Допустив, что неравенство верно для всех  $\varepsilon_i$ ,  $i \leq n$ , проверим, что оно выполняется и для  $\varepsilon_{n+1}$ :

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq \sum_{i=0}^p A_{n,i} |\varepsilon_{n-i}| + |\alpha_n + r_n|.$$

Заменив под знаком суммы каждое  $|\varepsilon_{n-i}|$  превосходящей величиной  $\varepsilon + \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha_i + r_i|$ , получим

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq \sum_{i=p}^{n-1} |\alpha_i + r_i| + |\alpha_n + r_n| \varepsilon,$$

что завершает доказательство справедливости утверждения.

Из (16.2.21) видно, что для расчетных схем с неотрицательными коэффициентами  $A_{n,i}$  погрешность  $\varepsilon_n$  будет «медленно возрастающей» функцией  $n$ . В этом отношении указанные формулы весьма благоприятны для вычислений.

### § 3. Сходимость и устойчивость вычислительного процесса

Ближайшей нашей целью будет выяснение содержания некоторых понятий, связанных с проблемой сходимости. Чтобы упростить изложение, такое выяснение мы сделаем на случае расчетной формулы частного вида, наиболее часто встречающегося в приложениях. Допустим, что отрезок  $[x_0, X]$ , на котором разыскивается первообразная функция  $y(x)$ , конечный и что значения  $y(x)$  находятся на сетке равноотстоящих точек с шагом  $h$ :

$$x_k = x_0 + kh \quad (k = 0, 1, \dots, N), \quad x_0 + Nh \leq X < x_0 + (N+1)h.$$

Такую сетку ниже будем обозначать  $S_h$ .

Предположим, что для вычислений принята формула, коэффициенты  $A_{n,i}$  которой не зависят от индекса  $n$ :

$$y(x_{n+1}) = \sum_{i=0}^p A_i y(x_i) + \sum_{j=1}^m B_{n,j} f(\xi_{n,j}) + r_n. \quad (16.3.1)$$

Расчетное правило отсюда получится, если в правой части отбросить  $r_n$  и округлить оставшуюся сумму на принятое число значащих цифр.

$$y_{n+1} = \left\{ \sum_{i=0}^p A_i y_{n-i} + \sum_{j=1}^m B_{n,j} f(\xi_{n,j}) \right\}_n. \quad (16.3.2)$$

Считая  $y_0, \dots, y_p$  известными и находя  $y_n$  ( $n > p$ ) из уравнения (16.3.2), мы определим в точках сетки  $S_h$  приближенное значение  $y_n$  для  $y(x_n)$ .



За расстояние  $\rho(y, y_n)$  между  $y(x)$  и функцией  $y_n (n=0, 1, \dots, N)$ , определенной на  $S_n$ , примем, имея в виду изучение равномерной сходимости, наибольшую абсолютную величину погрешности  $\varepsilon_n = y(x_n) - y_n$ :

$$\rho(y, y_n) = \max_n |\varepsilon_n| = \max_n |y(x_n) - y_n|.$$

Условимся говорить, что вычислительный процесс сходится, если при  $h \rightarrow 0$  будет

$$\rho(y, y_n) \rightarrow 0. \quad (16.3.3)$$

Погрешность  $\varepsilon_n$  зависит от ошибок  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p$  начальных значений  $y_k (k=0, 1, \dots, p)$ , ошибок округлений  $\alpha_n$  в правых частях и погрешностей  $r_n$  формулы (16.3.1). Разложим, как это сделано выше,  $\varepsilon_n$  на три части, учитывающие влияние на  $\varepsilon_n$  величин каждого из указанных видов  $\varepsilon_n = E_n + E'_n + E''_n$ . Требования, которым удовлетворяют  $E_n, E'_n, E''_n$  были перечислены в предыдущем параграфе.

При выяснении условий сходимости вычислительного процесса, ввиду независимости величин  $\varepsilon_i (i \leq p)$ ,  $\alpha_n$  и  $r_n$ , мы должны требовать, чтобы при  $h \rightarrow 0$  стремилась бы к нулю, в принятой метрике, каждая из частей погрешности  $\varepsilon_n$ , иначе говоря, чтобы выполнялись при  $h \rightarrow 0$  три следующих соотношения

$$\max_n |E_n| \rightarrow 0, \quad \max_n |E'_n| \rightarrow 0, \quad \max_n |E''_n| \rightarrow 0. \quad (16.3.4)$$

Рассмотрим сначала величины  $E_n$  и  $E'_n$ . Они зависят от погрешностей  $\varepsilon_i (i \leq p)$  и  $\alpha_n$ . Непосредственно ясно, что при любом фиксированном  $h$  точность вычисления начальных значений  $y_i (i \leq p)$  и правых частей (16.3.2) всегда можно увеличить настолько, чтобы сделать  $\max_n |E_n|$  и  $\max_n |E'_n|$  сколь угодно малыми. Поэтому выяснение условий, при которых будут выполняться два первые соотношения (16.3.4), носит не принципиальный, а скорее технический характер: нужно определить как с уменьшением  $h$  должна увеличиваться точность вычисления начальных значений  $y_i (i \leq n)$  и правых частей (16.3.2), чтобы части общей погрешности  $\varepsilon_n$ , зависящие от указанных величин, стремились бы к нулю в принятом смысле. Такое исследование дает нам одно из средств для испытания практической пригодности вычислительной схемы и, несмотря на технический характер вопроса, оно имеет большое значение. Если окажется, что с уменьшением  $h$  указанная точность должна быстро возрастать, то такая вычислительная схема должна быть отвергнута, как малоприменимая в приложениях.

С этой точки зрения мы должны отдать предпочтение вычислительным схемам, для которых точность нахождения  $y_i (i \leq p)$  и

правых частей (16.3.2) должна увеличиваться наиболее медленно при  $h \rightarrow 0$ . Ту же самую мысль обычно высказывают в других словах. Рассмотрим, для определенности,  $E_n$ . Допустим, что в начальных значениях  $y_i (i \leq p)$  мы допустили некоторые погрешности  $\varepsilon_i$ . При вычислении следующих  $y_i (i > p)$  погрешность будет возрастать от шага к шагу. Закон роста погрешности будет, очевидно, зависеть от выбора вычислительной схемы. Наибольший интерес представляют вычислительные схемы, в которых скорость роста погрешности  $E_n$  будет минимальной. В теории приближенного решения дифференциальных уравнений методы, имеющие наименьший порядок роста погрешности, называются *устойчивыми*. В предыдущем изложении речь шла об устойчивости относительно погрешностей в начальных значениях функции  $y_i (i \leq p)$ . Сходным образом может быть определена устойчивость относительно погрешностей округления  $\alpha_n$ , иначе говоря, относительно погрешностей правой части (16.3.2).

Возвратимся к  $E_n$ . Однородное уравнение для  $E_n$  вида (16.2.7), в случае вычислительной формулы (16.3.2), будет уравнением с постоянными коэффициентами

$$E_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_i E_{n-i}. \quad (16.3.5)$$

Решение его, удовлетворяющее начальным условиям  $E_i = \varepsilon_i (i \leq p)$ , представимо в виде (см. (16.2.13)):

$$E_n = E_n^0 \varepsilon_0 + E_n^1 \varepsilon_1 + \dots + E_n^p \varepsilon_p, \quad (16.3.6)$$

где  $E_n^i$  есть решение того же однородного уравнения и имеет следующие начальные значения

$$E_n^i = \begin{cases} 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i, \end{cases} \quad (i, k = 0, 1, \dots, p).$$

Закон роста  $E_n$  связан с тем, как быстро будут изменяться  $E_n^i$  при увеличении  $n$ . Если считать, что начальные погрешности ограничены по абсолютному значению числом  $\varepsilon$  и в остальном произвольны:

$$|\varepsilon_i| \leq \varepsilon, \quad (16.3.7)$$

то для  $E_n$  будет верна следующая точная оценка

$$|E_n| \leq \varepsilon \sum_{i=0}^p |E_n^i|. \quad (16.3.8)$$

Будем считать, что изучаемая формула (16.3.1) является верной без  $r_n$ , когда  $f \equiv 0$  и  $y$  есть постоянная величина. Такое предпо-

ложение выполняется во всех случаях, имеющих практическое значение. Коэффициенты  $A_i$  тогда должны удовлетворять условию

$$\sum_{i=0}^p A_i = 1. \quad (16.3.9)$$

Последнее говорит о том, что  $E_n = 1$  есть решение однородного уравнения (16.3.5). Такое решение, очевидно, равно сумме всех  $E_n^i$ :  $1 = E_n^0 + E_n^1 + \dots + E_n^p$ . Поэтому при всяких  $n$  будет выполняться неравенство  $\sum_{i=0}^p |E_n^i| \geq 1$ . Можно привести примеры, когда при  $n \rightarrow \infty$

$\sum_{i=0}^p |E_n^i|$  будет неограниченно возрастать и тогда может оказаться, что  $E_n$  тоже будет неограниченной величиной.

Наиболее благоприятным для вычислений значений  $y_n$ , в смысле порядка роста  $E_n$ , является, очевидно, тот случай, когда сумма

$\sum_{i=0}^p |E_n^i|$  будет ограниченной\*) для  $n > p$ . Все изложенное приводит к следующему определению.

*Уравнение (16.3.2) называется устойчивым относительно погрешностей начальных значений  $y_i$  ( $i \leq p$ ), если существует такое число  $M$ , что при любых  $n$  будет выполняться неравенство*

$$|E_n| \leq M\varepsilon, \quad (16.3.10)$$

*если только  $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon$ ,  $i = 0, 1, \dots, p$ .*

Заметим, что ограниченность  $E_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) при условии  $|\varepsilon_i| \leq \varepsilon$  равносильна ограниченности всех  $E_n^i$  ( $i = 0, 1, \dots, p$ ). Действительно, если все  $E_n^i$  ограничены, то будет, ввиду (16.3.6), ограничена и  $E_n$ .

Возьмем произвольное  $k \leq p$  и положим все  $\varepsilon_k$  ( $k \neq i$ ,  $k \leq p$ ) равными нулю. Тогда

$$E_n = E_n^i \varepsilon_i$$

и из ограниченности  $E_n$  следует ограниченность  $E_n^i$ .

\*) Для наших целей достаточно лишь факта ограниченности  $\sum_{i=0}^n |E_n^i|$ ; вопрос же о нахождении наименьшего значения границы этого коэффициента сейчас для нас не имеет значения.

Общее решение (16.3.5) определяется алгебраическим уравнением  $\lambda^{p+1} = \sum_{i=0}^p A_i \lambda^{p-i}$ . Если корни его суть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  кратностей  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , то функции

$$\lambda_i^n n^j \quad (j=0, 1, \dots, k_i-1; i=1, 2, \dots, m) \quad (16.3.11)$$

образуют полную систему линейно независимых решений.

Решения  $E_n^i (i=0, 1, \dots, p)$  получаются из (16.3.11) линейным преобразованием с неособенной матрицей и поэтому ограниченность при  $n=0, 1, \dots$  всех  $E_n^i$  равносильна ограниченности решений (16.3.11). Последнее же будет в том и только в том случае, когда среди  $\lambda_i$  нет чисел больших 1 по модулю, и если  $|\lambda_i|=1$ , то тогда  $k_i=1$ . Отсюда следует

**Теорема 1.** *Для того чтобы уравнение (16.3.2) было устойчивым относительно погрешностей начальных значений  $y_i (i \leq p)$ , необходимо и достаточно выполнение условий:*

1. Среди корней уравнения  $\lambda^{p+1} = \sum_{i=0}^p A_i \lambda^{p-i}$  нет больших единицы по модулю.
2. Корни, по модулю равные единице, должны быть простыми.

Обратимся к изучению  $E'_n$ . На образование значения  $E'_n$  оказывают влияние погрешности округления  $\alpha_p, \dots, \alpha_{n-1}$  и через них  $E'_n$  выражается следующим образом (см. (16.2.16))

$$E'_n = \sum_{k=p}^{n-1} E_{n,k} \alpha_k.$$

Коэффициент  $E_{n,k}$ , как функция  $n$ , должен удовлетворять уравнению (16.2.17), которое в изучаемом случае будет таким

$$E'_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_i E'_{n-i} + \delta_n^k \quad (16.3.12)$$

и иметь начальные значения:

$$E_{i,k} = 0 \quad (i=0, 1, \dots, p). \quad (16.3.13)$$

Можно установить простую связь  $E_{n,k}$  с решением  $E_n^p$ , введенным выше. При  $n < k$  уравнение (16.3.12) будет однородным и, ввиду нулевых начальных значений,  $E_{n,k}$  будет равняться нулю при всяких  $n \leq k$ . Кроме того,  $E_{k+1,k} = 1$ , что сразу же вытекает из (16.3.12), если там положить  $n=k$ . Когда  $n > k$ , уравнение (16.3.12) также будет однородным.

Будем рассматривать  $E_{n,k}$  при  $n \geq k - p + 1$ . Ввиду изложенного, можно сказать, что  $E_{n,k}$  будет иметь начальные значения

$$E_{k-p+1,k} = 0, \dots, E_{k,k} = 0, E_{k+1,k} = 1$$

и удовлетворять однородному уравнению

$$E_{n+1} = \sum_{i=0}^p A_i E_{n-i}. \quad (16.3.14)$$

Но, как сразу же видно, тем же условиям удовлетворяет также  $E_{n+p-k-1}^p$  и, в силу единственности решения с указанными начальными значениями,  $E_{n,k}$  и  $E_{n+p-k-1}^p$  должны совпадать.

Для  $E_n'$  поэтому получится

$$E_n' = \sum_{k=p}^{n-1} \alpha_k E_{n+p-k-1}^p. \quad (16.3.15)$$

Будем считать, что верхняя грань  $\alpha$  для погрешности округления  $\alpha_n$  задана одинаковой для всех шагов вычислений, так что  $|\alpha_n| \leq \alpha$  при любых  $n$ ,

$$\begin{aligned} |E_n'| &\leq \alpha \sum_{k=p}^{n-1} |E_{n+p-k-1}^p|, \\ \max_n |E_n'| &\leq \alpha \sum_{k=p}^{N-1} |E_{N+p-k-1}^p| = \alpha \sum_{k=p}^{N-1} |E_k^p|. \end{aligned} \quad (16.3.16)$$

Если считать, что погрешности  $\alpha_n$  могут иметь любые значения, удовлетворяющие условию  $|\alpha_n| \leq \alpha$ , то оценка является точной и равенство достигается для  $n = N$ , когда  $\alpha_k = \alpha \operatorname{sign} E_{N+p-k-1}^p$ . Так как  $E_p^p = 1$ , то при всяких  $N \geq p + 1$  будет  $\sum_{k=p}^{N-1} |E_k^p| \geq 1$ . При стремлении  $h$  к нулю  $N$  будет неограниченно возрастать. Значение  $\sum_{k=p}^{N-1} |E_k^p|$  будет зависеть от поведения решения  $E_k^p$  для  $k \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим частные решения однородного уравнения (16.3.14)

$$E_n^p, E_{n+1}^p, \dots, E_{n+p}^p. \quad (16.3.17)$$

Их начальные значения для  $n = 0, 1, \dots, p$  образуют следующую таблицу

$$\begin{array}{ccccccc} 0, & 0, & \dots, & 0, & 0, & 1, & \\ 0, & 0, & \dots, & 0, & 1, & E_{p+1}^p, & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & E_{p+1}^p, & \dots, & E_{2p-2}^p, & E_{2p-1}^p, & E_{2p}^p. & \end{array}$$

Определитель ее отличен от нуля и поэтому решения (16.3.17) линейно независимы. Но если так, то они получаются из решений  $E_n^i$  ( $i = 0, 1, \dots, p$ ) линейным преобразованием с неособенной матрицей.

Поэтому ограниченность  $E_n^i$  ( $i = 0, 1, \dots, p$ ) равносильна ограниченности решения (16.3.17).

Если принять во внимание, что при предположении (16.3.9),

$$\sum_{i=0}^p |E_n^i| \geq 1 \quad (n = 0, 1, \dots),$$

то будет ясно, что в смысле возможно медленного роста  $\sum_{k=p}^{N-1} |E_k^n|$  при  $N \rightarrow \infty$  наиболее благоприятным будет тот случай, когда все слагаемые  $E_k^n$  суммы будут ограничены некоторым числом. Тогда  $\sum_{k=p}^{N-1} |E_k^n|$  будет величиной порядка  $O(N)$ . Ввиду изложенного, примем нижеследующее определение.

*Уравнение (16.3.2) называется устойчивым относительно погрешностей округлений  $\alpha_n$ , если существует такое число  $M_1$ , не зависящее от  $h$ , что при всяких  $N > p$  будет выполняться неравенство*

$$|E_n'| \leq M_1 N \alpha \quad (n = p + 1, \dots, N - 1), \quad (16.3.18)$$

*если только  $|\alpha_n| \leq \alpha$ .*

Простая теорема, дающая достаточные условия устойчивости, может быть высказана так.

**Теорема 2.** *Для того чтобы (16.3.2) было устойчивым относительно погрешностей округлений, достаточным является выполнение условий:*

1) уравнение  $\lambda^{p+1} = \sum_{i=0}^p A_i \lambda^{p-i}$  не имеет корней, больших единицы по модулю,

2) корни этого уравнения, равные единице по модулю, являются простыми.

Доказательство. Решения (16.3.11) в условиях теоремы будут ограничены при  $n \geq 0$ . Но они образуют полную систему решений и  $E_n^p$  суть их линейная комбинация. Поэтому наверное существует такое число  $M_1$ , что для  $n \geq 0$  будет

$$|E_n^p| \leq M_1.$$

Отсюда и из (16.3.15) сразу же следует утверждение теоремы.

Займемся теперь изучением части  $E_n''$  ошибки вычислений.  $E_n''$  зависит от погрешности  $r_n$  формулы (16.3.1). Ошибка  $\varepsilon_n$  будет совпадать с  $E_n''$ , если вычисления выполняются с точными начальными значениями  $y_k = y(x_k)$  ( $k = 0, 1, \dots, p$ ) и правые части (16.3.2) находятся без округлений:  $\alpha_n = 0$  ( $n \geq p$ ).

Будем говорить, что формула (16.3.1) допускает сходящийся вычислительный процесс, если

$$\max_n |E_n''| \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0. \quad (16.3.19)$$

Равенство (16.2.19) для  $E_n''$ , ввиду  $E_{n,k} = E_{n+p-k-1}^p$ , примет форму

$$E_n'' = \sum_{k=p}^{n-1} r_k E_{n+p-k-1}^p. \quad (16.3.20)$$

Таково явное выражение  $E_n''$  через значения  $r_k$  погрешности вычислительной формулы.

При оценке  $E_n''$  предположим, что  $r$  есть верхняя граница для абсолютной величины погрешности  $r_n$  на всем отрезке  $[x_0, X]$ , так что при любых  $n$  ( $0 \leq n \leq N$ ) выполняются неравенства

$$|r_n| \leq r. \quad (16.3.21)$$

Тогда для  $E_n''$  имеет место оценка

$$|E_n''| \leq r \sum_{k=p}^{n-1} |E_{n+p-k-1}^p| = r \sum_{k=p}^{n-1} |E_k^p|. \quad (16.3.22)$$

Следовательно,

$$\max_n |E_n''| \leq r \sum_{k=p}^{N-1} |E_k^p|. \quad (16.3.23)$$

Множители  $r$  и  $\sum_{k=p}^{N-1} |E_k^p|$ , стоящие в правой части неравенства, вообще говоря, зависят от шага  $h$  и изучение характера этой зависимости позволяет во многих случаях сделать заключение о поведении  $\max_n |E_n''|$  при  $n \rightarrow \infty$ . В частности из оценки (16.3.23) очевидным образом вытекает следующая простая

**Теорема 3.** Если при  $h \rightarrow 0$  будет

$$r \sum_{k=p}^{N-1} |E_k^p| \rightarrow 0,$$

то уравнение (16.3.2) допускает сходящийся вычислительный процесс.

Остановимся еще на случае, указанном в двух предшествующих теоремах, когда наверное можно гарантировать устойчивость (16.3.2) относительно начальных погрешностей и погрешностей округления, а именно, будем считать, что среди корней уравнения  $\lambda^{p+1} = \sum_{i=0}^p A_i \lambda^{p-i}$  нет больших единицы по модулю и корни его, равные единице по модулю, являются простыми.

Как выяснилось выше, тогда существует наверное такое число  $M_1$ , что при всяких  $n \geq 0$  будет  $|E_n^p| \leq M_1$ . Отсюда и из (16.3.23) следует такая оценка для  $\max_n |E_n''|$ :

$$\max_n |E_n''| \leq r M_1 (N - p) \leq M_1 r N. \quad (16.3.24)$$

Из нее сразу же получается

**Теорема 4.** Если уравнение  $\lambda^{p+1} = \sum_{k=0}^p A_k \lambda^{p-k}$  не имеет корней, больших единицы по модулю, и корни его, равные единице по модулю, являются простыми, уравнение (16.3.2) допускает сходящийся вычислительный процесс всякий раз, когда

$$\frac{r}{h} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Рассмотрим, наконец, случай, на котором мы остановились в конце второго параграфа, когда коэффициенты вычислительной формулы  $A_k$  суть неотрицательные числа:  $A_k \geq 0$ , удовлетворяющие условию  $\sum_{k=0}^p A_k = 1$ . При таких условиях ошибка вычислений  $\epsilon_n$  удовлетворяет

неравенству [см. (16.2.20)]  $|\epsilon_n| \leq \epsilon + \sum_{k=p}^{n-1} |\alpha_k + r_k|$ ,  $n > p$ , где  $\epsilon \geq |\epsilon_i|$  ( $i = 0, 1, \dots, p$ ).

Отсюда легко получаются оценки для слагаемых  $E_n$ ,  $E'_n$ ,  $E''_n$  в разложении  $\epsilon_n$ . Заметим, что по самому смыслу этих величин при  $\alpha_k = 0$  и  $r_k = 0$  ( $k \geq p$ )  $\epsilon_n$  должно совпадать с  $E_n$  и поэтому должно быть

$$|E_n| \leq \epsilon, \quad n > p. \quad (16.3.25)$$

Аналогично

$$|E'_n| \leq \sum_{k=p}^{n-1} |\alpha_k|, \quad n > p, \quad (16.3.26)$$

$$|E''_n| \leq \sum_{k=p}^{n-1} |r_k|, \quad n > p. \quad (16.3.27)$$



Если же  $|\alpha_k| \leq \alpha$  и  $|r_k| \leq r$ ,  $p < n \leq N$ , то для  $E'_n$  и  $E''_n$  будут верны оценки

$$|E'_n| \leq (n-p)\alpha \leq N\alpha, \quad (16.3.28)$$

$$|E''_n| \leq (n-p)r \leq Nr. \quad (16.3.29)$$

Неравенства позволяют высказать теорему:

**Теорема 5.** Если коэффициенты  $A_k$  ( $k = 0, 1, \dots, p$ ) неотрицательны и удовлетворяют условию  $\sum_{k=0}^p A_k = 1$ , уравнение (16.3.2) устойчиво относительно погрешностей начальных значений  $\epsilon_k$  ( $k \leq p$ ) и погрешностей округлений  $\alpha_k$  ( $k \geq p$ ). Если, кроме того, при  $h \rightarrow 0$  будет  $\frac{r}{h} \rightarrow 0$ , то уравнение (16.3.2) допускает сходящийся вычислительный процесс.

## ГЛАВА 17

### ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ТАБЛИЦЕЙ ЗНАЧЕНИЙ

#### § 1. Содержание задачи и один из методов ее решения

Пусть в равноотстоящих точках  $x_n = x_0 + nh$  на отрезке  $x_0 \leq x \leq X$  нужно вычислить значения интеграла

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt; \quad (17.1.1)$$

функция  $f$  предполагается известной в той же, или в более широкой системе равноотстоящих значений аргумента. Эта задача рассматривалась в большом числе работ и известны многие методы ее решения. Особенно большое внимание было уделено ей в связи с тем, что она соприкасается с проблемой Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. В самом деле, если дано уравнение  $y' = f(x, y)$  и нужно найти его решение, удовлетворяющее начальному условию  $y(x_0) = y_0$ , то такая задача может быть заменена решением равносильного ей интегрального уравнения

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (17.1.2)$$

После этого возможность применения численного неопределенного интегрирования к решению дифференциального уравнения становится очевидной \*).

---

\*) Обе указанные задачи существенно различаются в следующем отношении. При вычислении интеграла (17.1.1) функция  $f$  считается известной во всех точках сетки на отрезке  $[x_0, X]$  и для нахождения каждого значения  $y(x)$  можно пользоваться любыми значениями  $f$ . В случае же интеграла (17.1.2) известными будут значения функции  $f(x, y)$  для табличных точек, предшествующих  $x$ , значения же  $f(x, y)$  для точек, следующих за  $x$ , мы не имеем права вводить в вычисления.

В этой главе будет рассмотрен один из возможных методов вычисления значений функции (17.1.1). Он приводит к простым расчетным схемам и, как правило, дает хорошую точность, если функция  $f$  будет достаточно «гладкой» на отрезке интегрирования и вблизи него.

Предположим, что вычисления начаты и доведены до узла  $x_n = x_0 + nh$  включительно. Пусть для нахождения следующего значения  $y(x_{n+1})$  функции (17.1.1) мы хотим воспользоваться только одним значением  $y$ , непосредственно предшествующим  $y(x_{n+1})$ :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt. \quad (17.1.3)$$

Для вычисления интеграла интерполируем  $f$  на отрезке  $[x_n, x_{n+1}]$ . В условиях изучаемой задачи, целесообразно за узлы интерполирования принять табличные узлы, ближайшие к промежутку  $x_n < x < x_{n+1}$ , взяв одинаковое число их с той и другой стороны от указанного промежутка.

Применим интерполяционную формулу Ньютона (3.2.6), расположив в ней узлы в порядке  $x_n, x_n + h, x_n - h, x_n + 2h, x_n - 2h, \dots$

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_n) + (x - x_n) f(x_n, x_n + h) + (x - x_n)(x - x_n - h) \times \\ & \times f(x_n, x_n + h, x_n - h) + (x - x_n)(x - x_n - h)(x - x_n + h) \times \\ & \times f(x_n, x_n + h, x_n - h, x_n + 2h) + \dots \end{aligned}$$

Или, если ввести новую переменную, положив  $x = x_n + uh$ , и выразить разностные отношения через конечные разности,

$$\begin{aligned} f(x_n + uh) = & f_n + \frac{u}{1!} \Delta f_n + \frac{u(u-1)}{2!} \Delta^2 f_{n-1} + \\ & + \frac{(u+1)u(u-1)}{3!} \Delta^3 f_{n-1} + \frac{(u+1)u(u-1)(u-2)}{4!} \Delta^4 f_{n-2} + \dots \end{aligned}$$

Для придания членам этого равенства формы, симметричной относительно середины  $x_n + 0,5h$  промежутка, преобразуем разности четного порядка при помощи тождеств

$$\begin{aligned} f_n = & 0,5 [f_{n+1} + f_n] - 0,5 [f_{n+1} - f_n] = 0,5 [f_{n+1} + f_n] - 0,5 \Delta f_n, \\ \Delta^2 f_{n-1} = & 0,5 [\Delta^2 f_n + \Delta^2 f_{n-1}] - 0,5 [\Delta^2 f_n - \Delta^2 f_{n-1}] = \\ = & 0,5 [\Delta^2 f_n + \Delta^2 f_{n-1}] - 0,5 \Delta^3 f_{n-1}, \\ & \dots \end{aligned}$$

В результате получим \*)

$$f(x_n + uh) = \frac{f_n + f_{n+1}}{2} + \frac{u-0,5}{1!} \Delta f_n + \frac{u(u-1)}{2!} \frac{\Delta^2 f_{n-1} + \Delta^2 f_n}{2} + \\ + \frac{(u-0,5)u(u-1)}{3!} \Delta^3 f_{n-1} + \dots + \frac{(u+k-1) \dots (u-k)}{(2k)!} \times \\ \times \frac{\Delta^{2k} f_{n-k} + \Delta^{2k} f_{n-k+1}}{2} + \frac{(u-0,5)(u+k-1) \dots (u-k)}{(2k+1)!} \Delta^{2k+1} f_{n-k} + r(x). \quad (17.1.4)$$

Подстановка построенного представления функции  $f$  в интеграл  $\int_{x_n}^{x_{n+h}} f(t) dt = h \int_0^1 f(x_n + uh) du$  приведет к следующему выражению для  $y(x_{n+1})$ :

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \left[ \frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 f_{n-1} + \Delta^2 f_n}{2} + \right. \\ + \frac{11}{720} \frac{\Delta^4 f_{n-2} + \Delta^4 f_{n-1}}{2} - \frac{191}{60480} \frac{\Delta^6 f_{n-3} + \Delta^6 f_{n-2}}{2} + \dots \\ \left. \dots + C_k \frac{\Delta^{2k} f_{n-k} + \Delta^{2k} f_{n-k+1}}{2} \right] + R_{n,k}, \quad (17.1.5)$$

$$C_k = \frac{1}{(2k)!} \int_0^1 (u+k-1) \dots (u-k) du, \quad R_{n,k} = \int_{x_n}^{x_{n+h}} r(x) dx.$$

Расчетная формула отсюда получится, если избрать какое-либо значение  $k$  и отбросить остаток  $R_{n,k}$ .

Рассмотрим пример вычислений. Пусть нужно на отрезке  $[0, 1]$  вычислить значения интеграла

$$y(x) = \int_0^x J_1(t) dt = 1 - J_0(x).$$

$J_0$  и  $J_1$  суть бесселевы функции первого рода. Примем  $h=0,2$ . В (17.1.5) сохраним члены с разностями до четвертого порядка. Расчетная формула будет:

$$y_{n+1} = y_n + 0,2 \left[ \frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 f_{n-1} + \Delta^2 f_n}{2} + \frac{11}{720} \frac{\Delta^4 f_{n-2} + \Delta^4 f_{n-1}}{2} \right] \\ y_0 = 0, \quad f(x) = J_1(x).$$

\*) В теории интерполирования это равенство называется формулой Бесселя.

Таблица конечных разностей функции  $f = J_1$ , необходимая для вычислений по этой формуле, имеет следующий вид:

$x$	$f$	$\Delta f \cdot 10^7$	$\Delta^2 f \cdot 10^7$	$\Delta^3 f \cdot 10^7$	$\Delta^4 f \cdot 10^7$
$x_{-2} = -0,4$	-0,196 026 6	96 525 8	+ 2 975 0	-2 975 0	000 0
$x_{-1} = -0,2$	-0,099 500 8	99 500 8	000 0	-2 975 0	98 6
$x_0 = 0,0$	0,000 000 0	99 500 8	- 2 975 0	-2 876 4	194 4
$x_1 = 0,2$	0,099 500 8	96 525 8	- 5 851 4	-2 682 0	283 0
$x_2^* = 0,4$	0,196 026 6	90 674 4	- 8 533 4	-2 399 0	361 3
$x_3 = 0,6$	0,286 701 0	82 141 0	-10 932 4	-2 037 7	427 9
$x_4 = 0,8$	0,368 842 0	71 208 6	-12 970 1	-1 609 8	
$x_5 = 1,0$	0,440 050 6	58 238 5	-14 579 9		
$x_6 = 1,2$	0,498 289 1	43 658 6			
$x_7 = 1,4$	0,541 947 7				

При составлении ее необходимо было вычислить значения  $f$  в точках  $x_{-1} = -0,2$  и  $x_{-2} = -0,4$ , выходящих за границу  $x = 0$  отрезка интегрирования  $[0, 1]$ . Как при помощи этой таблицы находятся значения интеграла  $y(x)$ , ниже показано на примере вычисления  $y(0, 2)$ :

$$\begin{aligned}
 y(0, 2) = & y(0) + h \left[ \frac{f(0) + f(0,2)}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 f(-0,2) + \Delta^2 f(0)}{2} + \right. \\
 & + \frac{11}{720} \frac{\Delta^4 f(-0,4) + \Delta^4 f(-0,2)}{2} \left. \right] = 0 + 0,2 \left[ \frac{0 + 0,0995008}{2} - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{12} \frac{0 - 0,0029750}{2} + \frac{11}{720} \frac{0 + 0,0000986}{2} \right] = 0,0099750.
 \end{aligned}$$

В результате получены следующие приближенные значения  $y(x)$ :

$x$	$y = \int_0^x J_1(t) dt$	$x$	$y = \int_0^x J_1(t) dt$
0,0	0,000 000 0	0,6	0,087 995 1
0,2	0,009 975 0	0,8	0,153 712 6
0,4	0,039 601 7	1,0	0,234 802 3

От значений интеграла, точных на семь знаков, отличается только  $y(0, 4)$  на единицу седьмого знака\*). Все знаки остальных значений совпадают с точными.

## § 2. Остаток

Старшая конечная разность, входящая в (17.1.4) имеет порядок  $2k+1$  и для составления всех членов этой формулы необходимо знать значения функции  $f$  в  $2k+2$  точках  $x_n - kh, \dots, x_n + (k+1)h$ . Если сделать предположение, что функция  $f$  имеет на отрезке  $[x_n - kh, x_n + (k+1)h]$  непрерывную производную порядка  $2k+2$ , остаток  $r(x)$  интерполирования (17.1.4) может быть найден при помощи теоремы, приведенной в § 2 гл. III, и имеет значение

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{[x - x_n + kh][x - x_n + (k-1)h] \dots [x - x_n - (k+1)h]}{(2k+2)!} f^{(2k+2)}(\eta) = \\ &= h^{2k+2} \frac{(u+k)(u+k-1) \dots (u-k-1)}{(2k+2)!} f^{(2k+2)}(\eta), \\ &\quad x_n - kh < \eta < x_n + (k+1)h. \end{aligned}$$

Это дает возможность найти для дополнительного члена  $R_{n,k}$  формулы (17.1.5) следующее значение

$$\begin{aligned} R_{n,k} &= h \int_0^1 r(x_n + uh) du = \\ &= \frac{h^{2k+3}}{(2k+2)!} \int_0^1 (u+k)(u+k-1) \dots (u-k-1) f^{(2k+2)}(\eta) du. \end{aligned}$$

Так как множитель  $(u+k)(u+k-1) \dots (u-k-1)$  сохраняет на отрезке  $[0, 1]$  знак, к последнему интегралу может быть применена теорема о среднем значении, что приводит к следующему утверждению:

*Если  $f$  имеет непрерывную производную порядка  $2k+2$  на отрезке  $[x_n - kh, x_n + (k+1)h]$ , то для остатка  $R_{n,k}$  в равенстве (17.1.5) верно представление*

$$R_{n,k} = h^{2k+3} \frac{f^{(2k+2)}(\xi)}{(2k+2)!} \int_0^1 (u+k)(u+k-1) \dots (u-k-1) du, \quad (17.2.1)$$

где значение  $\xi$  есть некоторая внутренняя точка отрезка  $[x_n - kh, x_n + (k+1)h]$ .

\*) См., например, Ватсон, Теория бесселевых функций, 4. 2, М., ИЛ, 1949, 18—19.

## ГЛАВА 18

### ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА С МАЛЫМ ЧИСЛОМ ЗНАЧЕНИЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ

#### § 1. Содержание задачи и некоторые общие теоремы о расчетной формуле

Здесь, как и выше, будет рассматриваться задача вычисления неопределенного интеграла

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt \quad (18.1.1)$$

для равноотстоящих значений аргумента  $x_k = x_0 + kh$  ( $k = 0, 1, \dots$ ), но, в отличие от предположений предыдущей главы, сейчас мы допустим, что точки, в которых берутся значения функции, не обязаны совпадать с узлами  $x_k$  и могут лежать в любом месте области определения  $f$ .

Напомним, что при вычислении интеграла (18.1.1) при помощи формул вида (16.2.1), главная часть труда, обычно, расходуется на нахождение значений функции  $f$  и можно указать два пути, позволяющие экономить вычислительный труд. Можно стремиться к достижению возможно высокой степени точности при помощи выбора узлов, в которых берутся значения  $f$ , и можно стремиться к тому, чтобы каждое значение  $f$  применялось для нахождения не одного, а нескольких значений неопределенного интеграла, так чтобы на каждый шаг вычислений приходилось бы возможно меньшее число значений  $f$ .

В дальнейшем изложении, при построении расчетных формул, мы воспользуемся обоими указанными возможностями. Вновь остановимся на том случае, когда для разыскания следующего значения  $y_{n+1}$  интеграла привлекается только одно его предшествующее значение  $y_n$ . Тогда

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt$$

и нахождение  $y_{n+1}$  приводится к вычислению  $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt$ ,

Чтобы коэффициенты расчетной формулы не зависели от номера шага  $n$ , мы должны считать, что узлы на оси  $x$  расположены  $h$ -периодически. Точки  $\alpha + kh$ , отвечающие различным целым значениям  $k$ , в дальнейшем будем называть *сходственными*.

Предположим, что для вычисления интеграла на отрезке  $[x_n, x_{n+1}]$  было взято  $m$  узлов  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ :  $x_n \leq \alpha < \beta < \dots < \lambda < x_{n+1}$ . Ниже они будут называться *основными*. Пусть, кроме того, взято

$a$  узлов  $\alpha + p_i h$  ( $i = 1, \dots, a$ ), сходственных  $\alpha$ ,

$b$  узлов  $\beta + q_i h$  ( $i = 1, \dots, b$ ), сходственных  $\beta$ ,

.....

$l$  узлов  $\lambda + t_i h$  ( $i = 1, \dots, l$ ), сходственных  $\lambda$ .

Распределение дополнительных узлов между табличными точками  $x_k$  определяется числами  $p_i, q_i, \dots, t_i$ , которые могут иметь любые целые значения, отличные от нуля. Общее число всех узлов назовем  $N + 1$ :  $m + a + b + \dots + l = N + 1$ . Рассмотрим формулу вида

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt \approx A_0 f(\alpha) + \sum_{i=1}^a A_i f(\alpha + p_i h) + \dots$$

$$\dots + L_0 f(\lambda) + \sum_{i=1}^l L_i f(\lambda + t_i h). \quad (18.1.2)$$

Если числа  $p_i, \dots, t_i$  считать заданными, формула (18.1.2) определяется узлами  $\alpha, \dots, \lambda$  и коэффициентами  $A_i, \dots, L_i$  ( $i = 0, 1, \dots$ ). Их мы выберем так, чтобы равенство (18.1.2) имело возможно более высокую алгебраическую степень точности.

При всяких  $\alpha, \dots, \lambda$ ;  $p_i, \dots, t_i$  формулу (18.1.2) всегда можно сделать верной для любых многочленов степени  $N$ . Для этого достаточно взять ее интерполяционной, т. е. такой, чтобы ее коэффициенты были равны интегралам от соответствующих множителей в интерполяционной формуле Лагранжа для интерполирования  $f$  по ее значениям в узлах  $\alpha, \alpha + p_i h, \dots, \lambda, \lambda + t_i h$ . Этим требованием коэффициенты  $A_i, \dots, L_i$  вполне определятся и дальнейшее повышение степени точности возможно только за счет выбора  $\alpha, \dots, \lambda$ . Ниже будет показано, что для любых  $p_i, \dots, t_i$  при помощи подбора  $\alpha, \dots, \lambda$ , формулу (18.1.2) можно сделать точной для всех многочленов степени  $m + N$  и число  $m + N$  есть наивысшая возможная степень точности.



Введем следующие многочлены, связанные с узлами формулы

$$\left. \begin{aligned} \omega(x) &= (x - a) \dots (x - \lambda), \\ \omega_a(x) &= \prod_{i=1}^a (x - a - p_i h), \dots, \omega_\lambda(x) = \prod_{i=1}^l (x - \lambda - t_i h), \\ \Omega(x) &= \omega_a(x) \dots \omega_\lambda(x). \end{aligned} \right\} \quad (18.1.3)$$

**Теорема 1.** *Каковы бы ни были узлы  $a, \dots, \lambda$  и числа  $p_i, \dots, t_i$ , квадратурная формула (18.1.2) не может быть точной для всех многочленов степени  $m + N + 1$ .*

**Доказательство.** Для доказательства достаточно рассмотреть многочлен  $f = \Omega(x) \omega^2(x)$ . Степень его равна  $m + N + 1$ . Так как все узлы формулы являются корнями  $\Omega \omega^2$ , квадратурная сумма, стоящая справа в (18.1.2), для такой функции  $f$  обратится в нуль.

Интеграл же  $\int_{x_n}^{x_{n+1}} \Omega \omega^2 dx$  отличен от нуля, так как многочлен  $f = \Omega \omega^2$  сохраняет знак на отрезке интегрирования и отличен от тождественного нуля. Поэтому равенство (18.1.2) для  $f = \Omega \omega^2$  не может быть верным.

Алгебраическая степень точности (18.1.2) всегда меньше, чем  $m + N + 1$  и, самое большее, может быть равна  $m + N$ .

**Теорема 2.** *Для того чтобы формула (18.1.2) была верной для всех многочленов степени  $m + N$ , необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

- 1) *формула должна быть интерполяционной;*
- 2) *для любого многочлена  $Q(x)$ , степени меньшей  $m$ , должно выполняться равенство*

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \Omega(x) \omega(x) Q(x) dx = 0. \quad (18.1.4)$$

**Доказательство.** Необходимость первого условия очевидна. Для проверки необходимости второго условия, возьмем произвольный многочлен  $Q(x)$ , степени меньшей  $m$ , и положим  $f = \Omega(x) \omega(x) Q(x)$ . Это есть многочлен самое большее степени  $m + N$ . Для него равенство (18.1.2) должно быть точным. Но  $f$  во всех узлах квадратурной суммы обращается в нуль. Поэтому должно быть верным равенство (18.1.4).

Предположим теперь, что оба условия теоремы выполняются и пусть  $f$  есть произвольный многочлен степени  $m + N$ . Разделив  $f$  на  $\Omega \omega$ , мы можем представить  $f$  в форме  $f = \Omega \omega Q + r$ , где  $Q$  и  $r$

есть многочлены, степеней меньше чем  $m$  и  $N+1$  соответственно. Заметим попутно, что так как во всех узлах формулы произведение  $\Omega\omega$  обращается в нуль, многочлены  $f$  и  $r$  должны в этих узлах принимать одинаковые значения.

Ввиду того, что степень  $r$  не больше  $N$  и формула интерполяционная, должна быть верной следующая цепь равенств, доказывающая достаточность условий теоремы

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f dx &= \int_{x_n}^{x_{n+1}} \Omega\omega Q dx + \int_{x_n}^{x_{n+1}} r dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} r dx = \\ &= A_0 r(\alpha) + \sum_{i=1}^a A_i r(\alpha + p_i h) + \dots = A_0 f(\alpha) + \sum_{i=1}^a A_i f(\alpha + p_i h) + \dots \end{aligned}$$

Теорема 2 приводит вопрос о существовании квадратурной формулы (18.1.2), имеющей наивысшую алгебраическую степень точности  $m+N$ , к вопросу о существовании чисел  $\alpha, \dots, \lambda$  таких, чтобы соответствующие им многочлены  $\omega$  и  $\Omega$  удовлетворяли условию (18.1.4).

**Теорема 3.** *Каковы бы ни были числа  $p_1, \dots, t_i$ , основные узлы  $\alpha, \dots, \lambda$  всегда могут быть выбраны так, чтобы соответствующая им квадратурная формула (18.1.2) имела наивысшую алгебраическую степень точности  $m+N$ .*

Доказательство. Возьмем любую систему чисел  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ , удовлетворяющую неравенствам

$$x_n \leq \alpha \leq \beta \leq \dots \leq \lambda \leq x_{n+1}, \quad (18.1.5)$$

и построим по ним многочлены  $\omega(x)$  и  $\Omega(x)$ .  $\Omega(x)$  сохраняет знак на отрезке  $[x_n, x_{n+1}]$ . Примем его за весовую функцию и рассмотрим соответствующую ей систему многочленов  $P_k(x)$ , ортогональных на  $[x_n, x_{n+1}]$ . Среди них выберем многочлен  $P_m(x)$  степени  $m$ . Для определенности записи, допустим, что его старший коэффициент равен единице:

$$P_m(x) = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots$$

При любом многочлене  $Q$ , степени  $< m$ , будет верно равенство

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \Omega(x) P_m(x) Q(x) dx = 0. \quad (18.1.6)$$

Корни  $P_m(x)$  все действительные, простые и лежат внутри отрезка  $[x_n, x_{n+1}]$ . Назовем их  $\xi_1, \dots, \xi_m$  и будем считать, что они перенумерованы в порядке роста  $x_n < \xi_1 < \dots < \xi_m < x_{n+1}$ . Если окажется, что  $\xi_1 = \alpha, \xi_2 = \beta, \dots, \xi_m = \lambda$ , то  $P_m$  совпадает с  $\omega$  и для многочленов  $\Omega$  и  $\omega$  будет выполнено условие (18.1.4). Соответству-



выполняют неравенства  $x_n < \xi_1 < \dots < \xi_m < x_{n+1}$ , то равенства (18.1.8) дают однозначное и непрерывное преобразование указанной пирамиды в себя. По известной теореме Брауэра\*) при таком преобразовании на верное существует неподвижная точка и, стало быть, существуют такие значения  $\alpha, \dots, \lambda$ , для которых  $\xi_1 = \alpha, \dots, \xi_m = \lambda$  и  $P_m(x) = \omega(x)$ . Поэтому на верное существуют  $\alpha, \dots, \lambda$ , удовлетворяющие неравенствам  $x_n < \alpha < \dots < \lambda < x_{n+1}$ , при которых выполняются (18.1.4), что и доказывает теорему 3.

Единственность таких значений  $\alpha, \dots, \lambda$  в общем случае остается невыясненной.

Рассмотрим еще остаток квадратуры (18.1.2) и найдем его простейшее представление.

Пусть  $[a', b']$  есть отрезок, содержащий в себе  $[x_n, x_{n+1}]$  и все узлы формулы (18.1.2).

**Теорема 4.** Если  $f$  имеет на  $[a', b']$  непрерывную производную порядка  $m + N + 1$  и если формула (18.1.2) имеет степень точности  $m + N$ , то на  $[a', b']$  существует такая точка  $\xi$ , что для остатка  $R(f)$  формулы (18.1.2) верно равенство:

$$R(f) = \frac{f^{(m+N+1)}(\xi)}{(m+N+1)!} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \Omega(x) \omega^2(x) dx. \quad (18.1.9)$$

**Доказательство.** Выполним интерполирование  $f$  по следующим данным. Предположим, что в каждом основном узле  $\alpha, \dots, \lambda$  заданы как значение  $f$ , так и значение производной  $f'$ , а в каждом узле вида  $\alpha + p_i h, \dots, \lambda + t_i h$  известно только значение самой функции  $f$ . Всего будет  $m + N + 1$  известных значений. Интерполирующий многочлен, который мы обозначим  $H(x)$ , будет иметь степень  $\leq m + N$ :

$$f(x) = H(x) + r(x).$$

В условиях теоремы, для остатка интерполирования  $r(x)$  верно следующее представление (гл. III, § 3)

$$r(x) = \frac{f^{(m+N+1)}(\eta)}{(m+N+1)!} \Omega(x) \omega^2(x),$$

---

\*) Пусть в  $m$  дано  $m + 1$  точек, не лежащих в  $(m - 1)$ -мерной плоскости. Многогранник, имеющий эти точки своими вершинами, называется  $m$ -мерной пирамидой. Брауэром была доказана следующая теорема: «При любом однозначном и непрерывном отображении  $m$ -мерной пирамиды на себя имеется по меньшей мере одна неподвижная точка». Brouwer, «Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten», Math. Ann. 71 (1912). См. также В. В. Немыцкий, Метод неподвижных точек, Усп. матем. наук, вып. I (1936), 153.

где  $\eta$  есть точка, лежащая внутри отрезка, содержащего в себе узлы интерполирования и точку  $x$ .

Очевидно  $R(x) = R(H) + R(r)$ . Но  $H(x)$  имеет степень  $\leq m + N$  и  $R(H) = 0$ . Поэтому  $R(f) = R(r)$ . Квадратурная сумма для  $r(x)$  обращается в нуль ввиду того, что остаток  $r(x)$  равен нулю во всех узлах формулы и  $R(r)$  будет совпадать со значением интеграла от  $r(x)$ :

$$R(f) = R(r) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} r(x) dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{f^{(m+N+1)}(\eta)}{(m+N+1)!} \Omega(x) \omega^2(x) dx.$$

Так как  $\Omega(x) \omega^2(x)$  сохраняет знак на  $[x_n, x_{n+1}]$ , отсюда следует утверждение теоремы 4.

## § 2. Расчетные формулы частного вида\*)

Ниже будут рассматриваться расчетные формулы, служащие для вычисления значений неопределенного интеграла  $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt$

и требующие по одному, два или три значения функции  $f$  на каждый шаг, или, иначе говоря, формулы, содержащие по одному, два, три основных узла и некоторое число сходственных с ними узлов.

Все такие формулы могут быть построены единообразным способом и процесс их построения описан подробно только в одном случае в остальных же случаях приведены лишь окончательные результаты.

1. Начнем со случая одного значения  $f$  на каждый шаг. Изучение его приведет к построению формулы, известной еще Гауссу и полученной им в другой задаче и иным путем.

Пусть на участке  $[x_n, x_n + h]$  за основной узел принята точка  $a_n = x_n + qh$ ,  $0 \leq q < 1$ . Схема расположения узлов изображена на рис. 8.

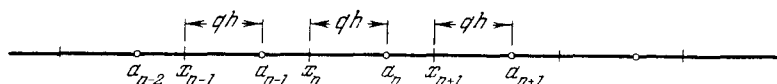


Рис. 8.

Предположим, что для построения формулы вида (18.1.2) привлекаются по  $k$  штук узлов, сходственных  $a_n$ , ближайших предшеству-

\*) Значения коэффициентов и узлов квадратурных формул, приведенных в § 2, вычислены М. А. Филипповой.

ющих  $a_n$  и следующих за  $a_n$ . В формуле будет участвовать всего  $2k+1$  узлов. Мы можем распорядиться в ней выбором только одного параметра  $q$  и наивысшая степень точности формулы равна  $2k+1$ . Чтобы достигнуть ее, формулу нужно выбрать интерполяционной и выполнить условие ортогональности (18.1.4), которое в рассматриваемом случае запишется так:

$$\int_{x_n}^{x_n+h} \Omega(x) \omega(x) dx = 0, \quad (18.2.1)$$

$$\begin{aligned} \Omega(x) \omega(x) &= (x - a_n)(x - a_{n-1})(x - a_{n+1}) \dots (x - a_{n-k})(x - a_{n+k}) = \\ &= [x - x_n - qh] [(x - x_n - qh)^2 - h^2] \dots [(x - x_n - qh)^2 - k^2 h^2]. \end{aligned}$$

Легко показать, что уравнение (18.2.1) имеет решение  $q=0,5$  и это решение единственное при  $0 \leq q \leq 1$ .

Преобразуем интеграл (18.2.1) к новой переменной, положив  $x = x_n + hq + ht$ ,

$$\int_{x_n}^{x_n+h} \Omega(x) \omega(x) dx = h^{2k+2} \int_{-q}^{1-q} \pi(t) dt, \quad \pi(t) = t(t^2 - 1^2) \dots (t^2 - k^2).$$

(18.2.1) заменится равносильным уравнением

$$\varphi(q) = \int_{-q}^{1-q} \pi(t) dt = 0. \quad (18.2.2)$$

Так как  $\pi(t)$  есть нечетная функция  $t$ , то  $\varphi(0,5) = \int_{-0,5}^{0,5} \pi(t) dt = 0$  и

$q=0,5$  является корнем уравнения (18.2.2);

$$\varphi'(q) = \pi(1-q) - \pi(-q).$$

Но  $\pi(1-q)$  и  $\pi(-q)$  имеют противоположные знаки при  $0 < q < 1$  и  $\varphi'(q)$ , следовательно, сохраняет знак на промежутке  $0 < q < 1$ . Отсюда следует единственность корня  $q=0,5$  на  $0 \leq q \leq 1$

$$a_n = x_n + 0,5h.$$

Для интерполирования  $f$  на  $[x_n, x_n + h]$  по ее значениям в узлах  $a_m$  ( $m = n - k, \dots, n + k$ ) воспользуемся интерполяционной формулой

Ньютона (3.2.6), расположив в ней узлы в следующем порядке:

$$a_n, a_n + h, a_n - h, a_n + 2h, a_n - 2h, \dots$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a_n) + (x - a_n) f'(a_n) + \frac{(x - a_n)(x - a_n - h)}{2!} f''(a_n) + \dots \\ &+ \frac{(x - a_n)(x - a_n - h)(x - a_n + h)}{3!} f'''(a_n) + \dots \\ &+ \frac{(x - a_n)(x - a_n - h)(x - a_n + h)(x - a_n + 2h)}{4!} f^{(4)}(a_n) + \dots \\ &+ r(x) = \\ &= f(a_n) + \frac{x - a_n}{1! h} \Delta f(a_n) + \frac{(x - a_n)(x - a_n - h)}{2! h^2} \Delta^2 f(a_n - h) + \dots \\ &\dots + \frac{(x - a_n + kh) \dots (x - a_n - kh)}{(2k + 1)! h^{2k+1}} \Delta^{2k+1} f(a_n - kh) + r(x). \end{aligned}$$

Подстановка этого выражения  $f(x)$  в равенство

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt$$

и несложные вычисления приведут к следующему результату:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \left[ f(a_n) + \frac{1}{24} \Delta^2 f(a_n - h) - \frac{17}{5760} \Delta^4 f(a_n - 2h) + \right. \\ &+ \frac{367}{967680} \Delta^6 f(a_n - 3h) - \frac{27859}{464486400} \Delta^8 f(a_n - 4h) + \\ &+ \left. \frac{1295803}{122624409600} \Delta^{10} f(a_n - 5h) + \dots + c_k \Delta^{2k} f(a_n - kh) \right] + R_{n,k}, \\ c_k &= \frac{1}{(2k)!} \int_{-0,5}^{0,5} t^2 (t^2 - 1^2) \dots [t^2 - (k-1)^2] dt. \quad (18.2.3) \end{aligned}$$

Если предположить, что  $f$  имеет непрерывную производную порядка  $2k+2$  на отрезке  $[a_k - (k+1)h, a_k + kh]$ , то остаток интерполирования  $r(x)$  будет равен (гл. 3, § 2)

$$r(x) = \frac{[x - a_k + (k+1)h] \dots (x - a_k - kh)}{(2k+2)!} f^{(2k+2)}(\eta).$$

Здесь  $\eta$  есть внутренняя точка указанного отрезка. Для остаточного члена  $R_{n,k}$  формулы (18.2.3) отсюда, после интегрирования и замены  $x = a_n + th = x_n + \frac{1}{2}h + th$ , найдем

$$R_{n,k} = h^{2k+3} \frac{f^{(2k+2)}(\xi)}{(2k+2)!} \int_{-0,5}^{0,5} t^2 (t^2 - 1^2) \dots (t^2 - k^2) dt. \quad (18.2.4)$$

II. Рассмотрим несколько наиболее простых способов вычисления, требующих два значения функции  $f$  на каждый шаг. Пусть на

отрезке  $[x_n, x_n + h]$  взяты два основных узла  $\alpha_n, \beta_n$ . Схема узлов такова:

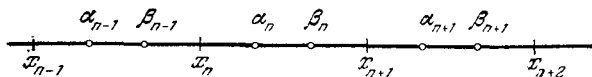


Рис. 9.

Допустим, что кроме  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  берется еще по  $k$  сходственных им узлов, ближайших к отрезку  $[x_n, x_n + h]$  справа и слева от него, так что к вычислению привлекается всего  $2k + 2$  узлов. Наивысшая степень точности, которая может быть достигнута при построении формулы, равна  $2k + 3$ .

В изучаемом случае  $\omega(x) = (x - \alpha_n)(x - \beta_n)$ . Произведение  $\Omega(x)\omega(x)$  будет содержать  $2k + 2$  множителя и иметь следующую форму:

$$\Omega(x)\omega(x) = (x - \alpha_n)(x - \beta_n)(x - \alpha_{n+1})(x - \beta_{n-1})(x - \beta_{n+1})(x - \alpha_{n-1}) \dots$$

Условие ортогональности (18.1.4), из которого должны быть найдены  $\alpha_n$  и  $\beta_n$ , здесь приводится к двум уравнениям

$$\int_{x_n}^{x_n+h} \Omega \omega dx = 0, \quad \int_{x_n}^{x_n+h} x \Omega \omega dx = 0. \quad (18.2.5)$$

Построение формул начнем со случая  $k = 1$ . Кроме двух узлов  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  на отрезке  $[x_n, x_n + h]$ , берутся по одному узлу в двух соседних отрезках  $[x_n - h, x_n]$  и  $[x_n + h, x_n + 2h]$ .

Чтобы привести задачу нахождения  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  к каноническому отрезку, выполним линейное преобразование

$$z = \frac{2}{h}x - \left(1 + \frac{2}{h}x_n\right),$$

переводящее отрезки  $[x_n - h, x_n]$ ,  $[x_n, x_n + h]$ , ... соответственно в  $[-3, -1]$ ,  $[-1, 1]$ , ... Середина отрезка  $[x_n, x_n + h]$  перейдет в точку  $z = 0$ . Точки, соответствующие  $x = \alpha_n$  и  $x = \beta_n$ , назовем  $p$  и  $q$ . В переменной  $z$  многочлены  $\omega$  и  $\Omega$  будут такими

$$\omega(x) = (x - \alpha_n)(x - \beta_n) = \frac{h^2}{4}(z - p)(z - q),$$

$$\begin{aligned} \Omega(x)\omega(x) &= (x - \alpha_n)(x - \beta_n)(x - \alpha_{n+1})(x - \beta_{n-1}) = \\ &= \frac{h^4}{16}(z - q + 2)(z - p)(z - q)(z - p - 2). \end{aligned}$$

Уравнения (18.2.5), являющиеся записью условия ортогональности  $\Omega\omega$  на  $[x_n, x_n + h]$  к 1 и  $x$ , заменятся в переменной  $z$  условиями



ортогональности  $\Omega\omega$  на  $[-1, 1]$  к 1 и  $z$

$$\int_{-1}^1 (z - q + 2)(z - p)(z - q)(z - p - 2) dz = 0,$$

$$\int_{-1}^1 z(z - q + 2)(z - p)(z - q)(z - p - 2) dz = 0$$

или, после интегрирования и сокращений,

$$\left. \begin{aligned} p^2(1 - 6q + 3q^2) + 2p(3q^2 - 4q - 1) + \left(q^2 + 2q - \frac{17}{5}\right) &= 0, \\ (p + q)\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3}(pq + q - p - 2)\right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.2.6)$$

Из второго уравнения находим два значения  $p$ :

$$p_1 = \frac{q - \frac{7}{5}}{1 - q}, \quad p_2 = -q.$$

Числа  $p$  и  $q$  должны удовлетворять условиям  $-1 < p < q < 1$ . Для  $p_1$  неравенство  $-1 < p_1$ , как легко видеть, не может быть выполнено и значение  $p_1$  должно быть, поэтому, отброшено.

Подставив  $p = p_2 = -q$  в первое из равенств (18.2.6), получим уравнение для  $q$ :  $3q^4 - 12q^3 + 10q^2 + 4q - 3,4 = 0$ . Так как  $p = -q$  и должно быть  $p < q$ , то  $q > 0$  и нужно найти корень уравнения, лежащий на интервале  $(0, 1)$ . Можно показать, что на таком промежутке существует только один корень

$$q \approx 0,5333\ 2384\ 75.$$

Основными узлами на отрезке  $[x_n, x_n - h]$ , следовательно, должны быть

$$\alpha_n = x_n + 0,5(1 - q)h = x_n + h \cdot 0,2333\ 3807\ 63,$$

$$\beta_n = x_n + 0,5(1 + q)h = x_n + h \cdot 0,7666\ 6192\ 37.$$

Интерполируем  $f$  по ее значениям в узлах  $\beta_{n-1}$ ,  $\alpha_n$ ,  $\beta_n$ ,  $\alpha_{n+1}$ :

$$f(x) = \frac{(x - \alpha_n)(x - \beta_n)(x - \alpha_{n+1})}{(\beta_{n-1} - \alpha_n)(\beta_{n-1} - \beta_n)(\beta_{n-1} - \alpha_{n+1})} f(\beta_{n-1}) + \dots$$

$$\dots + r(x) = P(x) + r(x).$$

Тогда

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_n+h} f(t) dt = y_n + \int_{x_n}^{x_n+h} P(t) dt + R_n.$$

Вычисление интеграла от  $P$  приводит к следующей расчетной формуле

$$y_{n+1} = y_n + h \{0,4869\,0231\,79 [f(\alpha_n) + f(\beta_n)] + \\ + 0,0130\,976\,821 [f(\beta_{n-1}) + f(\alpha_{n+1})]\} + R_n. \quad (18.2.7)$$

Для нахождения остатка можно воспользоваться его общим представлением (18.1.9). Применительно к рассматриваемому случаю там нужно положить  $m=2$ ,  $N+1=4$ ,

$$\Omega\omega^2 = (x - \beta_{n-1})(x - \alpha_n)^2(x - \beta_n)^2(x - \alpha_{n+1}).$$

Несложные подсчеты дадут следующий результат:

$$R_n = -\frac{14,73\,2017}{4\,838\,400} h^7 f^{(6)}(\xi) = -0,0000\,0305 h^7 f^{(6)}(\xi). \quad (18.2.8)$$

$$\beta_{n-1} - h < \xi < \alpha_{n+1} + h.$$

Положим теперь  $k=2$ . К двум основным узлам на отрезке  $[x_n, x_n + h]$  присоединяются по два в каждом соседнем отрезке  $[x_n - h, x_n]$  и  $[x_n + h, x_n + 2h]$ . Схема узлов и их обозначения указаны на рис. 9.

Наивысшая алгебраическая степень точности равна 7.

Узлы квадратурной формулы будут такими:

$$\alpha_n = x_n + h \cdot 0,2389\,6172\,10, \quad \beta_n = x_n + h \cdot 0,7610\,3827\,90.$$

Расчетная формула есть:

$$y_{n+1} = y_n + h \{0,4830\,9244\,04 [f(\alpha_n) + f(\beta_n)] + \\ + 0,0173\,7142\,26 [f(\beta_{n-1}) + f(\alpha_{n+1})] - \\ - 0,0004\,6386\,30 [f(\alpha_{n-1}) + f(\beta_{n+1})]\} + R_n. \quad (18.2.9)$$

Для остатка  $R$  верна оценка

$$|R_n| \leq 0,0000\,0008\,h^9 M_8, \\ M_8 = \max_x |f^{(8)}(x)|, \quad \alpha_{n-1} \leq x \leq \beta_{n+1}.$$

Для всех приводимых ниже формул вычислялись узлы, расположенные симметрично относительно середины отрезка  $[x_n, x_n + h]$ . Отсутствие несимметрично расположенных узлов, дающих наивысшую степень точности, не проверялось.

Положим  $k=3$ . К двум узлам на отрезке  $[x_n, x_n + h]$  присоединяются по два узла в ближайших соседних отрезках  $[x_n - h, x_n]$ ,

$[x_n + h, x_n + 2h]$  и по одному узлу в следующих соседних отрезках  $[x_n - 2h, x_n - h]$  и  $[x_n + 2h, x_n + 3h]$ .

Расположение узлов и их обозначения приведены на рис. 10.

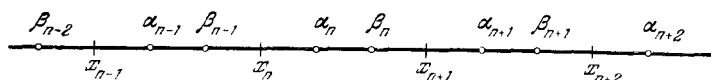


Рис. 10.

Наивысшая степень точности равна 9. Расчетная формула имеет вид:

$$y_{n+1} = y_n + h \{ 0,4825\,9372\,50 [f(\alpha_n) + f(\beta_n)] + \\ + 0,0179\,7222\,21 [f(\beta_{n-1}) + f(\alpha_{n+1})] - 0,0005\,7826\,47 \times \\ \times [f(\alpha_{n-1}) + f(\beta_{n+1})] + 0,0000\,123177 [f(\beta_{n-2}) + f(\alpha_{n+2})] \} + R_n. \quad (18.2.10)$$

Узлы ее суть

$$\alpha_n = x_n + h \cdot 0,2396\,3009\,31, \quad \beta_n = x_n + h \cdot 0,7603\,6990\,69.$$

Для остатка  $R_n$  справедлива оценка

$$|R_n| \leq 0,0000\,0000\,3h^{11}M_{10}, \quad M_{10} = \max_x |f^{(10)}(x)|, \quad \beta_{n-2} \leq x \leq \alpha_{n+2}.$$

Наконец, примем  $k=4$  и к двум основным узлам  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  присоединим еще восемь узлов, лежащих по четыре слева и справа от  $[x_n, x_n + h]$  в двух парах соседних отрезков  $\{x_n - 2h, x_n - h\}$ ,  $\{x_n - h, x_n\}$  и  $\{x_n + h, x_n + 2h\}$ ,  $\{x_n + 2h, x_n + 3h\}$  (см. рис. 11)

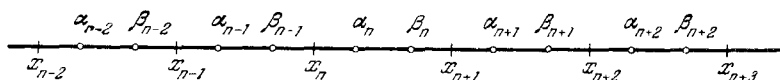


Рис. 11.

Наивысшая алгебраическая степень точности равна 11 и квадратурная формула, для которой эта точность достигается, есть

$$y_{n+1} = y_n + h \{ 0,4791\,1316\,68 [f(\alpha_n) + f(\beta_n)] + \\ + 0,0215\,3229\,32 [f(\beta_{n-1}) + f(\alpha_{n+1})] - 0,0013\,6329\,27 \times \\ \times [f(\alpha_{n-1}) + f(\beta_{n+1})] + 0,0001\,2360\,65 [f(\beta_{n-2}) + f(\alpha_{n+2})] - \\ - 0,0000\,0577\,38 [f(\alpha_{n-2}) + f(\beta_{n+2})] \} + R_n, \quad (18.2.11)$$

$$|R_n| \leq 0,0000\,0000\,011h^{13}M_{12},$$

$$M_{12} = \max_x |f^{(12)}(x)|, \quad \alpha_{n-2} \leq x \leq \beta_{n+2},$$

$$\alpha_n = x_n + h \cdot 0,2434\,6008\,65, \quad \beta_n = x_n + h \cdot 0,7565\,3991\,35.$$

III. В заключение приведем несколько квадратурных формул, требующих три значения функции  $f$  на каждый шаг вычислений.

Пусть на  $[x_n, x_n + h]$  (см. рис. 12) берутся три узла  $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ . Предположим сначала, что к ним присоединяются по одному ближайшему узлу на двух соседних отрезках  $[x_n - h, x_n]$  и  $[x_n + h, x_n + 2h]$ .

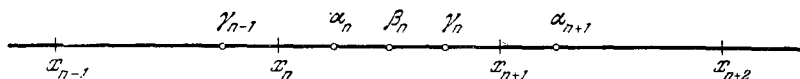


Рис. 12.

Наивысшая возможная степень точности равна 7 и соответствующая квадратурная формула такова:

$$y_{n+1} = y_n + h \{0,4001\,0365\,66 f(\beta_n) + 0,2934\,8934\,91 [f(\alpha_n) + f(\gamma_n)] + \\ + 0,0064\,5882\,26 [f(\gamma_{n-1}) + f(\alpha_{n+1})]\} + R_n, \quad (18.2.12)$$

$$\alpha_n = x_n + h \cdot 0,1351\,8355\,61,$$

$$\beta_n = x_n + h \cdot 0,5,$$

$$\gamma_n = x_n + h \cdot 0,8648\,1644\,39,$$

$$|R_n| \leq 0,0000\,0000\,24 h^9 M_8, \quad M_8 = \max_x |f^{(8)}(x)|, \quad \gamma_{n-1} \leq x \leq \alpha_{n+1}.$$

Если в соседних с  $[x_n, x_n + h]$  отрезках  $[x_n - h, x_n]$  и  $[x_n + h, x_n + 2h]$  (см. рис. 13) берется по два узла, то наивысшая алгебраическая степень точности формулы равна 9.

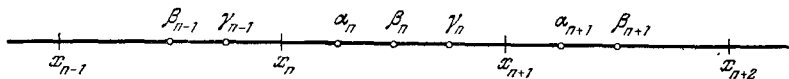


Рис. 13.

Расчетная формула имеет следующий вид:

$$y_{n+1} = y_n + h \{0,3876\,2754\,18 f(\beta_n) + 0,2978\,1275\,62 \times \\ \times [f(\alpha_n) + f(\gamma_n)] + 0,0084\,8089\,32 [f(\gamma_{n-1}) + f(\alpha_{n+1})] - \\ - 0,0001\,0742\,03 [f(\beta_{n-1}) + f(\beta_{n+1})]\} + R_n; \quad (18.2.13)$$

$$\alpha_n = x_n + h \cdot 0,1414\,5832\,89, \quad \beta_n = x_n + h \cdot 0,5,$$

$$\gamma_n = x_n + h \cdot 0,8585\,4167\,11,$$

$$|R_n| \leq 0,0000\,0000\,0002 h^{11} M_{10},$$

$$M_{10} = \max_x |f^{(10)}(x)|, \quad \beta_{n-1} \leq x \leq \beta_{n+1}.$$

Наконец, когда на отрезках  $[x_n - h, x_n]$  и  $[x_n + h, x_n + 2h]$  (см. рис. 14) взять по три узла, получится формула, приводимая ниже и имеющая степень точности, равную 11.

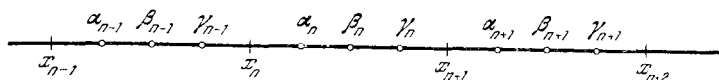


Рис. 14.

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} = & y_n + h \{ 0,3813\,4284\,93 f(\beta_n) + 0,2998\,6684\,13 \times \\
 & \times [f(\alpha_n) + f(\gamma_n)] + 0,0096\,7804\,71 [f(\gamma_{n-1}) + f(\alpha_{n+1})] - \\
 & - 0,0002\,2289\,47 [f(\beta_{n-1}) + f(\beta_{n+1})] + \\
 & + 0,0000\,0658\,16 [f(\alpha_{n-1}) + f(\gamma_{n+1})] \} + R_n; \quad (18.2.14) \\
 \alpha_n = & x_n + h \cdot 0,1446\,9855\,58, \quad \beta_n = x_n + h \cdot 0,5, \\
 \gamma_n = & x_n + h \cdot 0,8553\,0144\,42, \\
 |R_n| \leq & 0,0000\,0000\,0000\,3h^{13}M_{12}, \\
 M_{12} = & \max_x |f^{(12)}(x)|, \quad \alpha_{n-1} \leq x \leq \gamma_{n+1}.
 \end{aligned}$$

Пример. Вычислялся эллиптический интеграл 1-го рода

$$y(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \quad \text{при } k^2 = 0,5.$$

Вычисления проводились по формуле (18.2.7) с шагом  $h = 0,1$ . Формула содержит 4 узла и степень точности ее равна 5. На каждый шаг  $h = 0,1$  вычисления требовали двух значений интегрируемой функции.

Для сравнения интеграл был вычислен также по формуле (см. (17.1.5)):

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} = & y_n + h \left[ \frac{f_n + f_{n+1}}{2} - \frac{1}{12} \frac{\Delta^2 f_{n-1} + \Delta^2 f_n}{2} + \right. \\
 & \left. + \frac{11}{720} \cdot \frac{\Delta^4 f_{n-2} + \Delta^4 f_{n-1}}{2} - \dots \right] \dots \quad (18.2.15)
 \end{aligned}$$

Здесь шаг был принят в два раза меньшим  $h = 0,05$  с тем, чтобы на каждый отрезок длины 0,1 приходилось бы также два значения  $f$ . Было взято два варианта формулы (18.2.15)

1) с четырьмя узлами  $x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$ ,

2) с шестью узлами  $x_{n-2}, x_{n-1}, \dots, x_{n+3}$ .

В первом случае формула (18.2.15) содержит столько же узлов, что и (18.2.7). В последнем же случае, она имеет ту же алгебраическую степень точности 5, как и (18.2.7). Точные значения интеграла

взяты из известных таблиц Лежандра \*). Погрешности найденных значений напечатаны увеличенными в  $10^{10}$  раз

$x$	Точное значение $y(x)$	Найденное по формуле (18.2.7)	Погрешность $\times 10^{10}$
0,0	0,	0,	0
0,1	0 1002 5119 46	0,1002 5119 47	—1
0,2	0,2020 3892 48	0,2020 3892 51	—3
0,3	0,3070 5493 05	0,3070 5493 12	—7
0,4	0,4173 4515 97	0,4173 4516 12	—15
0,5	0,5356 2273 28	0,5356 2273 70	—42
0,6	0,6658 4782 54	0,6658 4783 90	—1 36
0,7	0,8144 8928 40	0,8144 8934 76	—6 36
0,8	0,9939 0712 63	0,9939 0739 32	—16 69

$x$	Значение, найденное по формуле (18.2.15) с 4 узлами	Погрешность $\times 10^{10}$	Значение, найденное по формуле (18.2.15) с 6 узлами	Погрешность $\times 10^{10}$
0,00	0		0	
0,05	0,0500 3121 82		0,0500 3128 81	
0,10	0,1002 5105 23	14 23	0,1002 5119 65	—19
0,15	0,1508 5266 47		0,1508 5289 27	
0,20	0,2020 3860 18	32 30	0,2020 3892 97	—49
0,25	0,2540 2625 15		0,2540 2670 37	
0,30	0 3070 5432 81	60 24	0,3070 5494 16	—1 11
0,35	0,3613 9094 30		0,3613 9177 30	
0,40	0,4173 4405 30	110 67	0,4173 4518 61	—2 64
0,45	0,4752 7550 59		0,4752 7707 68	
0,50	0,5356 2057 49	215 79	0,5356 2280 57	—7 29
0,55	0,5989 1615 32		0,5989 1942 55	
0,60	0,6658 4306 44	476 10	0,6658 4807 73	—25 19
0,65	0,7372 9250 74		0,7373 5064 71	
0,70	0,8144 7623 23	1305 17	0,8144 9056 09	—127 69
0,75	0,8991 2206 67		0,8992 0046 74	
0,80	0,9938 5271 13	5441 50	0,9939 2099 17	—1386 54

\*) A. M. Legendre, Legendres Tafeln der elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung, Stuttgart, 1831.

## ГЛАВА 19

### МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ НЕСКОЛЬКО ПРЕДШЕСТВУЮЩИХ ЗНАЧЕНИЙ ИНТЕГРАЛА

#### § 1. Содержание задачи

В двух предыдущих главах были рассмотрены отдельные вопросы теории методов численного неопределенного интегрирования, когда для нахождения следующего значения интеграла используется только одно его предыдущее значение. Расчетные схемы, отвечающие таким методам, всегда устойчивы относительно начальных ошибок и ошибок округлений. Действительно, при естественном требовании, чтобы вычисления были точными для  $f \equiv 0$  и функции  $y(x)$ , сохраняющей постоянное значение, расчетная формула должна иметь вид:

$$y_{n+1} = y_{n-k} + \sum_{j=1}^m B_{nj} f(\xi_{nj}) + r_n.$$

Она принадлежит к числу формул с положительными коэффициентами  $A_i$  и обладает устойчивостью обоих указанных типов, как это было выяснено в конце главы 16.

Разработка методов расчета, которые для нахождения  $y_{n+1}$  используют не одно, а несколько предшествующих значений  $y_k$  ( $k \leq n$ ), является задачей более трудной, так как стремление достигнуть наивысшую алгебраическую степень точности здесь не всегда может быть совмещено с требованием устойчивости вычислительной схемы.

Ниже будет рассмотрен один из способов построения расчетных формул, когда такое совмещение возможно.

Пусть для вычисления на отрезке  $x_0 \leq x \leq X$  функции

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt$$

принята произвольная сетка точек  $x_k$  ( $k = 0, 1, \dots, N$ ;  $x_k < x_{k+1}$ ). Допустим, что вычисления доведены до точки  $x_n$  и последнее найденное значение есть  $y(x_n)$ . При вычислении следующего значения

$y(x_{n+1})$  можно воспользоваться любыми уже найденными значениями  $y(x_k)$  ( $k \leq n$ ) и несколькими значениями  $y' = f$ . Будем считать, что производная  $y'$  известна всюду на отрезке  $[x_0, X]$  и мы ничем не стеснены в выборе узлов, где берутся значения  $f$ , кроме числа таких значений.

Это есть задача интерполирования функции  $y$  в одной фиксированной точке  $x_{n+1}$  по нескольким значениям самой функции и производной от нее  $y' = f(x)$ . Из дальнейшего изложения будет ясно, что в задаче полезно различать узлы трех перечисленных ниже видов.

Пусть  $y(z)$  есть любая функция, определенная и дифференцируемая на некотором отрезке  $[a, b]$ . Возьмем на  $[a, b]$   $r+s+l$  различных точек

$$\left. \begin{array}{lll} \xi_1, & \xi_2, & \dots, \xi_r, \\ \xi_{r+1}, & \xi_{r+2}, & \dots, \xi_{r+s}, \\ \xi_{r+s+1}, & \xi_{r+s+2}, & \dots, \xi_{r+s+l}. \end{array} \right\} \quad (19.1.1)$$

Будем считать, что в первых  $r$  из них известны значения функции  $y(z)$ :  $y(\xi_1), \dots, y(\xi_r)$ , в следующих  $s$  — как значения функции, так и значения производной  $y(\xi_j), y'(\xi_j)$  ( $j = r+1, \dots, r+s$ ) и в остальных  $l$  — значения только производной  $y'(\xi_j)$  ( $j = r+s+1, \dots, r+s+l$ ).

Узлы, указанные в первой, второй и третьей строках таблицы (19.1.1), станем называть соответственно *простыми*, *двойными* и *дополнительными*. Предположим, что, кроме того, взята точка,  $x \in [a, b]$ , отличная от всех простых и двойных узлов. Но мы не исключаем заранее возможность ее совпадения с одним из дополнительных узлов. Выберем произвольно  $r+s$  чисел  $\alpha_j$  ( $j = 1, 2, \dots, r+s$ ) и  $s+l$  чисел  $\beta_j$  ( $j = r+1, \dots, r+s+l$ ), значения которых будут определены позже, и рассмотрим равенство

$$y(x) = \sum_{j=1}^{r+s} \alpha_j y(\xi_j) + \sum_{j=r+1}^{r+s+l} \beta_j y'(\xi_j) + R. \quad (19.1.2)$$

Если отбросить  $R$ , получим приближенное равенство, могущее служить для вычисления  $y(x)$ :

$$y(x) \approx \sum_{j=1}^{r+s} \alpha_j y(\xi_j) + \sum_{j=r+1}^{r+s+l} \beta_j y'(\xi_j). \quad (19.1.3)$$

Степень точности его определяется как обычно: говорят, что (19.1.3) имеет алгебраическую степень точности  $m$ , если оно выполняется точно для всех степеней аргумента  $y(z) = z^k$ , от  $k = 0$  до  $k = m$ , и не верно для  $y = z^{m+1}$ . Выясним, какую наивысшую степень точности может иметь (19.1.3) и каковы условия ее достижения. Верхняя граница для  $m$  дается следующей простой теоремой.



**Теорема 1.** При любых  $\alpha_j, \beta_j$  и любом расположении точек  $\xi_j$  и  $x$  степень точности  $m$  (19.1.3) всегда меньше  $r + 2s + 2l$ :

$$m < r + 2s + 2l.$$

**Доказательство.** Достаточно показать, что всегда существует многочлен степени не выше  $r + 2s + 2l$ , для которого равенство (19.1.3) не верно.

Допустим сначала, что ни один дополнительный узел не совпадает с  $x$  и рассмотрим многочлен

$$y(z) = (z - \xi_1) \dots (z - \xi_r)(z - \xi_{r+1})^2 \dots (z - \xi_{r+s+l})^2 = A(z). \quad (19.1.4)$$

Степень его равна  $r + 2s + 2l$ .

Непосредственно видно, что  $A(\xi_j) = 0$  при  $j = 1, \dots, r + s + l$  и  $A'(\xi_j) = 0$  при  $j \geq r + 1$ . Правая часть (19.1.3) для такой функции  $y$  обращается в нуль. Левая же часть  $y(x) = A(x) \neq 0$  ввиду  $x \neq \xi_j$  и равенство (19.1.3) не может быть верным.

Пусть теперь один из дополнительных узлов, например  $\xi_{r+s+l}$ , совпадает с  $x$ . Введем многочлен  $B(z)$  степени  $r + 2s + 2l - 2$ :

$$B(z) = \frac{A(z)}{(z - \xi_{r+s+l})^2}.$$

Когда  $B'(x) \neq 0$ , положим

$$y(z) = B(z) \left[ z - x - \frac{B(x)}{B'(x)} \right].$$

Это есть многочлен степени  $r + 2s + 2l - 1$ . Правая часть (19.1.3) для него, как нетрудно проверить, обращается в нуль. Левая же часть  $y(x) = -B^2(x)(B'(x))^{-1} \neq 0$  и равенство (19.1.3) не выполняется. В этом случае степень точности (19.1.3) меньше, чем  $r + 2s + 2l - 1$ .

Если  $B'(x) = 0$ , то достаточно положить  $y(z) = B(z)$ , чтобы равенство (19.1.3) также не выполнялось. Здесь степень точности (19.1.3) должна быть меньше  $r + 2s + 2l - 2$ .

Из теоремы следует, что степень точности  $m$  равенства (19.1.3) самое большее может быть равна  $r + 2s + 2l - 1$ . Позже будет установлено, что значение  $m = r + 2s + 2l - 1$  действительно может быть достигнуто путем надлежащего выбора коэффициентов  $\alpha_j, \beta_j$  и дополнительных узлов  $\xi_j$  ( $j > r + s$ ).

Из приведенного же выше доказательства теоремы видно, что когда какой-либо дополнительный узел  $\xi_j$  ( $j > r + s$ ) совпадает с  $x$ , степень точности (19.1.3) обязательно меньше  $r + 2s + 2l - 1$  и, наверное, не достигает своего наибольшего значения. Поэтому всюду дальше будем считать все узлы  $\xi_j$  отличными от точки  $x$ .

## § 2. Условия, которые должны выполняться при достижении наивысшей степени точности

Если потребовать, чтобы (19.1.3) было точным для степеней  $x^k$  при  $k = 0, 1, \dots, r + 2s + 2l - 1$ , получится следующая система  $r + 2s + 2l$  уравнений

$$\sum_{j=1}^{r+s} \alpha_j \xi_j^k + \sum_{j=r+1}^{r+s+l} \beta_j k \xi_j^{k-1} = x^k \quad (k = 0, 1, \dots, r + 2s + 2l - 1). \quad (19.2.1)$$

Система исследуется простыми средствами, если ее сравнить с решением вспомогательной интерполяционной задачи.

Пусть в простых узлах даны значения функции

$$y(\xi_j) \quad (j = 1, \dots, r). \quad (19.2.2)$$

В двойных и во всех дополнительных узлах даны как значения функции, так и значения производной

$$y(\xi_j), y'(\xi_j) \quad (j = r + 1, \dots, r + s + l). \quad (19.2.3)$$

По всем этим величинам нужно интерполировать значение  $y$  в точке  $x$ . Взяв произвольные числа  $\alpha'_j$  ( $j = 1, \dots, r + s + l$ ) и  $\beta'_j$  ( $j = r + 1, \dots, r + s + l$ ), составим, подобно предыдущему, приближенное равенство

$$y(x) \approx \sum_{j=1}^{r+s+l} \alpha'_j y(\xi_j) + \sum_{j=r+1}^{r+s+l} \beta'_j y'(\xi_j). \quad (19.2.4)$$

Здесь можно распорядиться выбором  $r + 2s + 2l$  коэффициентов  $\alpha'_j$ ,  $\beta'_j$ . Потребуем, чтобы равенство (19.2.4) было точным для степеней аргумента  $y = x^k$  от  $k = 0$  до  $k = r + 2s + 2l - 1$ . Это даст систему  $r + 2s + 2l$  линейных уравнений для  $\alpha'_j$ ,  $\beta'_j$ :

$$\sum_{j=1}^{r+s+l} \alpha'_j \xi_j^k + \sum_{j=r+1}^{r+s+l} \beta'_j k \xi_j^{k-1} = x^k \quad (k = 0, 1, \dots, r + 2s + 2l - 1). \quad (19.2.5)$$

Определитель системы, если коэффициенты при величинах  $\alpha'_j$  поместить в первые  $r + s + l$  столбцов и коэффициенты при  $\beta'_j$  — в следующие  $s + l$ , запишется так

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_{r+s+l} & 1 & \dots & 1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_{r+s+l}^2 & 2\xi_{r+1} & \dots & 2\xi_{r+s+l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Относительно него известно, что он отличен от нуля\*), если только  $\xi_i \neq \xi_j$  ( $i, j = 1, \dots, r+s+l$ ;  $i \neq j$ ). Последнее условие в рассматриваемой задаче выполняется.

Ввиду этого система (19.2.5) имеет и при этом единственное решение, каковы бы ни были точки  $\xi_j$ , различные между собой. Связь между системами (19.2.1) и (19.2.5) дается следующими двумя легко проверяемыми утверждениями.

1. Пусть система (19.2.1) имеет решение. Это решение единственное и для значений неизвестных  $\alpha'_j$  и  $\beta'_j$ , удовлетворяющих системе (19.2.5), верны равенства

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_j &= \alpha_j \quad (j=1, \dots, r+s), \quad \alpha'_{r+s+1}=0, \dots, \alpha'_{r+s+l}=0, \\ \beta'_j &= \beta_j \quad (j=r+1, \dots, r+s+l). \end{aligned} \right\} \quad (19.2.6)$$

Действительно, предположим, что числа  $\alpha_j$  ( $j=1, \dots, r+s$ ) и  $\beta_j$  ( $j=r+1, \dots, r+s+l$ ) образуют решение системы (19.2.1). При соединим к ним еще  $l$  чисел  $\alpha_{r+s+1}=0, \dots, \alpha_{r+s+l}=0$ . Полученная система  $r+2s+2l$  чисел будет, как сразу же видно, удовлетворять системе (19.2.5) и поэтому должны, ввиду единственности решения системы (19.2.5), выполняться равенства (19.2.6).

2. Если числа  $\alpha'_j$  и  $\beta'_j$  образуют решения системы (19.2.5) и при этом выполнены условия

$$\alpha'_{r+s+1}=0, \dots, \alpha'_{r+s+l}=0. \quad (19.2.7)$$

система (19.2.1) имеет решение и верны равенства

$$\left. \begin{aligned} \alpha_j &= \alpha'_j \quad (j=1, \dots, r+s), \\ \beta_j &= \beta'_j \quad (j=r+1, \dots, r+s+l). \end{aligned} \right\} \quad (19.2.8)$$

Для доказательства достаточно заметить, что если выполнены условия (19.2.7), уравнения (19.2.5) совпадут с (19.2.1).

Решение системы (19.2.5) легко строится при помощи известных теорем теории интерполирования. Пусть  $y(x)$  есть многочлен степени  $\leq r+2s+2l-1$ . Когда  $\alpha'_j$  и  $\beta'_j$  удовлетворяют уравнениям

\*) В этом можно просто убедиться, если взять определитель Вандермонда порядка  $r+2s+2l$  от переменных  $\xi_1, \dots, \xi_{r+2s+2l}$ :

$$W(\xi_1, \dots, \xi_{r+2s+2l}) = \prod_{\substack{i > j \\ i, j=1 \\ i, j=1}}^{r+2s+2l} (\xi_i - \xi_j). \quad (*)$$

вычислить от него смешанную производную по  $\xi_{r+s+l+1}, \dots, \xi_{r+2s+2l}$  и положить затем  $\xi_{r+s+l+1} = \xi_{r+1}, \dots, \xi_{r+2s+2l} = \xi_{r+s+l}$ . После выполнения всех операций получится  $\Delta$ . Но все указанные операции равносильны тому, чтобы в произведении (\*) вычеркнуть множители  $(\xi_{r+s+l+j} - \xi_{r+j})$  ( $j=1, \dots, s+l$ ). Оставшееся после этого новое произведение будет, очевидно, отличным от нуля.

(19.2.5), равенство (19.2.4) для  $y(x)$  должно выполняться точно. Величина  $x$  может иметь в нем любое значение. Оно дает интерполирование  $y(x)$  по значениям этого многочлена в точках  $\xi_j$  ( $j \leq r + s + l$ ) и по значениям производной  $y'$  в точках  $\xi_j$  ( $r + 1 \leq j \leq r + s + l$ ). Это есть интерполирование с  $r$  простыми узлами  $\xi_j$  ( $j \leq r$ ) и  $s + l$  двойными узлами  $\xi_j$  ( $r < j \leq r + s + l$ ). Интерполяционный многочлен может быть представлен формулой Эрмита (3.3.8), которая в разбираемом случае будет иметь вид:

$$y(x) = \sum_{j=1}^r \frac{A_j(x)}{(x - \xi_j) A'(\xi_j)} y(\xi_j) + \sum_{j=r+1}^{r+s+l} \frac{A_j(x)}{A_j(\xi_j)} \left[ 1 - (x - \xi_j) \frac{A'_j(\xi_j)}{A_j(\xi_j)} \right] y(\xi_j) + \sum_{j=r+1}^{r+s+l} \frac{A_j(x)}{A_j(\xi_j)} (x - \xi_j) y'(\xi_j), \quad (19.2.9)$$

$$A_j(x) = A(x)(x - \xi_j)^{-2}.$$

Правые части (19.2.4) и (19.2.9) должны совпадать и, ввиду произвола значений  $y(\xi_j)$  и  $y'(\xi_j)$ , коэффициенты  $\alpha'_j$  и  $\beta'_j$  должны быть равны соответствующим коэффициентам в (19.2.9). Условия (19.2.7) разрешимости системы (19.2.1) запишутся поэтому так:

$$\frac{A_j(x)}{A_j(\xi_j)} \left[ 1 - \frac{A'_j(\xi_j)}{A_j(\xi_j)} (x - \xi_j) \right] = 0 \quad (j = r + s + 1, \dots, r + s + l),$$

или, после сокращения на  $A_j(x) (A_j(\xi_j))^{-1}$  и деления на  $x - \xi_j$ .

$$\sum_{k=r+s+1}^{r+s+l} \frac{2}{\xi_j - \xi_k} + \sum_{k=1}^r \frac{2}{\xi_j - \xi_k} + \sum_{k=r+1}^{r+s} \frac{2}{\xi_j - \xi_k} + \frac{1}{\xi_j - x} = 0. \quad (19.2.10)$$

Знак  $'$ , поставленный у первой суммы, означает, что в ней должно быть пропущено слагаемое, отвечающее значению  $k = j$ .

Изложенное в § 2 позволяет высказать следующую теорему:

**Теорема 2.** Для того чтобы равенство (19.1.3) имело наименьшую алгебраическую степень точности  $r + 2s + 2l - 1$ , необходимо и достаточно выполнение условий:

- 1)  $\xi_j$  и  $x$  должны удовлетворять системе  $l$  уравнений (19.2.10),
- 2) Коэффициенты  $\alpha_j$  и  $\beta_j$  должны иметь значения

$$\left. \begin{aligned} \alpha_j &= \frac{A(x)}{(x - \xi_j) A'(\xi_j)} \quad (j = 1, \dots, r), \\ \alpha_j &= \frac{A_j(x)}{A_j(\xi_j)} \left[ 1 - (x - \xi_j) \frac{A'_j(\xi_j)}{A_j(\xi_j)} \right] \quad (j = r + 1, \dots, r + s), \\ \beta_j &= \frac{A_j(x)}{A(\xi_{jj})} (x - \xi_j) \quad (j = r + 1, \dots, r + s + l). \end{aligned} \right\} \quad (19.2.11)$$

### § 3. Существование и число интерполирований наивысшей степени точности

Исследование системы (19.2.10) можно выполнить вполне наглядным путем, если воспользоваться некоторой электростатической аналогией\*). В комплексной плоскости возьмем две точки  $z_1$  и  $z_2$  и поместим в них электрические заряды масс  $e_1$  и  $e_2$ . Будем считать, что они действуют друг на друга с силой, обычной для плоского электрического поля, когда численное значение силы обратно пропорционально первой степени расстояния и пропорционально массам зарядов.

Считая коэффициент пропорциональности равным единице, для силы, с которой заряд в  $z_1$  действует на заряд в  $z_2$ , получим значение

$$\frac{e_1 e_2}{z_2 - z_1}.$$

Предположим теперь, что в плоскости взяты  $r + s + 1$  точек  $x, \xi_1, \dots, \xi_{r+s}$ . В точки  $x, \xi_1, \dots, \xi_r$  помещены заряды единичной массы, а в точки  $\xi_{r+1}, \dots, \xi_{r+s}$  — заряды массы два и все эти точки закреплены. Наряду с ними рассмотрим  $l$  свободных зарядов массы 2. Комплексные координаты их назовем  $\xi_{r+s+1}, \dots, \xi_{r+s+l}$ .

В состоянии равновесия системы равнодействующие всех сил, приложенных к каждому из свободных зарядов, должны равняться нулю

$$\sum_{k=r+s+1}^{r+s+l} \frac{2 \cdot 2}{\xi_j - \xi_k} + \sum_{k=1}^r \frac{2 \cdot 1}{\xi_j - \xi_k} + \sum_{k=r+1}^{r+s} \frac{2 \cdot 2}{\xi_j - \xi_k} + \frac{2 \cdot 1}{\xi_j - x} = 0.$$

Если здесь сократить на 2 и перейти к комплексным сопряженным величинам, получатся равенства (19.2.10), являющиеся условиями того, что (19.1.3) имеет наивысшую степень точности.

Указанная аналогия делает очевидными нижеследующие утверждения\*\*) о системе (19.2.10).

1. Если  $x, \xi_1, \dots, \xi_{r+s}$  суть любые комплексные числа и если  $\xi_{r+s+1}, \dots, \xi_{r+s+l}$  удовлетворяют системе (19.2.10), то точки  $\xi_{r+s+1}, \dots, \xi_{r+s+l}$  лежат в наименьшем выпуклом многоугольнике, содержащем  $x, \xi_1, \dots, \xi_{r+s}$ . В частности, когда  $x, \xi_1, \dots, \xi_{r+s}$  суть

\*) Сходная аналогия указана в § 4 гл. 13 для корней многочлена Якоби.

\*\*) Они могут быть доказаны арифметическим путем, подобно тому, как это было сделано Т. Стильтесом в аналогичном случае при рассмотрении им задачи о существовании решения дифференциального уравнения в форме многочлена (Собр. сочинений Groningen, v. 1, 1914, p. 434 — 439). О связи изучаемой интерполяционной задачи с дифференциальными уравнениями будет сказано в § 6.

действительные числа, точки  $\xi_{r+s+1}, \dots, \xi_{r+s+l}$  лежат внутри наименьшего отрезка, содержащего  $x$  и  $\xi_j$  ( $j=1, \dots, r+s$ ).

2. Пусть  $x, \xi_1, \dots, \xi_{r+s}$  действительны и различны. На числовой оси между соответствующими точками будет  $r+s$  промежутков. Предположим, что заранее указан закон распределений дополнительных узлов по этим промежуткам, т. е. указано сколько дополнительных узлов должно находиться в каждом промежутке. Число способов распределения легко подсчитывается и равно  $\frac{(r+s+l-1)!}{l!(r+s-1)!}$ . Существует решение системы (19.2.10), для которого дополнительные узлы имеют заранее предписанный закон распределения между  $x, \xi_1, \dots, \xi_{r+s}$ .

3. Условимся отождествлять решения (19.2.10), получающиеся друг из друга перестановкой  $\xi_{r+s+1}, \dots, \xi_{r+s+l}$ . Тогда для каждого закона распределения дополнительных узлов по промежуткам между  $x, \xi_1, \dots, \xi_{r+s}$  система (19.2.10) будет иметь только одно решение.

Результаты, полученные в последних двух параграфах, позволяют высказать об интерполяционном равенстве (19.1.3) формулируемую ниже теорему,

**Теорема 3.** *Каковы бы ни были наперед заданные  $x, \xi_1, \dots, \xi_{r+s}$ , действительные и различные между собой, дополнительные узлы  $\xi_{r+s+1}, \dots, \xi_{r+s+l}$  всегда можно выбрать  $\frac{(r+s+l-1)!}{l!(r+s-1)!}$  способами так, чтобы равенство (19.1.3) имело наивысшую алгебраическую степень точности  $m=r+2s+2l-1$ . При этом, если заранее указать, сколько из общего числа  $l$  дополнительных узлов должно принадлежать каждому из промежутков между  $x, \xi_1, \dots, \xi_{r+s}$ , то среди возможных способов выбора вспомогательных узлов всегда существует один и только один способ, для которого эти узлы имеют предписанное распределение.*

## § 4. Остаток интерполирования и минимизация его оценки

Рассмотрим остаток интерполяционной формулы (19.1.3):

$$R(y) = y(x) - \sum_{j=1}^{r+s} \alpha_j y(\xi_j) - \sum_{j=r+1}^{r+s+l} \beta_j y'(\xi_j). \quad (19.4.1)$$

Допустим, что для нее выполняются уравнения (19.2.10) и она имеет наивысшую степень точности  $r+2s+2l-1$ . При этом предположении интерполирование (19.1.3) совпадает с вспомогательным интерполированием (19.2.4), имеющим ту же степень точности  $r+2s+2l-1$  и рассмотренным в § 2. Последнее имеет  $r$  простых узлов  $\xi_j$  ( $j=1, \dots, r$ ) и  $s+l$  двойных узлов  $\xi_j$  ( $j=r+1, \dots, r+s+l$ ). Его остаток, если считать, что функция  $y$  имеет на

отрезке  $[a, b]$  непрерывную производную порядка  $r + 2s + 2l$ , может быть найден при помощи теоремы, приведенной в конце главы 3, и имеет значение

$$R(y) = \frac{A(x)}{(r + 2s + 2l)!} y^{(r + 2s + 2l)}(\xi), \quad \xi \in [a, b], \quad (19.4.2)$$

$$A(x) = (x - \xi_1) \dots (x - \xi_r)(x - \xi_{r+1})^2 \dots (x - \xi_{r+s+l})^2. \quad (19.4.3)$$

Он будет совпадать с остатком (19.4.1).

В классе функций, определенном неравенством  $|f^{(r+2s+2l)}(z)| \leq M$ ,  $z \in [a, b]$ , для остатка  $R(y)$  имеет место точная оценка

$$|R(y)| \leq \frac{|A(x)|}{(r + 2s + 2l)!} \cdot M. \quad (19.4.4)$$

Наивысшая степень точности  $r + 2s + 2l - 1$  может быть достигнута не одним, а многими, вообще говоря, способами и число их равно  $(r + s + l - 1)! [l!(r + s - 1)!]^{-1}$ . Произвол в выборе одного из таких способов может быть использован для уменьшения остатка.

В оценке (19.4.4) от выбора узлов зависит только множитель  $|A(x)|$  и можно стремиться к тому, чтобы придать ему возможно малое значение.

Для задачи вычисления неопределенного интеграла, в том виде как она была сформулирована в начале § 1, точкой интерполирования  $x$  был табличный узел  $x_{n+1}$ . Простые и двойные узлы  $\xi_j$  ( $j = 1, \dots, r + s$ ) должны быть выбраны из числа табличных узлов, предшествующих  $x_{n+1}$ :  $x_k$  ( $k \leq n$ ).

Для дополнительных узлов  $\xi_j$  ( $j > r + s$ ) необходимо указать закон их распределения по промежуткам между  $x_{n+1}$  и  $\xi_j$  ( $j \leq r + s$ ).

Допустим, для определенности, что дополнительные узлы перенумерованы в порядке роста координат.

Если воспользоваться электростатической аналогией, указанной в § 3, решению задачи о минимуме  $|A(x)|$  можно придать вполне наглядную форму. Это обстоятельство позволяет не проводить строгого арифметического доказательства результата и ограничиться только кратким описанием наглядной стороны задачи.

Допустим на некоторое время, что простые и двойные узлы как-то избраны, закреплены и можно распорядиться только распределением дополнительных узлов. Рассмотрим множители

$$x_{n+1} - \xi_{r+s+1}, \dots, x_{n+1} - \xi_{r+s+l}, \quad (19.4.5)$$

отвечающие им в разложении  $A(x_{n+1})$ .

Они имеют смысл расстояний от свободных зарядов, находящихся в точках  $\xi_j$  ( $j > r + s$ ) до заряда в точке  $x_{n+1}$ . Все они достигнут наименьшего значения в том положении равновесия, когда свободные заряды будут помещены в промежуток, прилежащий к  $x_{n+1}$ . Это

верно при любом положении закрепленных зарядов  $\xi_j$  ( $j \leq r+s$ ) слева от  $x_{n+1}$ .

Будем считать, что все свободные заряды находятся в указанном промежутке и займемся выбором положений закрепленных зарядов. Для уменьшения соответствующих им множителей

$$x_{n+1} - \xi_1, \dots, x_{n+1} - \xi_r, (x_{n+1} - \xi_{r+1})^2, \dots, (x_{n+1} - \xi_{r+s})^2$$

в  $A(x_{n+1})$ , также как и для дальнейшего возможного уменьшения множителей (19.4.5), выгодно, очевидно, закрепленные заряды  $\xi_j$  ( $j \leq r+s$ ) разместить так, чтобы электрические массы расположились бы возможно ближе к  $x_{n+1}$ : двойные заряды  $\xi_j$  ( $j = r+1, \dots, r+s$ ) нужно поместить в  $s$  табличных узлов  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-s+1}$ , ближайших к  $x_{n+1}$ , и единичные заряды — в следующие за ними ближайшие узлы  $x_{n-s}, \dots, x_{n-s-r+1}$ .

Изложенные простые соображения приводят к формулируемому ниже правилу выбора узлов, которое принято для всех частных случаев в § 7.

*Оценка остатка (19.4.4) достигает своего наименьшего значения, если:*

- 1) *дополнительные узлы помещены внутрь отрезка  $[x_n, x_{n+1}]$ .*
- 2) *двойные узлы взяты в точках  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-s+1}$ .*
- 3) *за простые узлы приняты  $x_{n-s}, \dots, x_{n-s-r+1}$ .*

## § 5. Условия положительности коэффициентов $\alpha_j$

В теории неопределенного интегрирования интерполяционные формулы (19.1.3) с положительными коэффициентами  $\alpha_j$  играют, ввиду устойчивости соответствующих им вычислительных схем, особенно важную роль. Выясним, при каких условиях можно достигнуть положительности коэффициентов  $\alpha_j$  для формул, имеющих наивысшую алгебраическую степень точности.

Пусть  $\xi_j$  ( $1 \leq j \leq r$ ) есть один из простых узлов. Рассмотрим соответствующий ему коэффициент  $\alpha_j$  (см. (19.2.11)):

$$\alpha_j = \frac{A(x)}{(x - \xi_j) A'(\xi_j)}.$$

Мы должны считать  $x = x_{n+1}$ . Узлы  $\xi_k$  ( $k = 1, \dots, r+s+1$ ) предполагаются расположенными так, как это указано в конце предыдущего параграфа. Ввиду того, что  $A(x_{n+1})$  и  $x_{n+1} - \xi_j$  положительны, знак  $\alpha_j$  совпадает со знаком  $A'(\xi_j)$ :

$$A'(\xi_j) = (\xi_j - \xi_1) \dots (\xi_j - \xi_{j-1}) (\xi_j - \xi_{j+1}) \dots (\xi_j - \xi_r) (\xi_j - \xi_{r+1})^2 \dots (\xi_j - \xi_{r+s+1})^2.$$



Отсюда видно, что значения  $A'(\xi_j)$ , отвечающие двум соседним простым узлам, будут иметь противоположные знаки.

Стремясь сделать все коэффициенты положительными, мы должны поэтому полагать либо  $r=0$  и не брать ни одного простого узла, либо  $r=1$  и взять лишь один простой узел.

Возьмем теперь двойной узел  $\xi_j$  ( $r < j \leq r+s$ ). Отвечающий ему коэффициент  $\alpha_j$ , если в (19.2.11) положить  $x = x_{n+1}$ , будет таким:

$$\alpha_j = \frac{A_j(x_{n+1})(\xi_j - x_{n+1})}{A_j(\xi_j)} \left[ \frac{1}{\xi_j - x_{n+1}} + \frac{A'_j(\xi_j)}{A_j(\xi_j)} \right],$$

$$A_j(z) = A(z)(z - \xi_j)^{-2}.$$

Так как  $\xi_k$  лежат левее  $x_{n+1}$ , а простые узлы  $\xi_k$  ( $k \leq r$ ) расположены левее всех двойных узлов, множитель, стоящий перед прямой скобкой, всегда отрицателен. Условием неотрицательности  $\alpha_j$  будет неравенство

$$\frac{1}{\xi_j - x_{n+1}} + \frac{A'_j(\xi_j)}{A_j(\xi_j)} = \frac{1}{\xi_j - x_{n+1}} + \sum_{k=1}^r \frac{1}{\xi_j - \xi_k} + \sum_{k=r+1}^{r+s+1} \frac{2}{\xi_j - \xi_k} \leq 0. \quad (19.5.1)$$

Оно имеет простой физический смысл. Возвратимся к электростатической аналогии условий достижения наивысшей степени точности и рассмотрим систему электрических зарядов, о которых говорились в третьем параграфе. В точке  $\xi_j$  расположена масса 2 и величина, стоящая слева в (19.5.1), есть половина численного значения равнодействующей всех сил отталкиваний, которое испытывает этот заряд со стороны прочих зарядов системы.

Неравенство (19.5.1) означает, что такая равнодействующая может быть направлена только в отрицательную сторону по числовой оси.

Точка  $x_{n+1}$  и все дополнительные узлы лежат всегда справа от  $\xi_j$  и заряды, в них расположенные, будут отталкивать заряд в  $\xi_j$  налево по оси. Отсюда с очевидностью вытекает утверждение, дающее ответ на вопрос о возможности сделать все коэффициенты  $\alpha_j$  для двойных узлов неотрицательными.

Каковы бы ни были  $r$  и  $s$ , существует такое  $l_0$ , что при всяких  $l \geq l_0$  все коэффициенты  $\alpha_j$  ( $j = r+1, \dots, r+s$ ) будут не меньше нуля.

Предположим, что значения функции  $y(x)$  вычисляются на сетке равностоящих точек  $x_k = x_0 + kh$  ( $k = 0, 1, \dots$ ). Пусть, например, взят один двойной узел ( $s = 1$ ) в точке  $\xi_2 = x_n$  и один простой узел ( $r = 1$ ) в точке  $\xi_1 = x_{n-1}$ . Коэффициент  $\alpha_1$ , отвечающий простому узлу заведомо положителен. Условие положительности  $\alpha_2$

запишется в форме неравенства

$$\frac{1}{x_n - x_{n+1}} + \frac{1}{x_n - x_{n-1}} + \sum_{j=3}^{2+l} \frac{2}{x_n - \xi_j} = \sum_{j=3}^{2+l} \frac{2}{x_n - \xi_j} < 0.$$

Оно выполняется при  $l \geq 1$ , так как все  $\xi_j > x_n$ .

Допустим теперь, что простых узлов нет ( $r=0$ ) и взяты два двойных узла ( $s=2$ ) в точках  $x_n$  и  $x_{n-1}$ . Условия положительности коэффициентов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  будут такими:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_{n-1} - x_{n+1}} + \frac{2}{x_{n-1} - x_n} + \sum_{j=3}^{2+l} \frac{2}{x_{n-1} - \xi_j} &= \\ &= -\frac{1}{2h} - \frac{2}{h} + \sum_{j=3}^{2+l} \frac{2}{x_{n-1} - \xi_j} < 0, \\ \frac{1}{x_n - x_{n+1}} + \frac{2}{x_n - x_{n-1}} + \sum_{j=3}^{2+l} \frac{2}{x_n - \xi_j} &= -\frac{1}{h} + \frac{2}{h} + \sum_{j=3}^{2+l} \frac{2}{x_n - \xi_j} < 0, \\ x_n < \xi_j < x_n + h \quad (j=3, \dots, 2+l). \end{aligned}$$

Они также выполняются при всяких  $l \geq 1$ .

## § 6. Связь с задачей решения дифференциального уравнения при помощи многочлена

Покажем, что уравнения (19.2.10) равносильны условию существования у некоторого дифференциального уравнения решения в форме многочлена степени  $l$ .

Напомним, что (19.2.10) получено после сокращения из предшествующего ему равенства и может быть записано в форме

$$A_j(\xi_j) + (\xi_j - x) A'_j(\xi_j) = \left\{ \frac{d}{dz} [(z - x) A_j(z)] \right\}_{z=\xi_j} = 0,$$

или, если подставить сюда вместо  $A_j(z)$  его значение  $A_j(z) = A(z)(z - \xi_j)^{-2}$ ,

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{(z - x) A(z)}{(z - \xi_j)^2} \right]_{z=\xi_j} = 0, \quad (j = r + s + 1, \dots, r + s + l). \quad (19.6.1)$$

Сейчас нам удобнее воспользоваться другими обозначениями. Введем многочлены  $\sigma(z)$  и  $\Pi_l(z)$ , отвечающие двойным и дополнительным узлам:

$$\sigma(z) = (z - \xi_{r+1}) \dots (z - \xi_{r+s}), \quad \Pi_l(z) = (z - \xi_{r+s+1}) \dots (z - \xi_{r+s+l}).$$

В ближайших рассуждениях  $x$  по своей роли ничем не будет отличаться от простых узлов  $\xi_1, \dots, \xi_r$ . Объединим  $x$  с ними и положим

$$p(z) = (z - x)(z - \xi_1) \dots (z - \xi_r), \quad (z - x) A(z) = p(z) \sigma^2(z) \Pi_l^2(z);$$

(19.6.1) примет форму

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{\rho \sigma^2 \Pi_l^2}{(z - \xi_j)^2} \right]_{z=\xi_j} = 0,$$

или, после несложных вычислений,

$$\Pi_l'(\xi_j) \left\{ \frac{d}{dz} \left[ \rho \sigma^2 \frac{d\Pi_l}{dz} \right] \right\}_{z=\xi_j} = 0.$$

Значения  $z = \xi_j$  ( $j > r + s$ ) являются простыми корнями  $\Pi_l(z)$ , поэтому  $\Pi_l'(\xi_j) \neq 0$  и должно быть

$$\left\{ \frac{d}{dz} \left[ \rho \sigma^2 \frac{d\Pi_l}{dz} \right] \right\}_{z=\xi_j} = 0 \quad (j > r + s). \quad (19.6.2)$$

Это говорит о том, что каждый корень  $\Pi_l(z)$  является одновременно корнем  $(\rho \sigma^2 \Pi_l')'$ . Ввиду простоты корней  $\Pi_l(z)$ ,  $(\rho \sigma^2 \Pi_l')'$  должен нацело делиться на  $\Pi_l(z)$ .

Кроме того,  $(\rho \sigma^2 \Pi_l')'$  делится на  $\sigma(z)$  и так как корни  $\sigma(z)$  отличны от корней  $\Pi_l(z)$ , то  $(\rho \sigma^2 \Pi_l')'$  нацело делится на произведение  $\sigma \Pi_l$ . Степень  $(\rho \sigma^2 \Pi_l')'$  равна  $r + 2s + l - 1$ . После деления его на  $\sigma \Pi_l$  получится многочлен степени  $r + s - 1$ . Обозначим его  $\rho(z)$ :

$$[\rho(z) \sigma^2(z) \Pi_l'(z)]' = \rho(z) \sigma(z) \Pi_l(z). \quad (19.6.3)$$

Последнее равенство можно рассматривать как дифференциальное уравнение второго порядка относительно  $\Pi_l(z)$  и можно высказать утверждение:

*Если выполняются условия (19.2.10), то существует такой многочлен  $\rho(z)$  степени  $r + s - 1$ , что  $\Pi_l(z)$  будет решением дифференциального уравнения (19.6.3).*

Доказательство обратного утверждения потребует нескольких предварительных замечаний об аналитических свойствах решений уравнения (19.6.3). Если в (19.6.3) выполнить дифференцирование и обе части разделить на  $\rho \sigma^2$ , то оно примет форму

$$\begin{aligned} \Pi_l''(z) + \left( \sum_{k=1}^r \frac{1}{z - \xi_k} + \sum_{k=r+1}^{r+s} \frac{2}{z - \xi_k} + \frac{1}{z - x} \right) \Pi_l'(z) + \\ + \left( \sum_{k=1}^{r+s} \frac{a_k}{z - \xi_k} + \frac{a_l}{z - x} \right) \Pi_l(z) = 0, \quad \sum_{k=0}^{r+s} a_k = 0. \end{aligned} \quad (19.6.4)$$

Особые точки уравнения суть  $x, \xi_1, \dots, \xi_{r+s}, \infty$ . Все они регулярные \*).

Алгебраическое уравнение, которое обычно называют определяющим и от корней которого зависит аналитическое строение канонических решений в окрестности этой точки, для нее будет либо  $\alpha(\alpha - 1) + \alpha = \alpha^2 = 0$ , либо  $\alpha(\alpha - 1) + 2\alpha = \alpha(\alpha + 1) = 0$ . Оно имеет либо двукратный корень  $\alpha = 0$ , либо корни  $\alpha = 0$  и  $\alpha = -1$ . В обоих случаях одно из канонических

\*) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, М. — Л., Гостехиздат, 3, ч. II, н° 98, 1949.

решений будет голоморфным в особой точке и отличным там от нуля, второе же решение — неограниченным в окрестности этой точки.

Будем теперь  $\rho(z)$  считать таким, что уравнение (19.6.3) имеет решение в виде целого многочлена степени  $l$ . Для всех особых точек  $x$  и  $\xi_j$  оно будет голоморфным каноническим решением и поэтому будет заведомо отличным от нуля в каждой из них. Корни  $\Pi_l(z)$  отличны от  $x$  и  $\xi_k$ , но тогда они простые, так как вне особых точек решение (19.6.4) не может иметь кратных корней. Обозначим их  $\xi_{r+s+1}, \dots, \xi_{r+s+l}$ .

Положим в (19.6.4)  $z$  равным какому-либо из этих корней  $\xi_j$ . При этом последний член с  $\Pi_l(z)$  исчезнет. Если, кроме того, обе части разделить на  $\Pi'_l(\xi_j)$ , то получится равенство

$$\frac{\Pi''_l(\xi_j)}{\Pi'_l(\xi_j)} + \sum_{k=1}^r \frac{1}{\xi_j - \xi_k} + \sum_{k=r+1}^{r+s} \frac{2}{\xi_j - \xi_k} + \frac{1}{\xi_j - x} = 0$$

$$(j = r + s + 1, \dots, r + s + l).$$

Оно только формой записи отличается от (19.2.10). Отсюда вытекает справедливость утверждения:

*Если  $\rho(z)$  таково, что уравнение (19.6.3) имеет решение в виде многочлена степени  $l$ , то корни этого многочлена  $\xi_{r+s+1}, \dots, \xi_{r+s+l}$  удовлетворяют системе уравнений (19.2.10).*

Таким образом нахождение узлов, при которых интерполирование (19.1.3) имеет наивысшую алгебраическую степень точности, равносильно разысканию решения дифференциального уравнения (19.6.3) в виде многочлена степени  $l$  и определению его корней.

## § 7. Формулы частного вида\*)

Каждая частная формула наивысшей степени точности определяется тремя параметрами  $r, s, l$ . В этом параграфе будут приведены такие формулы для нескольких первых значений  $r, s, l$ . Коэффициенты расчетных формул вычислялись при помощи равенств (19.2.11), для нахождения узлов было использовано дифференциальное уравнение\*\*) (19.6.3). Сетка точек  $x_n$  предполагается равноотстоящей с шагом  $h$ .

1.  $r = 1, s = 0$ . Здесь берется одно значение функции  $y(x)$  в точке  $x_n$  и  $l$  значений производной в дополнительных узлах между  $x_n$  и  $x_{n+1}$ . Последние выбираются так, чтобы расчетная формула имела наивысшую степень точности. Результат равносильно представлению  $y(x_{n+1})$  через  $y(x_n)$  в виде

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t) dt \quad (19.7.1)$$

\*) Значение коэффициентов и узлов были вычислены К. Е. Черным. Контроль, которому подвергались все результаты, позволяет думать, что погрешность не превышает единицы последней значащей цифры.

\*\*) Труды Математического института АН СССР 33 (1951). В. И. Крылов, Интерполирование наивысшего порядка точности в задаче неопределенного интегрирования.

и последующему вычислению интеграла посредством квадратурной формулы Гаусса

$$y_{n+1} = y_n + h [B_1 f(x_n + ht^{(1)}) + \dots + B_l f(x_n + ht^{(l)})],$$

где  $B_k$  и  $t^{(k)}$  — коэффициенты и узлы Гаусса для отрезка  $[0, 1]$ .

2.  $r=0$ ,  $s=1$ . Берется одно значение функции  $y(x)$  и одно значение производной  $y'(x)=f(x)$  в точке  $x_n$ . Кроме того, взяты значения производной в  $l$  дополнительных узлах между  $x_n$  и  $x_{n+1}$ . Наивысшая степень точности равна  $2l+1$ . Расчетная формула получится, если в равенстве (19.7.1) применить к интегралу квадратурную формулу А. А. Маркова с одним фиксированным узлом в точке  $x_n$  и  $l$  узлами внутри отрезка интегрирования.

Значения узлов и коэффициентов при  $l=1, 2, \dots, 6$  для канонического отрезка интегрирования  $[-1, +1]$  приведены в § 2 гл. 9.

3.  $r=1$ ,  $s=1$ . Для вычислений берется значение функции  $y$  в точке  $x_{n-1}$ , затем значение функции  $y$  и производной  $y'=f$  в точке  $x_n$  и  $l$  значений производной в дополнительных узлах между  $x_n$  и  $x_{n+1}$ . Наивысшая степень точности равна  $2l+2$ ;

$$y_{n+1} = A_{-1}y_{n-1} + A_0y_n + h \left[ B_0f(x_n) + \sum_{j=1}^l B_jf(x_n + ht^{(j)}) \right] + R.$$

Для остатка  $R$  может быть получено следующее представление:

$$R = \theta \frac{2h^{2l+3}}{(2l+3)!} \left[ \frac{l!(l+1)!}{(2l+1)!} \right]^2 f^{(2l+2)}(\xi), \quad 0 < \theta < 1, \quad x_{n-1} < \xi < x_{n+1}.$$

При  $l=1, 2, 3, 4$  узлы и коэффициенты имеют значения

$$l=1$$

$$A_{-1} = 0,0294 \ 3725$$

$$A_0 = 0,9705 \ 6275$$

$$B_0 = 0,3431 \ 458$$

$$B_1 = 0,6862 \ 915$$

$$t_1 = 2^{-0,5} = 0,7071 \ 068$$

$$l=2$$

$$A_{-1} = 0,0011 \ 13587$$

$$A_0 = 0,9988 \ 86413$$

$$B_0 = 0,1334 \ 818$$

$$B_1 = 0,5221 \ 058$$

$$B_2 = 0,3455 \ 260$$

$$t^{(1)} = 0,3879 \ 073$$

$$t^{(2)} = 0,8593 \ 118$$

$$l=3$$

$$A_{-1} = 0,0000 \ 4136 \ 036$$

$$A_0 = 0,9999 \ 5863 \ 964$$

$$B_0 = 0,0709 \ 5688$$

$$B_1 = 0,3458 \ 379$$

$$B_2 = 0,3776 \ 724$$

$$B_3 = 0,2055 \ 739$$

$$t^{(1)} = 0,2312 \ 666$$

$$t^{(2)} = 0,6124 \ 982$$

$$t^{(3)} = 0,9177 \ 954$$

$$l = 4$$

$$A_{-1} = 0,0000 \ 0147 \ 9556$$

$$A_0 = 0,9999 \ 9852 \ 0444$$

$$B_0 = 0,0440 \ 7358$$

$$B_1 = 0,2361 \ 168$$

$$B_2 = 0,3128 \ 314$$

$$B_3 = 0,2713 \ 300$$

$$B_4 = 0,1356 \ 498$$

$$t^{(1)} = 0,1507 \ 625$$

$$t^{(2)} = 0,4352 \ 756$$

$$t^{(3)} = 0,7366 \ 581$$

$$t^{(4)} = 0,9462 \ 337$$

4.  $r = 0$ ,  $s = 2$ . В точках  $x_{n-1}$ ,  $x_n$  взяты значения функции и производной и, кроме того, в  $l$  дополнительных узлах внутри  $[x_n, x_{n+1}]$  берутся значения производной. Формула имеет вид

$$y_{n+1} = A_{-1}y_{n-1} + A_0y_n + \\ + h \left[ B_{-1}f(x_{n-1}) + B_0f(x_n) + \sum_{j=1}^l B_jf(x_n + ht^{(j)}) \right] + R.$$

Наивысшая степень точности ее есть  $2l + 3$ . Остаток  $R$  представим в форме

$$R = \theta h^{2l+4} \cdot \frac{4}{(2l+4)!} \left[ \frac{l!(l+1)!}{(2l+1)!} \right]^2 f^{(2l+3)}(\xi), \quad 0 < \theta < 1,$$

$$x_{n-1} < \xi < x_{n+1}.$$

Узлы и коэффициенты для  $l = 1, 2, 3, 4$  приведены в таблице

$$l = 1$$

$$A_{-1} = 0,1625 \ 0915$$

$$A_0 = 0,8374 \ 9085$$

$$B_{-1} = 0,0445 \ 3258 \ 4$$

$$B_0 = 0,4921 \ 8941$$

$$B_1 = 0,6257 \ 8716$$

$$t^{(1)} = 0,7403 \ 1242$$

$$l = 2$$

$$A_{-1} = 0,0077 \ 6632 \ 6$$

$$A_0 = 0,9922 \ 3367$$

$$B_{-1} = 0,0015 \ 6068 \ 9$$

$$B_0 = 0,1640 \ 716$$

$$B_1 = 0,5242 \ 954$$

$$B_2 = 0,3178 \ 386$$

$$t^{(1)} = 0,4207 \ 573$$

$$t^{(2)} = 0,8717 \ 520$$

$$l = 3$$

$$A_{-1} = 0,0003 \ 6262 \ 95$$

$$A_0 = 0,9996 \ 3737 \ 05$$

$$B_{-1} = 0,0000 \ 5699 \ 653$$

$$B_0 = 0,0814 \ 3433$$

$$B_1 = 0,3609 \ 307$$

$$B_2 = 0,3658 \ 920$$

$$B_3 = 0,1920 \ 487$$

$$t^{(1)} = 0,2515 \ 111$$

$$t^{(2)} = 0,6333 \ 509$$

$$t^{(3)} = 0,9235 \ 139$$

$$l = 4$$

$$A_{-1} = 0,0000 \ 1576 \ 632$$

$$A_0 = 0,9999 \ 8423 \ 368$$

$$B_{-1} = 0,0000 \ 0203 \ 0488$$

$$B_0 = 0,0488 \ 5024$$

$$B_1 = 0,2491 \ 361$$

$$B_2 = 0,3124 \ 621$$

$$B_3 = 0,2613 \ 448$$

$$B_4 = 0,1282 \ 206$$

$$t^{(1)} = 0,1627 \ 293$$

$$t^{(2)} = 0,4540 \ 978$$

$$t^{(3)} = 0,7493 \ 776$$

$$t^{(4)} = 0,9492 \ 874$$

# ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

## ГЛАВА 20

### О МЕТОДАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ, ОСНОВАННЫХ НА ПРИВЕДЕНИИ МНОГОКРАТНОГО ИНТЕГРАЛА К ОДНОКРАТНЫМ

#### § 1. Предварительные замечания о «проблеме большого числа узлов»

Пусть  $E_m$  есть  $m$ -мерное числовое пространство, точки которого мы обозначим  $x = x(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , и  $\omega$  — некоторая область в нем. Предположим, что в  $\omega$  задана функция  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  и рассматривается интеграл

$$I(f) = \int_{\omega} f(x) d\omega = \int_{\omega} f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m.$$

Выберем в  $\omega$   $n$  точек  $x^1, \dots, x^n$  и возьмем  $n$  чисел  $A_1, \dots, A_n$ . Ниже будет рассматриваться следующее правило приближенного вычисления  $I(f)$ :

$$I(f) = \int_{\omega} f(x) d\omega \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x^i), \quad (20.1.1)$$

которое определяется «узлами»  $x^i$  и весовыми коэффициентами  $A_i$ . При выборе  $x^i$  мы, очевидно, должны пытаться возможно более точно решить две следующие задачи: 1. Расположить эти точки так, чтобы множество их давало бы достаточно хорошее приближение к области интегрирования  $\omega$ . Отметим попутно, что для решения такой задачи целесообразно, по-видимому, расположить точки  $x^i$  более густо около границы  $\omega$  и более редко внутри  $\omega$ . 2. Точки  $x^i$  должны быть избраны так, чтобы по значениям  $f(x^i)$  функции  $f$  во взятых узлах  $x^i$  можно было построить возможно точное приближение  $f$  того или иного вида — алгебраическим многочленом от  $x_1, \dots, x_m$ , рациональной функцией избранной формы, тригонометрическим многочленом и т. д. Необходимо обратить внимание на то, что здесь нужно построить приближение функции нескольких аргументов  $x_1, \dots, x_m$ ,

что значительно сложнее, чем приближение функций одного аргумента, с которыми мы встречались в предыдущих частях книги. Для достижения обоих указанных целей часто бывает необходимо взять большое число узлов.

Наконец, веса  $A_i$  правила следует определить, исходя из условия, чтобы равенство (20.1.1) для избранного способа приближения выполнялось возможно более точно в каком-то смысле, принятом нами для измерения точности.

Вероятно, можно считать ясным, что при заданной точности результата потребуется тем большее число  $n$  узлов  $x^i$ , чем выше размерность  $m$  пространства. Скорость же роста числа узлов  $n$  в зависимости от увеличения числа измерений  $m$  можно достаточно отчетливо пояснить на частном примере. Пусть область интегрирования  $\omega$  есть  $m$ -мерный единичный куб  $0 \leq x_j \leq 1$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ):

$$\int_{\omega} f(x) d\omega = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m.$$

Интегрирование по кубу в этой задаче естественно выполнить путем интегрирования по каждой из переменных  $x_1, \dots, x_m$ . Выбор правила интегрирования по координатам  $x_1, \dots, x_m$  определяется тем, сколь гладкой будет зависимость  $f$  от соответствующей переменной. Будем, для простоты, считать, что при интегрировании по всем переменным нами принята одна и та же квадратурная формула с  $p$  узлами, например, формула Гаусса:

$$\int_{\omega} f(x) d\omega \approx \sum_{j_1} \dots \sum_{j_m} A_{j_1} \dots A_{j_m} f(x_1^{j_1}, \dots, x_m^{j_m}).$$

Для применения этого правила потребуется найти  $f$  в  $p^m$  точках. Число этих значений может быть велико, даже если  $p$  не будет «большим», например, если мы берем правило Гаусса с 5 узлами, то для интегрирования по трехмерному, четырехмерному и т. д. кубу потребовалось бы знание  $f$  в 125, 625 и т. д. узлах.

Для вычисления кратных интегралов, в мере большей, чем для простых, важна задача уменьшения числа узлов, необходимых для получения требуемой точности результата. Для достижения этой цели следует использовать весь произвол, находящийся в распоряжении вычислителя: выбор системы координат, выбор правил квадратур, применяемых при интегрировании по отдельным переменным; вычислитель может воспользоваться геометрическими свойствами области  $\omega$  и т. д.

Задача построения кубатурных формул с возможно малым числом узлов будет изучаться в главе 22. В какой-то мере удовлетворительно ее удастся решить лишь в простейших случаях — для областей частного



вида или для небольшого числа узлов. Сложность задачи здесь зависит от двух причин. Если для однократного интеграла практически важная область интегрирования очень проста — ею является отрезок, то для кратных интегралов область интегрирования может иметь сложную форму, и этот факт сильно затрудняет проблему выбора узлов. Кроме того, интерполирование и приближение функций многих аргументов выполняется более сложно и менее исследовано, чем в случае одного аргумента.

## § 2. Влияние формы области на выбор правил интегрирования

В курсах анализа доказывается, что нахождение значения  $m$ -кратного интеграла (20.1.1) для областей  $\omega$  весьма общего вида может быть приведено к последовательному вычислению  $m$  однократных интегралов. Каждый из них может быть вычислен по какому-либо из правил, рассмотренных во второй части книги. Выбор правила должен быть, во-первых, согласован со свойствами интегрируемой функции  $f$  и, во-вторых, учитывать геометрическую форму области интегрирования  $\omega$ .

Наибольший интерес для нас будет иметь второй из этих двух факторов — влияние формы области, и ему мы уделим главное внимание в последующем изложении. Так как идеи, лежащие в основании выбора, одинаковы для интегралов любой кратности, мы проследим их на разборе нескольких примеров вычисления двойного интеграла.

Рассмотрим двойной интеграл в декартовых координатах:

$$I = \int\limits_{\omega} \int f(x, y) dx dy. \quad (20.2.1)$$

При некоторых предположениях об области  $\omega$  вычисление  $I$  можно привести к нахождению двух однократных (простых) интегралов

$$I = \int_a^b F(x) dx, \quad (20.2.2)$$

$$F(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy, \quad (20.2.3)$$

$y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ ,  $a$  и  $b$  определяются в зависимости от области  $\omega$  и имеют хорошо известные значения.

Выбор квадратурного правила для вычисления (20.2.3) зависит от свойств  $f$  и, в частности, от ее особенностей. Желая сосредоточить внимание на выяснении значения, какое будет иметь вид области  $\omega$ , мы предположим функцию  $f$  непрерывной всюду в  $\omega$ , достаточно

гладкой там и в остальном произвольной. В этих условиях для (20.2.3) целесообразно избрать какое-либо правило интегрирования с постоянной весовой функцией, например, правило Гаусса.

Что же касается интеграла (20.2.2), то он представляет больший интерес. Можно предвидеть, что среди правил интегрирования гауссово или другие правила, рассчитанные на постоянную весовую функцию, не во всех случаях будут давать наилучший результат или близкий к нему. Такие правила не будут учитывать влияние на  $F$  формы области  $\omega$ .

Легко понять, что естественной весовой функцией будет следующая: построим сечение области  $\omega$  прямой линией, проходящей через точку  $x$  параллельно оси ординат. Чем большую длину будет иметь это сечение, тем большее влияние на образование численного значения  $I$  будет иметь узкая полоска около этого сечения. Поэтому за весовую функцию в (20.2.2) можно принять

$$p(x) = y_2(x) - y_1(x) \quad (20.2.4)$$

и преобразовать интеграл к виду:

$$I = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)] \Phi(x) dx, \quad \Phi(x) = \frac{F(x)}{y_2(x) - y_1(x)}. \quad (20.2.5)$$

Вес (20.2.4), по-видимому, достаточно полно учитывает форму области  $\omega$  и для гладких функций  $f$  должен привести к хорошим по точности результатам. Но столь полный учет влияния формы области  $\omega$  на выбор правила квадратур, вероятно, нецелесообразно делать, так как тогда для каждой области интегрирования пришлось бы брать свою весовую функцию. Задачу выбора веса  $p(x)$  можно упростить и перейти от  $p(x)$  к подходяще выбранному каноническому весу на основании следующих простых соображений. Для определенности изложения будем говорить о правилах наивысшей степени точности.

Рассмотрим произвольную весовую функцию  $p(x)$  и соответствующее ей правило наивысшей алгебраической степени точности

$$I_1 = \int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k). \quad (20.2.6)$$

Оно будет, вообще говоря, иметь тем меньшую погрешность, чем более точное приближение многочленом степени  $2n - 1$  будет допускать  $f$ .

Наряду с  $p(x)$  рассмотрим другую весовую функцию  $\rho(x)$  такую, чтобы отношение  $\frac{p(x)}{\rho(x)} = q(x)$  было достаточно гладкой функцией, нигде на  $[a, b]$  не обращающейся в нуль;  $p(x) = \rho(x) q(x)$ . Присое-

диним множитель  $q(x)$  к интегрируемой функции  $f$ :  $q(x)f(x) = F(x)$  и рассмотрим интеграл  $I_1$  с весом  $\rho(x)$ :  $I_1 = \int_a^b \rho(x) F(x) dx$ .

Предположим, что для вычисления его применяем правило наивысшей степени точности, соответствующее весу  $\rho(x)$ :

$$I_1 = \int_a^b \rho(x) F(x) dx \approx \sum_{k=1}^n B_k F(z_k), \quad (20.2.7)$$

$z_k$  есть корни многочлена степени  $n$  из ортогональной системы, принадлежащей весу  $\rho(x)$ .

Если  $q(x)$  есть функция высокого порядка дифференцируемости или аналитическая функция с особыми точками, лежащими далеко от  $[a, b]$ , то можно ожидать, что функции  $f(x)$  и  $F(x) = q(x)f(x)$  будут допускать приближения многочленами степени  $2n-1$ , близкие по точности. Поэтому можно надеяться на то, что формулы (20.2.6) и (20.2.7), служащие для вычисления одного и того же интеграла  $I_1$ , будут иметь приблизительно одинаковые погрешности и мы мало приобрем или потеряем в точности, если перейдем от веса  $\rho(x)$  к весу  $p(x)$ .

Это позволяет при вычислении интеграла (20.2.2) переходить от «естественной» весовой функции  $\rho(x) = y_2(x) - y_1(x)$  к другому более простому весу  $p(x)$ . Такой переход во многих случаях не будет связан с значительной потерей точности, но позволит упростить задачу вычисления, так как новый вес может быть взят одинаковым для многих областей и для него заранее могут быть найдены узлы и коэффициенты. Наиболее просто естественную весовую функцию  $p = y_2 - y_1$  приводить, если это возможно, к одному из классических весов, для которых нужные таблицы составлены с большой полнотой. Полезное значение здесь имеет вес Якоби  $\rho(x) = (b-x)^\alpha (x-a)^\beta$ , зависящий от двух параметров  $\alpha, \beta$ , выбор которых позволяет охватить широкий класс областей  $\omega$ .

Пусть отрезок  $[a, b]$  — конечный и пусть можно показателям  $\alpha$  и  $\beta$  придать такие значения, чтобы отношение

$$q(x) = \frac{y_2(x) - y_1(x)}{(b-x)^\alpha (x-a)^\beta}, \quad a \leq x \leq b,$$

было ограничено сверху и снизу положительными числами:  $0 < m \leq q(x) \leq M < \infty$ . В этом случае для вычисления интеграла (20.2.5) можно воспользоваться весом  $\rho(x) = (b-x)^\alpha (x-a)^\beta$ :

$$I = \int_a^b (x-a)^\beta (b-x)^\alpha \Psi(x) dx, \quad \Psi(x) = (x-a)^{-\beta} (b-x)^{-\alpha} F(x).$$

Например, если область интегрирования имеет форму, изображенную на рис. 15, причем контур области  $\lambda$  имеет в точке  $A$  с прямой  $x=a$  соприкосновение первого порядка\*), то можно считать  $\alpha=0$ ,  $\beta=0,5$  и за весовую функцию принять

$$p(x) = \sqrt{x-a}.$$

Интеграл

$$I = \int_a^b \sqrt{x-a} \psi(x) dx, \quad \psi(x) = (x-a)^{-0,5} F(x)$$

может быть вычислен при помощи формулы (7.3.9).

Если область  $\sigma$  имеет вид, изображенный на рис. 16, и контур ее  $\lambda$  с прямыми  $x=a$  и  $x=b$  также имеет соприкосновение

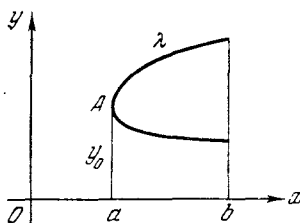


Рис. 15.

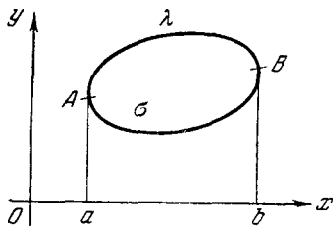


Рис. 16.

первого порядка, то за весовую функцию можно принять

$$p(x) = \sqrt{(x-a)(b-x)}.$$

К вычислению интеграла

$$I = \int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)} \psi(x) dx, \quad \psi(x) = [(x-a)(b-x)]^{-0,5} F(x)$$

может быть применено равенство (7.3.11).

Рассмотрим еще пример выбора квадратурных правил. Пусть дан двойной интеграл в полярной системе координат  $I = \int \int_{\omega} F(r, \varphi) r dr d\varphi$  и область  $\omega$  определяется неравенствами:  $0 \leq r \leq R = R(\varphi)$ ,  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ .

\*) Если принять ординату  $y$  за независимую переменную, то уравнение контура  $\lambda$  вблизи точки  $A$  может быть записано в форме  $x = a + c_2(y-y_0)^2 + c_3(y-y_0)^3 + \dots$ ,  $c_2 \neq 0$ .

Вводя вспомогательную переменную  $\rho = \frac{r}{R}$ , можно вычисление  $I$  привести к нахождению двух простых интегралов

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(\varphi) R^2(\varphi) d\varphi, \quad (20.2.8)$$

$$\Phi(\varphi) = \int_0^1 F[\rho R(\varphi), \varphi] \rho d\rho. \quad (20.2.9)$$

Для вычисления (20.2.9) можно воспользоваться весовой функцией якобиевого вида  $p = \rho$ .

В интеграле же (20.2.8), если считать  $\Phi(\varphi)$  достаточно гладкой функцией, естественным весом будет  $p(\varphi) = R^2(\varphi)$ . Однако выбор типа приближения зависит от величины угла  $\beta - \alpha$  интегрирования. Если  $\beta - \alpha = 2\pi$  и интегрирование производится по полному плоскому углу,  $\Phi(\varphi)$  будет  $2\pi$ -периодической функцией полярного угла  $\varphi$ . Для вычисления (20.2.8) тогда естественно воспользоваться правилами наивысшей тригонометрической точности. Если же  $\beta - \alpha < 2\pi$ , то к (20.2.8) можно применить правила, основанные на приближении  $\Phi$  алгебраическими многочленами от  $\varphi$ .

## ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ

## § 1. Алгебраическое интерполирование функций многих переменных

Многочлен  $P_m(x) = P_m(x_1, \dots, x_n)$  степени  $m$  от  $n$  переменных  $x_1, \dots, x_n$  можно записать в виде

$$P_m(x) = Q_0(x) + Q_1(x) + \dots + Q_m(x), \quad (21.1.1)$$

где  $Q_k(x)$  — однородный многочлен степени  $k$ . Многочлен  $Q_k(x)$  представляет собой линейную комбинацию с постоянными коэффициентами одночленов степени  $k$ :

$$Q_k(x) = \sum a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

Подсчитаем число слагаемых в этой сумме, т. е. число одночленов  $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$  таких, что  $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_n \geq 0$  и  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$ .

Рассмотрим произведение  $n$  рядов — геометрических прогрессий

$$\sum_{\alpha_1=0}^{\infty} x_1^{\alpha_1} \cdot \sum_{\alpha_2=0}^{\infty} x_2^{\alpha_2} \dots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} x_n^{\alpha_n} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = j} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}. \quad (21.1.2)$$

Предполагаем, что  $|x_i| < 1$ . Число одночленов степени  $k$  равно числу слагаемых в правой части (21.1.2), удовлетворяющих условию  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$ . Положим в равенстве (21.1.2)  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = t$ . Получим

$$\left( \sum_{\alpha=0}^{\infty} t^{\alpha} \right)^n = \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j. \quad (21.1.3)$$

Очевидно, коэффициент при  $t^k$ , обозначенный через  $b_k$ , равен числу слагаемых, удовлетворяющих условию  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$ . Запишем (21.1.3) в виде

$$(1 - t)^{-n} = \sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j.$$

Чтобы найти  $b_k$ , напомним разложение функции  $(1-t)^{-n}$  в ряд по степеням  $t$ . С этой целью вычислим  $(n-1)$ -ю производную от обеих частей разложения  $(1-t)^{-1} = 1+t+t^2+\dots$ ,  $|t| < 1$ . Получим

$$(n-1)!(1-t)^{-n} = (n-1)! + \frac{n!}{1!}t + \dots + \frac{(n+k-1)!}{k!}t^k + \dots$$

Отсюда видно, что

$$b_k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}. \quad (21.1.4)$$

Найдем еще число всех одночленов степени не выше  $m$  от  $n$  переменных. Оно равно числу одночленов, фигурирующих в представлении (21.1.1) многочлена степени  $m$ . Общий однородный многочлен степени  $m$  от  $n+1$  переменных  $x_1, \dots, x_n, t$  можно записать в виде

$$t^m Q_0 + t^{m-1} Q_1 + \dots + t Q_{m-1} + Q_m, \quad (21.1.5)$$

где  $Q_k = Q_k(x)$  — однородный многочлен степени  $k$  от  $n$  переменных. Ясно, что число слагаемых одночленов в (21.1.1) и (21.1.5) одинаково. Но число слагаемых в (21.1.5) — это число одночленов  $m$ -й степени от  $n+1$  переменных, которое по (21.1.4) равно

$$M(m, n) = \frac{(m+n)!}{m!n!}. \quad (21.1.6.)$$

Это и есть число одночленов степени не выше  $m$  от  $n$  переменных.

В дальнейшем через  $n$  всегда будем обозначать число переменных. Условимся в случае  $n=1$  переменную  $x_1$  обозначать через  $x$ , в случае  $n=2$  переменные  $x_1$  и  $x_2$  будем обозначать соответственно  $x$  и  $y$ .

Из формулы (21.1.6) при  $n=1$  получаем, что число одночленов степени не выше  $m$  от одной переменной  $x$  равно  $M(m, 1) = m+1$ . Этими одночленами являются  $1, x, x^2, \dots, x^m$ .

При  $n=2$  формула (21.1.6) дает число одночленов степени не выше  $m$  от двух переменных  $x$  и  $y$ , равное  $M(m, 2) = 0,5(m+1) \times (m+2)$ . Выпишем эти одночлены:

$$\begin{aligned} &1, \\ &x, y, \\ &x^2, xy, y^2, \\ &\vdots \\ &x^m, x^{m-1}y, x^{m-2}y^2, \dots, y^m. \end{aligned}$$

В  $i$ -й строке выписаны все одночлены степени  $i-1$ . В последующем будем пользоваться терминами «алгебраическая гиперповерхность» и «алгебраическая кривая». *Алгебраической гиперповерхностью*

порядка  $m \geq 1$  в  $n$ -мерном пространстве называют множество точек  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , удовлетворяющих уравнению

$$Q(x) = 0,$$

где  $Q(x)$  — многочлен степени  $m$  от  $n$  переменных. При  $n = 2$  алгебраическую гиперповерхность называют *алгебраической кривой*.

Пусть левая часть уравнения  $Q(x) = 0$  алгебраической гиперповерхности  $S_m$  порядка  $m$  разлагается в поле комплексных чисел на неприводимые множители

$$Q(x) = Q_1(x) Q_2(x) \dots Q_r(x) \quad (21.1.7)$$

(степень каждого  $Q_i(x)$  больше или равна единице). Алгебраические гиперповерхности  $Q_i(x) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) называются *компонентами* гиперповерхности  $S_m$ . Гиперповерхность  $S_m$  называется *неприводимой*, если в разложении (21.1.7)  $r = 1$ , и называется *приводимой*, если  $r > 1$ .

Будем пользоваться следующей теоремой.

**Теорема 1.** *Алгебраическая гиперповерхность  $Q(x) = 0$  порядка  $q$  и гиперплоскость  $L(x) \equiv a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + a = 0$  или пересекаются по алгебраической гиперповерхности порядка не выше  $q$  в  $(n-1)$ -мерном пространстве, или гиперплоскость  $L(x) = 0$  является компонентой гиперповерхности  $Q(x) = 0$ :  $Q(x) = R(x) L(x)$ , где  $R(x)$  — многочлен степени  $q-1$ .*

Особо выделим формулировку теоремы 1 при  $n = 2$ : *алгебраическая кривая порядка  $q$  и прямая или пересекаются не более, чем в  $q$  точках, или прямая является компонентой алгебраической кривой.*

Теорема 1 является следствием теоремы Безу. Приведем формулировку теоремы Безу для  $n = 2$ . *Две алгебраические кривые порядков  $q$  и  $r$ , не имеющие общих компонент, пересекаются точно в  $qr$  точках (с учетом кратностей). В число точек пересечения включаются и бесконечно удаленные точки пересечения.*

Укажем, как построить  $M(m, 2) = 0,5(m+1)(m+2)$  точек на плоскости, не лежащих на алгебраической кривой порядка  $m$ . Берем три точки  $T_1, T_2, T_3$ , не лежащие на прямой. Проведем прямую  $L_2$ , не проходящую ни через одну из точек  $T_1, T_2, T_3$ , и выберем на ней три точки  $T_4, T_5, T_6$ . Точки  $T_i$  ( $i = 1, \dots, 6$ ) не лежат на кривой второго порядка  $C_2$ . В противном случае кривая  $C_2$  и прямая  $L_2$  пересекались бы в трех точках, откуда по теореме 1 мы получили бы, что  $C_2$  распадается на две прямые. Это невозможно, так как  $T_1, T_2, T_3$  не лежат на прямой.

Проведем прямую  $L_3$ , не проходящую ни через одну из точек  $T_1, \dots, T_6$ , и возьмем на ней четыре точки  $T_7, T_8, T_9, T_{10}$ . Из теоремы 1 следует, что десять точек  $T_1, \dots, T_{10}$  не лежат на алгебраической кривой третьего порядка  $C_3$ . Если бы  $T_1, \dots, T_{10}$  лежали



на  $C_3$ , то  $C_3$  пересекалась бы с  $L_3$  в четырех точках. Отсюда по теореме 1 следовало бы, что  $C_3$  распадается на прямую  $L_3$  и кривую второго порядка. Но это исключено, так как  $T_1, \dots, T_6$  не лежат на кривой второго порядка. Очевидно, что такое построение можно выполнить для произвольного  $m$ .

Подобным же образом можно построить  $M(m, 3) = \frac{(m+3)!}{m!3!}$  точек в трехмерном пространстве, не лежащих на алгебраической поверхности порядка  $m$ . Возьмем любую точку  $T_1$  и проведем плоскость  $L_1$ , не проходящую через  $T_1$ . На плоскости  $L_1$  выберем три точки  $T_2, T_3, T_4$ , не лежащие на прямой. Ясно, что  $T_1, \dots, T_4$  не лежат в одной плоскости. Проведем плоскость  $L_2$ , не проходящую ни через одну из точек  $T_1, \dots, T_4$ . На плоскости  $L_2$  возьмем шесть точек  $T_5, \dots, T_{10}$ , не лежащих на кривой второго порядка. Точки  $T_1, \dots, T_{10}$  не лежат ни на какой поверхности  $S_2$  второго порядка. В противном случае поверхность  $S_2$  и плоскость  $L_2$  пересекались бы по кривой более, чем второго порядка. По теореме 1  $S_2$  распадается на две плоскости, из которых одна есть  $L_2$ . Это невозможно, так как  $T_1, \dots, T_4$  не лежат в одной плоскости. Далее, проводим плоскость  $L_3$ , не содержащую ни одну из точек  $T_1, \dots, T_{10}$ . На  $L_3$  берем десять точек  $T_{11}, \dots, T_{20}$ , не лежащих на кривой третьего порядка. Из теоремы 1 получаем, что  $T_1, \dots, T_{20}$  не лежат ни на какой поверхности  $S_3$  третьего порядка и т. д.

Ясно, что указанные построения можно выполнить в пространстве любого числа измерений  $n$ .

Рассмотрим теперь задачу о построении интерполяционного многочлена от  $n$  переменных  $x_1, \dots, x_n$ . Для простоты записи будем считать  $n = 2$ . Будем действовать по аналогии с тем, как строится интерполяционный многочлен в одномерном случае ( $n = 1$ ). Возьмем на плоскости  $N$  точек — узлов интерполирования  $(x_i, y_i)$ . Требуется построить многочлен  $P_m(x, y)$  степени  $m$  относительно  $x$  и  $y$ , который в узлах принимает заданные значения

$$P_m(x_i, y_i) = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (21.1.8)$$

Запишем многочлен с неопределенными коэффициентами

$$P_m(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + \dots + a_{M(m, 2)}y^m,$$

где  $M(m, 2)$  определяется формулой (21.1.6). Равенства (21.1.8) приводят к линейной алгебраической системе относительно неизвестных  $a_i$ :

$$a_1 + a_2x_i + a_3y_i + \dots + a_{M(m, 2)}y_i^m = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (21.1.9)$$

Естественно потребовать, чтобы число уравнений совпадало с числом неизвестных. Это накладывает ограничение на число узлов  $N = M(m, 2) = 0,5(m+1)(m+2)$ .

Потребуем, чтобы определитель системы (21.1.9)

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & \dots & y_1^m \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & \dots & y_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_M & y_M & x_M^2 & \dots & y_M^m \end{vmatrix} \quad (21.1.10)$$

был отличен от нуля. Это условие обеспечивает существование и единственность интерполяционного многочлена.

Определитель (21.1.10) равен нулю тогда и только тогда, когда имеется линейная зависимость между его столбцами. Это, в свою очередь, равносильно тому, что узлы  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, M(m, 2)$ ) лежат на некоторой алгебраической кривой порядка  $m$ . Следовательно, определитель (21.1.10) отличен от нуля тогда и только тогда, когда узлы не лежат ни на какой алгебраической кривой порядка  $m$ .

Укажем представление интерполяционного многочлена в форме, аналогичной формуле Лагранжа. Мы должны указать многочлен степени не выше  $m$ , который удовлетворяет условиям

$$P_m(x_i, y_i) = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, M(m, 2)),$$

при этом узлы не лежат на алгебраической кривой порядка  $m$ .

Построим многочлен влияния узла  $(x_k, y_k)$ , т. е. многочлен степени  $m$ , который равен единице в узле  $(x_k, y_k)$  и нулю во всех остальных узлах. Такой многочлен существует, так как узлы не лежат на алгебраической кривой порядка  $m$ . Запишем его с помощью определителей.

Определитель

$$\omega_k(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & x & y & x^2 & \dots & y^m \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & \dots & y_1^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{k-1} & y_{k-1} & x_{k-1}^2 & \dots & y_{k-1}^m \\ 1 & x_{k+1} & y_{k+1} & x_{k+1}^2 & \dots & y_{k+1}^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_M & y_M & x_M^2 & \dots & y_M^m \end{vmatrix} \quad (21.1.11)$$

представляет собой многочлен степени  $m$ , который обращается в нуль в узлах  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, M(m, 2)$ ). Так как узлы не лежат на алгебраической кривой порядка  $m$ , то  $\omega_k(x_k, y_k) \neq 0$ . Многочлен  $\frac{\omega_k(x, y)}{\omega_k(x_k, y_k)}$  и есть требуемый многочлен

влияния узла  $(x_k, y_k)$ . Интерполяционный многочлен  $P_m(x, y)$  записывается в виде

$$P_m(x, y) = \sum_{k=1}^{M(m, 2)} \frac{\omega_k(x, y)}{\omega_k(x_k, y_k)} f_k. \quad (21.1.12)$$

Отметим, что степень многочлена (21.1.11) равна точно  $m$ , в то же время степень многочлена (21.1.12) может быть меньше  $m$ .

Задача интерполирования для  $n$  переменных формулируется следующим образом. Пусть задано  $M(m, n) = \frac{(m+n)!}{m!n!}$  узлов  $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ , не лежащих ни на какой алгебраической гиперповерхности порядка  $m$ . Построить многочлен  $P_m(x)$  степени не выше  $m$ , удовлетворяющий условиям

$$P_m(x^{(i)}) = f_i \quad (i = 1, 2, \dots, M(m, n)).$$

Как и в случае  $n = 2$ , такой многочлен существует и является единственным.

Отметим, что в одномерном случае  $n = 1$  уравнение  $Q_m(x) = 0$  степени  $m$  определяет на вещественной прямой не более  $m$  точек. Условие, что  $m+1$  узлов не должны лежать на алгебраической кривой порядка  $m$ , означает, что они должны быть различными.

Формулу (21.1.12) также можно записать для любого числа переменных  $n$ . Эта общая формула справедлива и при  $n = 1$  и обращается в этом случае в формулу Лагранжа.

## § 2. Интерполяционные кубатурные формулы

Пусть речь идет о вычислении интеграла по области  $\Omega$  в  $n$ -мерном пространстве  $E_n$

$$\int_{\Omega} p(x) f(x) dx, \quad (21.2.1)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $dx = dx_1 \dots dx_n$ . Весовая функция  $p(x)$  предполагается такой, что существуют моменты

$$\mu_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \int_{\Omega} p(x) x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} dx. \quad (21.2.2)$$

Это предположение о весовой функции будем считать всегда выполненным. Область интегрирования может быть и бесконечной. Функция  $f(x)$  считается такой, что существует интеграл (21.2.1).

Кубатурная формула для вычисления интеграла (21.2.1) имеет вид

$$\int_{\Omega} p(x) f(x) dx \cong \sum_{j=1}^N C_j f(x^{(j)}). \quad (21.2.3)$$

Сумма в правой части равенства (21.2.3) называется *кубатурной суммой*, точки  $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$  называются *узлами* кубатурной формулы и числа  $C_j$  — *коэффициентами*. Узлы могут не принадлежать области интегрирования  $\Omega$ .

Один из способов получения кубатурных формул (21.2.3) связан с интерполированием. Считая  $n=2$ , возьмем  $N=0,5(m+1)(m+2)$  точек  $(x_i, y_i)$  ( $i=1, \dots, N$ ), не лежащих на алгебраической кривой порядка  $m$ . Интерполяционный многочлен функции  $f(x, y)$ , построенный по условиям

$$P_m(x_i, y_i) = f(x_i, y_i) \quad (i=1, 2, \dots, N),$$

запишем по формуле (21.1.12)

$$P_m(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\omega_i(x, y)}{\omega_i(x_i, y_i)} f(x_i, y_i).$$

Чтобы вычислить приближенное значение интеграла

$$\int_{\Omega} \int p(x, y) f(x, y) dx dy,$$

заменим  $f(x, y)$  многочленом  $P_m(x, y)$  и вычислим интеграл от  $p(x, y) P_m(x, y)$ . Получим приближенное равенство

$$\int_{\Omega} \int p(x, y) f(x, y) dx dy \cong \sum_{j=1}^N C_j f(x_j, y_j), \quad (21.2.4)$$

где

$$C_i = \int_{\Omega} \int p(x, y) \frac{\omega_i(x, y)}{\omega_i(x_i, y_i)} dx dy. \quad (21.2.5)$$

Будем говорить, что кубатурная формула вида (21.2.4) — интерполяционная, если ее  $N=0,5(m+1)(m+2)$  узлов не лежат на алгебраической кривой порядка  $m$  и ее коэффициенты определяются формулой (21.2.5).

Как и в случае  $n=1$ , доказывается

**Теорема 2.** Для того чтобы кубатурная формула (21.2.4) с  $N=0,5(m+1)(m+2)$  узлами, не лежащими на алгебраической кривой порядка  $m$ , была интерполяционной, необходимо

и достаточно, чтобы она обращалась в точное равенство, когда  $f(x, y)$  — любой многочлен степени  $m$ .

Если кубатурная формула точна для многочленов степени  $m$  и имеет  $N = 0,5(m+1)(m+2)$  узлов, которым отвечают ненулевые коэффициенты, то отсюда не следует, что узлы не лежат на алгебраической кривой порядка  $m$ . Приведем следующий пример. Пусть  $\Omega$  — квадрат —  $1 \leq x, y \leq 1$ . Рассмотрим кубатурную формулу

$$\int_{\Omega} \int f(x, y) dx dy \cong \frac{1}{9} \sum_{i,j=1}^6 f(t_i, t_j), \quad (21.2.6)$$

где  $t_i$  — узлы квадратурной формулы Чебышёва с шестью узлами

$$\int_{-1}^1 \varphi(t) dt \cong \frac{1}{3} \sum_{i=1}^6 \varphi(t_i),$$

точной для многочленов седьмой степени. Кубатурная формула (21.2.6) точна, когда  $f(x, y)$  — любой многочлен степени не выше семи от  $x$  и  $y$  и имеет  $N = 0,5(7+1)(7+2) = 36$  узлов. Узлы расположены на алгебраической кривой шестого порядка

$$(x^2 - t_1^2)(x^2 - t_2^2)(x^2 - t_3^2) = 0.$$

Таким образом, требование на расположение узлов в определении интерполяционной кубатурной формулы не является лишним.

Отметим, что интерполяционная кубатурная формула может иметь меньше, чем  $N = M(m, 2)$  узлов и, следовательно, узлы могут лежать на алгебраической кривой порядка  $m$ , а может быть, и меньшего. Это может иметь место в том случае, когда некоторые из коэффициентов (21.2.5) обращаются в нуль.

Определение интерполяционной кубатурной формулы и формулировку теоремы 2 нетрудно привести в случае любого числа измерений  $n$ . Мы не будем этого делать.

Нетрудно указать нижнюю границу для числа узлов кубатурной формулы

$$\int_{\Omega} p(x) f(x) dx \cong \sum_{j=1}^N C_j f(x^{(j)}), \quad (21.2.7)$$

точной для многочленов степени  $m$ , если вес  $p(x)$  удовлетворяет условиям

$$p(x) \geq 0 \text{ для } x \in \Omega, \quad \mu_{0 \dots 0} = \int_{\Omega} p(x) dx > 0. \quad (21.2.8)$$

Узлы кубатурной формулы (21.2.7) не могут лежать на алгебраической гиперповерхности  $Q(x) = 0$  порядка  $l$ , где

$$l = [0,5m] \quad (21.2.9)$$

— целая часть числа  $0,5 \cdot m$ . Действительно, для многочлена  $Q^2(x)$  степени  $2l \leq m$  формула не точна, так как

$$\int_{\Omega} p(x) Q^2(x) dx > 0, \quad \sum_{j=1}^N C_j Q^2(x^{(j)}) = 0.$$

Положим

$$L = \frac{(n+l)!}{n!l!}. \quad (21.2.10)$$

Так как через  $L-1$  точек всегда возможно провести гиперповерхность порядка  $l$  (при этом  $L-1$  — наибольшее число, обладающее этим свойством), то число узлов кубатурной формулы, точной для многочленов степени  $m$ , всегда больше  $L-1$  и, следовательно,  $L$  можно взять в качестве нижней границы для числа узлов.

Нижняя граница (21.2.10) достигается при  $n=1$  для квадратурных формул типа Гаусса. В самом деле, квадратурная формула Гаусса, точная для многочленов степени  $m=2l+1$ , имеет  $l+1$  узлов. С другой стороны, для нижней границы из формулы (21.2.10) при  $n=1$  получаем  $L=l+1$ .

Рассмотрим ортогональные многочлены от  $n$  переменных. Многочлен  $U(x)$  степени  $k$  будем называть *ортогональным относительно области  $\Omega$  и веса  $p(x)$*  многочленом, если  $U(x)$  ортогонален любому многочлену степени  $k-1$ , другими словами

$$\int_{\Omega} p(x) U(x) V(x) dx = 0 \quad (21.2.11)$$

для любого многочлена  $V(x)$  степени не выше  $k-1$ .

Так как многочлен  $U(x)$  определяется  $M(k, n)$  коэффициентами, а линейно независимых многочленов  $V(x)$  степени не выше  $k-1$  имеется  $M(k-1, n)$ , то равенство (21.2.11) представляет собой линейную алгебраическую систему  $M(k-1, n)$  уравнений относительно  $M(k, n)$  неизвестных. Такая система разрешима при любой весовой функции  $p(x)$ .

При дополнительном предположении (21.2.8) о весовой функции  $p(x)$  можно утверждать, что система (21.2.11) определяет  $M(k, n) - M(k-1, n)$  линейно независимых ортогональных многочленов степени  $k$ . Для упрощения записи будем считать  $n=2$  и докажем, что существует  $k+1$  линейно независимых ортогональных многочленов степени  $k$

$$P_{k-i,i}(x, y) = x^{k-i} y^i + Q_{k-i,i}(x, y) \quad (i=0, 1, \dots, k). \quad (21.2.12)$$

Здесь  $Q_{k-i,i}(x, y)$  — многочлен степени  $k-1$ .

Перенумеруем одночлены от  $x$  и  $y$  степени не выше  $k-1$

$$\varphi_1(x, y) = 1, \quad \varphi_2(x, y) = x, \quad \dots, \quad \varphi_{M(k-1,2)}(x, y) = y^{k-1}. \quad (21.2.13)$$

Многочлен (21.2.12) запишем более подробно

$$P_{k-i, i}(x, y) = x^{k-i}y^i + \sum_{r=1}^{M(k-1, 2)} a_r^{(i)} \varphi_r(x, y).$$

Условия ортогональности этого многочлена ко всем одночленам (21.2.13) приводят к линейной алгебраической системе  $M(k-1, 2)$  уравнений относительно  $M(k-1, 2)$  неизвестных коэффициентов  $a_r^{(i)}$ :

$$\int_{\Omega} \int p(x, y) \left[ x^{k-i}y^i + \sum_{r=1}^{M(k-1, 2)} a_r^{(i)} \varphi_r(x, y) \right] \varphi_s(x, y) dx dy = 0$$

$$(s = 1, 2, \dots, M(k-1, 2)).$$

Определитель системы есть определитель Грама линейно независимых одночленов (21.2.13). В силу предположения (21.2.8) о весовой функции  $p(x)$  он положителен и система имеет единственное решение. Существование ортогональных многочленов (21.2.12) доказано. Линейная независимость многочленов (21.2.12) следует из линейной независимости их старших членов  $x^{k-i}y^i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, k$ ).

Многочлены (21.2.12) называются *основными ортогональными многочленами* степени  $k$ . Нетрудно видеть, что любой ортогональный многочлен  $U(x, y)$  степени  $k$  есть линейная комбинация с постоянными коэффициентами многочленов (21.2.12). Действительно,  $U(x, y)$  имеет вид

$$U(x, y) = \sum_{i=0}^k b_i x^{k-i}y^i + Q(x, y),$$

где  $b_i$  — постоянные и  $Q(x, y)$  — многочлен степени  $k-1$ . Многочлен

$$r(x, y) = U(x, y) - \sum_{i=0}^k b_i P_{k-i, i}(x, y)$$

имеет степень  $k-1$  и как линейная комбинация ортогональных многочленов ортогонален ко всем многочленам степени  $k-1$ , в частности, ортогонален сам себе

$$\int_{\Omega} \int p(x, y) r^2(x, y) dx dy = 0.$$

Отсюда следует, что  $r(x, y) \equiv 0$ , и наше утверждение доказано.

Нетрудно видеть, что в случае любого  $n$  имеется  $M(k, n) - M(k-1, n) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$  линейно независимых основных ортогональных многочленов степени  $k$ :

$$P_{a_1 \dots a_n}(x) = x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} + Q_{a_1 \dots a_n}(x), \quad (21.2.14)$$

где  $\alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_n \geq 0, \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$  и  $Q_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(x)$  — многочлен степени  $k-1$ . Любой ортогональный многочлен  $U(x)$  степени  $k$  является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами многочленов (21.2.14).

**Пример.** Построим основные ортогональные многочлены третьей степени для центрально-симметричной области на плоскости. Центр симметрии предполагаем совпадающим с началом координат, так что из  $(x, y) \in \Omega$  следует  $(-x, -y) \in \Omega$ . Считаем область  $\Omega$  ограниченной, а весовую функцию равной единице.

Будем пользоваться обозначением (21.2.2) моментов

$$\mu_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} \int x^{\alpha} y^{\beta} dx dy \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, \dots).$$

Нетрудно видеть, что  $\mu_{\alpha\beta} = 0$ , если  $\alpha + \beta$  нечетно.

Начнем с построения многочлена  $P_{30}$ :

$$P_{30} = x^3 + a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2.$$

Запишем условия ортогональности этого многочлена к одночленам второй степени

$$1, x, y, x^2, xy, y^2.$$

Получим

$$\begin{array}{rcl} a_{00}\mu_{00} + & a_{20}\mu_{20} + a_{11}\mu_{11} + a_{02}\mu_{02} & = 0, \\ \mu_{40} + & a_{10}\mu_{20} + a_{01}\mu_{11} & = 0, \\ \mu_{31} + & a_{10}\mu_{11} + a_{01}\mu_{02} & = 0, \\ a_{00}\mu_{20} + & a_{20}\mu_{40} + a_{11}\mu_{31} + a_{02}\mu_{22} & = 0, \\ a_{00}\mu_{11} + & a_{20}\mu_{31} + a_{11}\mu_{22} + a_{02}\mu_{13} & = 0, \\ a_{00}\mu_{02} + & a_{20}\mu_{22} + a_{11}\mu_{13} + a_{02}\mu_{04} & = 0. \end{array}$$

Видим, что система распадается на две системы: второе и третье уравнения образуют систему двух уравнений относительно неизвестных  $a_{10}, a_{01}$ , остальные четыре уравнения составляют однородную систему уравнений относительно неизвестных  $a_{00}, a_{20}, a_{11}, a_{02}$ . Так как определители этих систем отличны от нуля, то из первой системы получаем

$$a_{10} = \frac{1}{\Delta} (\mu_{11}\mu_{31} - \mu_{02}\mu_{40}), \quad a_{01} = \frac{1}{\Delta} (\mu_{11}\mu_{40} - \mu_{20}\mu_{31}),$$

где

$$\Delta = \mu_{20}\mu_{02} - \mu_{11}^2, \quad (21.2.15)$$

и из второй —

$$a_{00} = a_{20} = a_{11} = a_{02} = 0.$$

Таким образом, многочлен  $P_{30}$  найден.



Мы не будем проводить вычисление остальных ортогональных многочленов, а приведем окончательный результат:

$$\left. \begin{aligned} P_{30} &= x^3 + \frac{1}{\Delta} (\mu_{11}\mu_{31} - \mu_{02}\mu_{40}) x + \frac{1}{\Delta} (\mu_{11}\mu_{40} - \mu_{20}\mu_{31}) y, \\ P_{21} &= x^2 y + \frac{1}{\Delta} (\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{02}\mu_{31}) x + \frac{1}{\Delta} (\mu_{11}\mu_{31} - \mu_{20}\mu_{22}) y, \\ P_{12} &= x y^2 + \frac{1}{\Delta} (\mu_{11}\mu_{13} - \mu_{02}\mu_{22}) x + \frac{1}{\Delta} (\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{20}\mu_{13}) y, \\ P_{03} &= y^3 + \frac{1}{\Delta} (\mu_{11}\mu_{04} - \mu_{02}\mu_{13}) x + \frac{1}{\Delta} (\mu_{11}\mu_{13} - \mu_{20}\mu_{04}) y. \end{aligned} \right\} \quad (21.2.16)$$

Имеет место следующая

**Теорема 3.** Пусть кубатурная формула (21.2.3) точна для любого многочлена степени  $m = 2k - 1$ . Если ее узлы принадлежат алгебраической гиперповерхности  $U(x) = 0$  порядка  $k$ , то  $U(x)$  — ортогональный многочлен области  $\Omega$  и веса  $p(x)$ .

Доказательство. Если  $V(x)$  — любой многочлен степени  $k - 1$ , то для многочлена  $U(x)V(x)$  степени  $2k - 1$  формула (21.2.3) точна. Так как по условию  $U(x)$  обращается в нуль в узлах формулы, то получаем

$$\int_{\Omega} p(x) U(x) V(x) dx = 0,$$

что и требовалось доказать.

По-видимому, справедливо обращение теоремы 3.

**Теорема 4.** Существуют  $n$  линейно независимых, ортогональных относительно области  $\Omega$  и веса  $p(x)$  многочленов  $U_i(x)$  степени  $k$  таких, что решения  $x^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) системы

$$U_i(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (21.2.17)$$

можно взять в качестве узлов кубатурной формулы, точной для многочленов степени  $2k - 1$ .

Теорема 4 имеет место, например, при  $n = 1$ . В этом случае, если вес  $p(x)$  удовлетворяет условиям (21.2.8), теорема 4 приводит к квадратурной формуле типа Гаусса. Доказательство теоремы 4 при  $n \geq 2$  связано с большими трудностями, которые вызываются тем, что неизвестно, как выбирать ортогональные многочлены, которые фигурируют в системе (21.2.17).

### § 3. Примеры построения кубатурных формул

Пусть имеется кубатурная формула

$$\int_{\Omega} p(x) f(x) dx \cong \sum_{j=1}^N C_j f(x^{(j)}), \quad (21.3.1)$$

точная для многочленов степени не выше  $m$ , и  $A$  — неособенная матрица. Обозначим через  $\Omega_1$  область, в которую переходит область  $\Omega$  при преобразовании  $y = Ax + a$ , и положим  $y^{(j)} = Ax^{(j)} + a$ . Тогда кубатурная формула

$$\int_{\Omega_1} p_1(y) g(y) dy \cong \sum_{j=1}^N C_j g(y^{(j)}) \quad (21.3.2)$$

с весом

$$p_1(y) = \frac{1}{|D(A)|} p(A^{-1}(y - a))$$

точна, когда  $g(y)$  — любой многочлен от  $y$  степени не выше  $m$ .

Чтобы получить (21.3.2), достаточно в интеграле (21.3.1) выполнить замену переменных интегрирования  $x = A^{-1}(y - a)$  и заменить узлы по формуле  $x^{(j)} = A^{-1}(y^{(j)} - a)$ . Формула (21.3.2) точна для многочленов той же степени, что и формула (21.3.1), так как если  $f(x)$  — многочлен степени  $r$  и  $x = A^{-1}(y - a)$ , то  $f(A^{-1}(y - a))$  — также многочлен степени  $r$  от  $y$ .

Это замечание позволяет при построении кубатурных формул ограничиться стандартными областями. Например, зная кубатурную формулу для  $n$ -мерного куба  $-1 \leq x_i \leq 1$  ( $i = 1, \dots, n$ ), мы можем получить кубатурную формулу для  $n$ -мерного параллелепипеда, с помощью кубатурной формулы для шара можем получить кубатурную формулу для эллипсоида.

Приведем примеры построения кубатурных формул для простейших областей на плоскости — круга и квадрата. Пусть речь идет о построении кубатурной формулы

$$\int_{\Omega} p(x, y) f(x, y) dx dy \cong \sum_{j=1}^N C_j f(x_j, y_j), \quad (21.3.3)$$

точной для многочленов степени  $m$ . В соответствии с определением интерполяционной кубатурной формулы мы должны взять  $N = M(m, 2)$  точек  $(x_k, y_k)$  в области  $\Omega$ , не лежащих на алгебраической кривой порядка  $m$ , и определить коэффициенты по формуле (21.2.5).

Коэффициенты  $C_j$  можно определить также, решая линейную алгебраическую систему  $N$  уравнений

$$\sum_{j=1}^N C_j x_j^\alpha y_j^\beta = \int_{\Omega} p(x, y) x^\alpha y^\beta dx dy \quad (\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta \leq m) \quad (21.3.4)$$

относительно  $N$  неизвестных  $C_1, \dots, C_N$ . Система (21.3.4) представляет собой запись того факта, что формула (21.3.3) точна, когда  $f(x, y)$  есть любой одночлен степени не выше  $m$ . Определи-

тель системы отличен от нуля, так как узлы не лежат на алгебраической кривой порядка  $m$ .

Уже при небольших  $m$  число  $M(m, 2) = 0,5(m+1)(m+2)$  оказывается большим. Поэтому мы будем строить кубатурные формулы, которые точны для многочленов степени  $m$ , но имеют значительно меньше, чем  $M(m, 2)$  узлов. В некоторых случаях это удастся сделать за счет специального выбора узлов.

В системе (21.3.4) неизвестными являются коэффициенты  $C_i$ . Будем считать неизвестными не только коэффициенты, но и координаты узлов. При числе узлов  $N$  получаем  $3N$  неизвестных. Так как формула должна быть точна для всех одночленов от  $x$  и  $y$  степени  $\leq m$ , число которых равно  $M(m, 2)$ , то для определения  $3N$  неизвестных параметров получаем  $M(m, 2)$  уравнений. Естественно приравнять число неизвестных числу уравнений:  $3N = M(m, 2)$ . Отсюда получим ориентировочное число узлов кубатурной формулы:

$$N = \frac{1}{3} M(m, 2) = \frac{1}{6} (m+1)(m+2),$$

которое при  $m$ , кратном трем, не является целым. Но и в случае, когда оно целое, нельзя гарантировать, что кубатурная формула с таким числом узлов существует.

Новая система, в которой неизвестными являются  $C_i$ ,  $x_i$ ,  $y_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ), нелинейна и ее решение значительно труднее, чем решение системы (21.3.4). Чтобы облегчить задачу, на решение системы заранее будем накладывать некоторые ограничения. Например, заранее будем располагать искомые узлы специальным образом, а некоторые коэффициенты будем считать одинаковыми. Если найдем решение упрощенной системы, то оно будет удовлетворять исходной системе, и мы получим кубатурную формулу. Конечно, имеется опасность, что упрощенная система не имеет вещественного решения или противоречива, в то же время исходная система может иметь решение. Возможно также, что найденная таким путем формула не является интерполяционной.

Начнем с построения кубатурной формулы, точной для многочленов четвертой степени, когда областью интегрирования  $\Omega$  является круг  $x^2 + y^2 \leq 1$  и вес  $p(x, y) = 1$ . Сначала выясним вопрос о числе узлов. Число одночленов степени не выше четырех равно пятнадцати. Из равенства  $3N = 15$  получаем число узлов  $N = 5$ . Но сразу видно, что нелинейная система уравнений, которую мы получим, будет противоречивой, так как кубатурной формулы с пятью узлами, точной для многочленов четвертой степени, не существует. Действительно, пять узлов формулы всегда лежат на некоторой кривой второго порядка  $Q(x, y) = 0$  и, следовательно, формула не точна для многочлена четвертой степени  $Q^2(x, y)$ . Это следует также из формулы (21.2.10), которая дает наименьшее число узлов для кубатурной

формулы, точной для многочленов степени  $m$ . В рассматриваемом случае  $n=2$  и  $l=2$  формула (21.2.10) дает  $L=6$ . Попробуем построить кубатурную формулу с шестью узлами. Это приведет нас к решению нелинейной системы из пятнадцати уравнений с восемнадцатью неизвестными.

Будем теперь считать, что узлы расположены следующим образом: пять узлов лежат на окружности радиуса  $R$  в вершинах правильного пятиугольника, один узел — в начале координат. Будем также считать, что одна из вершин пятиугольника имеет координаты  $(R, 0)$ . Потребуем, чтобы коэффициенты, отвечающие узлам на окружности, были одинаковы — обозначим их общее значение через  $B$ , — и коэффициент, соответствующий узлу  $(0, 0)$ , обозначим  $A$ . Кубатурная формула запишется в виде

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy \cong Af(0, 0) + B \sum_{k=0}^4 f\left(R \cos k \frac{2\pi}{5}, R \sin k \frac{2\pi}{5}\right). \quad (21.3.5)$$

Мы должны определить три неизвестных  $R$ ,  $A$ ,  $B$ . Нам понадобятся моменты

$$\mu_{\alpha\beta} = \iint_{\Omega} x^{\alpha} y^{\beta} dx dy \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, \dots).$$

Чтобы их вычислить, перейдем в интеграле к полярным координатам  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ . Получим

$$\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha + \beta + 2} I_{\alpha\beta}, \quad (21.3.6)$$

где

$$I_{\alpha\beta} = \int_0^{2\pi} \cos^{\alpha} \varphi \sin^{\beta} \varphi d\varphi.$$

Очевидно,  $I_{\alpha\beta} = 0$ , если хоть одно из чисел  $\alpha$  и  $\beta$  нечетно. Если  $\alpha$  и  $\beta$  оба четны,

$$I_{\alpha\beta} = \frac{(\alpha-1)!!(\beta-1)!!}{(\alpha+\beta)!!} 2\pi.$$

Запишем, что формула (21.3.5) точна, когда  $f = x^{\alpha} y^{\beta}$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\alpha + \beta \leq 4$ . Получим систему для определения  $R$ ,  $A$  и  $B$ :

$$\left. \begin{aligned} \alpha = \beta = 0: & \quad A + 5B = \pi, \\ \alpha + \beta > 0: & \quad B \sum_{k=0}^4 R^{\alpha+\beta} \cos^{\alpha} k \frac{2\pi}{5} \sin^{\beta} k \frac{2\pi}{5} = \mu_{\alpha\beta}, \end{aligned} \right\} \quad (21.3.7)$$

содержащую пятнадцать уравнений. Так как формула прямоугольников с пятью узлами в случае отрезка  $[0, 2\pi]$  точна для всех тригонометрических многочленов четвертой степени, то

$$\frac{2\pi}{5} \sum_{k=0}^4 \cos^{\alpha} k \frac{2\pi}{5} \sin^{\beta} k \frac{2\pi}{5} = I_{\alpha\beta} \quad (\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha + \beta \leq 4)$$

и уравнения системы (21.3.7), кроме первого, можно записать в виде

$$BR^{\alpha+\beta} \frac{5}{2\pi} I_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta}$$

или, если принять во внимание равенство (21.3.6),

$$BR^{\alpha+\beta} \frac{5}{2\pi} I_{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha + \beta + 2} I_{\alpha\beta}.$$

Если хоть одно из чисел  $\alpha$  и  $\beta$  нечетно, то  $I_{\alpha\beta} = 0$ , и уравнение удовлетворяется автоматически. Если  $\alpha$  и  $\beta$  оба четны, уравнение можно разделить на  $I_{\alpha\beta} \neq 0$ :

$$BR^{\alpha+\beta} \frac{5}{2\pi} = \frac{1}{\alpha + \beta + 2}.$$

Так как  $0 < \alpha + \beta \leq 4$ , то получим всего два уравнения:

$$\alpha + \beta = 2: \quad BR^2 \frac{5}{2\pi} = \frac{1}{4},$$

$$\alpha + \beta = 4: \quad BR^4 \frac{5}{2\pi} = \frac{1}{6}.$$

из которых определяем  $R$  и  $B$

$$R = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad B = \frac{3\pi}{20}.$$

Из первого уравнения системы (21.3.7) находим  $A = \frac{\pi}{4}$ . Мы получили кубатурную формулу

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy &\cong \frac{\pi}{4} f(0, 0) + \\ &+ \frac{3\pi}{20} \sum_{k=0}^4 f\left(\sqrt{\frac{2}{3}} \cos k \frac{2\pi}{5}, \sqrt{\frac{2}{3}} \sin k \frac{2\pi}{5}\right). \end{aligned} \quad (21.3.8)$$

Она точна для многочленов четвертой степени и имеет наименьшее возможное число узлов.

Ясно, что правильный пятиугольник, вершины которого являются узлами, можно вращать вокруг начала координат. Свойство формулы

быть точной для многочленов четвертой степени сохранится, как это следует из предложения, сформулированного в начале параграфа.

Нетрудно показать, что формула (21.3.8) — интерполяционная. Так как ее шесть узлов  $p_1, \dots, p_6$  не лежат на кривой второго порядка, то можно указать девять точек  $p_7, \dots, p_{15}$  таких, что  $p_1, \dots, p_{15}$  не лежат ни на какой кривой четвертого порядка (см. § 1). Точки  $p_1, \dots, p_{15}$  можно рассматривать как узлы кубатурной формулы (21.3.8), при этом узлам  $p_7, \dots, p_{15}$  отвечают коэффициенты, равные нулю.

Таким же путем можно получить кубатурную формулу для круга

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy \cong A \sum_{k=0}^2 f\left(R \cos k \frac{2\pi}{3}, R \sin k \frac{2\pi}{3}\right) + \\ + B \sum_{k=0}^2 f\left(\rho \cos(2k+1) \frac{\pi}{3}, \rho \sin(2k+1) \frac{\pi}{3}\right),$$

где

$$R = \frac{1}{6}(\sqrt{26} - \sqrt{2}), \quad \rho = \frac{1}{6}(\sqrt{26} + \sqrt{2}),$$

$$A = \frac{\pi}{12\sqrt{26}}(2\sqrt{26} + 5\sqrt{2}), \quad B = \frac{\pi}{12\sqrt{26}}(2\sqrt{26} - 5\sqrt{2}).$$

Эта формула также точна для многочленов четвертой степени и является интерполяционной.

Построим кубатурную формулу для квадрата  $-1 \leq x, y \leq 1$  и веса  $p(x, y) = 1$ , точную для многочленов седьмой степени. Число одночленов, степень которых  $\leq 7$ , равно тридцати шести. Из равенства  $3N = 36$  получаем число узлов  $N = 12$ . Таким образом, получаем нелинейную систему тридцати шести уравнений с таким же числом неизвестных.

Узлы будем располагать следующим образом. Первую группу узлов образуют точки пересечения окружности с центром в начале координат и радиусом  $a > 0$  с координатными осями. Вторую группу узлов составляют точки пересечения окружности с тем же центром и радиусом  $b\sqrt{2} > 0$  с диагоналями квадрата. Третья группа узлов образуется как вторая, при этом радиус окружности берется равным  $c\sqrt{2} > 0$ . Коэффициенты для узлов одной и той же группы считаем одинаковыми и равными  $A, B$  и  $C$  для узлов первой, второй и третьей групп соответственно.

Кубатурная формула запишется в виде

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy \cong A [f(a, 0) + f(0, a) + f(-a, 0) + f(0, -a)] + \\ + B \sum_1^4 f(\pm b, \pm b) + C \sum_1^4 f(\pm c, \pm c). \quad (21.3.9)$$

Выбор узлов и коэффициентов обеспечивает, что кубатурная формула (21.3.9) точна для всех одночленов  $x^\alpha y^\beta$ , у которых хоть одно из чисел  $\alpha$  и  $\beta$  нечетно.

Потребуем, чтобы (21.3.9) была точна для одночленов  $1, x^2, x^4, x^2y^2, x^6, x^4y^2$ . Получим систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} f=1: & \quad 4A + 4B + 4C = 4, \\ f=x^2: & \quad 2Aa^2 + 4Bb^2 + 4Cc^2 = \frac{4}{3}, \\ f=x^4: & \quad 2Aa^4 + 4Bb^4 + 4Cc^4 = \frac{4}{5}, \\ f=x^2y^2: & \quad 4Bb^4 + 4Cc^4 = \frac{4}{9}, \\ f=x^6: & \quad 2Aa^6 + 4Bb^6 + 4Cc^6 = \frac{4}{7}, \\ f=x^4y^2: & \quad 4Bb^6 + 4Cc^6 = \frac{4}{15}. \end{aligned} \right\} \quad (21.3.10)$$

Требование, что формула (21.3.9) точна для одночленов  $y^2, y^4, x^2y^4, y^6$ , к новым уравнениям не приводит. Будем решать систему (21.3.10). Из третьего уравнения вычтем четвертое и из пятого — шестое. Получим уравнения  $2Aa^4 = \frac{16}{45}$ ,  $2Aa^6 = \frac{32}{105}$ , из которых находим

$$a^2 = \frac{6}{7}, \quad A = \frac{98}{405}. \quad (21.3.11)$$

Перепишем первое, второе, четвертое и шестое уравнения системы (21.3.10), подставив в первое и второе уравнения найденные значения (21.3.11). Получим систему четырех уравнений:

$$\left. \begin{aligned} B + C &= \frac{307}{405}, \\ Bb^2 + Cc^2 &= \frac{31}{135}, \\ Bb^4 + Cc^4 &= \frac{1}{9}, \\ Bb^6 + Cc^6 &= \frac{1}{15} \end{aligned} \right\} \quad (21.3.12)$$

с неизвестными  $b, c, B, C$ .

Нетрудно видеть, что числа  $b^2, c^2$ , удовлетворяющие этой системе, суть корни квадратного трехчлена  $t^2 + pt + q$ , коэффициенты которого определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{15} + \frac{1}{9}p + \frac{31}{135}q &= 0, \\ \frac{1}{9} + \frac{31}{135}p + \frac{307}{405}q &= 0. \end{aligned}$$

Решение системы:

$$p = -\frac{228}{287}, \quad q = \frac{27}{287},$$

так что  $b^2$  и  $c^2$  — корни уравнения

$$t^2 - \frac{228}{287}t + \frac{27}{287} = 0.$$

Отсюда получаем

$$b^2 = \frac{114 - 3\sqrt{583}}{287}, \quad c^2 = \frac{114 + 3\sqrt{583}}{287}.$$

Наконец, из первых двух уравнений системы (21.3.12) находим

$$B = \frac{307}{810} + \frac{923}{270\sqrt{583}}, \quad C = \frac{307}{810} - \frac{923}{270\sqrt{583}}.$$

Таким образом, все параметры кубатурной формулы (21.3.9) найдены. Видим, что узлы принадлежат области интегрирования и коэффициенты положительны. Нетрудно проверить, что формула (21.3.9) — интерполяционная.

Обозначим через  $\omega_j(x)$  многочлен Лежандра степени  $j$ , нормированный так, что коэффициент при  $x^j$  равен 1:

$$\begin{aligned} \omega_0(x) &= 1, & \omega_1(x) &= x, & \omega_2(x) &= x^2 - \frac{1}{3}, \\ \omega_3(x) &= x^3 - \frac{3}{5}x, & \omega_4(x) &= x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}. \end{aligned}$$

Пять основных ортогональных многочленов четвертой степени для квадрата  $-1 \leq x, y \leq 1$  и веса  $p(x, y) = 1$  записываются следующим образом:

$$P_{4-i, i}(x, y) = \omega_{4-i}(x) \omega_i(y) \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Запишем систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} P_{40} + P_{04} + \lambda P_{22} &= 0, \\ P_{40} - P_{04} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (21.3.13)$$

левые части которой являются ортогональными многочленами четвертой степени. При  $\lambda = \frac{54}{55}$  система имеет двенадцать решений, и эти решения являются узлами кубатурной формулы (21.3.9).

Таким образом, формулу (21.3.9) можно назвать кубатурной формулой типа Гаусса: ее узлы — корни ортогональных многочленов. Отметим, что такая формула не единственна. Например, имеется



кубатурная формула, точная для многочленов седьмой степени и имеющая шестнадцать узлов. Ее узлы — решения системы  $P_{40} = 0$ ,  $P_{04} = 0$ . Эта система равносильна системе (21.3.13) при  $\lambda = 0$ .

### Л и т е р а т у р а

Уокер Р., Алгебраические кривые, М., ИЛ, 1952.

Appel P., Sur une classe de polynômes a deux variables et le calcul approché des intégrales doubles, Annales de la faculté des sciences de Toulouse 4 (1890), 1—20.

Hammer P. C., W y m o r e A. W., Numerical evaluation of multiple integrals I, Math. Tables and Other Aids Comput. 11, N 58 (1957), 59—67.

## ГЛАВА 22

### КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С НАИМЕНЬШИМ ЧИСЛОМ УЗЛОВ

#### § 1. Кубатурная формула, точная для многочленов первой степени

Кубатурную формулу, точную для многочленов первой степени, можно указать для произвольной области в  $n$ -мерном пространстве. Такая формула имеет один узел и записывается в виде

$$\int_{\Omega} p(x) f(x) dx \cong C_1 f(x^{(1)}). \quad (22.1.1)$$

Здесь  $p(x)$  — произвольная весовая функция. Как всегда, предполагается существование моментов  $p(x)$ , при этом

$$\mu_0 = \int_{\Omega} p(x) dx \neq 0.$$

Потребуем, чтобы формула (22.1.1) была точна, когда  $f(x)$  — одночлен степени  $\leq 1$ :

$$f = 1: \quad C_1 = \mu_0,$$

$$f = x_i: \quad C_1 x_i^{(1)} = \int_{\Omega} p(x) x_i dx \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Эта система уравнений разрешима, так что формула (22.1.1) существует, при этом коэффициент  $C_1 = \mu_0$  и координаты узла даются равенствами

$$x_i^{(1)} = \frac{1}{\mu_0} \int_{\Omega} p(x) x_i dx.$$

Таким образом, требуемая формула определяется однозначно и, очевидно, имеет наименьшее возможное число узлов.

Пусть теперь функция  $p(x)$  неотрицательна и  $\mu_0 > 0$ . В этом случае можно считать, что  $p(x)$  задает распределение масс по области  $\Omega$ . Коэффициент формулы (22.1.1)  $C_1 = \mu_0$  представляет собой

массу, распределенную по области  $\Omega$ , а координаты узла совпадают с координатами центра тяжести области.

Если  $\Omega$  выпукла и  $p(x) \geq 0$ , то узел  $x^{(1)}$  принадлежит  $\Omega$ . Если бы  $x^{(1)}$  не принадлежал  $\Omega$ , то можно было бы указать гиперплоскость  $L(x) = 0$ , которая проходит через  $x^{(1)}$  и  $L(x) > 0$  для  $x \in \Omega$ . Очевидно, для многочлена первой степени  $L(x)$  формула (22.1.1) не точна, так как  $L(x^{(1)}) = 0$ , а  $\int_{\Omega} p(x) L(x) dx > 0$ .

## § 2. Кубатурные формулы, точные для многочленов второй степени

Перейдем к построению кубатурной формулы, точной для многочленов второй степени и имеющей наименьшее число узлов. В частных случаях вопрос рассматривался в работах Г. Георгиева и Ташера (см. литературу к этой главе). А. Строуд (см. литературу) показал, что такую формулу можно построить для произвольной области в  $n$ -мерном пространстве. Наше изложение отличается от изложения А. Строуда.

Требуемая формула имеет  $n+1$  узлов

$$\int_{\Omega} p(x) f(x) dx \cong \sum_{j=1}^{n+1} C_j f(x^{(j)}). \quad (22.2.1)$$

Будем считать, что весовая функция  $p(x) \geq 0$  в  $\Omega$  и ее нулевой момент  $\mu_0 > 0$ . Из этого предположения и формулы (21.2.10) следует, что  $n+1$  — наименьшее число узлов.

Введем обозначение для моментов весовой функции

$$p_{ik} = \int_{\Omega} p(x) x_i x_k dx \quad (i, k = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (22.2.2)$$

Здесь  $x_0 = 1$ , так что

$$p_{00} = \int_{\Omega} p(x) dx, \quad p_{i0} = p_{0i} = \int_{\Omega} p(x) x_i dx.$$

Запишем, что кубатурная формула (22.2.1) точна для всех одночленов степени не выше двух

$$f = x_i x_k: \quad C_1 x_i^{(1)} x_k^{(1)} + \dots + C_{n+1} x_i^{(n+1)} x_k^{(n+1)} = p_{ik} \quad (22.2.3) \\ (i, k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Система (22.2.3) состоит из  $0,5(n+1)(n+2)$  уравнений и содержит  $(n+1)^2$  неизвестных. Можно предвидеть, что кубатурная формула (22.2.1) не определяется однозначно.

Рассмотрим матрицу  $(n+1)$ -го порядка

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots & p_{0n} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n0} & p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \quad (22.2.4)$$

Из предположения о знаке весовой функции следует, что матрица  $P$  — положительно определенная как матрица Грама линейно независимой системы функций  $1, x_1, \dots, x_n$ . Отсюда вытекает, что определитель  $D(P)$  больше нуля. Отметим, что в построении А. Строуда требуется лишь выполнение неравенств  $D(P) \neq 0$  и  $p_{00} > 0$ . Неотрицательность  $p(x)$  не предполагается.

Введем еще две матрицы  $(n+1)$ -го порядка, связанные с узлами и коэффициентами формулы (22.2.1)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \cdots & x_n^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_1^{(n+1)} & x_2^{(n+1)} & \cdots & x_n^{(n+1)} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & C_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что систему (22.2.3) можно записать в матричной форме

$$X'CX = P. \quad (22.2.5)$$

Матричное уравнение (22.2.5) равносильно  $(n+1)^2$  скалярным уравнениям. Те уравнения, которые получаются приравнованием элементов в (22.2.5), расположенных ниже главной диагонали, повторяют уравнения, возникшие в результате приравнования элементов, расположенных выше главной диагонали.

Матрица (22.2.4) — положительно определенная, поэтому ее можно разложить в произведение

$$P = \Gamma' \Gamma, \quad (22.2.6)$$

где  $\Gamma$  — верхняя треугольная матрица

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \cdots & \gamma_{1, n+1} \\ 0 & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \cdots & \gamma_{2, n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_{n+1, n+1} \end{pmatrix}.$$

Возможность такого разложения известна (см. Д. К. Фаддеев и В. Н. Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры).

Если (22.2.5) выполнено, то матрицы  $C$  и  $X$  — неособенные, так как такова  $P$ . Умножим обе части равенства (22.2.5) слева на

$(X')^{-1}$  и справа на  $X^{-1}$ . Получим  $(X')^{-1}PX^{-1}=C$ . От обеих частей последнего равенства возьмем обратную матрицу

$$XP^{-1}X'=C^{-1}. \quad (22.2.7)$$

Из (22.2.6) находим:  $P^{-1}=\Gamma^{-1}(\Gamma')^{-1}=\Gamma^{-1}(\Gamma^{-1})'$ . Подставляя это выражение для  $P^{-1}$  в (22.2.7), получим

$$X\Gamma^{-1}(\Gamma^{-1})'X'=C^{-1}. \quad (22.2.8)$$

Введем новую неизвестную матрицу

$$Y=X\Gamma^{-1}. \quad (22.2.9)$$

Тогда уравнение (22.2.8) запишется в виде

$$YY'=C^{-1}. \quad (22.2.10)$$

Из равенства (22.2.9) вытекает, что все элементы первого столбца матрицы  $Y$  отличны от нуля.

Будем решать матричное уравнение (22.2.10). Возьмем ортогональную матрицу  $U=(u_i^{(j)})$  порядка  $n+1$  и такую, что элементы ее первого столбца  $u_i^{(1)}$  ( $i=1, 2, \dots, n+1$ ) все отличны от нуля. Покажем, что можно подобрать диагональную неособенную матрицу  $S=[s_1, \dots, s_{n+1}]$  такую, что матрица  $Y=SU$  является решением матричного уравнения (22.2.10).

Подставляя  $Y=SU$  в уравнение (22.2.10), получим:

$$SU(SU)'=SUU'S'=SS'=C^{-1}.$$

Отсюда видно, что уравнение (22.2.10) будет удовлетворено, если

$$C_j=\frac{1}{s_j^2} \quad (j=1, 2, \dots, n+1). \quad (22.2.11)$$

Чтобы найти  $s_1, \dots, s_{n+1}$ , запишем равенство (22.2.9) в виде

$$X=Y\Gamma. \quad (22.2.12)$$

Если подставить сюда  $Y=SU$ , то получим  $X=SU\Gamma$ . Приравнявая элементы первых столбцов матриц в левой и правой части этого равенства, найдем

$$s_j=\frac{1}{\gamma_{11}u_j^{(1)}} \quad (j=1, 2, \dots, n+1). \quad (22.2.13)$$

Равенства (22.2.11) и (22.2.12) определяют коэффициенты и узлы кубатурной формулы (22.2.1). Из (22.2.11) следует положительность коэффициентов. Узлы не обязательно принадлежат области интегри-

рования даже в случае, когда она выпуклая. Это следует из приводимого ниже примера 2.

Каждая ортогональная матрица  $U$ , у которой первый столбец состоит из ненулевых элементов, порождает кубатурную формулу (22.2.1). К этому и сводится многозначность формулы (22.2.1).

**Пример 1.** Построим кубатурную формулу (22.2.1) для случая, когда  $\Omega$  — квадрат:  $-1 \leq x, y \leq 1$  и вес  $p(x, y) = 1$ . Матрица  $P$ , определяемая формулой (22.2.4), есть диагональная матрица  $P = \left[4, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right]$  и, следовательно,  $\Gamma = \left[2, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$ .

Возьмем три линейно независимых вектора

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и применим к ним процесс ортогонализации и нормирования. Векторы полученной ортонормированной системы возьмем в качестве столбцов матрицы  $U$ :

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (22.2.14)$$

По формуле (22.2.13) определяем  $s_j$ :  $s_1 = s_2 = s_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . По матрице  $U$  и числам  $s_i$  находим матрицу  $Y = SU$ . С помощью (22.2.12) находим матрицу узлов

$$X = Y\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Наконец, по формуле (22.2.11) определяем коэффициенты

$$C_1 = C_2 = C_3 = \frac{1}{s_i^2} = \frac{4}{3}.$$

Кубатурная формула имеет вид

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy \cong \\ \cong \frac{4}{3} \left[ f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right) \right].$$

Ее узлы расположены внутри квадрата на окружности с центром в начале координат и радиусом  $\sqrt{\frac{2}{3}}$ .

**Пример 2.** Пусть область и вес те же, что и в примере 1. Возьмем в качестве ортогональной матрицы транспонированную матрицу (22.2.14). Это возможно, так как первая строка у матрицы (22.2.14) состоит из ненулевых элементов. Кубатурная формула, порождаемая матрицей  $U'$ , имеет вид

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dx dy \cong \frac{4}{3} f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \\ + \frac{2}{3} f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + 2f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right).$$

Узел  $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$  выходит из области интегрирования.

### § 3. Кубатурные формулы, точные для многочленов третьей степени

Пусть  $K$  —  $n$ -мерный куб  $-1 \leq x_i \leq 1$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Построим кубатурную формулу, точную для многочленов третьей степени. Такую формулу нетрудно построить, если взять  $2n$  узлов и расположить их следующим образом. На оси  $x_i$  возьмем два узла  $(0, \dots, \pm a_i, \dots, 0)$  и сопоставим им одно и то же значение коэффициента  $C_i$ , так что требуемая кубатурная формула имеет вид

$$\int_K f(x) dx \cong C_1 [f(a_1, 0, \dots, 0) + f(-a_1, 0, \dots, 0)] + \dots \\ \dots + C_n [f(0, \dots, 0, a_n) + f(0, \dots, 0, -a_n)]. \quad (22.3.1)$$

Интеграл по  $K$  от одночлена  $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$  равен нулю, если хоть один из показателей  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  является нечетным. Для такого одночлена и кубатурная сумма в (22.3.1) равна нулю и, следовательно, для него кубатурная формула (22.3.1) точна при любом выборе параметров  $a_i$  и  $C_i$ .

Таким образом, чтобы формула (22.3.1) была точна для всех многочленов третьей степени, достаточно потребовать, чтобы она была точна для  $f=1$ ,  $x_i^2$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). Это дает следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} f=1: & \quad 2(C_1 + C_2 + \dots + C_n) = 2^n, \\ f=x_i^2: & \quad 2C_i a_i^2 = \frac{2^n}{3} \quad (i=1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (22.3.2)$$

Система содержит  $2n$  неизвестных и  $n+1$  уравнений. Так как вещественные  $a_i$  получим лишь при  $C_i > 0$ , то совокупность формул (22.3.1) определяется  $n$  положительными числами  $C_1, \dots, C_n$ , удовлетворяющими первому из уравнений (22.3.2). Параметры  $a_i$  определяются формулами

$$a_i = \sqrt{\frac{2^{n-1}}{3C_i}} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Рассмотрим вопрос о построении кубатурной формулы вида (22.3.1) в случае, когда  $\Omega$  — ограниченная область, имеющая положительную меру и обладающая центральной симметрией. Будем считать, что центром симметрии является начало координат (из  $x \in \Omega$  следует  $-x \in \Omega$ ).

Нетрудно видеть, что равенство нулю интеграла по области  $\Omega$  от одночлена  $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$  имеет место, если сумма показателей  $a_1 + \dots + a_n$  нечетна. В частности, интегралы от одночленов первой и третьей степени равны нулю. Но этого недостаточно, чтобы построить формулу вида (22.3.1), так как при построении (22.3.1) существенно использовалось, что интегралы от одночленов второй степени  $x_i x_j$  при  $i \neq j$  равны нулю.

Докажем лемму.

**Лемма.** Пусть  $\Omega$  — произвольная область в  $E_n$  и  $p(x)$  — весовая функция, неотрицательная в  $\Omega$ , положительная на множестве из  $\Omega$  положительной меры и

$$p_{ij} = \int_{\Omega} p(x) x_i x_j dx \quad (i, j=1, 2, \dots, n). \quad (22.3.3)$$

Тогда имеется такое ортогональное преобразование

$$u = Ax, \quad (22.3.4)$$

что в новых координатах

$$\tilde{p}_{ij} = \int_{\tilde{\Omega}} p(A^{-1}u) u_i u_j du = 0 \quad \text{при } i \neq j, \quad (22.3.5)$$

где  $\tilde{\Omega}$  — область, в которую переходит  $\Omega$  при преобразовании (22.3.4).



Доказательство. Матрица  $P = (p_{ij})$ , где  $p_{ij}$  определены формулой (22.3.3), есть симметрическая матрица порядка  $n$ , положительно определенная как матрица Грама линейно независимой системы функций  $x_1, \dots, x_n$ . Обозначим через  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  собственные значения матрицы  $P$  и через

$$a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)} \quad (22.3.6)$$

— соответствующие им собственные векторы. В силу положительной определенности  $P$  собственные значения положительны. Систему собственных векторов (22.3.6) можем считать ортонормированной.

Компоненты собственного вектора  $a^{(i)}$  будем записывать следующим образом:

$$a^{(i)} = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Рассмотрим ортогональную матрицу  $A$ , у которой  $i$ -я строка состоит из составляющих вектора  $a^{(i)}$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (22.3.7)$$

Матрица  $A$  и определяет требуемое ортогональное преобразование (22.3.4).

В самом деле, в интеграле (22.3.5) выполним замену переменных интегрирования  $u = Ax$ , где  $A$  определена формулой (22.3.7). Получим:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{ij} &= \int_{\tilde{\Omega}} p(A^{-1}u) u_i u_j du = \\ &= \int_{\Omega} p(x) [a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n] [a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n] dx = \\ &= \sum_{k, l=1}^n p_{kl} a_{ji} a_{lk} = (Pa^{(j)}, a^{(i)}) = \lambda_j \delta_{ji}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Вернемся к случаю центрально-симметричной области  $\Omega$ . Так как при преобразовании (22.3.4) свойство центральной симметрии

сохраняется, то можем считать, что равны нулю интегралы от одночленов первой и третьей степени по области  $\Omega$  и выполнены равенства

$$\int_{\Omega} x_i x_j dx = \mu_{2i} \delta_{ij}. \quad (22.3.8)$$

Кубатурную формулу для области  $\Omega$  запишем в виде

$$\int_{\Omega} f(x) dx \cong C_1 [f(a_1, 0, \dots, 0) + f(-a_1, 0, \dots, 0)] + \dots \\ \dots + C_n [f(0, \dots, 0, a_n) + f(0, \dots, 0, -a_n)]. \quad (22.3.9)$$

Она точна для всех одночленов первой и третьей степени, а в силу (22.3.8) точна для одночленов второй степени  $x_i x_j$  при  $i \neq j$ . Потребуем, чтобы формула (22.3.9) была точна для  $f = 1, x_i^2$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Получим систему

$$\left. \begin{aligned} f = 1: & \quad C_1 + \dots + C_n = 0,5\mu_0, \\ f = x_i^2: & \quad 2C_i a_i^2 = \mu_{2i} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (22.3.10)$$

где  $\mu_{2i}$  определено равенствами (22.3.8) и  $\mu_0 = |\Omega|$ .

Формула (22.3.9) не определяется однозначно. Ее многозначность определяется многозначностью выбора  $n$  положительных чисел  $C_1, \dots, C_n$ , удовлетворяющих первому из уравнений (22.3.10). Параметры  $a_i$  определяются равенствами

$$a_i = \sqrt{\frac{\mu_{2i}}{2C_i}} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Кубатурную формулу (22.3.9) иным путем получил А. Строуд (см. также работы Г. Георгиева и Ташера).

В случае центрально-симметричной области число узлов  $2n$  является наименьшим возможным, при котором существует кубатурная формула, точная для многочленов третьей степени. Доказательство этого утверждения дано И. П. Мысовских (см. литературу к этой главе).

Если область  $\Omega$  не является центрально-симметричной, то утверждение о минимальности числа узлов неверно. Например, для  $n$ -мерного симплекса  $T$ :

$$x_1 + \dots + x_n \leq 1, \quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

существует кубатурная формула, точная для многочленов третьей степени и имеющая  $n + 2$  узла (см. работу Хаммера и Строуда).

Эта формула имеет вид

$$\int_T f(x) dx \cong -\frac{(n+1)^3}{4(n+2)!} f\left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right) + \\ + \frac{(n+3)^2}{4(n+2)!} \left[ f\left(\frac{1}{n+3}, \dots, \frac{1}{n+3}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n f\left(\frac{1}{n+3}, \dots, \underbrace{\frac{3}{n+3}}_i, \dots, \frac{1}{n+3}\right) \right]. \quad (22.3.11)$$

При установлении формулы (22.3.11) используется равенство

$$\int_T x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} dx = \frac{a_1! \dots a_n!}{(a_1 + \dots + a_n + n)!}. \quad (22.3.12)$$

Один коэффициент в формуле (22.3.11) отрицателен. В случае центрально-симметричной области коэффициенты формулы, точной для многочленов третьей степени и имеющей  $2n$  узлов, всегда положительны (см. статью И. П. Мысовских).

#### § 4. Кубатурная формула Радона

В этом параграфе излагаются результаты Радона (см. литературу в конце главы) о кубатурных формулах для вычисления двойных интегралов. Работа Радона интересна прежде всего потому, что в ней впервые успешно использована идея применения ортогональных многочленов области к построению кубатурных формул. Именно, указан метод, который для заданной области интегрирования позволяет узнать, существует ли кубатурная формула с семью узлами, точная для многочленов пятой степени, и позволяет построить такую формулу, если она существует.

Пусть  $\Omega$  — произвольная ограниченная область на плоскости, имеющая положительную меру. Условие ограниченности  $\Omega$  естественно, так как речь будет идти о кубатурной формуле с весовой функцией, равной единице. Все результаты останутся в силе и в случае, когда строится кубатурная формула с весовой функцией  $p(x, y)$ , неотрицательной в области  $\Omega$  и такой, что  $\mu_{00} > 0$ .

Важную роль в последующем играют ортогональные многочлены третьей степени области  $\Omega$  (весовая функция равна единице). Запишем основные ортогональные многочлены третьей степени

$$P_{3-i,i} = x^{3-i}y^i + Q_{3-i,i} \quad (i=0, 1, 2, 3) \quad (22.4.1)$$

и введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} A &= \int_{\Omega} \int (P_{30}P_{12} - P_{21}^2) dx dy, \\ B &= \int_{\Omega} \int (P_{30}P_{03} - P_{21}P_{12}) dx dy, \\ C &= \int_{\Omega} \int (P_{21}P_{03} - P_{12}^2) dx dy. \end{aligned} \right\} \quad (22.4.2)$$

Предполагается, что область  $\Omega$  удовлетворяет следующему условию:

$$A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \quad (22.4.3)$$

(хоть одно из чисел  $A$ ,  $B$ ,  $C$  отлично от нуля). Не известно, является ли это условие на самом деле ограничением, так как не известно, существуют ли области, для которых  $A = B = C = 0$ .

Речь идет о построении кубатурной формулы

$$\int_{\Omega} \int f(x, y) dx dy \cong \sum_{j=1}^7 C_j f(x_j, y_j), \quad (22.4.4)$$

точной для многочленов пятой степени. Число узлов 7 выбрано в соответствии с тем, что одночленов степени не выше пяти имеется двадцать один.

Покажем, что при соблюдении условия (22.4.3) число узлов  $N=7$  является наименьшим возможным, при котором существует кубатурная формула, точная для всех многочленов пятой степени. Допустим противное: существует кубатурная формула с шестью узлами

$$\int_{\Omega} \int f(x, y) dx dy \cong \sum_{i=1}^6 C_i f(x_i, y_i), \quad (22.4.5)$$

точная для многочленов пятой степени. Ясно, что ее узлы  $p_i = (x_i, y_i)$  не лежат на кривой второго порядка.

Через пять узлов формулы, в число которых не входит  $p_k$ , проведем кривую второго порядка  $R_k(x, y) = 0$ . Имеем  $R_k(p_k) \neq 0$ . Для многочлена четвертой степени  $R_k^2$  формула (22.4.5) точна

$$\int_{\Omega} \int R_k^2(x, y) dx dy = C_k R_k^2(p_k).$$

Отсюда видно, что  $C_k > 0$  ( $k = 1, \dots, 6$ ).

Пусть  $K(x, y)$  — любой ортогональный многочлен третьей степени области  $\Omega$ . Для многочлена пятой степени  $KR_k$  формула (22.4.5) точна:

$$\int_{\Omega} KR_k dx dy = C_k K(p_k) R_k(p_k).$$

Интеграл равен нулю в силу ортогональности, а так как  $C_k > 0$  и  $R_k(p_k) \neq 0$ , то отсюда следует, что  $K(p_k) = 0$  ( $k = 1, \dots, 6$ ). Мы получили, что любой ортогональный многочлен третьей степени области  $\Omega$  обращается в нуль в узлах кубатурной формулы (22.4.5). В частности, обращаются в нуль в узлах основные ортогональные многочлены (22.4.1).

Покажем, что интеграл  $A$ , определяемый формулой (22.4.2), равен нулю. Имеем:

$$\begin{aligned} A &= \int_{\Omega} \int [P_{30}xy^2 - P_{21}x^2y] dx dy = \\ &= \int_{\Omega} \int [(x^3 + Q_{30})xy^2 - (x^2y + Q_{21})x^2y] dx dy = \\ &= \int_{\Omega} \int [Q_{30}xy^2 - Q_{21}x^2y] dx dy. \end{aligned}$$

Так как  $Q_{30}$  и  $Q_{21}$  — многочлены не выше второй степени, то с помощью кубатурной формулы (22.4.5) мы получим точное значение последнего интеграла

$$A = \sum_{i=1}^6 C_i [Q_{30}(x_i, y_i) x_i y_i^2 - Q_{21}(x_i, y_i) x_i^2 y_i]. \quad (22.4.6)$$

Но так как основные ортогональные многочлены (22.4.1) обращаются в нуль в узлах кубатурной формулы, то

$$Q_{30}(x_i, y_i) = -x_i^3, \quad Q_{21}(x_i, y_i) = -x_i^2 y_i,$$

и из (22.4.6) получаем, что  $A = 0$ . Совершенно так же получим, что  $B = C = 0$ , а это противоречит условию (22.4.3).

Отметим, что вопрос о минимальности числа узлов кубатурной формулы (22.4.4) Радонем не рассматривался.

Пусть кубатурная формула (22.4.4), точная для многочленов пятой степени, построена. Ее узлы

$$p_i = (x_i, y_i) \quad (i = 1, \dots, 7) \quad (22.4.7)$$

не лежат на кривой второго порядка, в частности, никакие пять из них не лежат на прямой. Докажем, что среди точек (22.4.7) найдется шесть, которые также не лежат на кривой второго порядка. Если бы,

например,  $p_1, \dots, p_6$  лежали на кривой  $R_1$  второго порядка и  $p_2, \dots, p_7$  также лежали на кривой второго порядка  $R_2$ , то кривые  $R_1$  и  $R_2$  пересекались бы в пяти точках  $p_2, \dots, p_6$ . По теореме Безу  $R_1$  и  $R_2$  имеют общую компоненту, и так как эта компонента содержит пять точек, не лежащих на прямой, то  $R_1$  и  $R_2$  совпадают. Это противоречит тому, что точки (22.4.7) не лежат на кривой второго порядка.

Для определенности будем считать, что не лежат на кривой второго порядка точки  $p_1, \dots, p_6$ . Если через точку  $p_7$  провести прямую, не проходящую ни через одну из точек  $p_1, \dots, p_6$ , и взять на ней три точки  $p_8, p_9, p_{10}$ , отличные от  $p_7$ , то, как было доказано в § 1, гл. 21, точки  $p_1, \dots, p_{10}$  не лежат на алгебраической кривой третьего порядка. Таким же образом построим точки  $p_{11}, \dots, p_{21}$  так, что  $p_1, \dots, p_{15}$  не лежат на алгебраической кривой четвертого порядка, а точки  $p_1, \dots, p_{21}$  не лежат на алгебраической кривой пятого порядка.

Докажем, что существуют три линейно независимых многочлена третьей степени, которые обращаются в нуль в узлах кубатурной формулы (22.4.4). Так как точки  $p_1, \dots, p_{10}$  не лежат на кривой третьего порядка, то существует многочлен третьей степени  $\Pi_i(x, y)$ , который равен нулю во всех точках  $p_1, \dots, p_{10}$ , кроме  $p_{7+i}$ , и равен единице в точке  $p_{7+i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Многочлены  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  по определению обращаются в нуль в узлах формулы (22.4.4). Они линейно независимы и любой многочлен третьей степени, равный нулю в узлах формулы (22.4.4), выражается в виде их линейной комбинации с постоянными коэффициентами. По теореме 3 из § 2 гл. 21 многочлены  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  являются ортогональными многочленами области  $\Omega$ .

Таким образом, мы доказали следующее предложение. Если кубатурная формула (22.4.4) существует, то имеется три линейно независимых ортогональных многочлена, которые обращаются в нуль в семи узлах (22.4.7) формулы (22.4.4).

Докажем, что существуют три многочлена первой степени  $L_i = a_i x + b_i y + c_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), из которых по меньшей мере два отличны от тождественного нуля, такие, что справедливо тождество

$$L_1 \Pi_1 + L_2 \Pi_2 + L_3 \Pi_3 = 0. \quad (22.4.8)$$

Левая часть равенства (22.4.8) представляет собой многочлен четвертой степени от  $x$  и  $y$ . Этот многочлен обращается в нуль в точках  $p_1, \dots, p_7$ . Чтобы левая часть (22.4.8) обращалась в нуль тождественно, достаточно потребовать, чтобы она была равна нулю в точках  $p_8, \dots, p_{15}$  (точки  $p_1, \dots, p_{15}$  не лежат на кривой четвертого порядка). Это приводит к линейной однородной системе восьми уравнений с девятью неизвестными  $a_i, b_i, c_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Такая система имеет ненулевое решение. Существование  $L_i$  доказано. Очевидно, что два из многочленов  $L_i$  не могут оказаться тождествен-

ными нулями, так как тогда из (22.4.8) следует, что и третий является тождественным нулем.

Наша ближайшая задача состоит в том, чтобы указать три линейно независимых ортогональных многочлена третьей степени, удовлетворяющих тождеству вида (22.4.8). Как мы увидим, эти многочлены имеют семь общих нулей, и если нули вещественны и различны, то их можно взять в качестве узлов искомой кубатурной формулы.

Перепишем тождество (22.4.8) в виде

$$xK_1 + yK_2 = K_3, \quad (22.4.9)$$

где обозначено

$$K_1 = a_1\Pi_1 + a_2\Pi_2 + a_3\Pi_3, \quad K_2 = b_1\Pi_1 + b_2\Pi_2 + b_3\Pi_3,$$

$$K_3 = -c_1\Pi_1 - c_2\Pi_2 - c_3\Pi_3.$$

Очевидно,  $K_i$  как линейные комбинации ортогональных многочленов сами являются ортогональными многочленами области  $\Omega$ . Однако мы не можем утверждать, что  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  линейно независимы. Отметим, что  $K_1$  и  $K_2$  отличны от тождественного нуля, как это следует из (22.4.9).

Многочлены  $K_1$  и  $K_2$  можно записать как линейные комбинации основных ортогональных многочленов (22.4.1)

$$K_1 = \alpha_{30}P_{30} + \alpha_{21}P_{21} + \alpha_{12}P_{12} + \alpha_{03}P_{03},$$

$$K_2 = \beta_{30}P_{30} + \beta_{21}P_{21} + \beta_{12}P_{12} + \beta_{03}P_{03}.$$

Подставим эти выражения для  $K_1$  и  $K_2$  в соотношение (22.4.9) и заметим, что четвертые степени переменных в левой части (22.4.9) должны сократиться. Это приводит к равенствам

$$\alpha_{30} = \beta_{30} = 0, \quad \alpha_{21} = -\beta_{30}, \quad \alpha_{12} = -\beta_{21}, \quad \alpha_{03} = -\beta_{12}.$$

Выражения для  $K_1$  и  $K_2$  можно теперь записать в виде

$$K_1 = \alpha P_{21} + \beta P_{12} + \gamma P_{03}, \quad K_2 = -\alpha P_{30} - \beta P_{21} - \gamma P_{12}. \quad (22.4.10)$$

Многочлены  $K_1$  и  $K_2$  линейно независимы, так как среди чисел  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  есть отличные от нуля.

Найдем коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , пользуясь тем, что  $xK_1 + yK_2 = K_3$  является ортогональным многочленом третьей степени. Ортогональность к многочленам первой степени вытекает из того, что  $K_1$  и  $K_2$  — ортогональные многочлены. Запишем, что многочлен

$$xK_1 + yK_2 = \alpha(xP_{21} - yP_{30}) + \beta(xP_{12} - yP_{21}) + \gamma(xP_{03} - yP_{12})$$

ортогонален к  $x^2$ ,  $xу$  и  $y^2$ . Получим линейную однородную систему

$$\left. \begin{aligned} A\beta + B\gamma &= 0, \\ -A\alpha + C\gamma &= 0, \\ -B\alpha - C\beta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (22.4.11)$$

где  $A, B, C$  определены формулами (22.4.2).

Из условия (22.4.3) следует, что ранг матрицы системы (22.4.11) равен двум и, следовательно, числа  $\alpha, \beta, \gamma$  определяются с точностью до ненулевого постоянного множителя.

Возможны два случая:

- а) многочлен  $K_3 = xK_1 + yK_2$  линейно не зависит от  $K_1$  и  $K_2$ ,  
 б)  $K_3$  есть линейная комбинация  $K_1$  и  $K_2$ ,

$$K_3 = aK_1 + bK_2. \quad (22.4.12)$$

В случае а) мы получили три линейно независимых ортогональных многочлена третьей степени  $K_1, K_2, K_3$ , удовлетворяющих тождеству (22.4.9), которое является тождеством вида (22.4.8).

В случае б) из равенства (22.4.9) и (22.4.12) получаем

$$(x - a)K_1 + (y - b)K_2 = 0.$$

Выполняя преобразование координат  $x' = x - a$ ,  $y' = y - b$ , перепишем последнее равенство в виде

$$xK_1 + yK_2 = 0. \quad (22.4.13)$$

Чтобы не усложнять запись, мы сохранили прежние обозначения переменных и ортогональных многочленов. Таким образом, в случае б) мы получили только два линейно независимых ортогональных многочлена. Соотношение (22.4.13) можно рассматривать как тождество формы (22.4.8), если в качестве  $K_3$  взять ортогональный многочлен третьей степени, линейно независимый от  $K_1$  и  $K_2$ , и положить  $L_3 \equiv 0$ .

Займемся отысканием такого многочлена  $K_3$ . Нам понадобятся некоторые свойства ортогональных многочленов  $K_1$  и  $K_2$ . Мы рассматриваем случай б), когда имеет место соотношение (22.4.13). Из него следует, что

$$K_1 = yQ, \quad K_2 = -xQ, \quad (22.4.14)$$

где  $Q$  — многочлен второй степени. Докажем, что  $Q$  ортогонален любому многочлену третьей степени  $P$ , который обращается в нуль в начале координат. В самом деле, многочлен  $P$  имеет вид  $P = xQ_1 + yQ_2$ , где многочлены  $Q_1$  и  $Q_2$  имеют степень не выше двух. Имеем

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} QP \, dx \, dy &= \iint_{\Omega} Q(xQ_1 + yQ_2) \, dx \, dy = \\ &= \iint_{\Omega} (-K_2Q_1 + K_1Q_2) \, dx \, dy = 0. \end{aligned}$$



Здесь мы воспользовались равенствами (22.4.14) и ортогональностью многочленов  $K_1$  и  $K_2$ . Утверждение доказано.

Отметим следствие доказанного утверждения:  $Q(0, 0) \neq 0$ . Действительно, если бы  $Q(0, 0) = 0$ , то многочлен  $Q$  был бы ортогонален сам себе и, значит,  $Q \equiv 0$  и по (22.4.14)  $K_1 \equiv 0$ ,  $K_2 \equiv 0$ , что невозможно.

Докажем еще, что все ортогональные многочлены третьей степени обращаются в нуль в начале координат. Пусть  $K(x, y)$  — такой ортогональный многочлен. Разность  $K(x, y) - K(0, 0)$  является многочленом третьей степени, равным нулю в начале координат, поэтому по предыдущему предложению

$$\int_{\Omega} \int [K(x, y) - K(0, 0)] Q(x, y) dx dy = 0$$

или, так как  $K$  — ортогональный многочлен,

$$K(0, 0) \cdot \int_{\Omega} \int Q(x, y) dx dy = 0.$$

Здесь интеграл отличен от нуля, так как в противном случае  $Q$  был бы ортогонален единице и, в силу предыдущего предложения, ортогонален сам себе. Таким образом,  $K(0, 0) = 0$ .

Пусть  $K(x, y)$  — ортогональный многочлен третьей степени, линейно независимый от  $K_1$  и  $K_2$ . Так как по (22.4.14)

$$K_1 = y[Q(0, 0) + a_{10}x + \dots], \quad K_2 = -x[Q(0, 0) + a_{10}x + \dots]$$

и  $Q(0, 0) \neq 0$ , то из  $K$  можно вычесть такую линейную комбинацию  $K_1$  и  $K_2$ , что разность

$$K_3 = K - (a_1 K_1 + a_2 K_2)$$

не будет содержать первые степени  $x$  и  $y$ . Очевидно, множество общих нулей  $K_3$ ,  $K_1$  и  $K_2$  совпадает с множеством общих нулей  $K$ ,  $K_1$  и  $K_2$ .

Отсюда следует, что в качестве  $K_3$  можно взять любой ортогональный многочлен третьей степени, у которого коэффициенты при первой степени  $x$  и  $y$  равны нулю. Очевидно, такой многочлен не может быть линейной комбинацией  $K_1$  и  $K_2$ . Многочлен  $K_3$  можно разыскивать в виде линейной комбинации основных ортогональных многочленов (22.4.1):

$$K_3 = b_1 P_{30} + b_2 P_{21} + b_3 P_{12} + b_4 P_{03}.$$

Условие, что коэффициенты при  $x$  и  $y$  равны нулю, накладывает два ограничения на параметры  $b_i$  и, следовательно, имеется семейство ортогональных многочленов, линейно независимых от  $K_1$  и  $K_2$ . Это семейство зависит от двух параметров, так что в случае б) многочлен  $K_3$  определяется неоднозначно.

Итак, мы построили три линейно независимых ортогональных многочлена третьей степени  $K_1, K_2, K_3$ , удовлетворяющих соотношениям вида (22.4.8) как в случае а), так и в случае б). В случае а) соотношением вида (22.4.8) является соотношение (22.4.9), в случае б) — соотношение (22.4.13).

Прежде чем перейдем к вопросу об исследовании общих нулей многочленов  $K_1, K_2, K_3$ , докажем следующее предложение. Если многочлены  $K_i$  удовлетворяют соотношению вида (22.4.8):

$$L_1 K_1 + L_2 K_2 + L_3 K_3 = 0, \quad (22.4.15)$$

где  $L_i = a_i x + b_i y + c_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), то это соотношение совпадает с точностью до ненулевого постоянного множителя в случае а) с тождеством (22.4.9), а в случае б) — с тождеством (22.4.13).

Приведем доказательство для случая а). Из (22.4.15) получаем соотношение вида (22.4.9)

$$x(a_1 K_1 + a_2 K_2 + a_3 K_3) + y(b_1 K_1 + b_2 K_2 + b_3 K_3) + c_1 K_1 + c_2 K_2 + c_3 K_3 = 0.$$

Но из такого соотношения ортогональные многочлены  $K_1, K_2, K_3$  определяются с точностью до ненулевого постоянного множителя, другими словами,

$$a_1 K_1 + a_2 K_2 + a_3 K_3 = D K_1,$$

$$b_1 K_1 + b_2 K_2 + b_3 K_3 = D K_2,$$

$$c_1 K_1 + c_2 K_2 + c_3 K_3 = D K_3,$$

где  $D \neq 0$ . Так как  $K_1, K_2, K_3$  линейно независимы, то отсюда получаем:

$$L_1 = D x, \quad L_2 = D y, \quad L_3 = -D,$$

а это и означает, что соотношение (22.4.15) совпадает с (22.4.9) с точностью до постоянного множителя. Доказательство для случая б) аналогично.

Докажем, что многочлены  $K_1, K_2, K_3$  не имеют общих делителей. Отсюда, в частности, будет следовать (по теореме Безу), что число общих нулей этих многочленов не более девяти. Докажем сначала, что  $K_i$  не могут иметь в качестве общего делителя многочлен второй степени  $Q_0$ . Допустим противное:  $K_i = Q_0 L_i$ , где  $L_i$  — многочлены первой степени. Так как  $K_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) линейно независимы, то  $L_i$  тоже линейно независимы. Поэтому можно указать три постоянные  $c_1, c_2, c_3$  так, что имеет место равенство

$$c_1 L_1 + c_2 L_2 + c_3 L_3 = 1.$$

Умножим обе части на  $Q_0$ . Получим

$$c_1 K_1 + c_2 K_2 + c_3 K_3 = Q_0.$$

Но это равенство невозможно, так как из него следует, что  $Q_0$  ортогонален сам себе и, следовательно,  $Q_0 \equiv 0$ .

При доказательстве того, что у многочленов  $K_i$  не может быть общего делителя первой степени, рассмотрим отдельно случай а) и случай б). Допустим, что в случае а) многочлены  $K_i$  имеют общим делителем  $L$  — многочлен первой степени:  $K_i = LP_i$ , где  $P_i$  — линейно независимые многочлены второй степени. В силу соотношения (22.4.9) имеем  $xP_1 + yP_2 = P_3$ . Так как одночлены третьей степени в левой части этого равенства должны сократиться, то получаем для  $P_i$  следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= y(ax + by) + L_1, \quad P_2 = -x(ax + by) + L_2, \\ P_3 &= xL_1 + yL_2. \end{aligned} \right\} \quad (22.4.16)$$

Из (22.4.16) получаем  $L_2P_1 - L_1P_2 = (ax + by)P_3$  или, если умножить обе части на  $L$ ,  $L_2K_1 - L_1K_2 = (ax + by)K_3$ . Из единственности соотношения (22.4.9) следует, что  $L_2 = Dx$ ,  $L_1 = -Du$ . Отсюда по (22.4.16) найдем  $P_3 \equiv 0$  и  $K_3 \equiv 0$ , что невозможно.

Рассмотрим случай б). Пусть многочлен первой степени  $L$  — общий делитель многочленов  $K_i$ . Тогда  $K_1 = LL_1u$ ,  $K_2 = -LL_1x$ ,  $K_3 = LQ_1$ , где  $L_1$  и  $Q_1$  — многочлены первой и второй степени соответственно. Мы знаем, что  $K_3(0, 0) = 0$ . Так как  $Q = LL_1$  и  $Q(0, 0) \neq 0$ , то  $L(0, 0) \neq 0$  и, следовательно,  $Q_1(0, 0) = 0$ .

Многочлен  $Q_1$  можем записать в виде  $Q_1 = xM_1 + yM_2$ , где  $M_1$  и  $M_2$  — многочлены первой степени. Очевидно,

$$M_2K_1 - M_1K_2 = M_2LL_1u + M_1LL_1x = LL_1(xM_1 + yM_2) = L_1K_3,$$

и мы получили равенство  $M_2K_1 - M_1K_2 = L_1K_3$ . Из единственности соотношения (22.4.13) следует  $L_1 \equiv 0$ , что невозможно.

Рассмотрим вопрос об общих корнях многочленов  $K_1, K_2, K_3$ . В случае а) две алгебраические кривые третьего порядка  $K_1 = 0$  и  $K_2 = 0$  имеют точно две бесконечно далеких точки пересечения, так как

$$\begin{aligned} K_1 &= y(\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2) + \alpha Q_{21} + \beta Q_{12} + \gamma Q_{03}, \\ K_2 &= -x(\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2) - \alpha Q_{30} - \beta Q_{21} - \gamma Q_{12}. \end{aligned}$$

Если остальные семь точек пересечения вещественны и различны, то, как мы увидим, эти семь точек можно взять в качестве узлов кубатурной формулы, точной для многочленов пятой степени. В противном случае (среди точек пересечения имеются комплексные или кратные) можем утверждать, что кубатурная формула с семью узлами, точная для многочленов пятой степени, не существует. Действительно, если бы такая формула существовала, то нашлись бы три ортогональных многочлена  $K_1, K_2, K_3$ , удовлетворяющих соотношению (22.4.9) и таких, что их общие семь корней вещественны и различны.

Так как соотношение (22.4.9) определяет ортогональные многочлены с точностью до ненулевого множителя, то утверждение доказано.

В случае б) общими корнями  $K_1, K_2, K_3$  являются начало координат и шесть точек пересечения кривой второго порядка  $Q=0$  и алгебраической кривой третьего порядка  $K_3=0$ . Так как ортогональный многочлен  $K_3$  зависит от двух параметров, то семь общих нулей также зависят от параметров.

Предположим, что семь общих корней многочленов  $K_1, K_2, K_3$  оказались вещественными и различными. Обозначим эти корни  $p_1, \dots, p_7$  и докажем, что их можно взять в качестве узлов кубатурной формулы, точной для многочленов пятой степени. Все последующие рассуждения останутся в силе, если корни  $p_1, \dots, p_7$  различны, но не обязательно все вещественны. В этом случае мы придем к кубатурной формуле с комплексными узлами.

Начнем с доказательства того, что  $p_1, \dots, p_7$  не лежат на кривой второго порядка. Допустим противное: точки  $p_1, \dots, p_7$  лежат на кривой второго порядка  $R(x, y)=0$ . Допустим, что кривая  $R=0$  неприводима. Тогда в случае а) по теореме Безу получим, что  $K_i$  имеют общий делитель  $R$  — многочлен второй степени, что невозможно. В случае б) кривая второго порядка  $Q=0$  и неприводимая кривая  $R=0$  пересекаются в шести точках, а тогда  $Q=dR$ , где  $d$  — отличная от нуля постоянная. Так как  $R(0, 0)=0$ , то и  $Q(0, 0)=0$ , что невозможно.

Итак, кривая  $R=0$  распадается на две прямые  $L=0$  и  $L_1=0$ . На одной из прямых, например,  $L=0$ , найдется по меньшей мере четыре из точек  $p_1, \dots, p_7$ . Но тогда по теореме Безу многочлен первой степени  $L$  является делителем всех  $K_i$  как в случае а), так и в случае б), что невозможно. Утверждение полностью доказано.

Так как точки  $p_1, \dots, p_7$  не лежат на кривой второго порядка, то, как мы видели выше, можно указать четырнадцать точек  $p_8, \dots, p_{21}$ , так что  $p_1, \dots, p_{21}$  не лежат на кривой пятого порядка. Пусть  $P(x, y)$  — многочлен пятой степени, который обращается в нуль в точках  $p_1, \dots, p_7$ . Докажем, что можно указать три многочлена второй степени  $Q_1, Q_2, Q_3$  таких, что

$$P(x, y) = Q_1 K_1 + Q_2 K_2 + Q_3 K_3. \quad (22.4.17)$$

В левой и правой части этого равенства мы имеем многочлены пятой степени. Они совпадают в точках  $p_1, \dots, p_7$  (обращаются в нуль). Чтобы многочлены совпадали тождественно, достаточно потребовать, чтобы совпадали их значения в точках  $p_8, \dots, p_{21}$ . Это приводит к линейной алгебраической системе четырнадцати уравнений относительно восемнадцати неизвестных — коэффициентов многочленов  $Q_i$ .

Чтобы выяснить вопрос о разрешимости этой системы, рассмотрим соответствующую однородную систему. Однородная система

равносильна задаче об определении трех многочленов второй степени  $Q_i$  таких, что

$$Q_1 K_1 + Q_2 K_2 + Q_3 K_3 = 0. \quad (22.4.18)$$

В случае а) равенство (22.4.18) с помощью (22.4.9) можно переписать в виде  $(Q_1 + xQ_3)K_1 + (Q_2 + yQ_3)K_2 = 0$ . Так как  $K_1$  и  $K_2$  не имеют общих делителей, то отсюда следует:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 + xQ_3 &= -DK_2 = Dx(ax^2 + \beta xy + \gamma y^2) + \\ &\quad + D(\alpha Q_{30} + \beta Q_{21} + \gamma Q_{12}), \\ Q_2 + yQ_3 &= DK_1 = Dy(ax^2 + \beta xy + \gamma y^2) + \\ &\quad + D(\alpha Q_{21} + \beta Q_{12} + \gamma Q_{03}), \end{aligned} \right\} \quad (22.4.19)$$

где  $D$  — отличная от нуля постоянная. Запишем многочлен второй степени  $Q_3$  с неопределенными коэффициентами, подставим, например, в первое из равенств (22.4.19) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  и  $y$ . Получим

$$Q_3 = D(ax^2 + \beta xy + \gamma y^2) + ax + by + c.$$

Далее, из равенств (22.4.19) находим  $Q_1$  и  $Q_2$ :

$$Q_1 = D(\alpha Q_{30} + \beta Q_{21} + \gamma Q_{12}) - x(ax + by + c),$$

$$Q_2 = D(\alpha Q_{21} + \beta Q_{12} + \gamma Q_{03}) - y(ax + by + c).$$

Мы получили общее решение задачи (22.4.18), зависящее от четырех произвольных постоянных  $D, a, b, c$ . Отсюда следует, что ранг матрицы однородной системы равен четырнадцати. Так как число уравнений равно четырнадцати, то ранг расширенной матрицы тоже равен четырнадцати, и неоднородная система всегда разрешима. Справедливость представления (22.4.17) в случае а) доказана.

В случае б) равенство (22.4.18) с помощью (22.4.14) можно записать в виде

$$(Q_1 y - Q_2 x) Q + Q_3 K_3 = 0.$$

Так как  $Q$  и  $K_3$  не имеют общих делителей, то

$$Q_3 = DQ, \quad Q_1 y - Q_2 x + DK_3 = 0, \quad (22.4.20)$$

где  $D$  — отличная от нуля постоянная. Многочлен  $K_3$  обращается в нуль в начале координат, поэтому его можно записать в виде

$$K_3 = yQ_4 - xQ_5,$$

где  $Q_4$  и  $Q_5$  — многочлены второй степени. Подставляя это представление для  $K_3$  в (22.4.20), получим

$$(Q_1 + DQ_4)y - (Q_2 + DQ_5)x = 0.$$

Отсюда видно, что

$$Q_1 + DQ_4 = x(ax + by + c), \quad Q_2 + DQ_5 = y(ax + by + c).$$

Таким образом, общее решение задачи (22.4.18)

$$Q_1 = -DQ_4 + x(ax + by + c), \\ Q_2 = -DQ_5 + y(ax + by + c), \quad Q_3 = DQ$$

зависит от четырех произвольных постоянных  $D, a, b, c$ . Отсюда заключаем, что и в случае б) представление (22.4.17) имеет место.

Теперь нетрудно доказать, что можно построить кубатурную формулу с узлами  $p_1, \dots, p_7$ , точную для многочленов пятой степени. Так как точки  $p_1, \dots, p_{21}$  не лежат на алгебраической кривой пятого порядка, то можно построить интерполяционную кубатурную формулу

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy \cong \sum_{i=1}^{21} C_i f(x_i, y_i), \quad p_i = (x_i, y_i), \quad (22.4.21)$$

точную для многочленов пятой степени. Утверждение будет доказано, если докажем, что коэффициенты  $C_i$  формулы (22.4.21) при  $i \geq 8$  равны нулю.

Рассмотрим многочлен пятой степени  $P_k(x, y)$ ,  $k = 8, 9, \dots, 21$ , равный нулю во всех точках  $p_1, \dots, p_{21}$ , кроме  $p_k$ , и равный единице в точке  $p_k$ . Многочлен  $P_k(x, y)$  обращается в нуль в точках  $p_1, \dots, p_7$ , поэтому для него справедливо представление (22.4.17). Запишем теперь, что формула (22.4.21) точна для  $f = P_k(x, y)$ . Интеграл от  $P_k(x, y)$  равен нулю в силу представления (22.4.17), а кубатурная сумма равна  $C_k$ , так что получаем  $C_k = 0$  при  $k = 8, 9, \dots, 21$ , что и требовалось доказать.

Важную роль в вопросе о построении кубатурной формулы (22.4.4) играло условие (22.4.3), которому должна удовлетворять область  $\Omega$ . Докажем, что если  $\Omega$  обладает центральной симметрией, то условие (22.4.3) выполнено. Будем считать, что центром симметрии является начало координат.

Доказательство будем вести от противного. Предположим, что  $A = B = C = 0$ . Нетрудно проверить, что при соблюдении этих равенств не только в случае центрально-симметричной, но и в случае любой области можно утверждать, что многочлены

$$P_{30}y - P_{21}x, \quad P_{03}x - P_{12}y \quad (22.4.22)$$

ортогональны ко всем многочленам второй степени.

В случае, когда область  $\Omega$  центрально-симметричная, основные ортогональные многочлены третьей степени даются формулами (21.2.16). Эти формулы можно записать кратко следующим образом:

$$P_{3-i,i} = x^{3-i}y^i + a^{(i)}x + b^{(i)}y \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Отсюда получаем выражения многочленов (22.4.22) для центральносимметричной области:

$$P_{30}y - P_{21}x = -a^{(1)}x^2 + (a^{(0)} - b^{(1)})xy + b^{(0)}y^2,$$

$$P_{03}x - P_{21}y = a^{(3)}x^2 + (b^{(3)} - a^{(2)})xy - b^{(2)}y^2.$$

Эти многочлены второй степени ортогональны ко всем многочленам второй степени, поэтому их коэффициенты равны нулю.

В частности, равны нулю коэффициенты при  $xy$ :  $a^{(0)} - b^{(1)} = 0$ ,  $b^{(3)} - a^{(2)} = 0$ . Пользуясь формулами (21.2.16), запишем эти равенства подробнее

$$\mu_{02}\mu_{40} - \mu_{20}\mu_{22} = 0, \quad \mu_{20}\mu_{04} - \mu_{02}\mu_{22} = 0.$$

Здесь  $\mu_{ik}$  — моменты весовой функции, равной единице.

Из двух последних равенств получаем

$$\mu_{40}\mu_{04} - \mu_{22}^2 = 0.$$

Это равенство невозможно, так как его левая часть положительна как определитель Грама линейно независимых функций  $x^2$ ,  $y^2$ . Получили противоречие и, следовательно, условие (22.4.3) выполнено.

В статье Радона выполнение условия (22.4.3) доказано для частного случая, когда область симметрична относительно обеих координатных осей.

Выполним фактически построение кубатурной формулы (22.4.4) для некоторых областей  $\Omega$  частного вида. Пусть  $\Omega$  — треугольник:  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $x + y \leq 1$ . Выпишем основные ортогональные многочлены третьей степени треугольника

$$P_{30} = P_{30}(x, y) = x^3 - \frac{9}{7}x^2 + \frac{3}{7}x - \frac{1}{35},$$

$$P_{21} = P_{21}(x, y) = x^2y - \frac{1}{7}x^2 - \frac{4}{7}xy + \frac{2}{21}x + \frac{1}{21}y - \frac{1}{105},$$

$$P_{12} = P_{21}(y, x), \quad P_{03} = P_{30}(y, x).$$

При их вычислении пользуемся формулой (22.3.12) при  $n = 2$ .

Вычисляем интегралы (22.4.2)

$$A = C = -\frac{8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7!}, \quad B = \frac{8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7!}.$$

Видим, что условие (22.4.3) выполнено. Далее, решаем систему (22.4.11). Одно из ее решений  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ , так что по (22.4.10)

$$K_1 = x^2y + xy^2 + y^3 - \frac{1}{7}x^2 - \frac{8}{7}xy - \frac{10}{7}y^2 + \frac{1}{7}x + \frac{4}{7}y - \frac{1}{21},$$

$$K_2 = -xy^2 - x^2y - x^3 + \frac{1}{7}y^2 + \frac{8}{7}xy + \frac{10}{7}x^2 - \frac{1}{7}y - \frac{4}{7}x + \frac{1}{21}$$

и по (22.4.9)

$$\begin{aligned} K_3 &= xK_1 + yK_2 = \\ &= -\frac{1}{7}x^3 + \frac{2}{7}x^2y - \frac{2}{7}xy^2 + \frac{1}{7}y^3 + \frac{1}{7}x^2 - \frac{1}{7}y^2 - \frac{1}{21}x + \frac{1}{21}y = \\ &= \frac{1}{21}(y-x)[3(y^2+xy+x^2) - 6xy - 3(y+x) + 1]. \end{aligned}$$

Имеет место случай а), так как  $K_3$  не является линейной комбинацией  $K_1$  и  $K_2$ .

Не будем проводить подробно вычисление общих нулей многочленов  $K_i$ . Отметим только, что сначала из системы  $K_1=0$ ,  $K_3=0$  находим узлы, расположенные на прямой  $y=x$ . Это приводит к решению уравнения третьей степени. Остальные четыре узла находим из системы  $K_1+K_2=0$ ,  $K_3=0$ , которая сводится к системе уравнений второй степени. Мы не будем также производить вычисление коэффициентов. Приведем готовую таблицу узлов и коэффициентов.

$x_k$	$\frac{1}{3}$	$\frac{6+\sqrt{15}}{21}$	$\frac{9-2\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6+\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6-\sqrt{15}}{21}$	$\frac{9+2\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6-\sqrt{15}}{21}$
$y_k$	$\frac{1}{3}$	$\frac{9-2\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6+\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6+\sqrt{15}}{21}$	$\frac{9+2\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6-\sqrt{15}}{21}$	$\frac{6-\sqrt{15}}{21}$
$C_k$	$\frac{9}{80}$	$\frac{155+\sqrt{15}}{2400}$			$\frac{155-\sqrt{15}}{2400}$		

Пусть теперь  $\Omega$  — ограниченная область, симметричная относительно обеих координатных осей. Очевидно,  $\Omega$  обладает центральной симметрией относительно начала координат, поэтому условие (22.4.3) выполнено и основные ортогональные многочлены третьей степени даются формулой (21.2.16). Так как  $\mu_{ik}=0$ , если хоть одно из чисел  $i$  и  $k$  нечетно, то ортогональные многочлены запишутся в виде

$$\begin{aligned} P_{30} &= x^3 - \frac{\mu_{40}}{\mu_{20}}x, & P_{21} &= x^2y - \frac{\mu_{22}}{\mu_{02}}y, \\ P_{12} &= xy^2 - \frac{\mu_{22}}{\mu_{20}}x, & P_{03} &= y^3 - \frac{\mu_{04}}{\mu_{02}}y. \end{aligned}$$

Интегралы (22.4.2) равны

$$\begin{aligned} A &= \frac{\mu_{22}}{\mu_{20}\mu_{02}}(\mu_{22}\mu_{20} - \mu_{02}\mu_{40}), & B &= 0, \\ C &= \frac{\mu_{22}}{\mu_{20}\mu_{02}}(\mu_{22}\mu_{02} - \mu_{20}\mu_{04}). \end{aligned}$$



В качестве решения системы (22.4.11) возьмем

$$\alpha = \mu_{20}\mu_{04} - \mu_{22}\mu_{02}, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \mu_{02}\mu_{40} - \mu_{22}\mu_{20}. \quad (22.4.23)$$

По (22.4.10) находим

$$K_1 = yQ, \quad K_2 = -xQ,$$

где

$$Q = \alpha x^2 + \gamma y^2 - \delta,$$

при этом  $\alpha$  и  $\gamma$  определены формулой (22.4.23) и  $\delta = \mu_{40}\mu_{04} - \mu_{22}^2 > 0$ . Так как  $xK_1 + yK_2 = 0$ , то получаем случай б).

Чтобы найти  $K_3$ , составим линейную комбинацию основных ортогональных многочленов

$$K_3 = b_1 \left( x^3 - \frac{\mu_{40}}{\mu_{20}} x \right) + b_2 \left( x^2 y - \frac{\mu_{22}}{\mu_{02}} y \right) + \\ + b_3 \left( x y^2 - \frac{\mu_{22}}{\mu_{20}} x \right) + b_4 \left( y^3 - \frac{\mu_{04}}{\mu_{02}} y \right)$$

и приравняем нулю коэффициенты при  $x$  и  $y$ :

$$b_1 \frac{\mu_{40}}{\mu_{20}} + b_3 \frac{\mu_{22}}{\mu_{20}} = 0, \quad b_2 \frac{\mu_{22}}{\mu_{02}} + b_4 \frac{\mu_{04}}{\mu_{02}} = 0.$$

Найдем отсюда  $b_3$  и  $b_4$  и подставим в выражение для  $K_3$ . Получим

$$K_3 = b_1 \left( x^3 - \frac{\mu_{40}}{\mu_{22}} x y^2 \right) + b_2 \left( x^2 y - \frac{\mu_{22}}{\mu_{04}} y^3 \right)$$

или, если ввести новые параметры  $\lambda$  и  $\nu$ ,

$$K_3 = \lambda (\mu_{22} x^3 - \mu_{40} x y^2) + \nu (\mu_{04} x^2 y - \mu_{22} y^3).$$

Нетрудно видеть, что однородный многочлен  $K_3$  распадается в произведение трех различных вещественных многочленов первой степени, так что кривая  $K_3 = 0$  распадается на три вещественные прямые, проходящие через начало координат. Если  $\nu \neq 0$ , достаточно проверить, что многочлен третьей степени

$$P(t) = \lambda (\mu_{22} - \mu_{40} t^2) + \nu (\mu_{04} t - \mu_{22} t^3)$$

имеет три различных вещественных корня. Это следует из того, что

$$\text{sign } P(-\infty) = \text{sign } \nu,$$

$$P\left(-\sqrt{\frac{\mu_{22}}{\mu_{40}}}\right) = -\nu \frac{1}{\mu_{40}} \sqrt{\frac{\mu_{22}}{\mu_{40}}} \delta,$$

$$P\left(\sqrt{\frac{\mu_{22}}{\mu_{40}}}\right) = \nu \frac{1}{\mu_{40}} \sqrt{\frac{\mu_{22}}{\mu_{40}}} \delta,$$

$$\text{sign } P(+\infty) = -\text{sign } \nu.$$

При  $\nu = 0$  утверждение очевидно.

Докажем, что при надлежащем выборе параметров  $\lambda$  и  $\nu$  имеется шесть вещественных точек пересечения прямых  $K_3=0$  с кривой второго порядка  $Q \equiv \alpha x^2 + \gamma y^2 - \delta = 0$ . Если  $\alpha > 0$  и  $\gamma > 0$ , то  $Q=0$  — эллипс, и утверждение верно при любых значениях параметров  $\lambda$  и  $\nu$ , не равных одновременно нулю.

Отметим, что по крайней мере одно из чисел  $\alpha$  и  $\gamma$  положительно, как это следует из равенства  $\alpha\mu_{40} + \gamma\mu_{22} = \mu_{20}\delta > 0$ . Пусть  $\alpha > 0$ .

Прямые  $K_3=0$  при  $\lambda=0$ ,  $\nu=1$  имеют вид  $y=0$ ,  $y = \pm \sqrt{\frac{\mu_{04}}{\mu_{22}}} x$ . Они пересекаются с кривой  $Q=0$  в шести различных и вещественных точках  $(\pm \sqrt{\frac{\delta}{\alpha}}, 0)$ ,  $(\pm \sqrt{\frac{\mu_{22}}{\mu_{02}}}, \pm \sqrt{\frac{\mu_{01}}{\mu_{02}}})$ . Утверждение верно и при значениях параметров  $\lambda$ ,  $\nu$ , близких к  $\lambda=0$ ,  $\nu=1$ . Если  $\gamma > 0$ , вещественные точки пересечения получим при  $\lambda=1$ ,  $\nu=0$ .

Пусть  $\Omega$  — круг:  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Кривая  $Q=0$  представляет собой окружность  $x^2 + y^2 = \frac{2}{3}$  и, следовательно, шесть точек пересечения этой окружности с прямыми  $K_3=0$  вещественны и различны при всех  $\lambda$  и  $\nu$ . Для заданного отношения параметров  $\lambda:\nu$  получаем определенную кубатурную формулу.

При  $\lambda=0$ ,  $\nu=1$  уравнение  $K_3=0$  определяет три прямые  $y=0$ ,  $y = \pm \sqrt{3} x$ , и шесть узлов кубатурной формулы располагаются в вершинах правильного шестиугольника, вписанного в окружность  $x^2 + y^2 = \frac{2}{3}$ , при этом две вершины лежат на оси  $x$ . Седьмой узел формулы располагается в начале координат. Мы не будем заниматься вычислением коэффициентов формулы, а приведем результат вычисления в виде таблицы.

$x_k$	0	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
$y_k$	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
$C_k$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$					

Если  $\Omega$  — квадрат:  $-1 \leq x, y \leq 1$ , то кривая  $Q=0$  также представляет собой окружность  $x^2 + y^2 = \frac{14}{15}$ . Таким образом, и в этом случае при каждом заданном отношении  $\lambda:\nu$  получаем кубатурную

формулу. Приведем таблицу узлов и коэффициентов кубатурной формулы для квадрата при  $\lambda = 0$ ,  $\nu = 1$ .

$x_k$	0	$\sqrt{\frac{14}{15}}$	$-\sqrt{\frac{14}{15}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$y_k$	0	0	0	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$
$C_k$	$\frac{8}{7}$	$\frac{20}{63}$		$\frac{5}{9}$			

## Л и т е р а т у р а

Георгиев Г., Формулы механической квадратуры с минимальным числом членов при многократных интегралах, ДАН СССР 83, № 4 (1952), 521—524.

Thacher H. C., Optimum quadrature formulas in  $s$  dimensions, Math. Tables and other Aids Comp. 11, № 59 (1957), 189—194.

Stroud A. H., Numerical integration formulas of degree two, Math. of Comp. 14, № 69 (1960), 21—26.

Фаддеев Д. К. и Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, М., Физматгиз, 1960.

Мысовских И. П., Доказательство минимальности числа узлов одной кубатурной формулы для гипершара, Журн. вычислит. матем. и матем. физ. 6, № 4 (1966), 621—630.

Hammer P. C., Stroud A. H., Numerical integration over simplexes, Math. Tables and other Aids Comp. 10, № 55 (1956), 137—139.

Radon J., Zur mechanischen Kubatur, Monatsh. für Math. 52, № 4 (1948), 286—300.

## ГЛАВА 23

### КУБАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ ЧАСТНОГО ВИДА

#### § 1. Гиперкуб

Через  $K$  будем обозначать  $n$ -мерный куб  $-1 \leq x_i \leq 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Наиболее простой способ получения кубатурных формул для вычисления интеграла по  $K$  состоит в  $n$ -кратном применении квадратурных формул.

Интеграл по  $K$  приводится к вычислению  $n$  простых интегралов

$$\int_K f(x) dx = \int_{-1}^1 dx_1 \int_{-1}^1 dx_2 \dots \int_{-1}^1 f(x_1, \dots, x_n) dx_n.$$

Интеграл по каждой переменной в правой части этого равенства заменим квадратурной суммой, например, по формуле Гаусса

$$\int_{-1}^1 \varphi(t) dt \cong \sum_{i=1}^p A_i \varphi(t_i).$$

Получим кубатурную формулу

$$\int_K f(x) dx \cong \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^p A_{i_1} \dots A_{i_n} f(t_{i_1}, \dots, t_{i_n}). \quad (23.1.1)$$

Формула (23.1.1) имеет  $p^n$  узлов и точна, когда  $f(x) = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ , где  $0 \leq \alpha_k \leq 2p-1$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). В частности, она точна, когда  $f(x)$  — любой многочлен степени  $2p-1$ .

Указанный способ получения кубатурных формул можно применять и в несколько более общем случае, когда речь идет о вычислении интеграла по  $K$  с весовой функцией

$$p(x) = p_1(x_1) p_2(x_2) \dots p_n(x_n).$$

Формула (23.1.1) при  $p=3$  точна для всех многочленов пятой степени и имеет  $3^n$  узлов. Приведем две кубатурные формулы, точные для многочленов пятой степени и имеющие меньшее число узлов

Кубатурная формула

$$\int_K f(x) dx \cong \sum_1^{2^n} f(\pm \alpha, \pm \alpha, \dots, \pm \alpha) + B \sum_1^{2n} f(0, \dots, 0, \pm \beta, 0, \dots, 0), \quad (23.1.2)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{5n+4}{3(5n-4)}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{5n+4}{30}}, \quad A = \left(\frac{5n-4}{5n+4}\right)^2, \quad B = \frac{5 \cdot 2^{n+3}}{(5n+4)^2},$$

имеет  $2^n + 2n$  узлов. Нетрудно проверить, что она точна для всех многочленов пятой степени. При  $n \geq 6$  получаем  $\beta > 1$ , так что  $2n$  узлов находятся вне  $K$ .

Кубатурная формула (Хаммер и Строуд)

$$\int_K f(x) dx \cong Af(0, \dots, 0) + B \sum_1^{2n} f(0, \dots, 0, \pm \alpha, 0, \dots, 0) + \\ + C \sum_1^{2n(n-1)} f(0, \dots, 0, \pm \beta, 0, \dots, 0, \pm \beta, 0, \dots, 0), \quad (23.1.3)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{3}{5}},$$

$$A = \frac{2^{n-1}}{81} (25n^2 - 115n + 162), \quad B = \frac{2^{n-1}}{81} (70 - 25n), \quad C = \frac{2^{n-1} \cdot 25}{162},$$

имеет  $2n^2 + 1$  узлов. Можно проверить, что она точна для многочленов пятой степени. Ее узлы принадлежат области интегрирования, коэффициент  $B$  при  $n \geq 3$  отрицателен.

## § 2. Гиперсфера

Рассмотрим кубатурные формулы для вычисления поверхностного интеграла

$$I = \int_R f(x) dS, \quad (23.2.1)$$

где  $R$ —сфера  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = r^2$  радиуса  $r$  и  $dS$ —элемент поверхности.

Перейдем в интеграле I к сферическим координатам

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi_1, \\ x_2 &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ &\dots \dots \dots \\ x_{n-2} &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-3} \cos \varphi_{n-2}, \\ x_{n-1} &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-3} \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}, \\ x_n &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-3} \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1}, \\ 0 \leq \varphi_i &\leq \pi \quad (i = 1, 2, \dots, n-2), \quad 0 \leq \varphi_{n-1} < 2\pi. \end{aligned} \right\} \quad (23.2.2)$$

Элемент поверхности в сферических координатах есть

$$dS = r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1},$$

и мы получаем

$$I = r^{n-1} \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(r \cos \varphi_1, \dots) \sin^{n-2} \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-2} d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1}. \quad (23.2.3)$$

В этом интеграле областью интегрирования является  $(n-1)$ -мерный параллелепипед, так что при построении кубатурной формулы можем воспользоваться способом кратного применения квадратурных формул. Приведем кубатурную формулу такого рода (И. П. Мысовских). Пусть  $f(x)$  — многочлен степени не выше  $m = 2q - 1$ . Тогда подынтегральная функция в (23.2.3) есть тригонометрический многочлен степени не выше  $m$  относительно переменной  $\varphi_{n-1}$ . Выполним интегрирование по  $\varphi_{n-1}$ , получим  $(n-2)$ -кратный интеграл, в котором подынтегральная функция как функция от  $\varphi_{n-2}$  представляет собой произведение  $\sin \varphi_{n-2}$  и тригонометрического многочлена степени  $\leq m$ , зависящего лишь от  $\cos \varphi_{n-2}$ . В самом деле, нечетные степени  $\sin \varphi_{n-2}$  могут появиться только от одночленов, содержащих множитель  $x_n^\alpha x_{n-1}^\beta$ , где  $\alpha + \beta$  нечетно. Но интеграл от такого одночлена по  $\varphi_{n-1}$  равен нулю, так как

$$\int_0^{2\pi} \sin^\alpha \varphi_{n-1} \cos^\beta \varphi_{n-1} d\varphi_{n-1} = 0,$$

если хоть одно из чисел  $\alpha$  или  $\beta$  нечетно.

Аналогично в результате интегрирования по  $\varphi_{n-1}$  и  $\varphi_{n-2}$  получим  $(n-3)$ -кратный интеграл, в котором подынтегральная функция как функция от  $\varphi_{n-3}$  есть произведение  $\sin^2 \varphi_{n-3}$  и тригонометрического многочлена степени  $\leq m$ , зависящего лишь от  $\cos \varphi_{n-3}$ . В самом деле, нечетные степени  $\sin \varphi_{n-3}$  могут появиться только от одночле-

нов, содержащих множитель  $x_n^\alpha x_{n-1}^\beta x_{n-2}^\gamma$ , где  $\alpha + \beta + \gamma$  нечетно. Но интеграл от такого одночлена по  $\varphi_{n-1}$  и  $\varphi_{n-2}$  равен нулю, так как

$$\int_0^\pi \cos^\gamma \varphi_{n-2} \cdot \sin^{\alpha+\beta} \varphi_{n-2} d\varphi_{n-2} \int_0^{2\pi} \sin^\alpha \varphi_{n-1} \cos^\beta \varphi_{n-1} d\varphi_{n-1} = 0,$$

если хоть одно из чисел  $\alpha, \beta, \gamma$  нечетно.

Вообще, в результате интегрирования по  $\varphi_{n-1}, \varphi_{n-2}, \dots, \varphi_{n-k-1}$  ( $0 \leq k \leq n-3$ ) получим  $(n-k-2)$ -кратный интеграл, в котором подынтегральная функция, как функция от  $\varphi_{n-k-2}$ , представляет собой произведение  $\sin^{k+1} \varphi_{n-k-2}$  и тригонометрического многочлена степени  $\leq m$ , зависящего лишь от  $\cos \varphi_{n-k-2}$ . Этот многочлен будем обозначать через  $P_m(\cos \varphi_{n-k-2})$ .

Интеграл по переменной  $\varphi_{n-1}$  в (23.2.3) заменим квадратурной суммой по формуле прямоугольников с  $m+1=2q$  узлами. Так как мы считаем, что  $f(x)$  — многочлен степени  $\leq m$ , то такая замена сохранит точное значение интеграла.

Чтобы заменить квадратурной суммой интеграл по  $\varphi_{n-k-2}$  ( $0 \leq k \leq n-3$ )

$$\int_0^\pi \sin^{k+1} \varphi_{n-k-2} P_m(\cos \varphi_{n-k-2}) d\varphi_{n-k-2}, \quad (23.2.4)$$

сделаем в (23.2.4) замену переменной интегрирования  $t = \cos \varphi_{n-k-2}$ . В новой переменной интеграл (23.2.4) перепишется так:

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{k}{2}} P_m(t) dt.$$

Мы получим точное значение этого интеграла, если воспользуемся квадратурной формулой типа Гаусса с весом  $(1-t^2)^{\frac{k}{2}}$  на отрезке  $[-1, 1]$  и с  $q$  узлами:

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{k}{2}} \varphi(t) dt \cong \sum_{j=1}^q A_j^{(k)} \varphi(t_j^{(k)}). \quad (23.2.5)$$

Для упрощения записи в (23.2.5) не отмечена зависимость узлов и коэффициентов от  $q$ .

Введем обозначение

$$F(r, \varphi_1, \dots, \varphi_n) = f(r \cos \varphi_1, r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \dots, r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-1}) \quad (23.2.6)$$

и рассмотрим кубатурную формулу

$$\int_R f(x) dS \cong r^{n-1} \frac{\pi}{q} \sum_{j=1}^{2q} \sum_{j_1, \dots, j_{n-2}=1}^q A_{j_1}^{(n-3)} A_{j_2}^{(n-4)} \dots A_{j_{n-2}}^{(0)} \times \\ \times F\left(r, \varphi_1^{(j_1)}, \varphi_2^{(j_2)}, \dots, \varphi_{n-2}^{(j_{n-2})}, \frac{\pi}{q} j\right), \quad (23.2.7)$$

где

$$\varphi_{n-k-2}^{(j)} = \arccos t_j^{(k)},$$

а  $t_j^{(k)}$  и  $A_j^{(k)}$  — узлы и коэффициенты квадратурной формулы (23.2.5). Ясно, что кубатурная формула (23.2.7) точна, когда  $f(x)$  — любой многочлен степени  $m = 2q - 1$ . Она имеет  $2q^{n-1}$  узлов.

Укажем еще формулу В. А. Диткина и Л. А. Люстерника для вычисления интеграла по поверхности трехмерной сферы  $R$ :  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

$$\int_R f(x) dS \cong \frac{5\pi}{42} \sum_{i=1}^{12} f(x^{(i)}) + \frac{9\pi}{70} \sum_{i=1}^{20} f(y^{(i)}). \quad (23.2.8)$$

Здесь  $x^{(i)}$  — вершины вписанного в  $R$  икосаэдра,  $y^{(i)}$  — вершины вписанного в  $R$  додекаэдра, при этом  $y^{(i)}$  лежат на перпендикулярах, опущенных из центра икосаэдра на его грани. Формула (23.2.8) точна, когда  $f(x)$  — многочлен девятой степени от трех переменных  $x_1, x_2, x_3$ .

### § 3. Гипершар

Будем строить кубатурные формулы для вычисления интеграла

$$\int_S f(x) dx, \quad (23.3.1)$$

где  $S$  — единичный гипершар:  $x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1$ .

Сначала построим кубатурные формулы специального вида

$$\int_S f(x) dx \cong \sum_{j=1}^p B_j \int_{R_j} f(x) dS_j. \quad (23.3.2)$$

В правой части стоит поверхностный интеграл по сфере  $R_j$ :  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = r_j^2$  и  $B_j$  — коэффициент. Нам надлежит определить  $2p$  постоянных  $r_j$  и  $B_j$  ( $j = 1, 2, \dots, p$ ). Потребуем, чтобы формула (23.3.2) обращалась в точное равенство, когда  $f(x)$  является многочленом возможно более высокой степени.



Нетрудно видеть, что равенство (23.3.2) выполняется точно, когда  $f(x)$  есть одночлен  $x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$ , у которого хоть одно из чисел  $\beta_1, \dots, \beta_n$  нечетно. Таким образом, при построении кубатурной формулы (23.3.2) мы вправе ограничиться одночленами вида

$$x_1^{2\alpha_1} \dots x_n^{2\alpha_n}, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_n = \nu. \quad (23.3.3)$$

В интеграле по  $S$  от одночлена (23.3.3) перейдем к сферическим координатам (23.2.2). Якобиан преобразования (23.2.2) равен

$$r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2},$$

и мы получим

$$\int_S x_1^{2\alpha_1} \dots x_n^{2\alpha_n} dx = \int_0^1 r^{2\nu+n-1} dr \cdot I(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad (23.3.4)$$

где

$$I(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \int_0^\pi \dots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos \varphi_1)^{2\alpha_1} \dots (\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-1})^{2\alpha_n} \times \\ \times \sin^{n-2} \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-2} d\varphi_1 \dots d\varphi_{n-1} > 0.$$

Перейдем к сферическим координатам в поверхностном интеграле по  $R_j$  от одночлена (23.3.3):

$$\int_{R_j} x_1^{2\alpha_1} \dots x_n^{2\alpha_n} dS_j = r_j^{2\nu+n-1} I(\alpha_1, \dots, \alpha_n). \quad (23.3.5)$$

Запишем теперь, что формула (23.3.2) обращается в точное равенство, когда  $f(x)$  совпадает с одночленом (23.3.3), и воспользуемся равенствами (23.3.4) и (23.3.5). Получим

$$\sum_{j=1}^p B_j r_j^{2\nu+n-1} = \frac{1}{2\nu+n}. \quad (23.3.6)$$

При соблюдении этого равенства формула (23.3.2) точна, когда  $f(x)$  — любой однородный многочлен степени  $2\nu$ . Так как мы должны найти  $2p$  неизвестных  $r_j$ ,  $B_j$  ( $j=1, 2, \dots, p$ ), то можем потребовать, чтобы равенство (23.3.6) было выполнено при  $\nu=0, 1, 2, \dots, 2p-1$ :

$$\sum_{j=1}^p B_j r_j^{2\nu+n-1} = \frac{1}{2\nu+n} \quad (\nu=0, 1, \dots, 2p-1). \quad (23.3.7)$$

Пусть  $n$  — четное. Систему (23.3.7) перепишем в виде

$$\sum_{j=1}^p 2B_j r_j^{n-1} (r_j^2)^v = \frac{1}{v + \frac{n}{2}} \quad (v = 0, 1, \dots, 2p-1).$$

Такую же систему получим, если будем строить квадратурную формулу типа Гаусса для промежутка  $[0, 1]$  и веса  $t^{\frac{n}{2}-1}$ :

$$\int_0^1 t^{\frac{n}{2}-1} \Phi(t) dt \cong \sum_{j=1}^p C_j \varphi(\tau_j). \quad (23.3.8)$$

Таким образом, параметры квадратурной формулы (23.3.2) при  $n$  четном определяются равенствами

$$r_j^2 = \tau_j, \quad 2B_j r_j^{n-1} = C_j \quad (j = 1, 2, \dots, p),$$

где  $\tau_j$  и  $C_j$  — узлы и коэффициенты квадратурной формулы типа Гаусса (23.3.8).

При  $n$  нечетном систему (23.3.7) заменим равносильной системой

$$\sum_{j=-p}'^p B_j r_j^{n-1} r_j^k = \int_{-1}^1 r^{n-1} r^k dr \quad (k = 0, 1, \dots, 4p-1). \quad (23.3.9)$$

Здесь штрих у знака суммы означает, что опускается слагаемое, отвечающее  $j=0$ . Считаем  $r_{-j} = -r_j$ ,  $B_{-j} = B_j$  ( $j = 1, 2, \dots, p$ ), так что при  $k$  нечетных уравнения (23.3.9) принимают вид  $0=0$ , а при  $k$  четных получаем уравнения (23.3.7).

Но система (23.3.9) совпадает с системой, которую мы получим, если будем строить квадратурную формулу типа Гаусса с  $2p$  узлами для отрезка  $[-1, 1]$  и веса  $t^{n-1}$ :

$$\int_{-1}^1 t^{n-1} \Phi(t) dt \cong \sum_{j=-p}'^p D_j \varphi(r_j). \quad (23.3.10)$$

Таким образом, радиусы  $r_j$  сфер  $R_j$  при  $n$  нечетном совпадают с положительными узлами квадратурной формулы (23.3.10), а коэффициенты  $B_j$  определяются из равенства  $D_j = B_j r_j^{n-1}$ , где  $D_j$  — коэффициенты формулы (23.3.10).

Из способа построения кубатурной формулы (23.3.2) ясно, что она точна, когда  $f(x)$  — любой многочлен степени  $4p-1$ . С помощью формулы (23.3.2) мы получим обычную кубатурную формулу для вычисления интеграла (23.3.1), точную для многочленов степени  $4p-1$ .

Интеграл в правой части (23.3.2) заменим кубатурной суммой по формуле (23.2.7) при  $q = 2p$ . Получим

$$\int_S f(x) dx \cong \sum_{j=1}^p B_j r_j^{n-1} \frac{\pi}{2p} \sum_{i=1}^{4p} \sum_{j_1, \dots, j_{n-2}=1}^{2p} A_{j_1}^{(n-3)} A_{j_2}^{(n-4)} \dots A_{j_{n-2}}^{(0)} \times \\ \times F\left(r_j, \varphi_1^{(j_1)}, \varphi_2^{(j_2)}, \dots, \varphi_{n-2}^{(j_{n-2})}, \frac{\pi}{2p} i\right). \quad (23.3.11)$$

Здесь функция  $F$  определена равенством (23.2.6),  $\varphi_{n-k-2}^{(j)} = \arccos t_j^{(k)}$ , а  $t_j^{(k)}$  и  $A_j^{(k)}$  — узлы и коэффициенты квадратурной формулы типа Гаусса (23.2.5), в которой число узлов  $q = 2p$ .

Кубатурная формула (23.3.11) аналогична формуле (23.1.1). Она имеет  $(2p)^n$  узлов и точна, когда  $f(x)$  — любой многочлен степени  $4p - 1$ . Формула (23.3.11) и способ ее получения указаны в статье 2) И. П. Мысовских. При  $n = 2$  формулу (23.3.11) получил Л. В. Канторович, при  $n = 3$  — В. А. Диткин.

Приведем еще кубатурную формулу для гипершара, аналогичную формуле (23.1.3), точную для многочленов пятой степени и имеющую  $2n^2 + 1$  узлов (Хаммер и Строуд):

$$\int_S f(x) dx \cong Af(0, \dots, 0) + B \sum_1^{2n} f(0, \dots, 0, \pm \alpha, 0, \dots, 0) + \\ + C \sum_1^{2n(n-1)} f(0, \dots, 0, \pm \beta, 0, \dots, 0, \pm \beta, 0, \dots, 0). \quad (23.3.12)$$

Здесь

$$\alpha = \sqrt{\frac{3}{n+4}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{3}{n+4}}, \quad A = \frac{n^3 - 3n^2 - 10n + 36}{18n + 36} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}, \\ B = \frac{16 - n^2}{18n + 36} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}, \quad C = \frac{n + 4}{36n + 72} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

## § 4. Симплекс

Пусть  $E_{n+1}$  — евклидово пространство  $n + 1$  измерений. Точку пространства  $E_{n+1}$  будем обозначать  $(x, t) = (x_1, \dots, x_n, t)$ . Пусть  $\Omega$  —  $n$ -мерная область в  $E_{n+1}$ , расположенная в гиперплоскости  $t = 0$ . Рассмотрим область  $P$  из  $E_{n+1}$ , состоящую из точек вида  $(x(1-t), t)$ , где  $x \in \Omega$  и  $t \in [0, 1]$ . Область  $P$  будем называть *пирамидой*. Основание пирамиды — множество  $\Omega$ , ее вершина — точка  $(0, \dots, 0, 1)$ .

Предположим, что нам известна кубатурная формула для вычисления  $n$ -кратного интеграла по области  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} f(x) dx \cong \sum_{j=1}^N A_j f(x^{(j)}). \quad (23.4.1)$$

Тогда нетрудно указать кубатурную формулу для вычисления  $(n+1)$ -кратного интеграла по области  $P$ .

Обозначим через  $P_t$  множество точек  $(x(1-t), t) \in P$  таких, что  $x \in \Omega$  (при фиксированном  $t$ ). Очевидно, имеем

$$\int_P F(x, t) dx dt = \int_0^1 dt \int_{P_t} F(x, t) dx = \int_0^1 (1-t)^n dt \int_{\Omega} F(y(1-t), t) dy.$$

Здесь в интеграле по  $P_t$  мы выполнили замену переменных интегрирования  $x = (1-t)y$ , множитель  $(1-t)^n$  — якобиан преобразования.

К интегралу по  $\Omega$  применим кубатурную формулу (23.4.1). Получим

$$\int_P F(x, t) dx dt \cong \int_0^1 (1-t)^n dt \sum_{j=1}^N A_j f(x^{(j)}(1-t), t). \quad (23.4.2)$$

Для вычисления простого интеграла в правой части (23.4.2) применим какую-либо квадратурную формулу для промежутка  $[0, 1]$  и веса  $(1-t)^n$ :

$$\int_0^1 (1-t)^n \varphi(t) dt \cong \sum_{i=1}^p B_i \varphi(t_i). \quad (23.4.3)$$

Получим

$$\int_P F(x, t) dx dt \cong \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^N B_i A_j F(x^{(j)}(1-t_i), t_i). \quad (23.4.4)$$

Это и есть требуемая кубатурная формула. Она имеет  $pN$  узлов. Если кубатурная формула (23.4.1) точна для всех многочленов степени  $m$  от  $n$  переменных  $x_1, \dots, x_n$  и квадратурная формула (23.4.3) точна для всех многочленов степени  $m$  от переменной  $t$ , то кубатурная формула (23.4.4), как следует из способа ее построения, точна, когда  $F(x, t)$  есть любой многочлен степени  $m$  от  $n+1$  переменных  $x_1, \dots, x_n, t$ .

Указанным путем можно получить кубатурные формулы для ряда областей. В виде примера приведем кубатурную формулу для симплекса. Для упрощения записи симплекс  $T_3$  считаем трехмерным:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 1.$$

Сначала построим кубатурную формулу для треугольника  $T_2$ :  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$ ,  $x_1 + x_2 \leq 1$ , рассматривая его как пирамиду, основанием которой  $\Omega$  является отрезок  $[0, 1]$  на оси  $x_1$  и вершиной — точка  $(0, 1)$ . В качестве формулы (23.4.1) возьмем квадратурную формулу Гаусса с  $p$  узлами

$$\int_0^1 f(x_1) dx_1 \cong \sum_{i=1}^p C_i^{(0)} f(t_i^{(0)})$$

и в качестве формулы (23.4.3) — квадратурную формулу типа Гаусса с весом  $1 - t$  и  $p$  узлами

$$\int_0^1 (1-t) \varphi(t) dt \cong \sum_{j=1}^p C_j^{(1)} \varphi(t_j^{(1)}).$$

Получим кубатурную формулу для  $T_2$

$$\int_{T_2} F(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \cong \sum_{i,j=1}^p C_i^{(0)} C_j^{(1)} F(t_i^{(0)}(1-t_j^{(1)}), t_j^{(1)}), \quad (23.4.5)$$

точную, когда  $F(x_1, x_2)$  — многочлен степени  $2p-1$  от  $x_1$  и  $x_2$ .

Симплекс  $T_3$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$$

будем рассматривать как пирамиду с основанием  $T_2$  и вершиной  $(0, 0, 1)$ . В качестве формулы для вычисления интеграла по  $T_2$  возьмем кубатурную формулу (23.4.5), а в качестве формулы (23.4.3) возьмем квадратурную формулу Гаусса с весом  $(1-t)^2$  и  $p$  узлами

$$\int_0^1 (1-t)^2 \varphi(t) dt \cong \sum_{k=1}^p C_k^{(2)} \varphi(t_k^{(2)}).$$

Получим

$$\begin{aligned} \int_{T_3} F(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 &\cong \\ &\cong \sum_{i,j,k=1}^p C_i^{(0)} C_j^{(1)} C_k^{(2)} F(t_i^{(0)}(1-t_j^{(1)})(1-t_k^{(2)}), t_j^{(1)}(1-t_k^{(2)}), t_k^{(2)}). \end{aligned}$$

Эта кубатурная формула имеет  $p^3$  узлов и точна, когда  $F(x_1, x_2, x_3)$  является многочленом степени  $2p-1$  от  $x_1, x_2, x_3$ . Таким же путем можно получить кубатурную формулу для  $n$ -мерного симплекса  $T_n$ .

## Л и т е р а т у р а

Hammer P. C., Stroud A. H., Numerical evaluation of multiple integrals II, Math. Tables and other Aids Comp. 12 (1958), № 64, 272—280.

Мысовских И. П. 1) О кубатурных формулах для вычисления интегралов по поверхности сферы, Сибирск. матем. журн. 5, № 3 (1964), 721—723.  
2) Кубатурные формулы для вычисления интегралов по гипершару, ДАН СССР 147, № 3 (1962), 552—555.

Диткин В. А. и Люстерник Л. А., Об одном приеме практического гармонического анализа на сфере, Вычисл. матем. и вычисл. техн., сб. 1 (1953), 3—13.

Канторович Л. В., Об особых приемах численного интегрирования четных и нечетных функций, Труды матем. ин-та АН СССР 28 (1949), 3—25.

Диткин В. А., О некоторых приближенных формулах для вычисления трехкратных интегралов, ДАН СССР 62, № 4 (1948), 445—447.

Hammer P. C., Marlowe O. J., Stroud A. H., Numerical integration over simplexes and cones, Math. Tables and other Aids Comp. 10 (1956), № 55, 130—137.

## СПИСОК ИСПРАВЛЕНИЙ,

которые необходимо внести

в «Справочную книгу по численному интегрированию»

В. И. Крылова и Л. Т. Шульгиной

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
21	2 св.	Интегрируема на $[a, b]$ и на концах $a$ и $b$	Интегрируема на $[0, 1]$ и на концах 0 и 1
21	3 св.	производные $p'(a)$ и $p'(b)$	производные $p'(0)$ и $p'(1)$
35	15 сн.	$R_n(f) = \frac{1}{b} (2n!)^{-1} \times$ $\times \int_a^b p(x) \omega^2(x) f^{(2n)}(\xi) dx$	$R_n(f) = \frac{1}{b} [(2n)!]^{-1} \times$ $\times \int_a^b p(x) \omega^2(x) f^{(2n)}(\xi) dx$
35	12 сн.	$R_n(f) = f^{(2n)}_b(\eta) (2n!)^{-1} \times$ $\times \int_a^b p(x) \omega^2(x) dx$	$R_n(f) = f^{(2n)}_b(\eta) [(2n)!]^{-1} \times$ $\times \int_a^b p(x) \omega^2(x) dx$
67	3 св.	$2^{2p+2n+1} \Gamma^2(p+n+1)$	$2^{2p+2n+1} n! \Gamma^2(p+n+1)$
72	2 св.	$(i=j, j+1, \dots, j+k).$	$(i=j, j+1, \dots, j+r).$
78	2 св.	$+\frac{\mu_0}{6\alpha^4 h^3}$	$+\frac{\mu_0}{3\alpha^4 h^3}$
81	4 сн.	$\theta^6 Q = 2[\theta(12-5\theta^2) +$ $+ \dots \cos^2 \theta];$	$\theta^6 Q = \theta(12-5\theta^2) + \dots \cos^2 \theta;$
81	3 сн.	$\theta^8 R = 2[\theta(156-7\theta^2) \dots$ $\dots - 15(12-5\theta^2)];$	$\theta^8 R = \theta(156-7\theta^2) \dots$ $\dots - 15(12-5\theta^2);$
101	1 сн.	$\mu(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$	$\mu(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$
112	5 сн.	$R = h^{2n+3} \frac{f^{(2k+3)}(\xi)}{(2k+3)!} \dots$	$R = h^{2k+3} \frac{f^{(2k+2)}(\xi)}{(2k+2)!} \dots$
192	6 сн.	49956522 (-3)	49956522 (-2)
208	24 сн.	0,21270 79233 22410 297	0,21270 79033 22410 297
232	5 св.	23750004 (+2)	23730004 (+2)
248	3 сн.	16180848 (-1)	16180848 (+1)
260	4 сн.	2,20769	2,2069
261	6 св.	4,1078512584	4,1078511258
261	18 сн.	2,7703542	2,7703544
268	4 св.	$s = 1 \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right) 2 \frac{2}{3}$	$s = 1 \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3}\right) 3 \frac{2}{3}$
268	13 св.	2,535055094	2,53505509
270	20 сн.	0,47103055	0,47103057

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
270	12 сн.	0,944299	0,944301
270	3 сн.	1,4351	1,4354
271	12 сн.	0,837258	0,837260
271	10 сн.	7,83616	7,83618
272	27 сн.	8,878144073	8,878144075
272	19 сн.	0,5077923	0,5077925
272	19 сн.	0,8800253	0,8800255
272	4 сн.	1,1763	1,1765
273	25 сн.	0,619490179	0,619490181
275	12 сн.	0,970542128	0,97054213
276	26 сн.	0,175795523	0,175795528
276	25 сн.	0,48435695	0,48435697
276	24 сн.	0,98049993	0,98049995
279	2 сн.	$7691,277 \pm 24344,63i$	$7691,277 \mp 24344,63i$
319	20 сн.	$\pm,35355\ 33005\ 93274i$	$\pm,35355\ 33905\ 93274i$
Стр. 153. В конце сноски добавить фразу: «Координаты узлов в формулах нужно умножать на $h$ ».			