

А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

НАУЧНЫЙ СОВЕТ ПО КОМПЛЕКСНОЙ ПРОБЛЕМЕ
«КИБЕРНЕТИКА»

А. С. Кузичев

ДИАГРАММЫ
ВЕННА

История и применения



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

Москва 1968

Книга посвящена графическому аппарату математической логики—диаграммам Венна, их истории и применению. Автор показывает, что диаграммы Венна могут облегчать решение различных задач математической логики и задач, связанных с построением надежных автоматов из не вполне надежных элементов. В книге разбираются ряд задач, сформулированных Булем, Джевонсом, Порецким и другими логиками, и показывается развитие метода диаграмм в связи с задачами логики высказываний и логики одноместных предикатов, а также в связи с проблемами теории нейронных схем.

Ответственный редактор

С. А. ЯНОВСКАЯ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Область приложений математической логики с каждым годом расширяется; математическая логика находит применения в самых различных областях науки и техники. В последние годы, особенно в связи с задачами синтеза надежных устройств из относительно мало надежных элементов, значительно повысился интерес к графическому аппарату математической логики — диаграммам Венна. Однако литература, относящаяся к диаграммам Венна, крайне бедна: нет даже достаточно ясного различия между ними и кругами Эйлера.

Цель настоящей работы — изложить графический аппарат диаграмм Венна и некоторые его приложения, показать, что диаграммы Венна можно использовать при решении различных задач математической логики и автоматики.

Идея данной книги принадлежит профессору кафедры математической логики Механико-математического факультета Московского государственного университета, ныне покойной Софье Александровне Яновской; ею дано было много ценных предложений по содержанию и структуре рукописи. Большое влияние на содержание работы оказали курсы лекций по различным вопросам математической логики, которые Софья Александровна ежегодно читала в

МГУ, и семинары, которыми она руководила; на этих семинарах (прежде всего, на семинаре по избранным вопросам математической логики, руководимом ею совместно с А. В. Кузнецовым) обсуждались, в частности, вошедшие в книгу материалы. При написании книги большую помощь автору оказали Б. В. Бирюков и С. Л. Никогосов. В работу включены также некоторые результаты, принадлежащие С. Л. Никогосову (§ 2.10) и А. Л. Гавронскому (§ 4.5).

Летом 1966 г. Софья Александровна, как ответственный редактор, подписала книгу к печати, в октябре этого же года Софью Александровны не стало. Автор посвящает настоящую работу светлой памяти Софьи Александровны Яновской.

ВВЕДЕНИЕ

Вероятно, нет такой науки, в которой логика применялась бы в большей мере, чем в математике. Все рассуждения в математике носят строго логический характер. Все предложения, если они не приняты за аксиомы, строго доказываются. Самый выбор аксиом также логически обосновывается: ищутся доказательства непротиворечивости, полноты, часто и независимости аксиом. В начале XX в. были сделаны даже попытки доказать, что математика вообще есть часть логики — что она сводится к логике (логицизм Г. Фреге и Б. Рассела). Однако знаменитая теорема Гёделя о неполноте любых формальных систем типа Principia Mathematica Б. Рассела и А. Н. Уайтхеда доказала существование в языке каждой такой формальной системы предложения — в том числе даже содержательно истинного,— которое, тем не менее, не доказуемо и не опровергимо в этой системе. Таким образом, можно сказать, что в настоящее время, по-видимому, нет оснований считать, что в соотношении между логикой и математикой первенствующая роль принадлежит логике.

В действительности эта ситуация уже была подготовлена предшествующим развитием математической логики. Математическая логика возникла, наоборот, из попытки перенести методы математики в логику. Такая попытка относилась прежде всего к методам алгебры. Нетрудно заметить, что всякое решение алгебраических уравнений есть не что иное, как вывод логических следствий из посылок, записанных на языке алгебры в виде уравнений. Естественно возникал вопрос о том, нельзя ли любые посылки выразить уравнениями и свести всякий логический вывод к решению уравнений. В действительности вопрос был поставлен так еще в XVII в. Лейбницем. Тот

же Лейбниц размышлял и о других способах сведения логики к математике: к арифметике и геометрии. Но большинство из этих работ Лейбница стало известно науке только после 1903 г.

Первые попытки успешного построения алгебры логики были осуществлены в середине прошлого века прежде всего рядом английских логиков: Дж. Булем, А. де Морганом, У. С. Джевонсом. У Буля же были и попытки построения логики как некоторой арифметики с ее обычными четырьмя действиями. Но в логике уже издавна применялись фактические и геометрические методы. Прежде всего, в целях наглядности. Эти геометрические (точнее, графические) методы должны были облегчить усвоение силлогистики Аристотеля, которая стала сложной и специальной наукой в трудах сколастов. Особенно широкой известностью уже в конце XVIII в. стала пользоваться графическая интерпретация силлогистики Аристотеля с помощью кругов Эйлера. Эйлер изложил эту интерпретацию в своих «Письмах к немецкой принцессе» (1768, [60]) с целью показать, что никаких трудностей в силлогистике Аристотеля на самом деле нет и что основные ее принципы не сложнее, чем утверждение, что если деньги у меня в кошельке, а копелек в кармане, то деньги — в кармане.

Графические методы логики развивались и далее. Более детальную графическую формализацию элементарных предложений логики предложил Ж. Д. Жергонн (1771—1859). Другие способы их геометрической иллюстрации наметили И. Г. Ламберт (1728—1777) и Б. Больцано (1781—1848). Но особенного расцвета эти методы достигли в трудах английского логика Джона Венна, построившего графический аппарат диаграмм, фактически полностью эквивалентный развитой уже (в трудах Дж. Буля, А. де Моргана, У. С. Джевонса, Э. Шрёдера, П. С. Порецкого, Ч. Пирса и др.) логике классов.

К концу XIX в. в логике произошел, однако, подлинный переворот. Этот переворот был связан с тем, что в трудах немецкого ученого Готлоба Фреге в логику впервые были в явном виде введены кванторы. Основная трудность силлогистики Аристотеля состояла в том, что в ней нужно было уметь не только пользоваться правильными модусами силлогизма, но и опровергать неправильные. А это предполагало два разных вида отрицания (нужно было уметь сказать, например, «Неверно, что все *A* суть

не-В»). Графическая интерпретация с помощью кругов Эйлера легко обнаруживала неправильные модусы без обращения к более сложному аппарату кванторов. Но она была пригодна только для рассуждений, не выходящих за пределы силлогистики Аристотеля, т. е. не была даже полностью эквивалентна исчислению одноместных предикатов. Не удивительно поэтому, что кванторная логика Фреге, переработанная затем (в «Principia Mathematica») Б. Расселом и А. Н. Уайтхедом, ознаменовала переход на новую ступень в истории логики. Логика классов, а вместе с ней и диаграммы Венна отошли на задний план и частично были забыты. Нельзя, впрочем, сказать, что совершенно: время от времени диаграммы Венна упоминаются в учебниках, а иногда и описываются, например, у Беннета и Бейлиса [48], К. Дюрра [59], Т. Котарбинского [18] и других современных математических логиков. Их использует в работах по бионике школа американского нейрофизиолога У. С. Мак-Каллока. И все же мы вряд ли ошибемся, если скажем, что большинство логиков знают о диаграммах только понаслышке. Об этом говорит, например, обыкновение путать диаграммы Венна с кругами Эйлера¹ (о различии между графическими методами Венна и Эйлера будет рассказано в первой главе).

Надо сказать, что и некоторые представители логики классов не слишком дружелюбно относились к диаграммам Венна. Л. Кутюра, например, говорил по поводу диаграмм Венна, что «этот схематизм, рассматриваемый как метод решения логических задач, имеет серьезные недостатки и является весьма мало полезным» [20]. Однако такое отношение к диаграммам представляется несправедливым и незаслуженным. Дело в том, что связанные с методом диаграмм Венна алгоритмы по существу не были разработаны. Начиная с произведений Венна, в литературе описание графического аппарата сводится к демонстрации его на примерах. Цель настоящей работы состоит не только в том, чтобы показать, что способы, относящиеся к диаграммам, могут быть доработаны до соответствующих алгоритмов, но и дать чисто геометрическое построение логики высказы-

¹ В этом смысле характерна работа Р. Фора, А. Кофмана, М. Дени-Папена «Современная математика» (М., 1966), в которой раздел «Диаграммы Эйлера—Венна» (стр. 16) начинается словами: «Диаграммами Эйлера (в США — диаграммами Венна) называют фигуры...».

ваний и логики одноместных предикатов в виде определенных операций над диаграммами Венна.

Не говоря уже о том, что задачи и методы классической алгебры логики конца XIX — начала XX в. и сейчас могут представлять интерес (тем более, что соответствующие работы остаются, в сущности, еще не проанализированными), нет необходимости ограничивать применимость диаграмм рамками логики классов. Правда, Венн применяет свои диаграммы исключительно для иллюстрации решения задач логики классов, и они работают при этом, как мы покажем, весьма успешно. Но диаграммы можно столь же эффективно использовать и в задачах, интересующих сегодняшних логиков — например, для получения логических следствий из заданной системы посылок.

Разумеется, предлагаемое геометрическое построение логики высказываний и логики одноместных предикатов эквивалентно обычному. Ценность и преимущество диаграмм состоит в их наглядности. Наглядность может оказаться существенным подспорьем при решении задач и доказательстве теорем, во всяком случае пренебрегать ею вряд ли стоит. Кроме того, аппарат диаграмм допускает обобщения, важные, например, при описании функционирования нейронных сетей и построении надежных систем из относительно мало надежных элементов.

Исходя из этих соображений, мы попытаемся дать строгое изложение метода диаграмм Венна и его приложений. Причем начнем с описания методов самого Венна, которые подробно рассматриваются в первой главе. Эти методы представляют интерес и сейчас и могут быть использованы в курсах математической логики и в задачниках по этой дисциплине.

Во второй и третьей главах книги диаграммы Венна применяются при решении задач вывода логических следствий из посылок, выражимых на языке формул классического исчисления высказываний и классического исчисления одноместных предикатов. Предлагаются способы, позволяющие на диаграммах принципиально обозревать все возможные попарно неэквивалентные логические следствия из данных посылок, а также отличать такие логические следствия, которые можно считать в определенном смысле нетривиальными — так называемые простые логические следствия.

Теоретически диаграммы Венна можно использовать, как будет показано, при любом числе переменных. Однако с ростом количества переменных наглядность диаграмм падает, и возникает необходимость обойти эту трудность— скажем, видоизменить диаграммы. В работе одним из способов преодоления указанной трудности является использование матричного аппарата, который, как и аппарат диаграмм, позволяет выходить за рамки логики классов и исчисления высказываний.

Во второй главе (в связи с такими, например, проблемами, как синтез надежных сетей из не вполне надежных элементов, построение управляющих и самоуправляющих систем и блочный анализ и синтез сложных устройств) аппарат диаграмм Венна в классическом исчислении высказываний расширяется в аппарат вероятностных диаграмм; вводятся сети диаграмм. В сетях понятие «диаграмма Венна» получает дальнейшее расширение — диаграмма играет роль оператора.

В четвертой главе освещаются вопросы, относящиеся к применению аппарата диаграмм Венна для описания функционирования формальных нейронов Мак-Каллока и сетей из них. В теории формальных нейронов, кроме диаграмм Венна в классическом исчислении высказываний и вероятностных диаграмм, используются пороговые и порядковые диаграммы n переменных. В этой главе решаются задачи синтеза формальных нейронов по заданным условиям их работы, описываются общие способы построения оптимальных нейронов. Рассматриваются формальные нейроны с обратными связями, показывается, что введение обратных связей позволяет увеличить количество функций, которые можно реализовать на одном формальном нейроне.

* * *

Прежде чем переходить к основному тексту, скажем несколько слов о создателе диаграммного метода.

Джон Венн (John Venn) родился 4 августа 1834 года в Драйпуле близ г. Халла в семье священника. Образование получил в одном из колледжей Кембриджа (Гонвиль и Кийус колледж). В 1858 г. он начал (по семейной традиции) карьеру служителя церкви. Однако его интересы лежали в другой области, он стремился к научным занятиям в области философии и логики. В 1862 г. Венн вер-

нулся в Кембридж, где был приглашен на только что созданное место лектора колледжа по моральным наукам. Несколько месяцев он совмещал еще свою работу с деятельностью священника в небольшой церкви, но вскоре отказался совсем от церковной деятельности; в 1883 г. он даже получил документ, утверждающий, что он не способен служить в церкви.

С 1862 г. он посвятил себя научной и педагогической деятельности. В 1883 г. в Кембридже он получил степень доктора наук и был избран членом Королевского общества. В 1903 г. Венн избирается президентом Гонвиль и Кийус колледжа. Занимаясь философией и логикой, Венн опубликовал много статей в различных журналах, например, [99—104], и несколько монографий, из которых наиболее значительными являются «Логика случая» (*The Logic of Chance*, 1866), «Символическая логика» (*Symbolic Logic*, 1881), «Принципы эмпирической логики» (*The Principles of Empirical Logic*, 1889). Много внимания Венн уделял также изучению истории и составлению биографических и исторических очерков, справочников и др.

В логике Венн не интересуется проблемами психологии; не занимается он и такими вопросами, которые в его время относились к области «метафизики». Свои философские позиции сам Венн характеризовал как «точку зрения опыта и здравого смысла» ([106], стр. 2). Умер Венн 4 апреля 1923 г.

[Эти биографические сведения заимствованы из *Dictionary of National Biography*, Oxford University Press, London, 1937, стр. 869—870; автором биографии Венна является его единственный сын, Джон Арчибалд Венн (избранный в 1932 г. президентом Королевского колледжа в Кембридже), который использовал неопубликованную автобиографию отца.]

Глава 1

ДИАГРАММЫ ВЕННА В ЛОГИКЕ КЛАССОВ

§ 1.1. Круги Эйлера

Когда заходит речь о графических методах логики (не обязательно математической), обычно вспоминаются так называемые круги Эйлера. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять любой учебник традиционной (аристотелевской) логики и посмотреть разделы, посвященные объему понятия или категорическому силлогизму. Там почти обязательно мы увидим картинки с изображениями кругов или прямоугольников. Объемы понятий или, выражаясь языком математической логики, классы изучаемых объектов принято обозначать фигурами, ограниченными простыми замкнутыми кривыми, обычно окружностями, расположенными на части плоскости так, что одна фигура включает в себя все объекты одного класса (скажем A), а другая — все объекты другого класса (B). Дополнение каждого класса обозначается внешней областью соответствующей замкнутой кривой. При этом некоторая часть плоскости представляет всю рассматриваемую предметную область.

Две такие фигуры на плоскости (для краткости вместо слов «часть плоскости» часто будем писать слово «плоскость») можно расположить, как легко проверить, пятью различными способами. На рис. 1 приведены все различные способы расположения двух кругов A и B ; в первом случае плоскость делится на две части (ячейки): внутреннюю и внешнюю, во втором, третьем и пятом — на три, в четвертом — на четыре. Пересечение A с B в каждом случае включает в себя все объекты, принадлежащие как классу A , так и классу B ; области на плоскости, лежащей вне A и B , соответствуют объекты, не принадлежащие ни

A, ни *B*; наконец, областью, лежащей только внутри одной из фигур *A*, *B*, обозначаются объекты, относящиеся одновременно к соответствующему классу и к дополнению другого класса.

Такое представление классов как систем нескольких фигур на плоскости встречается уже в XIII веке. Например, в устройстве, предложенном Раймондом Луллием для машинизации процессов рассуждения, участвуют комбинации различных кругов на плоскости (об устройстве Р. Луллия см., например, [50]).

Ясно, что с ростом числа рассматриваемых классов, количество различных способов взаимного расположения соответствующих фигур на плоскости резко возрастает. В [14] на стр. 70—75 показаны некоторые из трудностей, связанных с указанием всех способов расположения n (где $n > 2$) кругов на плоскости.

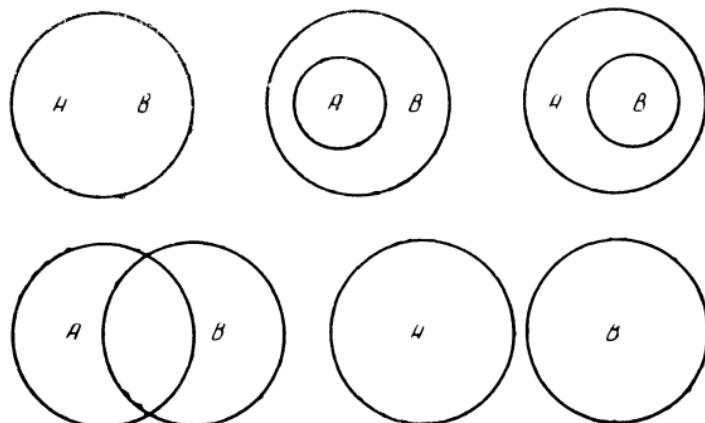


Рис. 1

Наглядность геометрического представления классов в виде фигур на плоскости была использована Л. Эйлером при объяснении и решении задач силлогистики Аристотеля. О своих фигурах Эйлер писал, что они «очень подходят для того, чтобы облегчить наши размышления... и открыть нам все тайны, которыми похваляются в логике и которые доказывают в ней с большим трудом, между тем, как посредством этих знаков всякая ошибка сразу бросается в глаза» ([60], стр. 100). Здесь под словами: «тайны, которыми похваляются в логике» Л. Эйлер имеет в виду сложности схоластической разработки силлогистики Ари-

стотеля. При этом Эйлер подчеркивает, что при предла-
гаемом им способе употребляют фигуры или пространства,
«имеющие какую угодно форму, чтобы представить каждое
общее понятие, и обозначают субъект предложения про-
странством, содержащим *A*, а предикат другим простран-
ством, содержащим *B*. Природа самого предложения вклю-
чает всегда либо то, что пространство *A* находится полно-
стью в пространстве *B*, либо то, что оно находится в нем

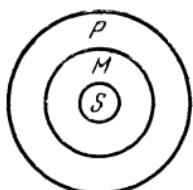


Рис. 2

лишь частично, либо, что, по меньшей мере, какая-нибудь
часть его находится вне пространства *B*, либо, наконец,
что пространство *A* лежит полностью вне *B*» (там же,
стр. 101).

Классической и вошедшей во все учебники логики
иллюстрацией метода Эйлера является изображение
(рис. 2) модуса *barbara*:

Всякое *M* есть *P*,
Всякое *S* есть *M*,
Следовательно, всякое *S* есть *P*.

Эйлер предлагал при изучении модусов силлогизма
учитывать все возможные случаи взаимного расположения
кругов, соответствующих различным терминам в посылках
данного модуса. Так, силлогизм

Всякое *A* есть *B*,
Но некоторые *C* суть *A*.
Следовательно, некоторые *C* суть *B* (там же, стр. 105)

он иллюстрирует чертежами на рис. 3: в одном из них
круг *C* расположен полностью внутри *B*, в другом — ча-
стично. Однако, следует заметить, что на диаграммах
Эйлера, изображенных на рис. 3, не учитывается ряд дру-
гих случаев (см. рис. 4; напомним, что термин «некоторые»
понимается в аристотелевой логике в смысле «некоторые,
а может быть и все»). Сам Эйлер указывал при этом, что

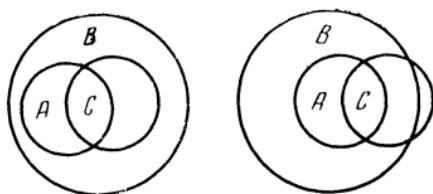


Рис. 3

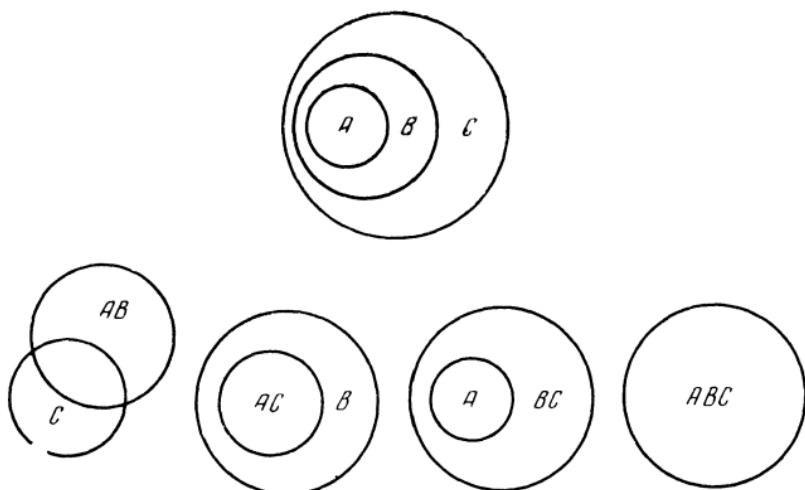


Рис. 4

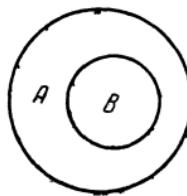


Рис. 5

его круги не совсем точно выражают информацию, содержащуюся в предложениях силлогистики. Так, по поводу фигуры, изображенной на рис. 5, где класс *A* соответствует деревьям, а класс *B* — грушам, он пишет, что ее можно выразить словами по-разному:

1. Все груши — деревья.
2. Некоторые деревья — груши.
3. Некоторые деревья — не груши» (там же, стр. 102).

Аналогично, по поводу фигуры, изображенной на рис. 6, он пишет, что здесь можно сказать:

- «1. Некоторые A суть B .
 2. Некоторые B суть A .
 3. Некоторые A не суть B .
 4. Некоторые B не суть A » (там же, стр. 103).

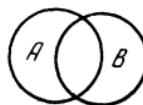


Рис. 6

Круги Эйлер использует также и для опровержения силлогизмов. Например, в [60] на стр. 105—106 он пишет: «Если понятие C лежит полностью вне понятия A , то ничего нельзя сказать относительно понятия B . Может случиться, что понятие C лежит полностью вне B (как показано на рис. 7а.— $A. K.$) или полностью внутри B

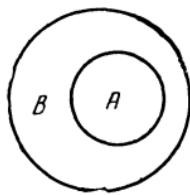


Рис. 7а

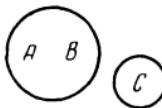


Рис. 7б

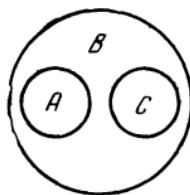


Рис. 8

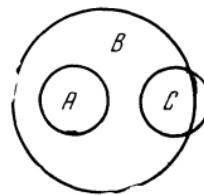


Рис. 9

(рис. 8.— $A. K.$), или частично в B (рис. 9.— $A. K.$), так что ничего нельзя заключить».

Чтобы выразить, что некоторая часть пространства B находится в пространстве C , Эйлер отмечает эту часть звездочкой (рис. 10). Приведем пример неправильного силлогизма:

Некоторые A суть B .
 Ни одно B не суть C .
 Следовательно, некоторые C не суть A .

Этот силлогизм иллюстрируется диаграммами, приведенными на рис. 11—13. Неправильность силлогизма следует из фигуры, построенной на рис. 12, где все *C* находятся внутри пространства *A*.

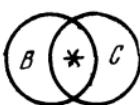


Рис. 10

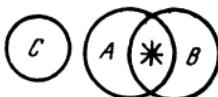


Рис. 11

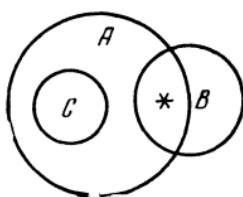


Рис. 12

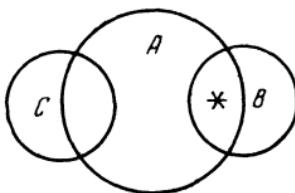


Рис. 13

Из диаграмм Эйлера для предложений силлогистики, вообще говоря, не всегда ясно, какую именно информацию они выражают. Так, предложения «Всякое *A* есть *B*» и «Ни одно *B* не есть *C*» выражаются обычно в виде диаграммы Эйлера, изображенной на рис. 7а. Если второе предложение точно передается на диаграмме, то иначе обстоит дело с первым. Часть диаграммы с кругами *A* и *B* здесь понимается, собственно говоря, не в том смысле, какой следует из самого рисунка (т. е. как «Всякое *A* есть *B*, но некоторые *B* не суть *A*»), а в смысле «Всякое *A* есть *B*, но некоторые *B* не суть *A*, или всякое *A* есть *B*, и нет таких *B*, которые не были бы не *A*» (т. к. именно этот смысл вкладывается в предложение «Все *A* суть *B*»). Но этот смысл, конечно, никак нельзя вычленить из самой диаграммы, изображенной на рис. 7а: он содержится лишь в двух диаграммах — 7а и 7б. Кроме того, добавление

новой информации предполагает необходимость не просто детализировать уже имеющуюся диаграмму, но строить новую.

Последовательно проведенный метод Эйлера включает перебор всех возможных взаимных расположений классов. При рассмотрении модусов силлогистики Аристотеля этот перебор практически можно осуществить; в более общих случаях перебор становится необозримым.

* * *

Круги Эйлера получили широкое распространение в литературе по математической логике. В качестве примера остановимся на «Алгебре логики» Э. Шрёдера [93]. В ней эйлеровы диаграммы появляются уже в первой лекции (§ 3, стр. 155—167). Прежде всего Шрёдер отмечает, что в действительности Эйлер не был первым, кто пользовался геометрическими иллюстрациями для выражения соотношений между субъектом и предикатом суждения,— уже у Людвига Вивеса ([109], 1555) употреблялись для этой цели уголки или треугольники. Шрёдер считает тем не менее, что фактически именно Эйлер должен считаться основателем метода диаграмм в логике. При этом он подчеркивает два обстоятельства. Во-первых, эйлеровы круги можно рассматривать совершенно независимо от логики и построить соответствующее исчисление областей. Во-вторых, в логике диаграммы Эйлера могут иметь существенное значение только в самом начале, когда речь идет об установлении некоторых принципов или аксиом логики, которые принимаются без доказательства и обосновываются только интуитивно. В качестве такого принципа Шредер использует, например, принцип силлогизма:

$$\frac{a \subset b, b \subset c}{a \subset c}$$

Читается:

«Если a включено в b и b включено в c ,
то a включено в c ».

Этот принцип Шрёдер иллюстрирует с помощью кругов Эйлера и поясняет тут же, что, если в начале курса логики геометрические иллюстрации оказываются более понятными, чем формальные логические выводы, то в дальнейшем соотношение между формальными преобразованиями

и геометрическими иллюстрациями меняется: формальные преобразования становятся более убедительными, чем геометрические иллюстрации. Диаграммы Эйлера употребляются обычно для иллюстрации «типичных» случаев; «вырожденные» случаи (например, когда все a суть b и в то же время все b суть a) при этом обычно опускаются.

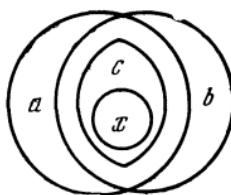


Рис. 14

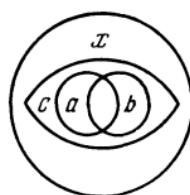


Рис. 15

Утверждение вроде: если для данных a и b существует c такое, что для всякого x , для которого¹

$$x \subset c \quad | \quad c \subset x$$

имеет место также

$$x \subset a, \quad x \subset b, \quad | \quad a \subset x, \quad b \subset x,$$

то мы имеем право сказать, что это эквивалентно утверждению

$$c \subset ab, \quad | \quad a + b \subset c,$$

Шрёдер иллюстрирует на стр. 202 [93] с помощью геометрических картинок (рис. 14, 15).

Аналогичные картинки (рис. 16, 17) Шрёдер дает и для следующих двух двойственных теорем или определений:

Если для данных a и b существует такое c , что для всякого x , удовлетворяющего одновременно условиям

$$x \subset a, \quad x \subset b \quad | \quad a \subset x, \quad b \subset x,$$

¹ Здесь и далее вертикальные линии служат для параллельной записи двойственных теорем, относящихся к операциям пересечения (обозначается точкой, которая может и пропускаться) и объединения (обозначается знаком «плюс») классов.

всегда верно также

$$x \subset c, \quad | \quad c \subset x,$$

то мы вправе сказать, что это эквивалентно тому, что

$$ab \subset c, \quad | \quad c \subset a + b.$$

Пересечение и объединение двух классов Шрёдер иллюстрирует с помощью кругов Эйлера, в которых за-

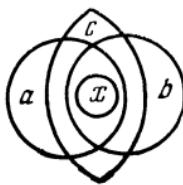


Рис. 16

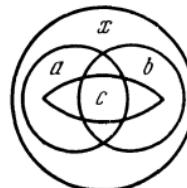


Рис. 17

штриховывает общую часть (пересечение) или объединение (стр. 214). Ассоциативные законы для пересечения и объединения областей Шрёдер также иллюстрирует с помощью штриховки геометрических фигур или их частей (стр. 258).

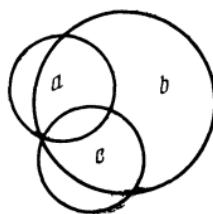


Рис. 18

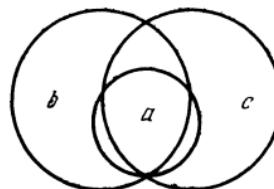


Рис. 19

Очень любопытно доказательство (стр. 263, 264) того, что из $ac \subset bc$ (соответственно $a + c \subset b + c$) еще не следует, что $a \subset b$, проводимое с помощью геометрической картинки (см. рис. 18, 19). Аналогичное графическое обоснование дается и для утверждения, что из $ac = bc$ (соответственно $a + c = b + c$) еще не следует $a = b$ (стр. 266), которое осуществляется с помощью рис. 20, 21; на обеих картинках заштрихованная область — это c .

Описанный выше метод опровержения тех или иных предложений с помощью графических примеров и теперь нередко применяется в логике. В этой связи достаточно

напомнить приводимое Я. Лукасевичем ([21], стр. 155 – 157) доказательство неполноты некоторой аксиоматики, верной для любого числа кругов, принимаемых в качестве универсума, с помощью приведения примера предложения, верного для универсума из трех кругов и неверного

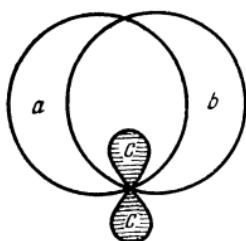


Рис. 20

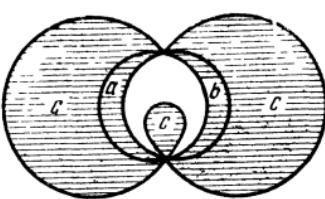


Рис. 21

для универсума из четырех. Аналогичный метод использован Ферисом ([61], стр. 220–222) в статье о силлогистике Ж. Д. Жергонна, представляющей для нас интерес и своей темой, поскольку речь идет о построении исчисления, элементарные предложения которого однозначно соответствуют диаграммам, изображенным на рис. 1. Здесь также неполнота некоторой аксиоматики доказывается с помощью графической интерпретации, для которой предложение, выраженное на языке Жергонна, оказывается ложным в области из четырех или большего числа кругов, но истинным в области из трех кругов.

* * *

В заключение остановимся на истории эйлеровых кругов и графических методов вообще. Выше уже упоминалось замечание Э. Шрёдера о Л. Вивесе. Некоторые сведения об истории применения диаграмм в логике приводит Г. Шольц [89]. Значительно обширнее специально посвященный истории графических методов раздел монографии Дж. Венна «Символическая логика» [106]. Венн начинает свой очерк с того, что опровергает некоторые распространенные в его время представления, относящиеся к этой истории. Так, он отказывается признавать графическими методами логики использование таких картинок, как, например, известное «древо Порфирия», поскольку с их помощью не решается какая-либо специфически логическая задача. Прежде всего, они не содержат анализа рас-

сматриваемых предложений,— не выделяют в них субъект и предикат, не фиксируют их форму (*e*, *a*, *i*, *o*)². Особенное неудовольствие Венна вызывают попытки У. Гамильтона [64] приписать приоритет в изобретении геометрических методов силлогистики не Л. Эйлеру, а Алстеду [46] или Вайзе (см. Lange [78]). У Ланге, о котором И. Ламберт в 1771 году писал [74], что его труд [78] содержит большое число иллюстраций силлогизмов с помощью квадратов и кругов, Венн нашел, правда, в другой работе [77], только графические иллюстрации «древа Порфирия». Г. Шольц, со своей стороны, отмечает, что еще в 1584 г. Юлий Паций (Pacius) в своем комментированном издании аристотелева «Органона» пользовался фигурами (правда, это были не круги) для символизации отношений понятий с такой уверенностью, какая заставляет предполагать наличие у него предшественников. Круги Шольцу встретились впервые у немецкого математика Иоганна Кристофа Штурма (1635—1703) в книге «Universalia Euclidea» (1661, Наад). Что же касается Ланге [78], то Шольц подтверждает, что его обработка книги Вайзе *Nucleus Logicæ* (объем которой возрос при этом с 72 до 850 страниц) методически использует круги для наглядного представления силлогистики.

В 1903 г. были обнаружены наброски Лейбница, которые содержат графические способы выделения правильных модусов силлогизмов с помощью прямоугольников и кругов (см., например, И. Бехенский [50], стр. 304 и табл. II). Впрочем, Венн справедливо замечает, что идея такого способа сама по себе могла прийти в голову не только Л. Эйлеру; что и де Морган, да и сам Венн, пришли к этому способу еще до того, как обнаружили его в «Письмах к немецкой принцессе» Эйлера. Именно Эйлеру Венн и приписывает заслугу введения этих методов в логику, датируя последнее 14-ым февраля 1761 года, когда было написано первое письмо на эту тему (102-е из «Писем к немецкой принцессе» [60]).

Специальное внимание в своем историческом очерке Вени обращает на то расширение метода кругов Эйлера,

² *e*, *a*, *i*, *o* — принятые в традиционной (аристотелевой) логике обозначения предложений силлогистики. Обозначают, соответственно, общеотрицательное («Ни одно *A* не есть *B*»), общеутвердительное («Все *A* суть *B*»), частноутвердительное («Некоторые *A* суть *B*») и частноотрицательное («Некоторые *A* не суть *B*») предложения.

которое принадлежит Б. Больцано ([51], 1837). Здесь идет речь о диаграмматическом представлении предложения «Та часть A , которая есть B , совпадает с той частью C , которая есть D », т. е. предложения $AB = CD$. Больцано изображает это предложение с помощью диаграммы, помещенной на рис. 22, где действительно пересечение A с B совпадает с пересечением C с D .

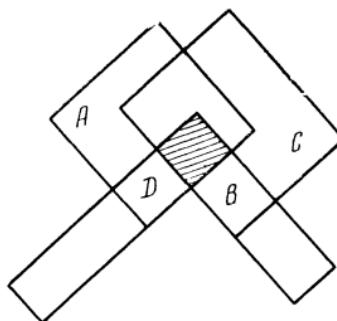


Рис. 22

По поводу этого изображения Венн замечал, что в нем не учитывается не запрещаемая условием задачи возможность того, что пересечение B с D не содержится ни в A , ни в C , т. е., что на диаграмме нет ячейки $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$, которой,— если A и C пусты,— соответствует случай равенства $AB = CD$ в силу того, что как AB , так и CD равны нулю. (Диаграмма Венна, выражющая это предложение, приведена ниже, на рис. 35.)

Сделаем два замечания:

1. $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ — есть обозначение пересечения классов \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} и \bar{D} , где черта над буквой означает дополнение к соответствующему классу.

2. Если включение одного класса в другой считать элементарной операцией, то равенство классов A и B ($A = B$) определяется как $A \subset B$ и $B \subset A$: можно и наоборот, равенство считать элементарной операцией, тогда включение A в B (обозначение: $A \subset B$) можно определить так: существует класс v такой, что $A = vB$, в качестве v можно взять класс A , тогда $A = AB$.

Венн замечает, что кроме Больцано он больше ни у кого не встречал диаграммы четырех переменных.

У М. В. Дробиша [58] и Э. Шрёдера [91] Венн нашел то, что можно назвать трехкруговой диаграммой. Однако они

только представляли комбинации или разбиения классов, но не делали последующего шага для применения их в качестве основы для записи предложений.

Мих (1871 [84]) подошел близко к диаграмматическому представлению предложений; в одной из своих фигур он использовал три пересекающихся круга для представления разбиения класса; при этом некоторые из ячеек он штрихует. Правда, как отмечает Венн, штриховка не имеет у него пропозиционального значения, — не играет роли в диаграмматическом представлении предложений: концентрация все еще «эйлеровская».

Схемы Эйлера есть у Г. Плуке, который утверждает в [87], что он изобрел этот метод независимо от Эйлера и раньше Эйлера; например, в 1759 году [86] он представил модус *barbara* с помощью трех квадратов, последовательно включающих друг друга.

И. Кант [72] и А. де Морган [56] при диаграмматическом выражении предложений употребляли квадрат и круг, чтобы отличить субъект от предиката.

Латам в 1856 г. [79] и Личман в 1864 г. [80] использовали квадрат, круг и треугольник, чтобы различить три термина в силлогизме.

Эйлеровские круги получили широкую известность, но должно было пройти некоторое время, пока их стали использовать не только в качестве случайной иллюстрации. По-видимому, говорит Венн, первым логиком, который сознательно использовал круги Эйлера для представления отношений между предложениями, был Краузе. Венн читал работу Краузе 1828 года [73] (первое издание работы вышло в 1803 году). Очевидно, пишет Венн, Краузе полностью понял отношение этих диаграмм к обычным предложениям.

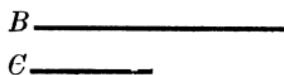
Для представления отношений между предложениями диаграммы использовались у Мааса (1793 [82]), представлявшего объемы понятий треугольниками с одной «подвижной» стороной. Венн замечает, что работа Мааса была не понята У. Гамильтоном, который писал о Маасе, что «это единственная попытка иллюстрировать логику не с помощью отношения геометрических величин, а с помощью отношений геометрических отношений — углов» ([64], стр. 463; цитируем по [106], стр. 516).

Кроме метода диаграмм, Венн рассматривает способ И. Ламберта [75], у которого терминам (классам) соответ-

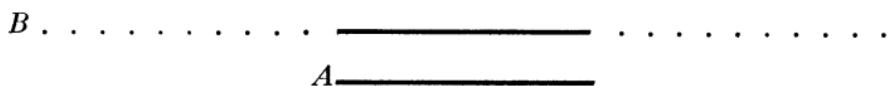
ствуют отрезки прямых. Для того чтобы представить включение C в B , отрезок, соответствующий C , Ламберт рисует под отрезком, изображающим B , причем длина отрезка C меньше длины отрезка B ; если классы не пересекаются, соответствующие отрезки изображаются рядом. Так, модус celarent:

Ниакие B не суть A
Все C суть B
Следовательно, никакие C не суть A

Ламберт представляет схемой (очевидно, он предполагает, что $C \subset B$, т. е. пересечение дополнения C с B не пусто):



Если нам неизвестно, распределен ли предикат ³, то используются точки. Например, «Все A суть B » изображается



Это означает, что A , во всяком случае, покрывает часть B и может покрывать остаток, $A \subseteq B$.

Пунктирные линии используются также для изображения частных суждений. Так, Ламберт представляет «Некоторые A суть B » в виде



Венн, однако, считает, что схемы Ламберта явно хуже схем Эйлера.

В исторических очерках Венн отмечает также схему Велтона (1891 [110]), которая, с одной стороны, напоминает схему Ламберта, поскольку используются отрезки прямых, а с другой стороны,— в отношении интерпретации — метод Венна (для каждой возможной альтернативы оставляется место, которое заполняется тем или иным образом; о методе Венна см. § 1.5).

³ О понятии распределенности терминов силлогистических предложений (субъекта и предиката) см., например, Г. И. Челпанов. Учебник логики, М., 1946.

Легко видеть, что все упомянутые авторы варьируют, в сущности, одну идею: все они в большей или меньшей степени приближаются к тому, что Э. Шрёдер называл исчислением областей некоторого многообразия. Свойственные такому подходу недостатки уже обсуждались нами на примере кругов Эйлера. Эти недостатки, еще терпимые в рамках силлогистики, таковы, что к задачам математической логики, несравненно более сложным, чем получение модусов силлогизма, подход этот оказывается неприменимым. Поэтому в дальнейшем мы иметь с ним дела не будем; все это было сказано исключительно в пропедевтических целях.

Математическая логика должна была создать свой собственный графический метод; таковым и является метод диаграмм Венна.

Заметим, кстати, что в литературе имеется тенденция смешивать круги Эйлера и диаграммы Венна. Например, в книге Саписа [97] есть раздел под названием «Диаграммы Венна», но начинается он с изображения эйлеровых кругов, причем попутно объясняется, что идея использовать круги принадлежит Эйлеру, Венн же лишь внес улучшения в его метод. Такая тенденция совершенно не оправдана, ибо метод диаграмм Венна основывается на существенно иной идеи, чем метод Эйлера, и общего у них только то, что оба являются **графическими**, оба связаны с геометрическим представлением объемов понятий, или классов, на части плоскости.

Как мы видели, круги Эйлера возникают в традиционной силлогистике для ее нужд; к становлению математической логики они не имеют никакого отношения или весьма отдаленное. Диаграммы же Венна создаются для обслуживания математической логики, и лежащая в основе их идея — идея разложения на конституенты — является одной из центральных в алгебре логики и вряд ли могла бы быть выдвинута без связи с этой последней. Во всяком случае, и И. Ламберт и Хр. Землер, у которых она впервые встречается, считаются (и по праву) прямыми предшественниками математической логики.

Но та математическая логика, в которой и для которой был создан метод венновских диаграмм, была по своим задачам и средствам существенно отлична от сегодняшней. Поэтому нам придется сделать довольно обширный экскурс в XIX в., чтобы выяснить, какие задачи ставились

в алгебре логики — ибо такова была первоначальная форма математической логики,— как они решались и как при этом «работали» диаграммы Венна.

§ 1.2. Постановка задач в алгебре логики XIX в. Способ решения логических уравнений по Булю

Как уже было отмечено, математическая логика возникла первоначально как алгебра логики. В действительности давно было ясно, что решение задач с помощью алгебраических уравнений состоит в том, что (1) информация, содержащаяся в условии задачи, выражается на специальном языке алгебры в виде некоторых равенств («уравнений»), (2) оперируя с которыми по определенным правилам, мы получаем из данной информации такую, которая дает ответ на интересующие нас вопросы, ответ, логически следующий из того, что нам дано. Иными словами, было ясно, что решение уравнений есть в действительности вывод логических следствий из информации, содержащейся в условии задачи. Естественно, рано или поздно должен был возникнуть вопрос о том, нельзя ли вообще вывод логических следствий свести к решению уравнений, расширив соответственно возможности символического языка алгебры. По существу, именно так подходил к этому уже Лейбниц. Но первая довольно удачная попытка этого рода принадлежит Дж. Булю. Именно Буль истолковал впервые обычные операции арифметики в новом смысле: «качественном» (в противоположность количественному), как говорили логики конца прошлого века,— например, наш соотечественник П. С. Порецкий.

Поскольку термин «объем понятия» был уже достаточно употребительным, и с объемами (обозначая их буквами a , b , . . . , i , например) можно было оперировать, складывая их друг с другом, вычитая из некоторого объема его часть, ограничивая какой-нибудь объем частью, входящей одновременно в другой объем («умножая» их друг на друга), дополняя объем части до некоторого целого и т. п., «объемная» (теоретико-множественная) интерпретация логических операций, как объединения, пересечения, дополнения классов, стала вскоре наиболее распространенной, хотя у самого Буля это было еще не так. Буль разрешал, так сказать, «физически складывать» только классы, не имеющие общих элементов (в исчислении высказываний это означало, что складываемые классы должны быть непересекающимися).

ваний «сложение» по Булю соответствует так называемой «строгой дизъюнкции», или,— если обозначать «истину» цифрой 1, а «ложь» — цифрой 0,— сложению по модулю два, где сумма двух нечетных чисел есть четное число). Но умножение объемов a и b и у Буля соответствовало пересечению классов (т. е. классу элементов, общих как a , так и b).

Если мы будем обозначать, как это делалось уже в прошлом веке после Буля, операции объединения, пересечения и дополнения знаками $+$, \cdot (или отсутствие знака) и $-$ (или'), то естественно придет к заключению,— исторически так оно и было,— что для объединения и пересечения имеют место обычные законы коммутативности и ассоциативности, а также законы дистрибутивности каждой операции по отношению к другой, законы идемпотентности ($a + a = a$, $aa = a$), поглощения ($a + ab = a$, $a(a + b) = a$) и др. Естественно ввести, как это и сделал Буль, термины «1» и «0» для обозначения, соответственно, всего «мира речи» («универсума») и пустого множества, определить дополнение к объему a , т. е. \bar{a} , равенствами: $a + \bar{a} = 1$, $a\bar{a} = 0$. Заметим, что, для всякого a , $a + 1 =$, $a \cdot 1 = a$, $a + 0 = a$, $a \cdot 0 = 0$; если $a + b = 0$, то $a = 10$ и $b = 0$; если $ab = 1$, то $a = 1$ и $b = 1$. На всем этом мы позволим себе пока не останавливаться более подробно, тем более, что в наши дни все это уже широко известно. Отметим лишь, что, так как $x + \bar{x} = 1$, $1 \cdot P = P$, то всякое выражение P можно представить в виде $P(x + \bar{x})$, или, пользуясь законом дистрибутивности, в виде $Px + P\bar{x}$ — вообще, в виде некоторой функции от x , такой, что $f(x) = Ax + B\bar{x}$. Полагая в этом равенстве $x = 1$, мы получим $f(1) = A$, и, полагая $x = 0$, — $f(0) = B$, т. е. $f(x) = f(1)x + f(0)\bar{x}$.

Аналогично, $f(x, y) = f(1, y)x + f(0, y)\bar{x}$, или, так как $f(1, y) = f(1, 1)y + f(1, 0)\bar{y}$, $f(0, y) = f(0, 1)y + f(0, 0)\bar{y}$, то $f(x, y) = f(1, 1)xy + f(1, 0)x\bar{y} + f(0, 1)\bar{x}y + f(0, 0)\bar{x}\bar{y}$; $f(x, y, z) = f(1, 1, 1)xyz + f(1, 1, 0)xy\bar{z} + f(1, 0, 1)x\bar{y}z + f(1, 0, 0)x\bar{y}\bar{z} + f(0, 1, 1)\bar{x}yz + f(0, 1, 0)\bar{x}y\bar{z} + f(0, 0, 1)\bar{x}\bar{y}z + f(0, 0, 0)\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ и т. д. Эти законы «разложения по конституентам» также были подмечены уже Булем, оперировавшим с равенствами, пользуясь правилом замены

равным и вытекающими из него законами рефлексивности ($a = a$), симметричности (если $a = b$, то $b = a$) и транзитивности (если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$) равенства. Но Буль шел и дальше. Он полагал $\bar{a} = 1 - a$ и переносил в алгебру логики обычные правила решения арифметических уравнений. Так, уравнение

$$Ax + B\bar{x} = 0, \quad (1.1)$$

где A и B — выражения, не содержащие x , он решал следующим образом: заменяя \bar{x} на $1 - x$, получал $Ax + B(1 - x) = 0$ или $(A - B)x + B = 0$, откуда «заключал», что $x = \frac{B}{B - A}$. Смысл выражения $\frac{B}{B - A}$ раскрывался затем Булем с помощью разложения по конституентам:

$$\frac{B}{B - A} = f(1, 1)AB + f(1, 0)A\bar{B} + f(0, 1)\bar{A}B + f(0, 0)\bar{A}\bar{B},$$

где $f(i, j)$ есть $\frac{i}{j-i}$ (где $i = 0, 1$; $j = 0, 1$). Формальное вычисление этих коэффициентов дает

$$\frac{B}{B - A} = \frac{1}{0}AB + \frac{0}{-1}A\bar{B} + \frac{1}{1}\bar{A}B + \frac{0}{0}\bar{A}\bar{B}.$$

Лишнее смысла выражение $\frac{1}{0}$ Буль заменял нулем и, таким образом, получал ответ в виде

$$x = \bar{A}B + \frac{0}{0}\bar{A}\bar{B}, \quad (1.2)$$

где $\frac{0}{0}$ толковалось им как означающее произвольный класс.

Не удивительно, что такого рода «решение» задачи не могло представляться достаточно убедительным. Почему $\frac{1}{0}$ равно 0? В каком смысле $x = \bar{A}B + \frac{0}{0}\bar{A}\bar{B}$ есть решение уравнения (1.1)? Что следует вообще понимать под делением A на B ?

Если мы подставим в уравнение (1.1) вместо x выражение $\bar{A}B + \frac{0}{0}\bar{A}\bar{B}$ и будем оперировать с полученным выражением как обычно в арифметике, то будем иметь

$$A(\bar{A}B + \frac{0}{0}\bar{A}\bar{B}) + B(\bar{A}B + \overline{\frac{0}{0}\bar{A}\bar{B}}) = A\bar{A}B + \frac{0}{0}A\bar{A}\bar{B} + \\ + B(1 - \bar{A}B - \frac{0}{0}\bar{A}\bar{B}) = B - \bar{A}B = B(1 - \bar{A}) = BA.$$

Таким образом, если AB не есть 0, то найденное Булем выражение для x не удовлетворяет уравнению (1.1). Наоборот, если AB есть 0, то действительно при подстановке произвольного объема на место $\frac{0}{0}$ выражение (1.2) удовлетворяет уравнению (1.1).

Все это уже было известно Булю, который говорил о равенстве $AB = 0$, или «результате исключения x » из уравнения (1.1), как о необходимом и достаточном условии разрешимости уравнения (1.1). Однако на вопросы о том, что значит вообще разделить A на B и что дает право отбросить те или другие члены при таком делении, Буль не умел ответить. Все это очень интриговало логиков, знакомившихся с работами Буля, и все они старались получить ответ на эти вопросы. Таким образом, для проблематики алгебры логики конца прошлого века особенно существенными оказались вопросы:

1. Какие операции следует вводить в алгебре логики?
2. Имеют ли в ней, в частности, смысл обратные операции, и, если имеют, то какие?
3. Можно ли пользоваться в логике выражениями вида $\frac{0}{0}$? И, если да, то как именно?
4. Что значит, вообще, решить логическое уравнение и исключить неизвестное из него?

У нас нет возможности проследить здесь послебулевское развитие алгебры логики во всех подробностях (см., например, Н. И. Стяжкин [32]). Важнейшие этапы таковы: У. С. Джевонс [69] предложил в 1873 г. свой метод решения логических задач, основанный, по существу, на некотором переборе, использующем булевы конституенты (Джевонс именует их альтернативами). Затем в 1877 г. Э. Шрёдер [91] дал первый строгий метод решения логических уравнений. Другой метод предложил в 1882 г. П. С. Порецкий [28]; возникшая между ним и Э. Шрёдером дискуссия о том, что значит решить логическое уравнение, весьма любопытна; мы остановимся на ней и некоторых смежных вопросах в приложении. Остальные вопросы (1—3) относятся — все — к языку алгебры

логики и, особенно, к ее операциям. Наибольшие трудности были связаны при этом с обратными операциями: «вычитанием» и «делением», хотя, как мы уже видели в связи с Булем, полной ясности не было даже насчет операции сложения. Желание перенести в логику по возможности большее число законов обычной арифметики должно было привести — и действительно привело Буля — к тому, что он отдал предпочтение истолкованию сложения как строгого «или». Как известно, построение логики — исчисления высказываний — как арифметики вычетов по модулю 2, т. е. как языка с операциями сложения (по Булю), умножения и константой «1», было выполнено с полной логической строгостью Жегалкиным и Стоуном только в двадцатых годах нашего века. С другой стороны, наличие двойственности между сложением и умножением при понимании их, соответственно, как объединения и пересечения (классов), очень облегчавшее оперирование с логическими формулами и, особенно, простота геометрической интерпретации этих операций при таком их истолковании — вели к тому, что именно последнее и стало наиболее распространенным.

В истории алгебры логики интересно вообще, что начавшись с попыток перенести в логику все операции и законы арифметики, она постепенно приводила к тому, что логики начинали сомневаться не только в правомерности, но и просто в целесообразности такого переноса, начинали пользоваться более удобными, и более специфическими именно для логики операциями и законами. С этой точки зрения особенно интересна история обратных операций, которыми все логики XIX в., — в том числе и такой крупный не только логик, но и алгебраист, как Э. Шрёдер, — еще очень много занимались. Но эта история пока еще недостаточно изучена, и мы не имеем возможности заниматься здесь ею в подробностях.

В этой книге мы сосредоточим свое внимание на Джоне Венне. Дело не только в том, что он является создателем диаграммного метода, которому посвящена эта книга. Венну принадлежит монография «Symbolic logic», которая, как уже подчеркивалось во введении, систематизирует (хотя и не столь полно, как фундаментальный труд Э. Шрёдера [93, 94] и не столь математично, как работа П. С. Порецкого [28]) материал, накопленный в алгебре логики к концу XIX столетия.

Достойно внимания также то обстоятельство, что Венн сумел ответить на вопросы 2 и 3, истолковав и булеvu операцию деления, и символ $\frac{0}{0}$.

Познакомимся же с тем, как Венн понимает алгебру логики.

§ 1.3. Символический язык Венна

Монография «Symbolic logic», первое издание [105] которой вышло в 1881 году, второе [106] — в 1894 году, является основным сочинением в серии работ Венна [99—106], посвященных обоснованию и развитию алгебры логики Буля. Термин «Symbolic logic», как отмечается в примечании к книге Чёрча [39], был, по-видимому, также впервые применен Венном, хотя еще Буль говорил о «Symbolical reasoning» (см. [39], стр. 377).

В журнале «Mind» за 1881 год (т. 6, стр. 288) об этом труде Венна мы читаем: «Цель этой выходящей вскоре в свет книги — дать полное представление о природе и объектах той системы логики, начало которой было положено в основном Булем. Книга содержит критическое разъяснение используемых принципов, выясняющих отношение этой системы к обычной логике и степень предполагаемого ею обобщения последней. Даётся некоторое историческое освещение более ранних попыток этого рода, начиная со времен Лейбница, а также задач и употребления метода диаграмм в логике».

Сам Венн оценивает свое произведение следующим образом: он считает в нем «характеристическим и оригинальным» — «Тщательное исследование символической логики как целого, ее отношения к обычной логике и обычному мышлению и языку; установление и объяснение каждого общего символического выражения и правила на чисто логических основах вместо того, чтобы искать главным образом его формальное обоснование, и изобретение и употребление новой схемы диаграмматического обозначения, которое должно быть в истинной гармонии с нашими обобщениями» ([106], стр. XXIX—XXX).

«Символическая логика» Венна состоит из введения и двадцати глав (речь идет о втором, дополненном издании [106], в котором Венн дает ответы на некоторые замечания Э. Шрёдера [93] и других авторов, относящиеся к первому изданию этой книги Венна). В каждый раздел

книги включено большое число примеров. Для того чтобы читатель мог составить себе более подробное представление о содержании «Символической логики» [106], в приложении 2 к настоящей книге приведено ее оглавление, местами дополненное нами некоторыми пояснениями.

Первой задачей символической логики по Венну является задача создания особого символического языка, который должен содействовать «расширению возможностей применения наших логических процессов при помощи символов» ([106], стр. 2). Однако прежде, чем заняться установлением такого языка, Венну нужно было решить вопрос о том, что именно должно быть выразимо на этом языке. В этой связи Венн замечает, что предложения, которые мы высказываем, могут иметь разный смысл. Они могут приписывать предмету или отрицать у него наличие какого-нибудь свойства. В предложении имеется субъект (класс предметов) и предикат, приписываемый предметам этого класса (или отрицаемый у них). Именно так, т. е. посредством прецидирования, говорит Венн, и строятся предложения в силлогистике Аристотеля. Четыре формы *a*, *e*, *i*, *o* элементарных предложений этой теории являются при этом хорошо выраждающими смысл общих и частных, утвердительных и отрицательных предложений, и значение такой теории нельзя отрицать. Наряду с ней возможна, однако, другая интерпретация смысла предложений: объемная, как мы сказали бы теперь, которая состоит в том, что элементарное предложение рассматривается как выражение отношения взаимного включения или исключения двух классов объектов. Но такого рода отношений имеется пять, и они выражаются соответственно диаграммами (рис. 1), которым приходится ставить в соответствие в общем случае уже не элементарное, а сложное предложение в аристотелевом смысле. Так, сложное предложение «Все *A* суть *B* и все *B* суть *A*» соответствует первой диаграмме: «Все *A* суть *B*, но некоторые *B* суть не-*A*» — второй диаграмме; «Все *B* суть *A*, но некоторые *A* суть не-*B*» — третьей диаграмме; «Некоторые *A* суть *B* и некоторые *A* суть не-*B* и некоторые *B* суть не-*A*» — четвертой диаграмме; и только пятой диаграмме соответствует элементарное предложение «Ни одно *A* не есть *B*». Наоборот, элементарному предложению «Все *A* суть *B*», даже в случае, когда рассматриваются только непустые классы, может соответствовать либо

первая, либо вторая картинка. Элементарному предложению «Некоторые *A* суть *B*» — одна из первых четырех,— и неизвестно, какая.

Венн ставит перед собой задачу найти такой язык символической логики, на котором элементарные предложения силлогистики Аристотеля выражались бы также элементарными предложениями, и такую геометрическую интерпретацию для этих предложений, при которой всякому предложению, как простому, так и сложному, однозначно соответствовала бы некоторая картинка. При этом он сталкивается с рядом трудностей,— прежде всего, относящихся к истолкованию «универсума» («единицы») и дополнения, которые успешно преодолевает.

* * *

Даже в случае, когда мы имеем дело с хорошо известным нам понятием — таким, например, как «черный» — дополнение к нему, или, как Венн предпочитает говорить, его отрицание, недостаточно определено. Действительно, что понимать под «не-черным»? — «Мы можем, — говорит Венн,— если угодно, определить этот класс как включающий все то, что не является черным:— включающий, например, геологический ледниковый период, притязания папства, последнее письмо Кларисы Харлоу⁴ и пожелания нашего отдаленного потомства. Но речь настолько ясно идет о цвете, что никакой разумный человек не станет сомневаться в том, что именно имеется в виду. И аналогично в большинстве случаев» ([106], стр. 246).

Иными словами, чтобы дополнение к классу имело точный смысл, нужно знать, что подразумевается под «целым» — «миром речи», или «универсумом». Никакого единого универсума в логике, по Венну, нет. Вопрос о выборе универсума,— как и тесно связанный с ним вопрос о геометрической интерпретации предложений,— относится уже не к логике, а к ее приложениям. Законы формальной логики,— особенно такие, которые относятся к дополнениям,— не действуют автоматически: если не позаботиться о надлежащем выборе универсума и соответствующем уточнении понятий, они потеряют смысл;

⁴ Клариса Харлоу — героиня одноименного романа английского писателя С. Ричардсона (1689—1761).

«... когда мы говорим, что «*A* есть не-*B*», и пытаемся рассматривать это не-*B* как атрибут, мы налагаем на наше понятие неопределенную широту его объема; и поэтому, когда мы не относим его к какому-нибудь ограниченному универсуму, мы должны признать, что наше суждение является в отношении к его предикату бесконечным или неопределенным» ([106], стр. 249).

Само по себе «все» очень неопределенное выражение и не имеет точного смысла. Чтобы можно было пользоваться логикой, его нужно уточнить, но это можно делать по-разному. «Мы можем ограничить наше применение терминов «хороший» и «не-хороший» лондонскими кэбами с нечетными номерами, и всякое логическое правило будет при этом оставаться столь же верным, как и в случае, если бы мы выбрали менее абсурдный род универсума» ([106], стр. 252). В логике классов существенно только, что «все, что исключается из *x*, включается в не-*x*. Только, когда мы начинаем исследовать, что имеется в виду под «все», возникает вопрос о границах (для не-*x* — *A. K.*), и это практический вопрос, предполагающий интерпретацию наших данных» (там же, стр. 253).

Наоборот, после того как «универсум» (или 1; на мотивах, приводимых Венном в оправдание выбора единицы в качестве символического обозначения для универсума, мы позволим себе не останавливаться) уже уточнен, никакого существенного различия между положительными и отрицательными понятиями не остается: не-*X* можно принять за некоторое *Y*, и тогда *X* выразится как не-*Y*. Это обстоятельство широко используется Венном в его диаграммах, которые всегда относятся к некоторому специально уточненному универсуму. За последний при этом удобно взять какую-нибудь простую геометрическую фигуру,— например, круг или квадрат. Вопрос о том, что лежит за пределами этого универсума, имеет для нас, по Венну, не больше смысла, чем вопрос о том, «что находится в поле нашего зрения *сзади* нашей головы» ([106], стр. 255). Но после того как универсум выбран, и дополнение таким образом определено, мы можем уже однозначно поставить в соответствие всякому элементарному предложению аристотелевой силлогистики его диаграмму. Поскольку Венн при этом вводит новую трактовку этих элементарных предложений, значительно более близкую к являющейся теперь обычной, и поскольку предлагае-

мая им интерпретация элементарных (в смысле «ристотеля») суждений для его метода является очень существенной, мы позволим себе остановиться на этом более подробно.

Займемся прежде всего суждением вида «Все A суть B ». Если за универсум выбрать круг (обозначим его через U)

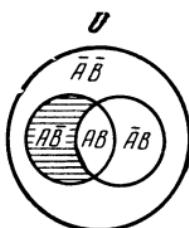


Рис. 23

и разбить двумя другими кругами A , B на четыре непересекающиеся друг с другом части AB , $\bar{A}B$, $\bar{A}\bar{B}$, $A\bar{B}$, то отношение включения A в B будет однозначно выражено тем, что пересечение A и \bar{B} пусто: за пределами B нет никакого A . Если, следуя Венну, суждению «Все A суть B » будет однозначно поставлена в соответствие картинка, изображенная на рис. 23, то эта картинка будет одной и той же независимо от того, какой из случаев — первый или второй (рис. 1) — имеет место. Больше того, эта картинка будет правильно выражать суждение «Все A суть B » даже в том случае, когда класс A пуст.

В оправдание того, что общее утвердительное суждение «Все A суть B » он записывает в отрицательной форме $A\bar{B} = 0$, т. е. как «Не существует предметов, принадлежащих A и не- B », Венн приводит следующие соображения. Рассматриваемое предложение, говорит он, можно интерпретировать и утвердительно, — например, в форме Буля: $A = vB$, где v — неопределенный класс (иногда вместо v Венн пишет символ $\frac{0}{0}$), и в форме Лейбница: $A = AB$. Но (как говорит Венн еще в первом издании книги [105] на стр. 223) утвердительная формулировка имеет условный и сложный характер, в то время как отрицательная — проста и безусловна: когда мы говорим, что «Все A суть B », то мы не знаем, существуют ли какие-нибудь A или B ; но когда мы говорим, что нет таких A , которые были бы не- B , то наша интерпретация вполне

определенна; это особенно важно в более сложных случаях, расхождение же с обычной речью не существенно — на то и символы, чтобы говорить на другом (не на обычном) языке.

То обстоятельство, что для пустого A оба суждения «Все A суть B » и «Все A суть не- B », или в соответствующей интерпретации для исчисления высказываний (которое, как и другие логики того времени, Венн трактует как частный случай исчисления классов): «Если A , то B » и «Если A , то не- B », должны считаться одновременно истинными, не смущает уже Венна, который пишет: «Мы должны допустить, что фраза « x влечет y » не предполагает, что известна какая-либо связь между рассматриваемыми фактами или что одно предложение формально выводимо из другого» ([105], стр. 442). И он поясняет это обстоятельство на примере диспута между логиками, имевшего место в связи с задачей, предложенной автором «Алисы в стране чудес» Льюисом Кэрроллом⁵, которую Венн называет поэтому «задачей Алисы». Эта задача состоит в следующем:

Имеются два предложения: A и B . И пусть установлено, что

(I) Если истинно A , то истинно B .

Есть еще одно предложение C такое, что

(II) Если истинно C , то, если A истинно, B не истинно.

Может ли при таких обстоятельствах C быть истинным?

Или та же задача в другой формулировке:

В доме три человека: A , B и C (Allen, Brown, Carr), которые могут выходить и не выходить при условии, что

(I) A никогда не выходит без B ,

(II) Если C выходит, то, если A выходит, B не выходит.

Спрашивается, может ли при таких условиях C выйти когда-нибудь.

На более привычном нам теперь языке исчисления высказываний эти условия можно записать так:

(I) $(A \supset B)$,

(II) $(C \supset (A \supset \neg B))$.

⁵ Льюис Кэрролл — псевдоним профессора Оксфордского университета математика Чарлза Доджсона (1832—1898).

И ясно, что, если A ложно, то оба высказывания (I) и (II) истинны, так как истинны и $(A \supset B)$, и $(A \supset \neg B)$. Именно это и демонстрирует, пользуясь установленным им аппаратом, Венн (там же, стр. 443).

Общее отрицательное суждение «Никакие A не суть B » Венн, естественно, также записывает в отрицательной форме $AB = 0$ и сообщает, что в форме Буля это предложение имеет вид $A = v(1 - B)$. Этому суждению у Венна

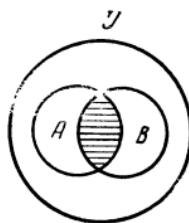


Рис. 24

однозначно соответствует диаграмма, приведенная на рис. 24.

Частное суждение «Некоторые A суть B » Венн представляет в форме $AB > 0$ (знак $>$ служит для выражения непустоты класса AB). При этом он подчеркивает экзистенциональный характер такого предложения. В форме Буля, говорит, он, это предложение имеет вид: $\frac{0}{0}A = \frac{0}{0}B$, где $\frac{0}{0}$ — неопределенный, но не пустой класс. Такое представление Венн считает особенно неудачным. Разбирая эту и другие формы записи частных предложений, Венн прежде всего показывает, что они недостаточно выражают экзистенциональный характер частных суждений. Так, в первом издании книги он пишет: «хотя $AB = AC$ может быть прочитано как «Некоторые B суть C », но неверно, что всякое предложение «Некоторые B суть C » может быть сформулировано как $AB = AC$. Я не вижу никакой формы, которая покрывала бы все частные предложения, за исключением той, которая трактует их как утверждения существования, и ограничивается объявлением, что имеются такие B , которые являются C .

После того что уже было сказано, вряд ли требуется повторять, что $\frac{0}{0}$ не есть эквивалент для «некоторые». Быть может, наилучшая краткая формулировка его

значения состоит в том, что оно представляет собой признание полного неведения в отношении термина, к которому $\frac{0}{0}$ приставлено» ([106], стр. 307).

Непустоту класса Венн изображает на диаграмме, помещая звездочку в соответствующей этому классу части диаграммы. Таким образом, суждению «Некоторые *A*

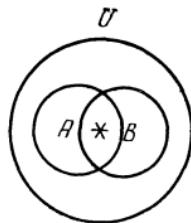


Рис. 25

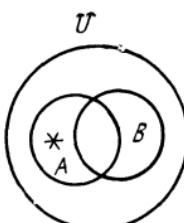


Рис. 26

суть *B*», во всех возможных случаях соответствует одна единственная диаграмма (рис. 25).

Отрицательное частное суждение «Некоторые *A* не суть *B*» выражается — и опять-таки совершенно однозначно — диаграммой, представленной на рис. 26.

Мы видим, таким образом, что Венну действительно удалось очень просто, по существу, справиться с задачей однозначно отобразить любое элементарное предложение соответствующей ему картинкой.

* * *

В качестве символов классов Венн употребляет буквы латинского алфавита. Операцию объединения он обозначает знаком плюс (+), операцию исключения (вычитания) одного класса из другого (при условии, что первый есть часть второго) — знаком минус (-), операцию ограничения (пересечения, или произведения классов) — знаком умножения (\times) или без знака, операцию деления класса *x* на класс *y* он записывает в виде $\frac{x}{y}$. При описании операций подчеркивается как их аналогия с соответствующими операциями в математике (арифметике и алгебре), так и отличие от последних.

Таким образом, в логике классов Венна используются выражения (термы), порождающие правила которых могут быть сформулированы следующим образом:

Пусть a_1, \dots, a_n — все графически различные буквы алфавита A_n ; 0, 1 — буквы алфавита A .

1. Если $\beta \in A_n A$ (β есть буква, принадлежащая объединению алфавитов A_n и A), то β считается термом. Если $\beta \in A_n$, то β обозначает элементарный класс. Если β есть 1, то β — универсум. Если β есть 0, то β — пустой класс.

2. Если Q — терм, то \bar{Q} считается термом.

3. Если Q, R — термы, то (QR) , $(Q + R)$, $\frac{Q}{R}$, $(Q - R)$

считываются термами.

На классы, участвующие в операциях, Венн накладывает ограничения. Поэтому не всякий терм обозначает класс. Ниже мы остановимся на операциях над классами, причем будем показано, что операции вычитания и деления могут быть из логики классов исключены.

Пустоту класса E Венн обозначает $E = 0$, непустоту — $E > 0$. Равенство классов E и F Венн понимает как выражение $E\bar{F} + \bar{E}F = 0$, а неравенство $E \neq F$ — как выражение $E\bar{F} + \bar{E}F > 0$.

Такую форму записи предложений Венн называет отрицательной и неоднократно подчеркивает ее экзистенциональный характер:

1. В предложении $E = 0$, где E — некоторый класс E , говорится о том, что не существует предметов, принадлежащих классу E .

2. Предложение $E > 0$ говорит, что существуют предметы, принадлежащие классу E .

Таким образом, знаки $=, >$ Венн использует для построения формул логики классов. Порождающие правила при этом могут быть сформулированы (на современном языке) следующим образом:

- Если A, B — классы, то $A = B$ считается формулой.
- Если A — класс, то $A > 0$ считается формулой.

По Венну формула $A = B$ эквивалентна формуле $A\bar{B} + \bar{A}B = 0$.

Формулы S и T Венн считает эквивалентными, если они говорят о пустоте (или непустоте) одного и того же класса.

Знак неравенства \neq Венн фактически использует только для сокращения записи: предложение $A \neq B$ говорит, что класс $A\bar{B} + \bar{A}B$ не пуст, т. е. $A\bar{B} + \bar{A}B > 0$.

Венн формулирует правило для построения отрицаний: если $A = 0$, то отрицание этого предложения имеет

вид: $A > 0$, и обратно. Например, отрицание $xy = 0$ есть $xy > 0$.

Объединение двух данных классов A и B возможно, как пишет Венн, например, в [105] на стр. 45, в трех смыслах. Первый случай соответствует строгой дизъюнкции, во втором случае объединение понимается как в современной теории множеств (в исчислении высказываний этому соответствует неисключающая дизъюнкция), в третьем случае элементы общей части классов A и B учитываются дважды. Эти различные подходы к объединению классов Венн иллюстрирует соответственно следующими примерами.

1. Амнистируются преступники, совершившие только одно из двух преступлений A и B . Класс амнистируемых в этом случае есть объединение классов преступников, совершивших A и совершивших B , в смысле строгой дизъюнкции.

2. Получают рождественские подарки почтальоны и служители прихода, при этом каждый человек может получить только один подарок; в этом случае мы имеем дело с неисключающей дизъюнкцией: обычным объединением классов почтальонов и служителей прихода.

3. В качестве примера третьего подхода к объединению Венн приводит случай, когда учитывается общее число оштрафованных, нарушивших правила A или B , причем лицо, нарушившее оба правила, штрафуется дважды. В классе, состоящем из всех оштрафованных, некоторые элементы учитываются дважды.

Венн отдает предпочтение второму случаю, то есть, если нет специальной оговорки, операция «сложения» соответствует у него операции объединения классов (или неисключающей дизъюнкции исчисления высказываний).

Анализируя операцию пересечения («ограничения»), Венн специально останавливается на случаях, когда пересечение двух классов фактически не ограничивает одного из них, например, случай совпадения xy с y .

Операция исключения (вычитания) классов, рассматриваемая Венном как обратная к операции объединения классов, определяется им только для случая, когда $x \subset z$; она рассматривается как дающая тот наименьший класс y_0 , для которого $x + y_0 = z$. Поэтому, если для какого-нибудь y

$$x + y = z, \text{ то } y_0 = z - x = \bar{x}y = z\bar{x},$$

где \bar{x} — дополнение класса x до универсума. Ясно, что, если x и y не пересекаются, то y_0 совпадает с y , т. е. из $x + y = z$ можно заключить, что $y = z - x$.

Местами Венн совершенно некритически переносит свойства этой операции из арифметики в логику. Так, теорема Гаубера [67] [которая в простейшем случае (у Венна рассматривается более общий случай) гласит: если род A подразделен на виды x и y , а также на виды α и β , не имеющие общих элементов, и мы знаем, что все x суть α , все y суть β , то и наоборот, все α суть x , все β суть y] у Венна доказывается (в рассматриваемом здесь случае) следующим образом.

Пишется

$$A = \alpha + \beta,$$

$$A = x + y,$$

затем из верхнего равенства почленно вычитается нижнее, что записывается в виде

$$0 = (\alpha - x) + (\beta - y), \quad (1.3)$$

и, так как нам дано, что x включено в α , а y — в β , откуда $\alpha - x = \alpha\bar{x}$, $\beta - y = \beta\bar{y}$, то (1.3) переписывается в виде $0 = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y}$, откуда, далее, $\alpha\bar{x} = 0$, $\beta\bar{y} = 0$, т. е. все α суть x и все β суть y .

В своей «Алгебре логики» ([94], стр. 287) Э. Шрёдер критиковал Венна за такое «свободное» обращение со знаком минус в логике. Однако Венн и во втором издании «Символической логики» ([106], стр. 346, 347) не считал нужным внести в это доказательство какие-либо существенные изменения. Правда, нетрудно заметить, что теорема Гаубера могла быть доказана Венном правильно, т. е. разработанные им методы (например, графические) позволяют из того, что $\alpha\beta = 0$, $x\bar{\alpha} = 0$, $y\bar{\beta} = 0$, $\alpha + \beta = x + y$, вывести $\alpha\bar{x} = 0$, $\beta\bar{y} = 0$, $xy = 0$ (решение этой задачи с помощью диаграмм Венна дано нами на стр. 86).

Особое внимание Венн уделяет операции деления, которая у него является обратной логическому умножению (пересечению, или ограничению). Операция деления используется в логике Булем, но он «не делает никакой попытки объяснить свое употребление знака деления в логике» ([105], [106], стр. XIII), и Венн рекомендует обращаться к трудам «более философских математиков»,

среди которых называет прежде всего «Тригонометрию и двойную алгебру» А. де-Моргана [57], а затем «Арифметику и алгебру» Э. Шрёдера [90], «Лекции о комплексных числах» Г. Ганкеля [65] и «Основы анализа» Р. Липшица [81]. Венн стремится дать «объяснение принципов логического исчисления в полной зависимости от основ математического исчисления» ([105]; [106], стр. XIII). Подчеркивая, что принципы логики должны иметь самостоятельное объяснение, Венн ясно представляет связь между математикой и логикой. Так, он пишет: «Я думаю, что Mr. Harley прав (Отчет Британской Ассоциации, 1866; см. также Отчет за 1870 г.⁶), полагая, что термин «математическая» употреблялся им [Булем.— A. K.] «в расширенном смысле как обозначающий науку о законах и комбинациях символов, и с этой точки зрения нет ничего нефилософского в трактовке логики как ветви математики вместо трактовки математики как ветви логики» ([105], стр. XVII); и далее в примечании на этой же стр. Венн продолжает:

«Буль и сам сказал то же самое: «Это просто факт, что последние законы логики,— те, на которых и можно только построить науку логики,— являются математическими по форме и выражению, хотя они не принадлежат к математике количества» (Лекция, прочитанная в Корке, 1851⁷)».

Результат операции деления x на y при условии, что класс x включается в класс y , т. е. при условии, когда «все x суть y », Венн представляет в виде $x + v\bar{x}\bar{y}$ (или в виде $xy + v\bar{x}\bar{y}$), где v — неопределенный класс. Если условие $x \subset y$ не выполнено, операция деления у Венна не определена, так как в этом случае класс x не может быть получен из класса y путем ограничения последнего каким-нибудь классом z . (Действительно, из $yz = x$ следует непосредственно, что $\bar{y}z = \bar{x}$, т. е. — так как $\bar{y}y = 0$, — что класс \bar{x} пуст: «Все x суть y ».)

Естественность такого представления Венн обосновывает не только тем, что произведение $x + v\bar{x}\bar{y}$ (или $xy + v\bar{x}\bar{y}$) на y равно x при условии, что $xy = x$, но и последующим анализом задачи.

⁶ R. Harley. Report of British Association, 1866, 1870.

⁷ G. Boole. The Claims of Science, Lecture in Queen's College, Cork. 1851.

В связи с вопросом об обратных операциях Венн приводит замечание Буля из книги «Дифференциальные уравнения» [54], стр. 377, состоящее в том, что обратная операция не есть в действительности операция в собственном смысле слова, поскольку она не указывает последовательности шагов, которые нужно выполнить. Венн цитирует Буля: «Обязанность обратного символа состоит в том, чтобы предложить вопрос, а не в том, чтобы описать операцию. В его первоначальном смысле эта обязанность вопросительная, но не директивная».

Вопрос, который возникает в применении к делению, как обратной операции, Венн формулирует так: найти выражение для наиболее общего класса, который, если наложить на него ограничение, обозначенное через y , сведется в точности к x . Отсюда Венн, прежде всего, делает заключение, что весь класс x должен быть частью искомого класса, т. е., что задача может быть решена только в этом предположении. Так как, далее, слагаемое, содержащее множителем y , не может исчезнуть при умножении на y , то Венн заключает, что помимо x искомый класс может содержать еще только некоторую часть класса \bar{xy} . Поскольку любая часть этого класса при добавлении к x дает класс, удовлетворяющий требованиям задачи, Венн вводит еще неопределенный множитель v , получая, таким образом, все возможные решения задачи. Результат деления x на y представляется у него поэтому в виде, как он пишет, «группы классов» $x + v\bar{xy}$, где v — любой класс.

Ясно, что никаких других решений задача не имеет. В дальнейшем мы покажем, что решение этой задачи можно получить с помощью изложенного Венном общего метода решения логических уравнений.

Как и Шрёдер, Венн понимает при этом, что вводимая им «операция» деления в логике не нужна, так как при решении логических уравнений без нее можно обойтись и никакой логический процесс вообще не подсказывает необходимости в ней. Однако для аналогии с арифметикой Венн, в отличие от Шрёдера, сохраняет деление как особую операцию в теории классов.

В связи с этим подчеркнем, что не только операцию деления в логике вводить не обязательно, но и вообще можно обойтись без обратных операций: без деления и без исключения (вычитания). Операция вычитания может быть исключена в силу равенства $z - x = z\bar{x}$ (при $x \subset z$).

На протяжении всей книги Венн регулярно ссылается на историю математики и логики. Так, приведя высказывание Буля об обратных операциях, Венн добавляет: «Представляется удивительным, что автор, который так ясно сформулировал природу обратной операции в математике, никогда не предложил в явной форме какого-нибудь соответствующего объяснения в логике» ([106], стр. 77).

Встретившись с каким-нибудь вопросом, Венн не успокаивается, пока не разберется в нем с более общей точки зрения. Так, исследуя обратные операции, он ставит общий вопрос о том, как в паре противоположных операций выделить прямую и обратную, и предлагает при ответе на такой вопрос заведомо считать обратной ту (если таковая имеется), результат которой не вполне определен. В противном случае, т. е. если результат обеих операций однозначно определяется, выбор прямой и обратной операций можно делать по произволу.

Операции разделяются Венным на интерпретируемые и неинтерпретируемые. В [99] Венн, следуя Булю, рассматривает операцию деления как неинтерпретируемую. На стр. 79 [106] приводится цитата из Буля в связи с неинтерпретируемостью деления: существует «цепочка вывода, ведущая нас через промежуточные шаги, которые нельзя интерпретировать, к конечному результату, являющемуся интерпретируемым», и далее Буль продолжает: «Употребление неинтерпретируемого символа $\sqrt{-1}$ в промежуточных процессах тригонометрии является иллюстрацией сказанного». Таким образом, наряду с О. Л. Коши и Дж. Буля можно считать предшественником идей, на которых базируется теория ε -символа у Д. Гильберта.

В дальнейшем, как пишет Венн, его точка зрения на деление изменилась,— результатом деления он считает некоторый, хотя и неопределенный, класс. При этом Венн придерживается объемной интерпретации, которая ему представляется более ясной. В то же время он отмечает возможность интерпретации деления и «по содержанию», или по признаку. Такую интерпретацию дал Шрёдер [91] в 1877 году. Как отмечает Венн, на самом деле она была уже у И. Ламберта ([76], т. 1, стр. 261), который говорил: «Отвлечем от понятия A частичное понятие B и назовем получающееся понятие R . Тогда мы имеем

$$R = \frac{A}{B} = ac$$

(например). Здесь A , очевидно, предполагается имеющим признаки a, b, c , а B — имеющим признак b . Далее, однако, Ламберт замечает: «Но мы здесь занимаемся делением не в большей мере, чем занимаемся умножением при композиции».

Интерпретацию в терминах признаков Венн считает неприемлемой, так как неясно, что означает понятие «содержание», и он поэтому отдает предпочтение объемной интерпретации, которая особенно наглядна, когда речь идет о конечном числе объектов.

* * *

Опираясь на наглядное представление введенных им операций, Венн формулирует различные их свойства⁸, такие, например, как

$$x(y+z) = xy + xz \quad ([106], \text{стр. } 60),$$
$$(a+x)(b+x) = ab + x \quad ([106], \text{стр. } 69).$$

Какой-либо попытки систематизировать эти законы, выбрав среди них более простые, с тем, чтобы, пользуясь ими, выводить другие,— в отличие от Шрёдера, который, как известно, уже заметил даже невыводимость дистрибутивных законов из, как мы сказали бы теперь, аксиоматики алгебраической структуры,— у Венна нет. По существу, он ограничивается только приведением примеров, иллюстрирующих эти законы. Мы позволим себе, поэтому не останавливаться подробнее на этих вопросах алгебры логики у Венна. Отметим лишь, что правила поглощения:

$$A = A + AB, \quad A = A(A + B),$$

и правила выявления:

$$Ax + B\bar{x} = Ax + B\bar{x} + AB,$$
$$(A + x)(B + \bar{x}) = (A + x)(B + \bar{x})(A + B)$$

также имеются у Венна.

Особую роль в логике классов у Венна играет разложение выражений на конституэнты по данным переменным x, y, z, \dots, u . Венн делает это аналогично Булю, т. е.,

⁸ Выше, например, на стр. 41, в наших разъяснениях операций логики Венна мы фактически пользовались некоторыми из этих свойств.

представляя выражение (для определенности отметим случай трех переменных x, y, z) $f(x, y, z)$ в виде $f(x, y, z) = f(1, 1, 1)xyz + f(1, 1, 0)xy\bar{z} + f(1, 0, 1)x\bar{y}z + f(1, 0, 0)x\bar{y}\bar{z} + f(0, 0, 1)\bar{x}\bar{y}z + f(0, 0, 0)\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, где $f(1, 1, 1), f(1, 1, 0), \dots, f(0, 0, 0)$ равны нулю или единице, а также в виде совершенной простой суммы (определенной аналогично совершенной дизъюнктивной нормальной формуле в исчислении высказываний) или (двойственного) совершенного простого произведения (определенного аналогично совершенной простой сумме с заменой знаков $+$ и \cdot друг на друга). Такие разложения Венн использует постоянно для доказательства своих утверждений. По существу, они же лежат в основе его графического метода диаграмм.

Здесь следует еще отметить, что помимо правил де Моргана для образования выражения, противоположного данному, Венн употребляет прием, состоящий в том, что противоположностью для выражения, разложенного по каким-нибудь переменным, например, для

$$Axy + Bx\bar{y} + C\bar{x}y + D\bar{x}\bar{y},$$

является выражение, получаемое заменой коэффициентов A, B, C, D соответственно на $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$, т. е. выражение

$$\bar{A}xy + \bar{B}x\bar{y} + \bar{C}\bar{x}y + \bar{D}\bar{x}\bar{y}.$$

Венн широко пользуется и тождеством Джонсона [71]

$$(ac + \bar{a}d) = (a + d)(\bar{a} + c): \quad (1.4)$$

он иллюстрирует это тождество таблицей (табл. 1):

Таблица 1

a	c
<hr/>	
d	\bar{a}

по строкам члены в ячейках перемножаются, по столбцам — складываются. Алгорифмический характер табличного представления тождества (1.4) Венн демонстрирует на примере получения логических следствий посы-

лок, заданных в положительной форме (т. е. в виде равенства единице).

Пусть дано

$$xyz\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}yzw + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w} = 1. \quad (1.5)$$

С помощью таблицы (табл. 2), которая строится для формы (1.5) и читается как сумма (дизъюнкция) из произведений (конъюнкций) по строкам или как произведение (конъюнкция) из сумм (дизъюнкций) по столбцам:

Т а б л и ц а 2

		y	$z\bar{w}$
x			
	$\bar{z}w$		\bar{y}
	y	zw	
	$\bar{z}\bar{w}$	\bar{y}	\bar{x}

Венн легко получает равенство

$$\begin{aligned} & xyz\bar{w} + x\bar{y}\bar{z}w + \bar{x}yzw + \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{w} = \\ & = (x + y + \bar{z}\bar{w})(x + \bar{y} + zw)(\bar{x} + y + \bar{z}w)(\bar{x} + \bar{y} + z\bar{w}). \end{aligned} \quad (1.6)$$

В силу (1.5), правая часть (1.6) приравнивается также единице. Следовательно, все конъюнктивные члены (сомножители) правой части (1.6), записанные в положительной форме, являются логическими следствиями из (1.5).

Этот метод может представлять интерес и сегодня, особенно при нахождении логических следствий из посылок.

§ 1.4. Алгебраические методы решения логических уравнений и исключения неизвестных

Как уже было отмечено, логика Венна представляет собой логику классов, т. е. некоторый эквивалент исчисления одноместных предикатов. В этом исчислении имеется часть, в точности эквивалентная исчислению высказываний

ний. Все логики второй половины XIX в., занимавшиеся алгеброй логики, выделяли прежде всего именно эту часть логики классов. Они делали так потому, что решение всех задач в этой части легко сводилось к решению уравнений. Здесь речь шла о решении таких задач, в которых среди посылок не было частных суждений. Частные суждения рассматривались Шрёдером, например, только во втором томе его трехтомной «Алгебры логики». Венн стал рассматривать частные суждения более подробно лишь во втором издании своей «Символической логики», трактуя их как неравенства вида $A > 0$.

Центральной задачей логики Венн поэтому считает задачу решения уравнений. Уравнением или системой уравнений при этом выражается информация, содержащаяся в посылках задачи. Решение уравнений у Венна состоит в таком преобразовании этой информации, которое позволяет дать ответ на какие-нибудь вопросы, относящиеся к терминам, фигурирующим в посылках. Наиболее простым видом таких вопросов являются вопросы, предлагающие охарактеризовать любой из рассматриваемых терминов (или его дополнений) через остальные или часть остальных. Задача, состоящая в извлечении такой информации, которая относится только к части терминов, называется проблемой исключения и рассматривается как особая задача. Обе задачи — и решения уравнений, и исключения неизвестных — оказываются неразрывно связанными между собой. Они являются, конечно, некоторым обобщением алгебраических задач, относящихся к составлению и решению уравнений. В то же время Венн хорошо понимает, что даже так поставленные логические задачи не могут решаться простым переносом в логику обычных методов решения алгебраических уравнений. «Главное, чего тут следует опасаться,— пишет он,— это ошибок, происходящих из ассоциаций с математикой» ([106] стр. 302).

В этой связи он уделяет особое внимание методам решения логических уравнений, предложенным Булем, и «неуклюжим», как он их называет, формам выражения этих уравнений и их решений, встречающихся у Буля.

Всякое равенство

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$$

в алгебре классов, содержащее класс x , может быть приведено к виду:

$$Ax + B\bar{x} + C = 0. \quad (1.7)$$

Это преобразование можно осуществлять следующим образом: во-первых, исходное равенство записать в отрицательной форме

$$\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{B}} + \bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{B} = 0^*, \quad (1.8)$$

во-вторых, левую часть равенства (1.8) заменить эквивалентной ей простой суммой (являющейся в логике классов аналогом дизъюнктивной нормальной формы логики высказываний) и, наконец, в-третьих, в левой части последнего равенства выделить коэффициенты при x и \bar{x} .

Равенство (1.7) называют уравнением относительно буквы (неизвестной) x . В (1.7) B , A , C — выражения, не содержащие переменной x . Непосредственным следствием такого уравнения являются условия $C = 0$, $AB = 0$, оказывающиеся, как нетрудно заметить, необходимыми и достаточными для того, чтобы уравнение (1.7) имело решение, т. е., чтобы существовал такой класс x (хотя бы и пустой), для которого оно выполняется.

В § 1.2 уже показывалось, как Буль решал такие уравнения. Его результат:

$$x = \bar{A}B + \frac{0}{0} \bar{A}\bar{B}. \quad (1.9)$$

Венн указывает, что этому решению можно придать рациональную форму. Действительно, из условия задачи, т. е. из уравнения (1.7), немедленно следует, что $Ax = 0$, $B\bar{x} = 0$, т. е., что $B \subset x \subset \bar{A}$. Иначе говоря, x есть некоторый класс, который лежит между B и \bar{A} , почему его и можно выразить в виде

$$B + \frac{0}{0} \bar{A} \quad (1.10)$$

или в виде

$$\bar{A}B + \frac{0}{0} \bar{A}\bar{B}$$

* Из исходного равенства $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ равенство (1.8) получается следующим образом. Умножив обе части равенства $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ один раз на $\bar{\mathfrak{A}}$, другой раз на $\bar{\mathfrak{B}}$, получим равенства: $\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}\bar{\mathfrak{A}}$, $\bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{B} = \bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}$, т. е. $\mathfrak{B}\bar{\mathfrak{A}} = 0$ и $\bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{B} = 0$. Складывая почленно два последние равенства, получим (1.8).

(из $B = AB + \bar{A}B$, $AB = 0$ вытекает $B = \bar{A}B$; в $B + \frac{0}{0}$ $\bar{A}B + \frac{0}{0} \bar{A}\bar{B}$ член $\frac{0}{0} \bar{A}B$ поглощается членом B), т. е. то самое, что получил Буль, но теперь уже без переноса в логику необоснованных арифметических преобразований. При этом Венн обращает внимание на то, что в логике задача решения уравнения, и вообще вывода логических следствий, не имеет смысла, пока не уточнено, какую именно информацию мы хотим извлечь из данной нам в посылках.

В качестве примера Венн на стр. 314—315 [106] рассматривает уравнение Джевонса $Ax + B\bar{x} + C = 1$, которое он переписывает в отрицательной форме (т. е. в форме равенства нулю) $\bar{A}\bar{C}x + \bar{B}\bar{C}\bar{x} = 0$, откуда он получает решение уравнения Джевонса в форме $x = \bar{B}\bar{C} + \frac{0}{0} (AB + C)$ при условии, что $\bar{A}\bar{B}\bar{C} = 0$.

[Это решение в виде (1.10) легко получается из

$$\bar{B}\bar{C} + \frac{0}{0} (A + C),$$

если учесть, что $A + C = AB + A\bar{B} + C = AB + A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + C = AB + A\bar{B}\bar{C} + C$, и в окончательном результате член $\frac{0}{0} A\bar{B}\bar{C}$ поглощается членом $\bar{B}\bar{C}$.]

Как и Буль, Венн формулирует для алгебры логики не только алгорифмы «решения» уравнений, но и алгорифмы исключения неизвестных. В отличие от Буля, он при этом подчеркивает, что исключение неизвестных в алгебре логики имеет смысл, заведомо отличный от того, который оно имеет в обычной алгебре. Под исключением неизвестных в логике понимается извлечение максимальной информации, относящейся только к некоторым из терминов, содержащихся в посылках задачи.

Исключение термина из одной посылки Венн осуществляет посредством замены его словом «некоторые» или символом $\frac{0}{0}$. Это правило он показывает на простом примере

$$w = xy + \bar{x}z; \quad (1.11)$$

исключение из (1.11) термина y дает

$$w = \frac{0}{0} x + \bar{x}z.$$

Исключение неизвестной, таким образом, увеличивает неопределенность посылки. Того же результата можно достичь по Венну и заменой в последнем уравнении термина $\frac{0}{0}$ термином w , т. е. заменой явного уравнения (1.11) неявным

$$w = wx + \bar{x}z.$$

Хотя Венн иллюстрирует разные способы исключения неизвестных на многочисленных примерах, однако точного определения того, что именно понимается им под «исключением неизвестных», он не дает. Во втором издании «Символической логики» [106] он прямо ссылается на Э. Шрёдера, по которому результатом исключения x из уравнения

$$Ax + B\bar{x} + C = 0 \quad (1.7)$$

является уравнение

$$AB + C = 0,$$

поскольку выражение

$$AB + C$$

«содержит все члены, свободные от x или те, которые могут быть освобождены от x » (стр. 370).

Ясно, однако, что, если трактовать уравнение (1.7) как утверждение

$$\exists x (Ax + B\bar{x} + C = 0)$$

[существует такое x , что $Ax + B\bar{x} + C = 0$], то для того чтобы это утверждение было верно, необходимо и достаточно, чтобы имело место $AB = 0$, $C = 0$, т. е. $AB + C = 0$. Действительно, если существует такое x , что

$$Ax + B\bar{x} + C = 0,$$

то независимо от того, какое это x , $C = 0$. Поэтому уравнение (1.7) можно заменить уравнением

$$Ax + B\bar{x} = 0,$$

умножая обе части которого один раз на $A\bar{x}$, другой — на Bx , мы получим

$$AAx\bar{x} + AB\bar{x}\bar{x} = 0,$$

$$ABx\bar{x} + BBx\bar{x} = 0,$$

откуда

$$AB\bar{x} = 0, \quad ABx = 0,$$

или, складывая почленно,

$$AB(x + \bar{x}) = 0, \quad \text{т. е. } AB = 0.$$

Наоборот, если

$$AB + C = 0,$$

то заведомо существует такое x , для которого (1.7) имеет место. Роль такого x может играть, например, B . Мы уже знаем, что в этом случае уравнение (1.7) имеет решение; им является любое x в интервале от B до \bar{A} . Можно сказать поэтому, что уравнение

$$AB + C = 0$$

является самым сильным логическим следствием уравнения

$$Ax + B\bar{x} + C = 0, \quad (1.7)$$

не содержащим неизвестной x . «Самым сильным» в том смысле, что любое другое следствие $S = 0$ из (1.7), не содержащее неизвестной x , должно быть следствием самого сильного. Действительно, из истинности самого сильного следствия

$$AB + C = 0$$

следует разрешимость уравнения (1.7), т. е. истинность его для какого-то x ; из последней же, в свою очередь, следует, что $S = 0$; таким образом $S = 0$ есть логическое следствие равенства

$$AB + C = 0.$$

То обстоятельство, что правила силлогизма представляют собой именно правила вывода самых сильных логических следствий, не содержащих среднего термина, из посылок силлогизма, т. е., что они могут трактоваться как результат исключения среднего термина из посылок силлогизма, специально подчеркивается Венном. Он отме-

чает при этом, что хотя в заключении силлогизма происходит некоторая потеря информации по сравнению с посылками, однако эта потеря несущественная, если речь идет о соотношении между субъектом и предикатом, выявляемом только с помощью среднего термина, играющего вспомогательную роль.

В связи с решением уравнений здесь следует заметить, что ни Венн, ни Шрёдер не рассматривают уравнений вида

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

где $f(x_1, \dots, x_n)$ есть терм, тождественно равный 1 или 0. Однако Венн этого не замечает, Шрёдер же в определении уравнения специально подчеркивает, что $f(x_1, \dots, x_n)$ не является ни тождественно равным 0, ни тождественно равным 1.

Вернемся теперь к операции деления. Результат операции деления a на b , как пишет Венн, например, в [106] на стр. 82, есть такое x , что $a = bx$. Таким образом, x есть корень уравнения $a = bx$, т. е. уравнения в отрицательной форме

$$\bar{a}bx + a\bar{x} + a\bar{b} = 0.$$

Решением последнего является $x = a + v\bar{a}$ ($a + \bar{b}$) при условии, что $a\bar{b} = 0$. После преобразования получаем $x = a + v\bar{a}\bar{b}$ при условии $a\bar{b} = 0$ — для сравнения см. выше результат операции деления.

Приведем пример, при решении которого Венн использует обратные операции ([106], стр. 336; [105], стр. 267).

Известно: из некоторого класса w предметов удалена их часть, которая состоит из x , являющихся z , и y , являющихся не- z ; из оставшейся части удалены z , которые есть y , и x , которые есть не- y ; оставшаяся в результате часть составляет класс z , которые не есть x . Требуется найти условия, при которых можно выразить класс w через остальные.

Символически условие задачи Венн записывает в виде уравнения:

$$w(1 - xz - y\bar{z})(1 - yz - x\bar{y}) = \bar{x}z.$$

Полученное уравнение он преобразует к виду $w\bar{x}\bar{y} = \bar{x}z$, $w = \frac{\bar{x}z}{\bar{x}\bar{y}}$. Исключая операцию деления, он находит $w = \bar{x}\bar{y}z + v(1 - \bar{x}z) \cdot (1 - \bar{x}\bar{y})$, $w = \bar{x}\bar{y}z + v(x + \bar{x}y\bar{z})$ при условии $\bar{x}yz = 0$.

Заметим, что к решению уравнения

$$Ax + B\bar{x} + C = 0 \quad (1.7)$$

сводится решение логического уравнения с несколькими неизвестными. Например, уравнение

$$Axy + Bx\bar{y} + C\bar{x}y + D\bar{x}\bar{y} = 0$$

(предполагаем, что $Axy + Bx\bar{y} + C\bar{x}y + D\bar{x}\bar{y}$ не есть тождественный нуль или тождественная единица; легко видеть, что к такому виду может быть приведено любое логическое уравнение с неизвестными x и y), где A , B , C и D не содержат x , y , перепишем в виде уравнения с одной неизвестной x :

$$(Ay + B\bar{y})x + (Cy + D\bar{y})\bar{x} = 0.$$

Полученное уравнение имеет решение относительно x тогда и только тогда, когда

$$(Ay + B\bar{y})(Cy + D\bar{y}) = 0,$$

т. е., когда

$$ACy + BD\bar{y} = 0. \quad (1.12)$$

Последнее имеет решение относительно y тогда и только тогда, когда $ABCD = 0$. Разрешая уравнение (1.12) относительно y и подставляя y в исходное уравнение, получим в результате уравнение с одним неизвестным x , решать которое мы уже умеем.

Чтобы решить систему логических уравнений, можно все уравнения записать в отрицательной форме и решить уравнение, являющееся дизъюнкцией (суммой) всех уравнений.

Как уже отмечалось, для записи частных предложений Венн во втором издании [106] применил знак « $>$ ». Этот знак он использовал при рассмотрении вопроса об исключении неизвестных в частных суждениях. Опираясь на то, что все, находящееся в Ax (соответственно в $B\bar{x}$), заведомо содержится в A (соответственно в B) и что из

$$A + B + C = 0$$

следует

$$Ax + B\bar{x} + C = 0,$$

Вени показывает, что неравенство

$$Ax + B\bar{x} + C > 0 \quad (1.13)$$

имеет смысл тогда и только тогда, когда

$$A + B + C > 0, \quad (1.14)$$

и называет последнее неравенство результатом исключения неизвестной x в (1.13).

Особый интерес представляет случай, когда среди посылок задач имеются как общие, так и частные, суждения. Вени ограничивается рассмотрением случая двух посылок ([106], стр. 371—372):

$$\begin{aligned} Ax + B\bar{x} + C &> 0 \\ Dx + E\bar{x} + F = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Для этого случая Вени дает общее решение, которое иллюстрирует затем на примерах. Систему (1.15) нужно, очевидно, понимать как означающую

$$\exists x (Ax + B\bar{x} + C > 0 \ \& Dx + E\bar{x} + F = 0). \quad (1.16)$$

Из того, что

$$Dx + E\bar{x} + F = 0,$$

следует

$$Dx = 0, \quad E\bar{x} = 0, \quad F = 0; \quad (1.17)$$

откуда, далее,

$$\frac{DEx = 0, \quad DE\bar{x} = 0}{DE(x + \bar{x}) = 0},$$

$$DE \cdot 1 = 0,$$

$$DE = 0. \quad (1.18)$$

Из (1.17) следует: $x \subset \bar{D}$, $\bar{x} \subset \bar{E}$. Поэтому $Ax \subset A\bar{D}$, $B\bar{x} \subset B\bar{E}$. И если $Ax + B\bar{x} + C > 0$, то тем более, $A\bar{D} + B\bar{E} + C > 0$.

Таким образом, из (1.15) следует

$$\begin{aligned} DE + F = 0 \\ A\bar{D} + B\bar{E} + C > 0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

И наоборот, из (1.19) следует (1.16), т. е. (1.15). Действительно, из (1.19) имеем $DE = 0$, $F = 0$, и, хотя бы

один из $A\bar{D}$, $B\bar{E}$ или C больше 0. Если $A\bar{D} > 0$, то положим $x = \bar{D}$. Для этого x мы получим следующее

$$\begin{aligned} Ax + B\bar{x} + C &= A\bar{D} + BD + C > 0; \\ Dx + E\bar{x} + F &= D\bar{D} + ED + F = 0. \end{aligned}$$

Если $B\bar{E} > 0$, то положим $x = E$. Для этого x будем иметь

$$\begin{aligned} Ax + B\bar{x} + C &= AE + B\bar{E} + C > 0; \\ Dx + E\bar{x} + F &= DE + E\bar{E} + F = 0, \end{aligned}$$

т. е. (1.16) является верным.

Если же $C > 0$, то для любого x $Ax + B\bar{x} + C > 0$, и при $x = E$ $Dx + E\bar{x} + F = DE + E\bar{E} + F = 0$, т. е., опять-таки, (1.16) верно.

Итак, результат исключения, т. е. (1.19), есть «самое сильное следствие», — уже хотя бы потому, что он просто эквивалентен системе посылок.

Венн замечает далее, что, если в случае универсальных высказываний исключение не всегда возможно (чтобы исключить x из

$$Ax + B\bar{x} = 0,$$

должно быть $AB = 0$), то в случае частных из

$$Ax + B\bar{x} + C > 0$$

всегда можно получить

$$A + B + C > 0.$$

Однако в ряде случаев такое исключение иллюзорно, например, если

$$A + B + C \equiv 1.$$

($A + B + C$ тождественно равно 1), то результат исключения не содержит никакой информации ($1 > 0$), т. е. ничего не дает. Впрочем, иллюзорным исключение может быть и для уравнения

$$Ax + B\bar{x} + C = 0,$$

если AB тождественно равно нулю ($0 = 0$). В этом случае Венн также говорит, что исключение невозможно. И он особо отмечает случай, когда $A = \bar{B}$, в котором исключе-

ние невозможно ни для

$$Ax + B\bar{x} > 0,$$

ни для

$$Ax + B\bar{x} = 0.$$

Если A и B представляют собой разложения по конституентам для одинаковых переменных, то, чтобы исключение было «возможно», нужно,— в случае уравнения $Ax + B\bar{x} = 0$,— чтобы A и B содержали общие члены (одинаковые слагаемые) с коэффициентами 1. Сумма этих слагаемых и есть в таком случае результат исключения x .

Так, для уравнения $(z\bar{u}\bar{v} + \bar{z}u\bar{v} + z\bar{u}\bar{v})x + (zu\bar{v} + \bar{z}u\bar{v} + zu\bar{v})\bar{x} = 0$ результатом исключения x будет $\bar{z}u\bar{v} + zu\bar{v} = 0$ или $u\bar{v} = 0$.

Это соображение дает Венну возможность предложить удобный графический прием исключения неизвестных, который он иллюстрирует на ряде примеров (некоторые из них приводятся ниже), позволяющих очень наглядно ответить на оба вопроса:

1. Возможно ли исключение?
2. Если возможно, то получить его результат.

В случае неравенства $Ax + B\bar{x} > 0$ дело обстоит так, что в $A + B$ не должны входить с коэффициентами «1» все члены разложения по конституентам для остальных переменных (кроме x), иначе будем иметь $A + B \equiv 1$, где \equiv есть знак тождества. Отсюда также получается красивый графический прием для исключения неизвестных, который мы осветим уже после того, как опишем графический метод Венна.

§ 1.5. Графический метод Венна

Для простейшего случая двух классов диаграммы Венна фактически уже рассматривались в § 1.3. Венн ввел диаграммы для наглядного представления заданной информации и для решения с их помощью некоторых задач символической логики. Построение диаграмм Венн начинает с разбиения части плоскости на 2^n ячеек с помощью n фигур, где n — число переменных, данных в условии задачи. В дальнейшем предложенный Венном метод разбиения плоскости изменялся и усовершенствовался, делались попытки увеличения наглядности его для большего числа переменных. В настоящее время известно несколько спосо-

бов деления плоскости на 2^n ячеек с помощью n фигур. Приведем некоторые из них. Начнем с метода Венна, дополняя его при $n = 1, \dots, 4$ усовершенствованиями Мак-Каллока [83] (эти дополнения будем отмечать ссылками на [83]).

Замкнутая кривая Ψ без самопересечений делит плоскость на две части (ячейки) — внутреннюю и внешнюю (предполагаем, что кривая Ψ — граница ячеек — не принадлежит ни одной из них), одну из ячеек (внутреннюю) обозначим a , другую — дополняющую a до плоскости — \bar{a} . Иногда в качестве Ψ удобно использовать прямую, которая также делит плоскость на две части (ячейки) [83].

При $n = 1$ в качестве Ψ можно взять окружность произвольного, но фиксированного радиуса (см. первую диаграмму на рис. 1); или прямую (рис. 27).

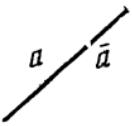


Рис. 27

При $n > 1$ замкнутые кривые Ψ_1, \dots, Ψ_n без само-пересечений располагают на плоскости так, чтобы разделить ее на 2^n ячеек.

При $n = 2$ можно разделить плоскость на четыре ячейки двумя окружностями (см. четвертую диаграмму на рис. 1), или двумя прямыми (рис. 28) [83].

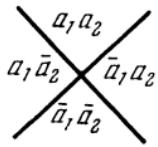


Рис. 28

При $n = 3$ еще можно воспользоваться тремя окружностями (рис. 29) или двумя прямыми и окружностью, как показано на рис. 30, но уже нельзя — тремя прямыми.

При $n = 4$ можно расположить на плоскости две прямые, окружность и эллипс так, что плоскость разделится на 2^4 ячеек (рис. 31) [83]; можно также ограничиться, как это делает Венн, четырьмя эллипсами (рис. 32).

Следовательно, при $n = 1, 2, 3, 4$ плоскость можно разделить на 2^n ячеек с помощью n фигур, ограниченных кривыми без точек самопересечения.

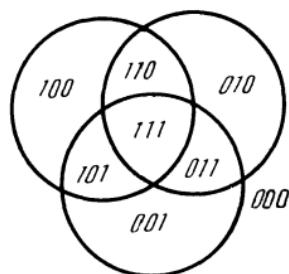


Рис. 29



Рис. 30

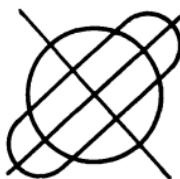


Рис. 31

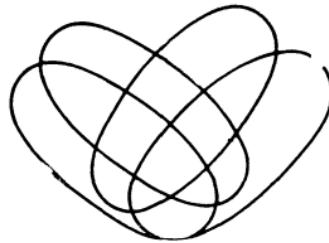


Рис. 32

Перейдем к вопросу об общем способе разбиения плоскости на 2^n ячеек с помощью n фигур.

Венн в своих работах не останавливается подробно на общем способе разбиения плоскости на 2^n ячеек, так как в разбираемых им задачах встречаются только случаи, когда $n \leq 5$, которые он исследует подробно [выше мы привели случаи $n = 1, \dots, 4$ (рис. 1 — первая и четвертая диаграммы, рис. 29, рис. 32); о случае $n = 5$ см. в § 1.6]. Однако общий метод Венн представляет себе

достаточно ясно. Так, он пишет: «Для чисто теоретических целей правило образования будет очень просто. Нужно начать с того, что нарисовать любую замкнутую фигуру и затем рисовать другие, подчиняя их только условию, чтобы каждая пересекала один и только один раз все существующие подразделения, произведенные теми фигурами, которые были проведены раньше» ([102], стр. 8).

Сформулируем это правило Венна индуктивно.

1. При $n = 1, 2, 3$ способы разбиения окружностями указаны выше (первая и четвертая диаграммы, изображенные на рис. 1 и рис. 29).

2. Предположим, что при $n = k$, $k \geq 3$ указано такое расположение k фигур, что плоскость делится на 2^k ячеек. Тогда для расположения $k + 1$ фигуры на этой плоскости достаточно, во-первых, выбрать незамкнутую кривую Жордана ϕ , имеющую с каждой из границ всех 2^k ячеек один общий кусок; во-вторых, обвести ϕ замкнутой кривой Жордана Ψ_{k+1} так, чтобы кривая Ψ_{k+1} проходила через все 2^k ячеек и пересекала границу каждой ячейки только два раза.

Таким образом получится расположение $n = k + 1$ фигур такое, что плоскость разделится на 2^{k+1} ячеек.

На рис. 29 в ячейках плоскости расположены последовательности из n (где $n = 3$) нулей и единиц; единица на i -ом месте последовательности означает принадлежность ячейки фигуре a_i , нуль на j -ом месте — принадлежность ячейки дополнению фигуры a_j . Такие последовательности из n нулей и единиц можно воспринимать как числа в двоичной системе; эти числа, равные (в десятичной системе) соответственно $0, 1, \dots, 2^n - 1$ (при $n = 4$ имеем $0, 1, \dots, 15$), будем рассматривать как номера ячеек.

Другая нумерация ячеек встречается у Шрёдера ([93], стр. 570, 571); он нумерует их — например, при $n = 3$ в следующем порядке: abc получает номер 1, $ab\bar{c}$ — номер 2, $a\bar{b}c$ — номер 3, $a\bar{b}\bar{c}$ — номер 4, $\bar{a}bc$ — номер 5, $\bar{a}b\bar{c}$ — номер 6, $\bar{a}\bar{b}c$ — номер 7, $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ — номер 8 (аналогичную нумерацию см. также в нашей работе [8]). Э. Шрёдер предлагает для решения логических задач иметь напечатанные штампы (с проставленными на них номерами ячеек) в большом числе и для выражения посылок вычеркивать на них соответствующие номера.

Известны и другие способы разбиения плоскости на 2^n ячеек. Например, метод Минского — Сэлфриджа [83], [10].

Очевидно, что с ростом n наглядность картинок уменьшается. Для больших n поэтому удобнее пользоваться таблицами, состоящими из 2^n ячеек — таблицами Венна n переменных ([106], стр. 138—140, 376).

		x				\bar{x}			
		y		\bar{y}		y		\bar{y}	
		z	\bar{z}	z	\bar{z}	z	\bar{z}	z	\bar{z}
		w	\bar{w}	w	\bar{w}	w	\bar{w}	w	\bar{w}
c	e	*	*	*	*	*	*	*	*
	\bar{e}	*	*	*	*	*	*	*	*
\bar{c}	e	*	*	*	*	*	*	*	*
	\bar{e}	*	*	*	*	*	*	*	*

Рис. 33

На рис. 33 приведена таблица Венна шести переменных. Она содержит 64 ячейки. На левой стороне таблицы указаны все возможные комбинации фигур c, e и их дополнений \bar{c}, \bar{e} , на верхней стороне — все возможные комбинации фигур x, y, z, w и их дополнений $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{w}$. Следовательно, для каждой ячейки таблицы можно однозначно определить, принадлежит она некоторой фигуре или ее дополнению; так, ячейка, расположенная на пересечении третьего слева столбца и второй сверху строки (на рис. 33 в этой ячейке поставлен кружок), принадлежит $c, \bar{e}, x, y, \bar{z}, w$.

Между таблицами и картинками Венна легко устанавливается взаимно однозначное соответствие — по таблице можно построить картинку и, наоборот, по картинке восстановить таблицу. Продемонстрируем это на примерах для $n = 1, \dots, 5$ — по таблицам 3—7 строятся диаграммы, приведенные на рис. 34.

Дальнейший рост n (переход от n к $n + 1$) можно произвести удвоением таблицы Венна (n переменных) по горизонтали (на последней диаграмме рис. 34 пунктиром отмечена граница фигуры, соответствующей переменной a_6 и имеющей вид «гребенки»).

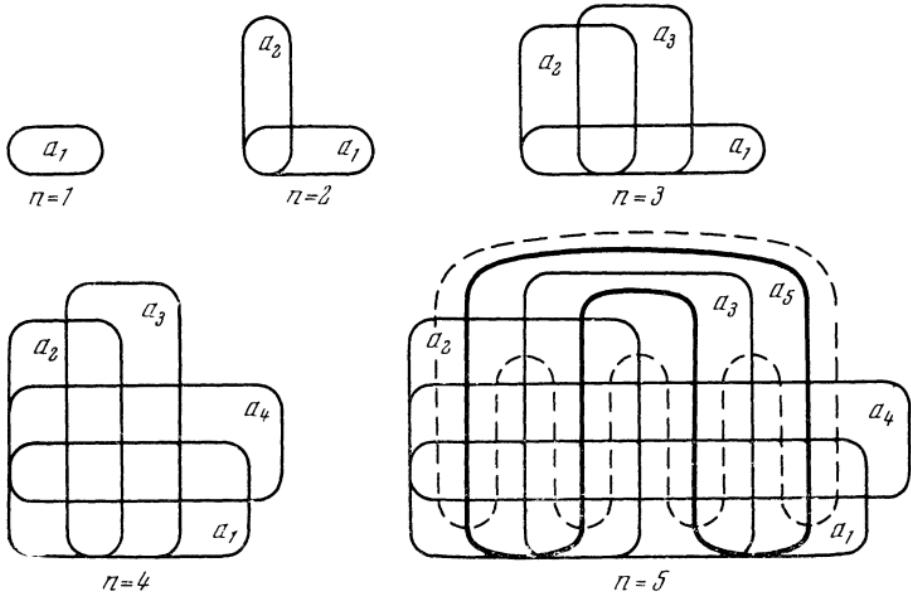
Т а б л и ц ы 3 — 7

α_1	α_2	$\bar{\alpha}_2$
α_1	α_2	$\bar{\alpha}_2$
α_1	$\bar{\alpha}_2$	α_2

$n = 1$ $n = 2$ $n = 3$

α_2	$\bar{\alpha}_2$	α_2	$\bar{\alpha}_2$
$\bar{\alpha}_3$	α_3	α_3	$\bar{\alpha}_3$
$\bar{\alpha}_5$	α_5	α_5	$\bar{\alpha}_5$
$\bar{\alpha}_4$	α_4	α_4	$\bar{\alpha}_4$
$\bar{\alpha}_4$	α_4	α_4	$\bar{\alpha}_4$
$\bar{\alpha}_4$	α_4	α_4	$\bar{\alpha}_4$

$n = 4$ $n = 5$



Для дальнейшего не существенно, каким образом получены 2^n ячеек — разбиением плоскости или построением таблицы. Поэтому введем понятие символа Венна.

Символом Венна n переменных будем называть часть плоскости, состоящую из 2^n ячеек, или таблицу Венна n переменных.

Ячейки символа Венна будем нумеровать числами $0, 1, \dots, 2^n - 1$, двоичная запись каждого из которых совпадает с соответствующей последовательностью из n единиц и нулей (единица на i -ом месте последовательности означает принадлежность ячейки фигуре a_i , нуль на j -ом месте — принадлежность ячейки дополнению фигуры a_j).

Методы разбиения плоскости на 2^n ячеек с помощью n фигур и построения таблиц были предложены Венном, когда он занимался проблемой преобразования информации, заданной в виде одного или нескольких предложений. Имея посылки, он старался извлечь из них информацию о том, какие из 2^n ячеек (n — число графически неравных переменных, содержащихся в посылках) пусты, какие не пусты и какие пусты или не пусты в зависимости от того, пусты или не пусты какие-либо другие ячейки. Из числа предшественников этих методов (формулировавших их не графически) Венн отмечает Хр. А. Землера и У. С. Джевонса, которые предлагали перечислять все возможные комбинации терминов классов и их дополнений и вычеркивать те из них, которые пусты в силу условий задачи.

Свой графический метод Венн иллюстрирует на многочисленных примерах, не давая, однако, общего определения понятия «диаграмма». На основании анализа этих примеров попытаемся воспроизвести определение диаграммы по Венну.

Диаграммой n переменных по Венну можно назвать символ Венна n переменных, одни из ячеек которого могут быть заштрихованы, другие могут быть пустыми, а в третьих могут быть поставлены звездочки.

Например, на рис. 35 приведена диаграмма Венна четырех переменных, в которой заштрихованы ячейки $A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$, $A\bar{B}C\bar{D}$, $A\bar{B}\bar{C}D$, $A\bar{B}CD$, $\bar{A}BCD$, $\bar{A}\bar{B}CD$; для построения символа Венна использованы эллипсы; диаграмма непосредственно выражает предложение

$$A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}CD + \bar{A}BCD + \bar{A}\bar{B}CD = 0,$$

которое свидетельствует о том, что нет таких AB , которые не были бы и C и D , и таких CD , которые не были бы и A и B ; ячейка $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ диаграммы отмечена кружком для сравнения с соответствующей диаграммой Больцано (рис. 22), на которой этой ячейки нет. Другие примеры диаграмм Венна см. ча рисунках 10, 23—34.

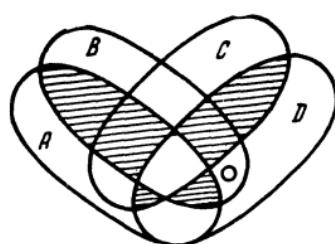


Рис. 5

Следует отметить, что звездочки у Венна встречаются только в одном примере. Диаграммы, не содержащие звездочек, изоморфны формулам исчисления высказываний. Звездочки на диаграммах появляются для выражения частных суждений, не формулируемых на языке формул исчисления высказываний. Однако введение звездочек не позволяет еще использовать диаграммы для выражения произвольных предложений логики классов. В третьей главе предлагается такое изменение диаграмм, которое позволяет выражать в них информацию, задаваемую произвольными формулами исчисления одноместных предикатов.

§ 1.6. Некоторые задачи логики классов, их решение с помощью диаграмм Венна

1. Задача Буля. Это — одна из самых сложных (как указывают Венн в [106] и Шрёдер в [93]) задач, имеющихся в книге Буля «Исследование законов мысли, на которых основаны математические теории логики и вероятностей» ([53], стр. 146—149).

Задача гласит:

Представим себе, что некто сказал нам, что наблюдение некоторого класса явлений (естественных или искусственных, например, каких-нибудь веществ) привело к таким общим результатам:

а) Если одновременно отсутствуют признаки A и C , то обнаруживается признак E вместе с одним из признаков B или D , но не с обоими.

б) Всюду, где встречаются одновременно признаки A и D при отсутствии E , либо обнаруживаются оба признака B и C , либо оба отсутствуют.

γ) Всюду, где имеет место признак A вместе с B или E или вместе с обоими, обнаруживается также один и только один из признаков C и D . И наоборот, всюду, где наблюдается один и только один из признаков C и D , обнаруживается также признак A вместе с B или E или же с обоими.

Предполагая эту информацию правильной, требуется, во-первых, выяснить, какие заключения в каждом случае можно вывести из наличия признака A относительно признаков B , C и D ; во-вторых, решить вопрос о том, нет ли между признаками B , C , D каких-нибудь отношений, имеющих между ними место независимо от наличия или отсутствия остальных признаков (и если да, то каких именно?); в-третьих, аналогичным образом ответить на вопрос о том, что следует из наличия признака B относительно признаков A , C и D (равно как и наоборот, когда из наличия или отсутствия признаков этой последней группы можно сделать заключение о наличии или отсутствии признака B); в-четвертых, констатировать, что следует для признаков A , C , D самих по себе (т. е. независимо от остальных).

Формализация условий этой задачи не представляет трудностей. Вообще, по поводу задач этого раздела (эквивалентного классическому исчислению высказываний) Шрёдер пишет, например, что они даже не могут быть трудными, поскольку у нас есть общий метод (алгорифм) их решения ([93], стр. 522).

Чтобы выполнить формализацию задачи Буля, обозначим высказывания о наличии признаков A , B , C , D , E через a , b , c , d , e соответственно; высказывания об их отсутствии — так же, но с чертою \bar{a} означает, таким образом, отсутствие признака a , вообще — неверность (отрицание) a ; союзу «если..., то» поставим в соответствие знак импликации: \supset (т. е. фразу вида «Если X , то Y » будем записывать как: $(X \supset Y)$); союзу «или» (неразделительному, т. е. говорящему только, что хотя бы одно из двух высказываний верно, но не исключающему того, что,

может быть, оба верны) — знак «+»; союзу «и» — отсутствие знака (т. е. будем читать XY как X и Y).

На этом языке условия нашей задачи легко выразятся так:

$$\alpha) (\bar{a}\bar{c} \supset e (b + d) \bar{b}\bar{d})$$

(Фразу «но не с обоими» мы читаем здесь как «и неверно, что имеют место оба: b и d »).

$$\beta) (ad\bar{e} \supset (bc + \bar{b}\bar{c}))$$

(в этом случае различие между неразделительным и разделительным «или» исчезает, так как оба члена вместе невозможны);

$$\gamma) (a(b + e) \supset (cd\bar{d} + \bar{c}\bar{d})) ((cd\bar{d} + \bar{c}\bar{d}) \supset a(b + e))$$

(напомним, что $(b + e)$ означает « b или e или оба вместе» и что для выражения $(cd\bar{d} + \bar{c}\bar{d})$ неразделительное «или» совпадает с разделительным, так как $cd\bar{d}$ не может быть вместе с $\bar{c}\bar{d}$).

Теперь напомним еще, что на языке алгебры логики Венна импликация ($X \supset Y$) (т. е. «если X , то Y ») выражается как $X\bar{Y} = 0$. (Здесь 0 можно понимать как знак для «лжи», $X\bar{Y} = 0$ читать как: «неверно, будто X и не- Y »). Равенство же $X = Y$ эквивалентно совокупности двух импликаций (конъюнкции их, т. е. соединению союзом «и»): $(X \supset Y)$ и $(Y \supset X)$.

Посылки α , β , γ выражаются поэтому на языке Венна равенствами так:

$$\alpha^*) \bar{a}\bar{c} \overline{(e(b + d)\bar{b}\bar{d})} = 0,$$

$$\beta^*) ad\bar{e} \overline{(bc + \bar{b}\bar{c})} = 0,$$

$$\gamma^*) a(b + e) = (cd\bar{d} + \bar{c}\bar{d}).$$

Хотя посылка γ (конъюнкция двух импликаций вида $(X \supset Y)$ и $(Y \supset X)$) выражается при этом особенно просто, для получения диаграммы Венна ее лучше трактовать как пару посылок: как две импликации; преобразование каждой из этих импликаций дает:

$$\gamma_1^*) a(b + e) \overline{(cd\bar{d} + \bar{c}\bar{d})} = 0,$$

$$\gamma_2^*) (cd\bar{d} + \bar{c}\bar{d}) \overline{(a(b + e))} = 0.$$

Пользуясь теперь правилами де Моргана для образования противоположности (т. е. заменяя отрицание конъюнкции на дизъюнкцию отрицаний, отрицание же дизъюнкции на конъюнкцию отрицаний), мы выразим наши посылки так:

$$\begin{aligned}\alpha^0) \quad & \bar{a}\bar{c}(\bar{e} + \bar{b}\bar{d} + b\bar{d}) = 0, \\ \beta^0) \quad & ad\bar{e}(\bar{b} + \bar{c})(b + c) = 0, \\ \gamma_1^0) \quad & a(b + e)(\bar{c} + d)(c + \bar{d}) = 0, \\ \gamma_2^0) \quad & (c\bar{d} + \bar{c}d)(\bar{a} + \bar{b}\bar{e}) = 0.\end{aligned}$$

Теперь нам остается только воспользоваться законом дистрибутивности (т. е. «открыть скобки»), чтобы получить возможность выразить графически всю информацию, содержащуюся в наших посылках в виде диаграммы Венна. В результате мы получим:

$$\begin{aligned}\alpha^1) \quad & \bar{a}\bar{c}\bar{e} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d = 0, \\ \beta^1) \quad & a\bar{b}cd\bar{e} + ab\bar{c}d\bar{e} = 0, \\ \gamma_1^1) \quad & ab\bar{c}\bar{d} + a\bar{c}\bar{d}e + abc\bar{d} + acde = 0, \\ \gamma_2^1) \quad & \bar{a}c\bar{d} + \bar{a}\bar{c}d + \bar{b}c\bar{d}\bar{e} + \bar{b}\bar{c}d\bar{e} = 0.\end{aligned}$$

Это значит, что в диаграмме Венна должны быть пусты (заштрихованы) все ячейки, в названия которых входят приведенные здесь комбинации: $\bar{a}\bar{c}\bar{e}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c}d$, $a\bar{b}cd\bar{e}$, $ab\bar{c}d\bar{e}$, $a\bar{c}\bar{d}\bar{e}$ и так далее.

Стандартная диаграмма Венна для пяти переменных имеет вид, изображенный на рис. 36 (на штриховку пока не следует обращать внимания). Здесь четыре овала a , b , d , e и фигура c , имеющая вид кольца, внутри которого расположены ячейки $ab\bar{c}de$, $ab\bar{c}d\bar{e}$, $\bar{a}b\bar{c}d\bar{e}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c}de$. Всего ячеек $2^5 = 32$. Они все выписаны на рисунке, где занумерованы так, что если записать номер в виде пятизначного числа в двоичной нумерации, сопоставить его первому знаку слева переменную a или \bar{a} в зависимости от того, стоит ли на первом месте 1 или 0, второму знаку, аналогично, переменную b или \bar{b} , и так далее, то переводом номера будет имя ячейки. Так, число 9 в двоичной нумерации будет в этом случае иметь вид 01001; это значит, что ему соответствует ячейка $\bar{a}b\bar{c}d\bar{e}$; числу 10 соответствует ячейка

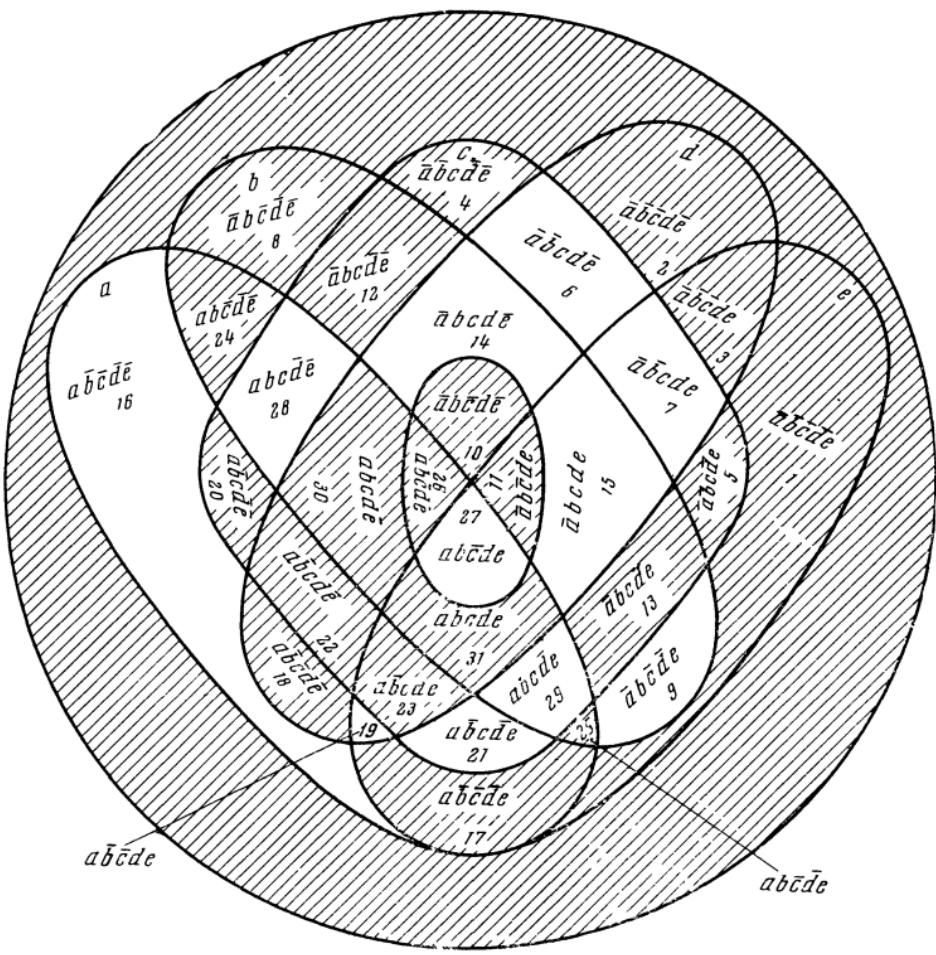


Рис. 36

01010, или $\bar{a}\bar{b}\bar{c}d\bar{e}$; наружная ячейка $\bar{a}\bar{b}\bar{c}d\bar{e}$ будет иметь номер 0, ячейка $\bar{a}\bar{b}\bar{c}d\bar{e}$ номер 1, ячейка $abcde$ — номер 11111, т. е. 31.

Если мы теперь заптрихуем все пустые в силу данной нам информации ячейки (ничего, кроме некоторого внимания, для выполнения этой операции не требуется), то вся предварительная обработка этой информации будет закончена, и ответ на поставленные выше вопросы можно будет искать на полученной картинке.

Начнем с того, что попытаемся ответить на последний из поставленных вопросов: что можно сказать о признаках A , C , D самих по себе? — Ответить на этот вопрос с помощью нашей картинки совсем не трудно, хотя и до-

вольно канительно. Действительно, с этой целью достаточно выписать сначала все восемь различных комбинаций ячеек a , c и d и их дополнений, т. е. все выражения вида $\tilde{a}\tilde{c}\tilde{d}$, где волна над буквой означает, что над нею может иметься (или не иметься) черта. А затем к каждой из этих комбинаций добавить все четыре аналогичные комбинации по буквам b , e и посмотреть по нашей диаграмме, какие из восьми различных четверок заштрихованы в ней полностью. Эти четверки дадут нам требуемый ответ, как не трудно проверить по следующей таблице (табл. 8), сличая ее строки с нашей картинкой; в результате мы получим три заштрихованные полностью четверки в строках acd , $\bar{a}cd$, $\bar{a}cd$.

Если номер в таблице помещен в квадрате, значит, соответствующая ячейка на диаграмме не заштрихована; значит, соответствующей строкой можно больше не заниматься.

Таблица 8

*	acd	$abcde$	31	$abcd\bar{e}$	30	$\bar{a}bcde$	23	$\bar{a}bcd\bar{e}$	22
	$ac\bar{d}$	\bar{abcde}	29						
	$\bar{a}cd$	\bar{abcde}	27						
	$\bar{a}\bar{c}\bar{d}$	\bar{abcde}	25	\bar{abcde}	24	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}e$	17	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}de$	16
	$\bar{a}cd$	\bar{abcde}	15						
*	$\bar{a}c\bar{d}$	\bar{abcde}	13	$\bar{abc}\bar{d}\bar{e}$	12	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}e$	5	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}$	4
*	$\bar{a}\bar{c}d$	\bar{abcde}	11	$\bar{ab}\bar{c}\bar{d}\bar{e}$	10	$\bar{ab}\bar{c}\bar{d}e$	3	$\bar{ab}\bar{c}\bar{d}\bar{e}$	2
	$\bar{a}\bar{c}\bar{d}$	\bar{abcde}	9						

Как видно из таблицы, во всех строках, кроме отмеченных звездочкой, имеются не вычеркнутые на диаграмме ячейки. Таким образом, все, что мы можем сказать о признаках A , C , D независимо от остальных признаков, состоит

в том, что

$$acd + \bar{a}c\bar{d} + \bar{a}\bar{c}d = 0;$$

или, иначе говоря, что все три признака A , C , D вместе не могут встретиться, но достаточно присутствовать признаку C (или D), чтобы один из двух остальных обязательно имел место.

Чтобы ответить на второй вопрос, можно поступить аналогично. Но только теперь, составив соответствующую таблицу (см. табл. 9), мы увидим, сличив ее с нашей диаграммой, что ни одной строки, отмеченной звездочкой, в ней нет, т. е. что на этот вопрос нужно дать отрицательный ответ: отношений, о которых в нем идет речь, нет.

Т а б л и ц а 9

bcb	$abcde$	31	$abcd\bar{e}$	30	$\bar{a}bcde$	15
$b\bar{c}\bar{d}$	$a\bar{b}cde$	29				
$b\bar{c}d$	$a\bar{b}\bar{c}de$	27				
$b\bar{c}\bar{d}$	$a\bar{b}\bar{c}\bar{d}e$	25	$a\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}$	24	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}e$	9
$\bar{b}cd$	$a\bar{b}cde$	23	$\bar{a}\bar{b}c\bar{d}\bar{e}$	22	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}de$	7
$\bar{b}c\bar{d}$	$a\bar{b}\bar{c}\bar{d}e$	21				
$\bar{b}\bar{c}d$	$a\bar{b}\bar{c}\bar{d}e$	19				
$\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	$a\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}$	17	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}$	16		

Для ответа на первый вопрос к числу посылок надо добавить еще a или классически эквивалентную ей информацию, состоящую в том, что $\bar{a} = 0$, т. е., что все ячейки, не входящие в a , пусты. Ясно, что при наличии признака A все различие возможностей для признаков B , C и D надо искать в пределах ячейки a нашей диаграммы. А в таком случае для ответа на первый вопрос нам придется только выяснить, что можно сказать относительно \tilde{b} , \tilde{c} , \tilde{d} (при наличии a) независимо от e , т. е., в применении

к каким из \tilde{bcd} пусты обе ячейки $\tilde{bc}\tilde{de}$ и $\tilde{b}\tilde{c}\tilde{d}\tilde{e}$ (из находящихся внутри a). Ответ на этот вопрос дает нам табл. 10.

Таблица 10

*	bcd	$bcde$	31	$bc\bar{d}e$	30
	bcd	$bc\bar{d}e$	29		
	$b\bar{c}d$	$b\bar{c}de$	27		
*	$b\bar{c}\bar{d}$	$b\bar{c}\bar{d}e$	25	$b\bar{c}\bar{d}\bar{e}$	24
*	$\bar{b}cd$	$\bar{b}cde$	23	$\bar{b}c\bar{d}e$	22
	$\bar{b}c\bar{d}$	$\bar{b}c\bar{d}e$	21		
	$\bar{b}\bar{c}d$	$\bar{b}\bar{c}de$	19		
	$\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	$\bar{b}\bar{c}\bar{d}e$	17	$\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}$	16

Мы видим из нее, что пусты ячейки bcd , $b\bar{c}\bar{d}$ и $\bar{b}cd$, т. е., что при наличии признака A хотя бы один из двух признаков C и D должен отсутствовать: если же, кроме A , имеется в наличии и B , то оба — и C и D — отсутствовать не могут одновременно.

Действительно, из

$$bcd + \bar{b}cd = 0$$

следует $cd = 0$, т. е. C и D несовместны друг с другом; из того же, что $b\bar{c}\bar{d} = 0$ вытекает, что, при наличии B , $\bar{c}\bar{d} = 0$, т. е. (классически) имеет место C или D .

На первый взгляд несколько труднее дать ответ на третий вопрос, особенно на вторую его (помещенную в скобки) часть. В действительности, ответить на него не более трудно, чем на остальные вопросы. Ответ дает табл. 11, из которой видно, что внутри b (при наличии признака B , иначе говоря) пусты ячейки $\bar{a}\bar{c}\bar{d}$, $a\bar{c}\bar{d}$, $\bar{a}c\bar{d}$, $\bar{a}\bar{c}d$, т. е. все три признака A , C и D не могут одновременно

Таблица 11

*	$abcd$	$abcde$	31	$ab\bar{c}d\bar{e}$	30
	$a\bar{b}cd$	$a\bar{b}c\bar{d}e$	29		
	$a\bar{b}\bar{c}d$	$a\bar{b}\bar{c}de$	27		
*	$a\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	$a\bar{b}\bar{c}\bar{d}e$	25	$\bar{a}bc\bar{d}\bar{e}$	24
	$\bar{a}bcd$	$\bar{a}bcde$	15		
*	$\bar{a}bc\bar{d}$	$\bar{a}bc\bar{d}e$	13	$\bar{a}bc\bar{d}\bar{e}$	12
*	$\bar{a}\bar{b}cd$	$\bar{a}\bar{b}cde$	11	$\bar{a}\bar{b}c\bar{d}\bar{e}$	10
	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}e$	9		
*	$a\bar{b}cd$	$a\bar{b}cde$	23	$a\bar{b}c\bar{d}\bar{e}$	22
	$a\bar{b}c\bar{d}$	$a\bar{b}c\bar{d}e$	21		
	$a\bar{b}\bar{c}d$	$a\bar{b}\bar{c}de$	19		
	$a\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	$a\bar{b}\bar{c}\bar{d}e$	17	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}$	16
	$\bar{a}\bar{b}cd$	$\bar{a}\bar{b}cde$	7		
*	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}e$	5	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}$	4
*	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}d$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}de$	3	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}$	2
*	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}e$	1	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}$	0

присутствовать, но, если какие-нибудь два из них отсутствуют, то отсутствует и третий.

Ответ на вторую часть вопроса также дают отмеченные звездочками строки табл. 11, но только теперь уже обеих ее частей: и верхней, и нижней.

Из восьми возможных различных случаев, могущих иметь место по отношению к признакам A , C , D , т. е. случаи первый, шестой и седьмой невозможны (что отмечено нами знаком «—» слева), так как из первой и девятой строк таблицы следует, что $abcd + \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} = 0$, т. е., что $acd = 0$. Аналогично из 6-ой и 14-ой строк и 7-ой и 15-ой

Таблица 12

—	1.	$a = c = d = 1,$
0	2.	$a = c = \bar{d} = 1,$
0	3.	$a = \bar{c} = d = 1,$
+	4.	$a = \bar{c} = \bar{d} = 1,$
0	5.	$\bar{a} = c = d = 1,$
—	6.	$\bar{a} = c = \bar{d} = 1,$
—	7.	$\bar{a} = \bar{c} = d = 1,$
+	8.	$\bar{a} = \bar{c} = \bar{d} = 1,$

строк получается, что $\bar{a}\bar{c}\bar{d} = 0$ и $\bar{a}\bar{c}d = 0$; в случаях 2-ом, 3-ем и 5-ом таблица не дает нам никакой информации (это отмечено знаком «0» слева), так как в соответствующих строках таблицы нет звездочки; в 4-ом случае, т. е. при наличии A и отсутствии C и D , признак B отсутствует, т. к. $a\bar{b}\bar{c}\bar{d} = 0$; в последнем (8-ом) случае, т. е. при отсутствии всех трех признаков A , C и D , признак B имеет место, т. к. $\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} = 0$ (случай 4-й, 8-й отмечены нами знаком «+» слева от таблицы). Таким образом, только в случаях 4 и 8 мы можем с уверенностью сказать, присутствует или отсутствует признак B , т. е. и на этот вопрос мы получаем полный и однозначный ответ, перечисляющий все случаи, когда из информации о наличии (или отсутствии) признаков A , C и D мы имеем возможность с уверенностью

делать заключение о том, имеется или отсутствует признак B .

В связи с задачей Буля Шрёдер ([93], стр. 527) заметил, что, хотя формулировка задачи и не содержит логического противоречия, однако в ней имеются некоторые неувязки, изобличающие задающего вопросы в том, что он говорит неправду о каких-то проведенных им «наблюдениях», поскольку в условиях задачи антецедент в посылке β ложен: случай, когда встречаются одновременно признаки A и D при отсутствии признака E , наблюдать фактически невозможно. В диаграмме Венна это замечание Шрёдера также иллюстрируется наглядно: на ней непосредственно видно, что ячейка $ad\bar{e}$, состоящая из ячеек с номерами 18, 22, 30, 26, пуста. Венн делает отсюда вывод, что задача Буля вообще плохо сформулирована: ее формулировку можно упростить, заменив посылки α , β посылками:

α') Если одновременно отсутствуют признаки A и C , то обнаруживается признак B вместе с E .

$\beta')$ Всюду, где встречаются одновременно признаки A и D , встречается и признак E .

Третью посылку менять не нужно.

Нетрудно убедиться, что этим посылкам соответствует в точности та же диаграмма, которая изображена на рис. 36, т. е., что они эквивалентны посылкам Буля, хотя значительно проще их по формулировке и не содержат уже каких-либо неувязок. Уже история одной только задачи Буля, таким образом, достаточно поучительна.

В связи с этой историей интересно также, что Венн не ограничивался каким-нибудь одним из способов решения: графическим или аналитическим, а применял оба, проверяя, таким образом, один метод другим. Он замечает при этом, что бывают случаи, когда графический метод оказывается более удобным.

В случае задачи Буля ответ на четвертый вопрос представляет собою результат исключения b и e из посылок задачи, который мы теперь получим по правилам, изложенным в § 1.2, 1.4.

С этой целью мы, прежде всего, заменим наши посылки α^1 , β^1 , γ_1^1 , γ_2^1 эквивалентным утверждением вида:

$$Xbe + Yb\bar{e} + Zb\bar{e} + U\bar{b}\bar{e} = 0,$$

а затем получим результат исключения в виде

$$XYZU = 0.$$

Эта процедура даст нам — после выполнения некоторых поглощений — для X , Y , Z , U соответственно выражения:

$$acd + \bar{a}\bar{c}d + \bar{a}cd\bar{d} + a\bar{c}\bar{d},$$

$$ac + ad + \bar{a}\bar{c} + \bar{a}\bar{d},$$

$$acd + \bar{a}\bar{c} + \bar{a}\bar{d} + \bar{c}\bar{d},$$

$$acd + \bar{a}\bar{c} + cd\bar{d} + \bar{c}d,$$

«перемножив» которые, мы получим

$$acd + \bar{a}\bar{c}d + \bar{a}cd\bar{d},$$

т. е. тот самый результат, который дала нам таблица 8.

На первый взгляд, этот алгоритм представляется значительно более легким, чем составление таблицы, но, в действительности, они требуют примерно одних и тех же «затрат».

Совершенно аналогично производится исключение a и e из наших посылок для ответа на второй вопрос задачи. Теперь коэффициентами при ae , $a\bar{e}$, $\bar{a}e$, $\bar{a}\bar{e}$ будут соответственно

$$\bar{c}\bar{d} + cd,$$

$$\bar{b}c + b\bar{c} + cd + \bar{b}d,$$

$$\bar{c}d + \bar{b}\bar{d} + cd\bar{d},$$

$$\bar{c} + \bar{d}.$$

«Перемножая» эти выражения, мы получим ноль, т. е. результат исключения имеет вид: $0 = 0$. Но это и означает в алгебре логики (см. § 1.4), что исключение невозможно. Иными словами, мы опять получили аналитически тот же результат, который дала нам таблица 9.

Для ответа на первый вопрос нужно произвести исключение e после того, как мы добавим к посылкам еще одну посылку: a , или $\bar{a} = 0$. В качестве коэффициентов при e и \bar{e} мы получим при этом (выполнив возможные поглощения):

$$a\bar{c}\bar{d} + acd,$$

$$acd + ab\bar{c} + \bar{b}cd\bar{d} + \bar{b}\bar{c}d.$$

«Перемножая» эти выражения, будем иметь

$$ab\bar{c}\bar{d} + acd,$$

т. е. при наличии A получим

$$b\bar{c}\bar{d} + cd = 0.$$

Именно этот результат дала нам таблица 10.

Аналогично можно получить ответ на первую часть третьего вопроса (мы предоставляем читателям убедиться в том, что при этом получится тот же ответ, который дала нам верхняя часть таблицы 11). Для того чтобы получить ответ на вторую часть этого вопроса, проще всего поступить так: добавить один раз к посылкам посылку b ($\bar{b} = 0$), а другой раз — \bar{b} ($b = 0$) и исключить и в том и в другом случае только e . Результат исключения и здесь даст нам то же самое, что дала таблица 11.

В качестве примеров того, что бывают случаи, когда графический метод диаграмм Венна быстрее ведет к цели, чем аналитический, Шрёдер в своей «Алгебре логики» (т. 1, стр. 572, 573) приводит следующие две задачи.

2. Задача Джевонса. Требуется упростить посылки: $a = b + c$, $b = \bar{d} + \bar{c}$, $\bar{c}\bar{d} = 0$, $ad = bcd$.

Если $a = b + c$, то все те части в b и c , которые не входят в a , должны быть вычеркнуты. Должны быть вычеркнуты также те части a , которые не входят ни в b , ни в c . Так как $b = \bar{c} + \bar{d}$, то из b нужно вычеркнуть то, что входит в c и d одновременно, а из \bar{c} и из \bar{d} все, что не входит в b . В силу $\bar{c}\bar{d} = 0$, нужно зачеркнуть вообще всю общую часть \bar{c} и \bar{d} . Наконец, так как $ad = bcd$, то значит, ad входит и в b и в c , т. е. ячейки $a\bar{b}\bar{d}$ и $a\bar{c}\bar{d}$ — пустые. Наша диаграмма имеет, следовательно, вид, изображенный на рис. 37, где может быть не пустой только ячейка $a\bar{b}\bar{c}\bar{d}$. Но так как на диаграмме изображен универсум (единица), то мы можем сказать, что этой ячейкой исчерпывается универсум, т. е., что пересечение фигур a , b , c , d равно единице. А это возможно только в том случае, когда все они равны единице, т. е. когда $a = b = c = 1$, $d = 0$.

Так как вся информация, заключенная в посылках задачи Джевонса, учтена в диаграмме на рис. 37, которой

непосредственно соответствуют равенства $a = b = c = 1$, $d = 0$, то эти равенства и дают ответ на задачу. Этот же ответ можно получить, конечно, и аналитически; в том числе и по правилам алгебры логики Шрёдера и Венна, но только более громоздко.

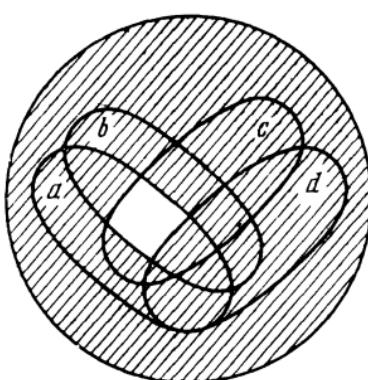


Рис. 37

Действительно, преобразуя посылки, мы получим:

$$a(\bar{b} + \bar{c}) + \bar{a}(b + c) + bcd + \bar{b}(\bar{c} + \bar{d}) + \bar{c}\bar{d} + \\ + ad(\bar{b} + \bar{c} + \bar{d}) + (\bar{a} + \bar{d})bcd = 0.$$

Левую часть этого равенства остается привести, как теперь говорят, к сокращенной дизъюнктивной нормальной форме (см., например, В. М. Глушков [7]), — что дает $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + d = 0$, т. е. уже полученный нами с помощью диаграммы ответ. Это приведение требует, однако, довольно большого числа выкладок (хотя и очень простых). [«Открыв» скобки, его можно осуществить, в частности, применив в общей сложности восемь раз закон «выявление»: $AB + \bar{A}C = AB + \bar{A}C + BC$ и 15 раз закон «поглощения»: $A + AB = A$.] К этому же результату можно прийти, конечно, и приведя просто дизъюнкцию посылок к совершенной дизъюнктивной нормальной форме, в которой не будет заведомо равен нулю только член $abcd$.

Диаграмматическое решение задачи Джевонса Шрёдер заимствовал у Венна. В связи с этой задачей Джевонса Шрёдер приводит и критические замечания Венна в адрес Джевонса, выражая при этом полное согласие с Венным. Поскольку в этих замечаниях речь идет о вопросе, много занимавшем логиков, начиная еще с Аристотеля (который

считал недопустимыми вообще в науке рассуждения с пустыми предикатами), мы здесь немного остановимся на этих замечаниях Венна. В них речь идет о том, что, вопреки Джевонсу, обнаружение пустоты некоторого «простого» класса, обозначаемого одной буквой, или его дополнения, само по себе еще никак не может рассматриваться как свидетельствующее о противоречивости посылок; что оно становится таковым только в случае, когда мы молча предполагаем, что «простой» класс не может быть пуст. Почему, однако? Ведь и Джевонс не возражает против того, что пересечение двух простых классов a , b (т. е. класс ab) может быть пусто. Но чем отличаются классы a и b от класса ab ? Чем отличается «простой» класс от пересечения двух или большего числа классов? И Венн говорит, что введение таких ограничений на «простые» классы, т. е. на классы, обозначаемые одной буквой или буквой с чертою, является «самоубийством» для символической логики (Венн, [105], стр. 148; [106], стр. 165). Об этом же он пишет еще раз в [105] на стр. 162 (в [106] на стр. 181).

То обстоятельство, что Джевонс считает всякое выскакивание, из которого следует пустота какого-нибудь «простого» класса или его дополнения, противоречивым, Шрёдер квалифицирует как «фундаментальную ошибку», Джевонса и сочувственно цитирует в этой связи слова Венна о «самоубийственности» такого подхода к символической логике (Шрёдер [93], стр. 671).

Мы знаем теперь, конечно, что формализовать можно и аристотелеву логику, определив достаточно точно «простые» (элементарные) предикаты, на которые наложено требование непустоты (см., например, Я. Лукасевич, [21]). Если, однако, понятие «простого» класса не уточняется, то и в наше время с критикой Венна можно только согласиться.

3. Задача из статьи Венна «О диаграмматическом и механическом представлении предложений и рассуждений» ([102], стр. 15).

Требуется упростить посылки:

- I. $y \subset x\bar{z} + \bar{x}z$,
- II. $wy \subset xz + \bar{x}\bar{z}$,
- III. $xy \subset w + z$,
- IV. $yz \subset x + w$

(\subset — знак включения одного класса в другой).

«Класс A включен в класс B », $A \subset B$, — это значит, что класс, представляющий пересечение классов A и \bar{B} , пуст, $A\bar{B} = 0$. На диаграмме включение класса A в класс B обозначается штриховкой (т. е. указателем пустоты) ячейки, соответствующей $A\bar{B}$ (рис. 23).

Возьмем в качестве A класс y , в качестве B класс $x\bar{z} + \bar{x}z$. Тогда на диаграмме (рис. 38) в фигуре, соответствующей классу y , пусты все ячейки, не являющиеся подъячейками фигуры, изображающей класс $x\bar{z} + \bar{x}z$ (на рис. 38 в заштрихованных ячейках поставлен номер посылки — I).

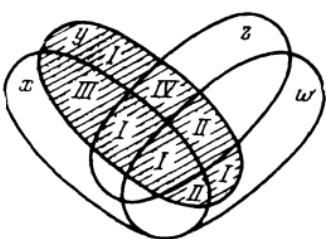


Рис. 38

Аналогично поступаем с остальными посылками.

В результате получаем диаграмму (рис. 38), на которой фигура, обозначающая класс y , полностью заштрихована. Следовательно, посылки I—IV эквивалентны предложению: $y = 0$.

4. Задача об уставе клуба. Этой задачей Венн ([105], стр. 261—264; [106], стр. 331—334) начинает главу, посвященную разнообразным примерам, с помощью которых он хочет разъяснить начинающим трудные для них абстрактные принципы символической логики, и поэтому подробно ее разбирает.

В задаче требуется обсудить с точки зрения их непротиворечивости и простоты следующие правила клубного устава:

1. Финансовый комитет должен избираться из состава общего комитета.

2. Никто из членов библиотечного комитета не может быть в финансовом комитете.

3. Никто не может быть членом общего и библиотечного комитетов одновременно, если он не входит также и в финансовый комитет.

Венн вводит переменные: x — члены финансового, y — библиотечного и z — общего комитетов, и записывает правила в виде:

- (1) Все x суть z .
- (2) Все yz суть x .
- (3) Никакие x не суть y .

В символической форме он получает:

- (1) $x\bar{z} = 0$,
- (2) $\bar{x}yz = 0$,
- (3) $xy = 0$.

Далее он замечает, — уже в применении к любым посылкам, — что, если какая-нибудь посылка непосредственно противоречит какой-нибудь другой или же повторяет ее, то противоречивость или избыточность такой системы нетрудно заметить. Но бывает так, что нужно еще проанализировать посылки, чтобы это обнаружить. Этот анализ, несколько подробнее разобранный нами, Венн осуществляет так:

После того как посылки приведены к нулевой форме, он «умножает» каждое слагаемое этой формы на все выражения вида $(a + \bar{a})$, где a — переменная, не входящая в это слагаемое, и затем «открывает скобки». Если при этом оказывается, что в посылках имеются все вообще возможные члены универсума, т. е., что «складывая» посылки, мы получим $1 = 0$, то это свидетельствует об их противоречивости. Наоборот, если хотя бы один член отсутствует, то этого уже достаточно для того, чтобы сказать, что система непротиворечива (так как, сделав отсутствующий член равным единице, мы сделаем все остальные равными нулю). Если в разных посылках обнаруживаются одинаковые члены, то мы приходим к заключению об избыточности посылок.

В нашей задаче такой анализ посылок даст нам:

$$\begin{aligned} xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} &= 0, \\ \bar{x}yz &= 0, \\ xyz + xy\bar{z} &= 0. \end{aligned}$$

И мы видим, что из восьми различных возможных членов в посылках имеются только четыре, т. е. система непротиворечива. В то же время в первой и третьей посылках есть общий член xyz , т. е. система избыточна. Этот

член, например, из последней посылки, можно устранить, т. к. в силу первой он равен нулю, и мы получим эквивалентную первоначальной систему посылок:

$$\begin{aligned} xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} &= 0, \\ \bar{x}yz &= 0. \\ xyz &= 0. \end{aligned}$$

Объединяя две последние и используя то, что

$$\bar{x}yz + xyz = yz,$$

Венн получает (возвращаясь к первоначальной форме первой посылки) для правил устава упрощенную форму

$$\begin{aligned} x\bar{z} &= 0, \\ yz &= 0. \end{aligned}$$

Иными словами, ответ Венна гласит:

Правила устава непротиворечивы, но их можно упростить,— вместо трех написать два:

1. Финансовый комитет должен избираться из состава общего комитета.

2. Никто из членов библиотечного комитета не может быть в общем комитете.

Метод анализа посылок, использованный здесь Венном, очень удобен и для решения задачи с помощью его диаграмм. На соответствующей диаграмме (рис. 39) видно,

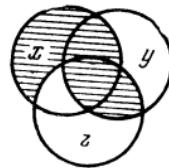


Рис. 39

что заштрихованная область образует класс $x\bar{z} + yz$, т. е. в символической форме: $x\bar{z} + yz = 0$ или $x\bar{z} = 0$, $yz = 0$, что совпадает с полученным выше ответом.

Эту задачу,— особенно, если сформулировать ее как требование упростить систему посылок,— можно решить, конечно, и проще. Так, Шрёдер ([93], стр. 541) приводит следующее решение: он записывает посылки в виде одного уравнения

$$x\bar{z} + \bar{x}yz + xy = 0$$

и, применив законы выявления и поглощения, получает сначала

$$x\bar{z} + yz + xy = 0,$$

а потом

$$x\bar{z} + yz = 0$$

(член xy получается с помощью «выявления»). Однако вопрос о критерии избыточности посылок при этом остается неуточненным.

5. Задача о провалившихся на экзамене. Это — задача Венна, помещенная у него за номером 5 в главе 13 [106] содержащей разнообразные примеры.

Условия задачи гласят:

Множество провалившихся на некотором экзамене оказалось в точности состоящим из мальчиков, сдававших греческий язык, и девочек, сдававших латынь. Требуется дать полное описание всех сдававших мальчиков в остальных терминах, употребляемых в условии.

Венн обозначает: x — класс сдававших латынь, z — класс сдававших греческий, w — класс мальчиков, \bar{w} — класс девочек (за универсум принят класс всех сдававших), y — класс провалившихся.

Условие задачи состоит при этом в том, что $y = x\bar{w} + zw$, и требуется определить из него w . В нулевой форме это условие дает $x\bar{y}\bar{w} + \bar{y}zw + \bar{x}yw + y\bar{z}w = 0$, или $(\bar{y}z + y\bar{z})w + (x\bar{y} + \bar{x}y)\bar{w} = 0$.

Решение этой задачи по Шрёдеру дает в качестве необходимого и достаточного условия ее разрешимости $(\bar{y}z + y\bar{z})(x\bar{y} + \bar{x}y) = 0$, или $x\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} = 0$, а в качестве решения $w = (x\bar{y} + \bar{x}y)\bar{u} + (yz + \bar{y}\bar{z})u$, или в другой форме $w = x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + u(xyz + \bar{x}\bar{y}\bar{z})$.

Диаграмма же Венна для этого условия имеет вид, показанный на рис. 40, т. е. дает $w = x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + uxxyz + u\bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

В связи с этим Венн ставит вопрос о том, как следует интерпретировать на диаграмме неопределенный знак u (у самого Венна $\frac{0}{0}$), фигурирующий в решении задачи. В ответ на этот вопрос Венн пишет: «Уделим некоторое внимание диаграмматическому истолкованию символа $\frac{0}{0}$. Когда мы смотрим на четыре сохраняющихся класса,

образующих фигуру w , то можем подумать, что все они находятся на одном и том же уровне достоверности и что в них нет ничего соответствующего строгому различию, представленному символически через

$$w = x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \frac{0}{0} xyz + \frac{0}{0} \bar{x}\bar{y}\bar{z}.$$

Но размышления скоро выявляют это различие. Два первых класса могут быть полностью описаны в терминах x ,

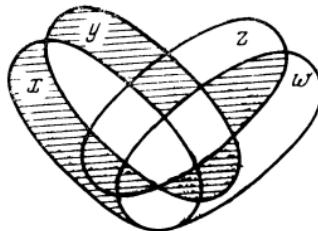


Рис. 40

y и z . Два последних не могут быть так описаны без употребления w . Но как так w и есть как раз тот самый термин, который требуется определить, то включение его в определение эквивалентно отсутствию определения вообще. Мы можем сделать вид, что даем определение, написав

$$w = x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + wxyz + w\bar{x}\bar{y}\bar{z},$$

но такой способ избежать неопределенности во всяком случае обманчив. Этот класс w поэтому содержит целые классы $x\bar{y}\bar{z}$ и $\bar{x}yz$ и «часть» классов xyz и $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$. Okажется ли эта «часть» или «некоторые» на самом деле целым или только частью, или даже пустой, будет зависеть от обстоятельств ([106], стр. 339, 340).

Мы видим, таким образом, что Венин дает диаграмматическое истолкование и тому аналитическому способу решения логических уравнений, который изложен у него и Шрёдера.

6. Задача о девицах. Остановимся на диаграммическом решении задачи из работы Порецкого ([28], стр. 212, 213, 275—278, 302).

«Относительно девиц, бывших на данном бале, даны следующие 14 посылок: 1) каждая из девиц была или благоспитанна, или весела, или молода, или красива; 2) когда

начались танцы, то оказалось, что все нетанцующие девицы были некрасивы, и что каждая из танцующих была или молода, или весела, или благовоспитанна; 3) в другой момент, когда все пожилые девицы образовали отдельный кружок, о каждой из прочих девиц можно было сказать, что она или красива, или весела, или благовоспитанна; 4) если выделить всех девиц немолодых и некрасивых, то останутся только благовоспитанные и веселые девицы; 5) если же выделить всех девиц невеселых, то останутся благовоспитанные, молодые и красивые; 6) таких девиц, которые, обладая молодостью и веселостью, не обладали бы в то же время ни красотой, ни благовоспитанностью, на балу не было вовсе; 7) между молодыми девицами не было таких, которые, обладая красотой и веселостью, были бы не благовоспитанны; 8) каждая благовоспитанная девица была или молода, или весела, или красива; 9) все девицы, соединяющие красоту с благовоспитанностью, были одни веселы, другие молоды; 10) каждой невеселой девице не доставало или молодости, или красоты, или благовоспитанности; 11) все те веселые девицы, которые, не отличаясь молодостью, обладали благовоспитанностью, были красивы; 12) немолодые девицы были одни не благовоспитанны, другие не веселы, трети не красивы; 13) между некрасивыми девицами не было таких, которые с благовоспитанностью соединяли бы молодость и веселость; наконец, 14) когда уехали все неблаговоспитанные, все немолодые, все невеселые и все некрасивые девицы, никаких девиц на балу более не осталось.— Узнать, прежде всего, возможна ли подобная сложная задача? Нет ли между ее посылками противоречий? Если окажется, что задача возможна, то описать точным образом весь мир девиц бала и определить отношение между различными категориями этих девиц...

Пусть a —благовоспитанные, b —веселые, c —молодые, d —красивые девицы бала. Посылки суть: 1) $1 = a + b + c + d$; 2) $1 = a + b + c + \bar{d}$; 3) $1 = a + b + \bar{c} + d$; 4) $1 = a + b + \bar{c} + \bar{d}$; 5) $1 = a + \bar{b} + c + d$; 6) $0 = \bar{a}bcd$, или $1 = a + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}$; 7) $0 = \bar{a}bcd$, или $1 = a + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}$; 8) $a = a(b + c + d)$, или $1 = \bar{a} + b + c + d$; 9) $ad = ad(b + c)$, или $1 = \bar{a} + b + c + \bar{d}$; 10) $\bar{b} = \bar{b}(\bar{a} + \bar{c} + \bar{d})$, или $1 = \bar{a} + b + \bar{c} + \bar{d}$; 11) $ab\bar{c} = ab\bar{c}d$,

или $1 = \bar{a} + \bar{b} + c + d$; 12) $\bar{c} = \bar{c}(\bar{a} + \bar{b} + \bar{d})$, или $1 = \bar{a} + \bar{b} + c + \bar{d}$; 13) $abcd = 0$, или $1 = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + d$; 14) $1 = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}$.

Задачу Порецкий решает аналитически. Система посылок избыточна. Перемножая все посылки, записанные в виде $1 = A_i (i = 1, \dots, 14)$, он получает $1 = A$; справа от знака равенства стоит выражение A , отличное от

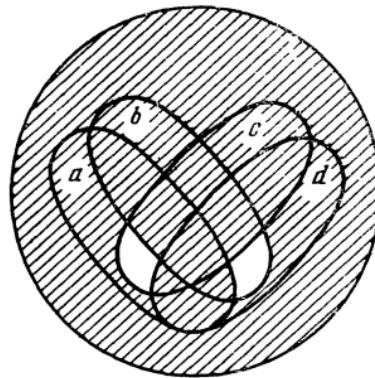


Рис. 41

тождественного нуля; в этом и только в этом случае система посылок $1 = A_i (i = 1, \dots, m; A_i — \text{сумма (дизъюнкция) произведений (конъюнкций) некоторых из данных классов } a_1, \dots, a_n \text{ и их дополнений})$ непротиворечива. Порецкому пришлось перемножать выражения вида $1 = B, 1 = C$ друг на друга не менее 27 раз (см. [28], стр. 212).

Более просто вопрос об упрощении системы посылок, а, следовательно, и вопрос об их непротиворечивости, может быть решен с помощью диаграммы Венна, построенной на рис. 41. Например, в восьмой посылке говорится, что непустыми могут быть только ячейки, принадлежащие хотя бы одному из следующих классов: \bar{a}, b, c , или d ; следовательно, ячейка, не принадлежащая ни одному из этих классов (т. е. ячейка $\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$) пуста (этую же ячейку можно вычеркнуть, не преобразуя предварительно $a = a(b + c + d)$ к виду $1 = \bar{a} + b + c + d$). На диаграмме не заштрихованы только две ячейки: $a\bar{b}\bar{c}\bar{d}$ и $\bar{a}\bar{b}\bar{c}d$. Поэтому система из 14 посылок эквивалентна выражению

$$1 = a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d$$

(что совпадает с полученным Порецким ответом).

Таким образом, поставленная задача вполне возможна, а всех девиц бала можно разбить на две группы:

1) девицы, которые, будучи благовоспитаны и молоды, не были ни веселы, ни красивы;

2) девицы, которые, будучи веселы и красивы, не были ни благовоспитаны, ни молоды.

К этой задаче мы вернемся в приложении, где определим отношения между различными категориями девиц, присутствующих на балу.

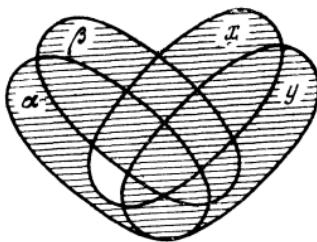


Рис. 42

7. Теорема Гаубера. На стр. 41 нами рассматривается теорема Гаубера. Докажем ее графически.

Дано: $\alpha\beta = 0$, $y\bar{\beta} = 0$, $x\bar{\alpha} = 0$, $\alpha + \beta = x + y$.

Тогда $\alpha\bar{x} = 0$, $\beta\bar{y} = 0$, $xy = 0$.

В силу условия классы $\alpha\beta$, $y\bar{\beta}$, $x\bar{\alpha}$ на диаграмме четырех переменных α , β , x , y (рис. 42) пусты; классы $\alpha + \beta$ и $x + y$ графически совпадают, т. е. часть класса $x + y$, не принадлежащая $\alpha + \beta$, и часть класса $\alpha + \beta$, не принадлежащая $x + y$, пусты (рис. 42). На диаграмме видно, что классы $\alpha\bar{x}$, $\beta\bar{y}$, xy пусты (заштрихованы), что и требовалось показать.

8. О выводе логических следствий. Примеры вывода следствий из посылок уже встречались выше. Разберем еще два: один из работы Венна [106], другой — Порецкого [28].

Пример 1.

Посылки:

(a) Все x суть или y и z , или не- y .

(б) Если какие-нибудь xy суть z , то они суть w .

(в) Никакие wx не суть yz .

Следствие:

Никакие x не суть y .

В посылках — четыре различных класса: x , y , z , w . Поэтому плоскость делится не менее, чем на 2^4 ячеек, (на рис. 43 плоскость разбита на 16 ячеек с помощью четырех эллипсов).

Из первой посылки следует, что все элементы класса x заключены или в классе yz , или находятся вне класса y ,

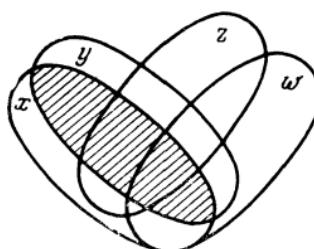


Рис. 43

т. е. часть класса x , принадлежащая y и не принадлежащая z (не зависимо от того, принадлежит она w или нет), пуста. На диаграмме (рис. 43) заштрихованы ячейки $xy\bar{z}w$ и $xy\bar{z}\bar{w}$.

Во второй посылке говорится о том, что все элементы класса xy , принадлежащие классу z , заключены в классе w , т. е. класс $xyz\bar{w}$ пуст (на рис. 43 соответствующая ячейка заштрихована).

В третьей посылке утверждается, что класс xyw пуст. На диаграмме (рис. 43) ячейка xyw заштрихована.

В результате получаем, что на рис. 43 ячейка xy полностью заштрихована, т. е., что «Никакие x не суть y ».

Следует подчеркнуть, что этот пример решается нами в отличие от Венна графически (даже посылки не переписываем предварительно в аналитической форме).

У Венна диаграммы используются только для геометрической иллюстрации результата аналитических преобразований. Мы показываем, что все преобразования можно проводить на диаграммах (без использования аналитического аппарата). Иногда, разумеется, удобно использовать комбинированный метод — сочетание аналитического и графического.

Этот комбинированный метод опишем подробнее на примере решения следующей задачи Порецкого (при этом рассматривается только часть логики классов, описывае-

мая полностью на языке формул исчисления высказываний).

Пример 2.

Дана система равенств:

$$\left. \begin{array}{l} a = ab, \\ a = a + c. \end{array} \right\} \quad (1.20)$$

Требуется доказать:

1) Система (1.20) эквивалентна (в терминологии Порецкого — «тождественна») уравнению

$$a = ab + \bar{a}c \quad (1.21)$$

(дополнение Порецкий в разных работах обозначает по-разному, так, в [28], как и Шрёдер в [93], он пишет a_1 , а не \bar{a}).

2) Из (1.20) следует уравнение

$$a = b(a + c), \quad (1.22)$$

но не обратно. Порецкий в этом случае говорит, что система (1.20) «равнозначна с равенством» (1.22).

Формулу (1.21) Порецкий называет «полным», а формулу (1.22) «точным» определением a .

Первый шаг комбинированного метода состоит в представлении информации, содержащейся в условиях задачи, в виде равенств типа $A = 0$.

Так как равенство $A = B$ эквивалентно равенству

$$A\bar{B} + \bar{A}B = 0,$$

то (1.20), (1.21) и (1.22) перепишем в виде:

$$\left. \begin{array}{l} a(\bar{a}b) + \bar{a}ab = 0, \\ a(\bar{a} + c) + \bar{a}(a + c) = 0, \end{array} \right\} \quad (1.23)$$

$$a(\bar{a}b + \bar{a}c) + \bar{a}(ab + \bar{a}c) = 0, \quad (1.24)$$

$$a(\bar{b}(a + c)) + \bar{a}b(a + c) = 0. \quad (1.25)$$

На втором шаге равенства типа $A = 0$ преобразуются в равенства типа $C = 0$ (эквивалентным образом), где C есть сумма произведений, членами которых являются буквы, обозначающие графически различные классы (заданные в условии задачи), и буквы с чертой, обозначающие дополнения соответствующих классов (при этом пред-

полагается, что в каждое слагаемое каждая из букв может входить только один раз, с чертой или без черты), т. е. C есть аналог дизъюнктивной нормальной формы в исчислении высказываний. Преобразование A в C можно проводить по известным правилам логики классов, а также на диаграммах, предварительно определив соответствующие операции над ними. На последнем мы не будем останавливаться, т. к. в следующей главе изучаются операции над диаграммами Венна в исчислении высказываний.

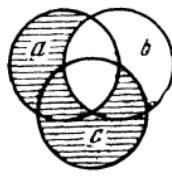


Рис. 44

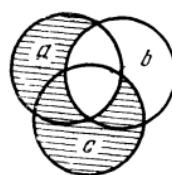


Рис. 45

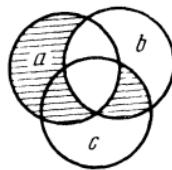


Рис. 46

После преобразований получаем диаграммы: диаграмма на рис. 44 соответствует объединению (сумме) уравнений системы (1.23), на рис. 45 — уравнению (1.24), на рис. 46 — уравнению (1.25).

Будем говорить, что диаграмма \mathfrak{U} является следствием диаграммы \mathfrak{V} тогда и только тогда, когда все незаштрихованные ячейки диаграммы \mathfrak{V} не заштрихованы и на диаграмме \mathfrak{U} . Предполагаем при этом, что число переменных на диаграмме \mathfrak{U} совпадает с числом переменных на диаграмме \mathfrak{V} .

Диаграммы \mathfrak{U} и \mathfrak{V} называем равными тогда и только тогда, когда \mathfrak{U} является следствием \mathfrak{V} , а \mathfrak{V} является следствием \mathfrak{U} . (Для сравнения см. аналогичные понятия в следующих главах.)

Нетрудно показать, что система равенств S логически следует из системы равенств T тогда и только тогда, когда диаграмма, соответствующая системе S , является следствием диаграммы, соответствующей системе T .

Аналогично легко убедиться, что две системы равенств S и T эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие им диаграммы равны.

В задаче Порецкого диаграммы на рис. 44 и 45 равны, а диаграмма рис. 46 является следствием диаграммы на рис. 44, но не обратно. Поэтому система (1.20) эквивалентна уравнению (1.21), а уравнение (1.22) логически следует из системы (1.20).

Вспомним, наконец, пример Венна, рассмотренный нами на стр. 53 (§ 1.4). Посмотрим диаграмму (рис. 47), соответствующую уравнению

$$w(1 - xz - y\bar{z})(1 - yz - x\bar{y}) = \bar{x}z,$$

которым символически выражается по Венну условие этой задачи. На диаграмме видно, что в классе w могут быть не пусты только ячейки $\bar{x}y\bar{z}$, x и $\bar{x}y\bar{z}$, через которые, как мы уже знаем, выражается w при условии $\bar{x}yz = 0$.

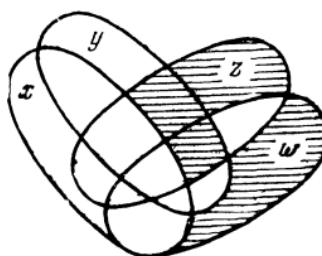


Рис. 47

9. Графический метод решения логических уравнений. Выше мы имели примеры соответствия между диаграммами Венна и логическими уравнениями: по заданному логическому уравнению строили соответствующую ему диаграмму Венна, и, наоборот, по известной диаграмме Венна находили соответствующее ей логическое уравнение.

Покажем, что на диаграмме, соответствующей логическому уравнению относительно неизвестной a_i , можно увидеть как условие разрешимости уравнения, так и общий вид его решения.

Пусть D — диаграмма Венна, соответствующая заданному логическому уравнению \mathcal{U} . Будем предполагать, что на диаграмме D по крайней мере одна ячейка заштрихована — в противном условие задачи, записанное на языке логического уравнения \mathcal{U} , содержит противоречие: из него можно вывести равенство $1 = 0$. Пусть a_1, \dots, a_n — все графически различные переменные диаграммы D ; требуется разрешить уравнение \mathcal{U} относительно неизвестной a_i .

Каждой ячейке диаграммы D можно поставить в соответствие произведение (конъюнкцию), в которое не входит

a_i (и \bar{a}_i):

$$\tilde{a}_1 \dots \tilde{a}_{i-1} \tilde{a}_{i+1} \dots \tilde{a}_n, \quad (1.26)$$

\tilde{a}_j есть a_j , если ячейка принадлежит классу a_j , и \tilde{a}_j есть \bar{a}_j , если ячейка принадлежит дополнению класса a_j ($j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$); $\tilde{a}_1 \dots \tilde{a}_{i-1} \tilde{a}_{i+1} \dots \tilde{a}_n$ эквивалентно $\tilde{a}_1 \dots \tilde{a}_{i-1} a_i \tilde{a}_{i+1} \dots \tilde{a}_n + \tilde{a}_1 \dots \tilde{a}_{i-1} \bar{a}_i \tilde{a}_{i+1} \dots \tilde{a}_n$.

На диаграмме D можно выделить ячейки как принадлежащие, так и не принадлежащие a_i . Уравнение \mathfrak{Y} эквивалентно строящемуся по диаграмме D уравнению:

$$Ha_i + G\bar{a}_i = 0, \quad (1.27)$$

где H и G — суммы произведений вида (1.26), определяемых по всем запятыханным ячейкам классов a_i и \bar{a}_i соответственно.

Например, диаграмме рис. 40 соответствует уравнение

$$(\bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}z + xy\bar{z})w + (\bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z)\bar{w} = 0 \quad (1.28)$$

(в классе w запятыханы ячейки с номерами 0011, 0101, 1011 и 1101, а в классе \bar{w} — 0100, 0110, 1000 и 1010; переменные диаграммы рассматриваем в порядке x, y, z, w).

Уравнение (1.27) разрешимо тогда и только тогда, когда $HG = 0$ (см. § 1.2, 1.4).

Условие $HG = 0$ эквивалентно равенству $R = 0$, где R — сумма произведений вида (1.26), которые пишутся по всем тем запятыханным ячейкам фигуры a_i , соседние которых относительно a_i также запятыханы.

Ячейки, соответствующие $\tilde{a}_1 \dots \tilde{a}_{i-1} a_i \tilde{a}_{i+1} \dots \tilde{a}_n$ и $\tilde{a}_1 \dots \tilde{a}_{i-1} \bar{a}_i \tilde{a}_{i+1} \dots \tilde{a}_n$, будем называть соседними относительно фигуры (класса) a_i . Двоичные n -значные номера двух соседних между собою относительно a_i ячеек отличаются только тем, в одном на i -м месте находится единица, в другом — нуль.

Например, $\bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}z = 0$ — необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения относительно w , которому соответствует диаграмма на рис. 40 (на диаграмме пары ячеек с номерами 0101, 0100 и 1011, 1010 запятыханы).

Действительно, пусть $HG = 0$. Предположим, что неверно $R = 0$. Тогда существует j ($j = 1, \dots, k$) такое,

что неверно ($R_j = 0$ (R_1, \dots, R_k — произведения вида (1.26), написанные по всем заштрихованным ячейкам фигуры a_i , соседние которых относительно a_i также заштрихованы, т. е. $R_1 + \dots + R_k$ есть R). Следовательно, так как R_j входит в H и в G , неверно, что $H = 0$ и что $G = 0$, а это противоречит тому, что $HG = 0$. Таким образом, если $HG = 0$, то $R = 0$.

Наоборот, если $R = 0$, то $H = 0$ или $G = 0$ (т. к. все общие члены сумм H и G , и только они, являются слагаемыми R), т. е. $HG = 0$.

Как показано в § 1.2 и 1.4, решение уравнения (1.27) можно представить в виде

$$a_i = \bar{H}G + u\bar{H}\bar{G} \quad (1.29)$$

при условии $HG = 0$, где u — произвольный класс.

На диаграмме D в класс $\bar{H}G$ входят:

(1) незаштрихованные ячейки класса a_i , соседние которых относительно a_i заштрихованы, и

(2) заштрихованные ячейки из \bar{a}_i , соседние которых относительно a_i не заштрихованы, т. е. $\bar{H}G$ эквивалентно Q , где Q — сумма произведений вида (1.26), написанных по всем незаштрихованным ячейкам класса a_i , соседние которых относительно a_i заштрихованы.

Аналогично, $\bar{H}\bar{G}$ эквивалентно S , где S — сумма произведений вида (1.26), написанных по всем незаштрихованным ячейкам класса a_i , соседние которых относительно a_i не заштрихованы.

Следовательно, равенство (1.29) эквивалентно равенству

$$Q_i = Q + uS, \quad (1.30)$$

где u — произвольный класс, Q — сумма произведений вида (1.26), написанных по всем незаштрихованным ячейкам из a_i , соседние которых относительно a_i заштрихованы, S — сумма произведений вида (1.26), написанных по всем незаштрихованным ячейкам из a_i , соседние которых относительно a_i не заштрихованы.

Таким образом, решение уравнения (1.27) относительно a_i можно представить в виде (1.30) при условии $R = 0$, где R — сумма произведений вида (1.26), написанных по всем заштрихованным ячейкам из a_i , соседние которых относительно a_i заштрихованы. Результат подстановки

$Q + uS$ вместо a_i в равенство (1.27) эквивалентен, при $R = 0$, тождеству $0 = 0$.

Следует обратить внимание на то, что равенство

$$a_i = Q + uS$$

не эквивалентно уравнению (1.27) ни при каких значениях u . В самом деле, равенство $a_i = Q + uS$ эквивалентно

$$\bar{Q}(\bar{S} + \bar{u})a_i + (Q + Su)\bar{a}_i = 0, \quad (1.31)$$

где класс $\bar{Q}\bar{S}a_i$ охватывает все заштрихованные ячейки уравнения (1.27), принадлежащие a_i , в класс $Q\bar{a}_i$ входят все заштрихованные ячейки из \bar{a}_i , определяемые (1.27), и соседние относительно a_i ячейки которых не пусты. В зависимости от класса u равенство (1.31) может определять пустые ячейки, пустота которых не следует из (1.27).

Существуют такие классы, например, класс a_i , после подстановки которых вместо u из (1.31) получаем равенство, объединение которого с $R = 0$ эквивалентно (1.27).

Вернемся к диаграмме рис. 40. В классе w не заштрихованы ячейки с номерами 0001, 1111, 0111, 1001, соседние относительно w последних двух ячеек заштрихованы. Поэтому выражение класса w через классы x, y, z — при условии $\bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}z = 0$ — имеет вид:

$$w = \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + u(\bar{x}\bar{y}\bar{z} + xyz), \quad (1.32)$$

где u — произвольный класс (что совпадает с ответом задачи о провалившихся на экзамене).

Сделаем проверку. В (1.28) вместо w подставим правую часть равенства (1.32):

$$\begin{aligned} & (\bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xyz)(\bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + \\ & + u(\bar{x}\bar{y}\bar{z} + xyz)) + (\bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z) \times \\ & \times (\bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}z + xyz + u(\bar{x}\bar{y}\bar{z} + xyz)) = 0, \end{aligned}$$

после раскрытия скобок получаем

$$\bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}z = 0,$$

т. е. условие разрешимости уравнения (1.28). Приведем

(1.32) к нулевой форме

$$(\bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z} + u(\bar{x}\bar{y}\bar{z} + xyz))\bar{w} + \\ + (\bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}z + xy\bar{z} + \bar{u}(\bar{x}\bar{y}\bar{z} + xyz))w = 0. \quad (1.33)$$

Полученное равенство не эквивалентно (1.28) и не является его следствием. Вместо u в (1.33) подставим w , получим равенство $(\bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}z + xy\bar{z})\bar{w} + (\bar{x}yz + x\bar{y}\bar{z})w = 0$, которое вместе с $\bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}z = 0$ эквивалентно (1.28).

10. Исключение неизвестных. С примерами исключения неизвестных с помощью диаграмм Венна мы уже встречались в задаче Буля. Остановимся теперь на общем методе такого исключения. На диаграммах Венна получаем ответ на оба вопроса:

- 1) возможно ли исключение,
- 2) если возможно, то каков его результат.

Для описания графического метода исключения переменных удобнее воспользоваться табличным представлением диаграмм Венна.

На одной стороне таблицы (для определенности возьмем левую сторону) расположим только имена классов (и их дополнений), которые требуется исключить. Тогда, если в построенной диаграмме будут полностью заптрихованные столбцы, то на первый вопрос можно дать положительный ответ: указанные в условии задачи классы могут быть исключены. Если же на диаграмме нет полностью заптрихованных столбцов, то ответ на первый вопрос будет отрицательным: указанные в условии задачи классы не исключаются.

В первом случае (когда ответ на первый вопрос положителен) результат исключения пишется по всем заптрихованным столбцам, в имена которых не включаются классы, обозначенные на левой стороне таблицы Венна. Этот метод продемонстрируем на примере ([106], стр. 374).

Дано:

$$\begin{aligned} x\bar{z}(\bar{u} + wy + \bar{w}\bar{y}) &= 0, \\ uxw(y\bar{z} + \bar{y}z) &= 0, \\ x(u + y)(zw + \bar{z}\bar{w}) &= 0, \\ (\bar{x} + \bar{u}\bar{y})(z\bar{w} + \bar{z}w) &= 0. \end{aligned}$$

Требуется исключить u и y , а затем определить x .

Задачу Венн решает графически: строится диаграмма, описывающая заданную систему уравнений (рис. 48); выделяются все пустые классы, не содержащие u и y ; такими пустыми классами оказываются xzw , $\bar{x}z\bar{w}$ и $\bar{x}\bar{z}w$; следовательно, результат исключения u и y записывается в виде уравнения

$$xzw + \bar{x}z\bar{w} + x\bar{z}w = 0.$$

Разрешая полученное уравнение относительно x , Венн получает

$$x = z\bar{w} + \bar{z}w + v\bar{z}\bar{w}$$

(на диаграмме видно, что в классе x могут быть непустыми ячейки $z\bar{w}$, $\bar{z}w$, $\bar{z}\bar{w}$).

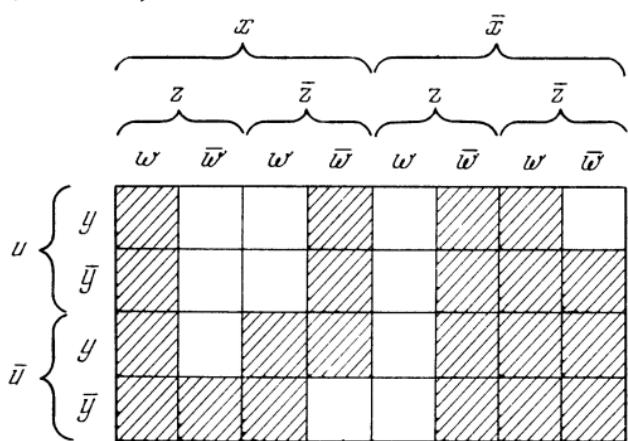


Рис. 48

Во втором издании книги «Символическая логика» Венн привел пример исключения неизвестных из системы, содержащей неравенства (соответствующие частным суждениям). Этот пример он решает с помощью диаграмм ([106], стр. 375).

Дано:

$$\begin{cases} x = \bar{c}y + e\bar{y}, \\ z \neq c\bar{w} + \bar{e}w. \end{cases} \quad (1.34)$$

Требуется установить отношение между x , y , z , w после исключения c и e .

Преобразуя равенства вида $A = B$ в $A\bar{B} + \bar{A}B = 0$, а неравенства вида $A \neq B$ в $A\bar{B} + \bar{A}B > 0$, Венн из

(1.34) получает

$$\begin{aligned}x(cy + \bar{ey}) + (\bar{cy} + e\bar{y})\bar{x} &= 0, \\z(\bar{c}\bar{w} + ew) + (cw + \bar{ew})\bar{z} &> 0.\end{aligned}$$

В посылках (1.34) находятся одно универсальное и одно частное суждения. В этом случае в классах, которые могут быть непустыми, Венн ставит звездочки, предполагая, что, по крайней мере, один из отмеченных классов не пуст. Условия (1.34) Венн выражает диаграммой, которая показана на рис. 33. Из этой диаграммы следует:

1. Не существует ни одного полностью заштрихованного столбца, т. е. соотношение между x, y, z, w нельзя записать в виде равенства.

2. Существуют классы, в имена которых не входят буквы *c* и *e*, но объединение которых содержит все звездочки рассматриваемой диаграммы; такими классами являются $xz, \bar{x}\bar{z}, yw, \bar{y}\bar{w}$. Следовательно, результатом исключения переменных *c* и *e* из (1.34) служит неравенство:

$$xz + \bar{x}\bar{z} + yw + \bar{y}\bar{w} > 0.$$

Аналогичный ответ можно получить по формулам (1.19), исключая переменные последовательно, например, сначала *c*, потом *e*.

В этом примере Венн ограничился системой, в которую входит только одно неравенство. Если число неравенств в системе увеличить, то между звездочками, соответствующими одному неравенству, должна быть установлена связь, с помощью которой они графически отличаются от звездочек, выражающих другие неравенства. Это следует из того, что для каждого неравенства по крайней мере один из отмеченных классов (соответствующих данному неравенству) не пуст.

Последователи Венна соединяют все звездочки, соответствующие одному частному суждению, прямыми, получая одну ломаную (иногда, как в [23], звездочки совсем опускают).

Например, истинность модуса *disamis*:

Некоторые *M* суть *P*.

Все *M* суть *S*

Некоторые *S* суть *P*.

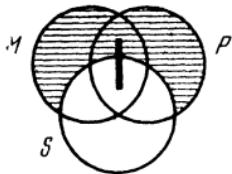


Рис. 49

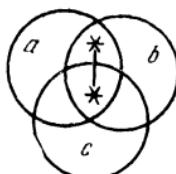


Рис. 50

С. Лущевская-Романова [23] проверяет с помощью диаграммы, показанной на рис. 49; Э. Беркли [1] многозначность положения непустого класса, соответствующего предложению «Некоторые a суть b » ($ab \neq 0$), показывает на диаграмме трех переменных a, b, c (рис. 50).

* * *

В заключение главы подчеркнем, что аппарат диаграмм Венна оказывается применимым при решении всех вообще задач логики, входивших в проблематику математической логики в конце прошлого века. Пренебрежительная оценка этого аппарата некоторыми логиками на рубеже XIX и XX столетий,— например, в «Алгебре логики» Л. Кутюра [20],— являются поэтому неоправданной.

Графические методы Венна сохраняют интерес и в наше время. Их можно использовать при решении таких вопросов, как обзор логических следствий из заданной информации или минимизация формул исчислений. Диаграммы Венна можно применять в графических методах математической логики с неменьшим успехом, чем, скажем, карты Карнау (1953 г.) или диаграммы Вейча (1952 г.) (о картах Карнау и диаграммах Вейча см., например, [7], гл. 4). В главах 2 и 3 мы остановимся на решении некоторых задач логики с помощью диаграмм Венна. Прежде всего, в этой связи, рассмотрим диаграммы Венна с точки зрения классического исчисления высказываний. Хотя Венн и не изучал специально вопрос о применении диаграмм в исчислении высказываний, однако он в главе 18 [106] останавливается на высказываниях как частном случае предложений логики классов.

Геометрическая наглядность (особенно, когда приходится иметь дело с небольшим числом пропозициональных переменных) диаграмм в исчислении высказываний побудила американского ученого Мак-Каллока считать

их особенно пригодными при построении схем, отражающих работу нервных сетей мозга [25, 83]. При этом У. Мак-Каллок обращает основное внимание на непустые ячейки диаграммы, в них он ставит точки. Используя диаграммы Венна при описании работы нейронных схем (мы остановимся на этих вопросах в гл. 4), Мак-Каллок не исследовал ряда естественно возникающих при этом вопросов. Это относится, в частности, к алгорифмам вывода логических следствий из посылок средствами исчисления высказываний, построенного графически с помощью диаграмм Венна.

Как известно (см. [6], гл. 2 и комментарии к ней), все предложения логики классов не могут быть формализованы в исчислении высказываний в силу отсутствия возможности представления частных суждений. Венн в 1894 г. дополнил книгу [106] частными суждениями, используя для этого знак неравенства, а на диаграммах — звездочки. Однако графически он исследовал только один частный случай. Последователи графического метода Венна ввели для записи частных суждений ломаные (иногда содержащие в вершинах звездочки). Полного же разбора графических методов, относящихся к частным суждениям, в литературе нет. Поэтому в главе 3 рассматривается случай, когда посылки выражены на языке исчисления одноместных предикатов, вводится понятие простого логического следствия из данных посылок и предлагается метод, позволяющий на диаграммах обозревать все простые логические следствия. Предварительно определяются диаграммы Венна в исчислении одноместных предикатов и описывается способ, позволяющий с помощью только диаграмм Венна решить проблему разрешения (о проблеме разрешения см., например, [12, 17, 47]).

Изучение диаграмм Венна подсказало автору некоторые изменения решения проблемы разрешения для исчисления одноместных предикатов. Венн не занимался проблемами разрешимости и разрешения. Но для того, чтобы обосновать его метод преобразования информации (в которую могут входить и частные предложения), нами решается проблема разрешения для формул исчисления одноместных предикатов с помощью только диаграмм Венна. Из ее решения получается общее правило, позволяющее обозревать логические следствия данных посылок.

ДИАГРАММЫ ВЕННА В КЛАССИЧЕСКОМ ИСЧИСЛЕНИИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

§ 2.1. Соответствие между диаграммами Венна и бинарными матрицами n переменных

Определение. Диаграммой Венна n переменных в классическом исчислении высказываний будем называть символ Венна n переменных, в некоторых ячейках которого может стоять по одной точке.

Ячейки символа Венна n переменных занумерованы числами от 0 до $2^n - 1$ (см. гл. 1), поэтому диаграмму Венна можно представить в виде

$$(\beta_0 \beta_1 \dots \beta_{2^n-1}), \quad (2.1)$$

где

$\beta_i \stackrel{?}{=} \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-ой ячейке соответствующей диаграммы} \\ & \text{находится точка,} \\ 0, & \text{если } i\text{-ая ячейка рассматриваемой диаграммы} \\ & \text{пуста} \end{cases}$

($\stackrel{?}{=}$ — знак графического равенства, $i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$).

При больших n вместо (2.1) удобнее использовать матричную запись:

$$\left(\begin{array}{cccc} \beta_0 & \beta_1 & \dots & \beta_{2^k-1} \\ \beta_{2^k} & \beta_{2^k+1} & \dots & \beta_{2^{k+1}-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{2^k(2^m-1)} & \beta_{2^k(2^m-1)+1} & \dots & \beta_{2^{k+m}-1} \end{array} \right), \quad (2.2)$$

числа k и m выбираются так, чтобы $k \geq 0$, $m \geq 0$, $k + m = n$, β_i есть 0 или 1 ($i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$).

Ясно, что, если задана матрица вида (2.2), то легко строится соответствующая ей диаграмма Венна n переменных. (В этой главе для краткости вместо слов «диаграмма» и «матрица» будем использовать слово «матричный выражение».)

граммма Венна n переменных в классическом исчислении высказываний» часто будем употреблять слова «диаграмма Венна n переменных».)

Матрицу (2.2), где β_i есть 0 или 1 ($i = 0, 1, \dots, 2^n - 1$), будем называть бинарной.

Например, при $m = 3, k = 2$ имеем бинарную матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 \\ \beta_8 & \beta_9 & \beta_{10} & \beta_{11} \\ \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} & \beta_{15} \\ \beta_{16} & \beta_{17} & \beta_{18} & \beta_{19} \\ \beta_{20} & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{24} & \beta_{25} & \beta_{26} & \beta_{27} \\ \beta_{28} & \beta_{29} & \beta_{30} & \beta_{31} \end{array} \right) \quad (2.3)$$

Числа 0, ..., $2^n - 1$, записанные в n -значной двоичной записи, можно рассматривать как элементарные последовательности n переменных.

Все различные элементарные последовательности n переменных будем объединять в таблицы (матрицы) вида (2.2), в которых β_i есть двоичная запись с n знаками числа i . Так, матрице (2.3) соответствует таблица элементарных последовательностей пяти переменных:

$$\left(\begin{array}{ccccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad (2.4)$$

В связи с возможностью представления диаграмм Венна n переменных бинарными матрицами, будем употреблять слова «бинарная матрица n переменных» как имеющие тот же смысл, что и слова «диаграмма Венна n переменных в исчислении высказываний».

Между диаграммами Венна в исчислении высказываний и диаграммами Венна в логике классов, не содержащими

звездочек (см. гл. 1), можно установить взаимно однозначное соответствие. Например, по диаграмме, построенной при решении задачи Буля (рис. 36), определяется бинарная матрица:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

где нули соответствуют заштрихованным ячейкам, а единицы — незаштрихованным, $k = 3$, $m = 2$.

§ 2.2. Операции над диаграммами Венна

1. Увеличение числа переменных (переход от n переменных к $n + k$, $k > 0$, переменным). Пусть дана диаграмма Венна n переменных $D(n)$. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_h$ — все ячейки, в которых на диаграмме $D(n)$ находятся точки. Построим символ Венна $n + k$ переменных ($k > 0$). Для этого каждую ячейку символа Венна диаграммы $D(n)$ разделим на 2^k ячеек; во всех ячейках, на которые разбиваются ячейки $\alpha_1, \dots, \alpha_h$, и только в них, поставим по одной точке. В результате получится $D(n + k)$ — диаграмма Венна $n + k$ переменных.

В дальнейшем при рассмотрении операций над несколькими диаграммами мы будем предполагать, что над ними проведена операция увеличения числа переменных, так что они содержат одинаковое число переменных.

2. Отрицание (дополнение). Пусть дана диаграмма $D(n)$, где n — число переменных. Построим новую диаграмму Венна n переменных следующим образом. Начертим символ Венна n переменных. Во всех его ячейках, в которых на $D(n)$ нет точек, поставим по одной точке; ячейки, в которых на $D(n)$ есть точки, остаются пустыми. Полученную диаграмму будем называть отрицанием диаграммы $D(n)$ и обозначать $\neg D(n)$.

3. Конъюнкция (пересечение). Пусть даны диаграммы $D_1(n), D_2(n)$. Построим символ Венна n переменных. В тех и только тех его ячейках, в которых на D_1 и D_2 одновременно находятся точки, поставим по одной точке; полученную диаграмму будем называть конъюнкцией диаграмм D_1 и D_2 и обозначать $(D_1 \& D_2)$.

4. Дизъюнкция (объединение). Пусть даны диаграммы $D_1(n)$ и $D_2(n)$. Построим новый символ Венна n переменных. Во всех его ячейках, в которых на D_1 или на D_2 находятся точки (и только в них), поставим по одной точке; полученную диаграмму будем называть дизъюнкцией диаграмм D_1 и D_2 и обозначать $(D_1 \vee D_2)$.

Все указанные операции могут быть сформулированы и на языке бинарных матриц. Для примера остановимся на операции увеличения числа переменных.

Две строки (столбца) матрицы будем называть с о с е д н и м и относительно переменной a_i , если соответствующие им элементарные последовательности попарно отличны друг от друга только тем, что в одной из них на i -ом месте находится нуль, а в другой на i -м месте — единица, в остальном же эти элементарные последовательности совпадают.

Например, первый и второй, третий и четвертый столбцы матрицы (2.5) являются соседними относительно a_5 (предполагается, что переменные обозначены буквами a_1, a_2, a_3, a_4, a_5).

В результате выполнения операции увеличения числа переменных (при добавлении переменной a_j) получим бинарную матрицу, во всех соседних относительно a_j строках (столбцах) которой стоят попарно одинаковые числа. Например, после добавления к числу переменных матрицы (2.5) новой переменной b (которая ставится между переменными a_2 и a_3) получим бинарную матрицу шести переменных $a_1, a_2, b, a_3, a_4, a_5$:

$$\left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (2.6)$$

Между диаграммами Венна в исчислении высказываний и формулами этого исчисления установим соответствие. При этом мы не будем подробно излагать исчисление высказываний, отсылая читателя к соответствующей литературе (например, [6, 17, 19]), напомним лишь некоторые понятия.

Рассматривается следующий алфавит: $a_1 \dots a_n$ — пропорциональные переменные, $\neg \wedge \vee \supset$ — логические знаки (\neg — знак отрицания, \wedge — знак конъюнкции, \vee — знак дизъюнкции, \supset — знак импликации), $()$ — скобки.

Формулы исчисления высказываний определяются следующими порождающими правилами:

1. Если a_i — пропозициональная переменная, то a_i считается формулой.

2. Если Φ — формула, то $\neg \Phi$ считается формулой (иногда вместо $\neg \Phi$ будем писать $\bar{\Phi}$ или Φ').

3. Если Φ и Ψ — формулы, то $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \supset \Psi)$ считаются формулами (иногда вместо $(\Phi \wedge \Psi)$ будем писать $(\Phi \cdot \Psi)$, а вместо $(\Phi \vee \Psi)$ — $(\Phi + \Psi)$).

§ 2.3. Построение диаграмм Венна по данным формулам

Пусть дана формула Φ исчисления высказываний, составленная из переменных a_1, \dots, a_n . (О формуле Φ говорят, что она составлена из пропозициональных переменных a_1, \dots, a_n , если никакая отличная от a_1, \dots, a_n пропозициональная переменная не входит в Φ .) Требуется построить диаграмму Венна, соответствующую формуле Φ .

Диаграмму (бинарную матрицу), соответствующую данной формуле Φ , будем обозначать через $[\Phi]$, или $[\Phi]^n$, где n указывает на число графически различных переменных формулы Φ .

а) Каждой переменной a_i формулы Φ поставим в соответствие диаграмму Венна, получающуюся следующим образом. Построим символ Венна n переменных. Во всех ячейках i -ой фигуры, и только в них, поставим по одной точке. Получим диаграмму, соответствующую переменной a_i (т. е. диаграмму $[a_i]^n$).

б) Каждому логическому знаку формулы Φ поставим в соответствие операции над диаграммами Венна следующим образом:

1. Предположим, что $[\neg F]$ — подформула формулы Φ и что диаграмма $[F]$ построена. Построим диаграмму $[\neg F]$.

Диаграмму $[\neg F]$ определим как результат операции отрицания диаграммы $[F]$

$$[\neg F] \Leftrightarrow \neg [F],$$

где \Leftrightarrow обозначает равенство по определению.

2. Предположим, что $(E \& F)$, $(E \vee F)$ и $(E \supset F)$ — подформулы формулы Φ и что диаграммы $[E]$ и $[F]$ построены. Построим диаграммы $[E \& F]$, $[E \vee F]$, $[E \supset F]$:

$$[E \& F] \rightleftharpoons ([E] \& [F]),$$

$$[E \vee F] \rightleftharpoons ([E] \vee [F]),$$

$$[E \supset F] \rightleftharpoons (\neg [E] \vee [F]).$$

(В аналогичных выражениях для краткости внешние круглые скобки формул будем опускать.)

Описанный способ определения диаграммы (матрицы), соответствующей данной формуле Φ , имеет вид индуктивного построения. На первом шаге (пункт а) строятся диаграммы (матрицы), соответствующие всем графически различным переменным формулы Φ . Индукция ведется по шагам построения формулы Φ (пункт б).

Определение. Пусть D_1, D_2 — бинарные матрицы одинакового числа переменных. Будем говорить, что D_1 входит в D_2 (записываем $D_1 \subset D_2$), если все единицы матрицы D_1 являются единицами матрицы D_2 (иными словами, $D_1 \subset D_2$, если каждой единице с номером α матрицы D_1 соответствует единица с тем же номером α на матрице D_2).

Матрицы D_1 и D_2 будем называть равными (записываем $D_1 = D_2$), если $D_1 \subset D_2$ и $D_2 \subset D_1$.

Условимся обозначать: $D_1 \neq D_2$, когда матрицы D_1 и D_2 не являются равными.

Две формулы Φ и Ψ , каждая из которых составлена из переменных a_1, \dots, a_n , будем называть эквивалентными, если $[\Phi]^n = [\Psi]^n$.

Две формулы Φ и Ψ будем называть различными, если неверно, что $[\Phi] \subset [\Psi]$, и неверно, что $[\Psi] \subset [\Phi]$.

Формулу Φ назовем тождественно истинной (универсально общезначимой), если ее бинарная матрица (бинарная матрица, построенная по формуле Φ), не содержит нулей. Например, формула $((a_1 \vee a_3 \vee \neg a_4) \vee ((a_2 \vee \neg a_5) \& \neg (a_2 \& a_5)))$ не является универсально общезначимой, т. к. ее бинарная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

содержит нули.

Формулу Φ называем тождественно ложной, если ее бинарная матрица не содержит единиц.

Формула Φ называется дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной формулой [сокращенно — ДНФ (КНФ)], если Φ есть дизъюнкция (конъюнкция) конъюнкций (дизъюнкций), членами которых являются пропозициональные переменные и их отрицания, при этом все дизъюнктивные (конъюнктивные) члены формулы Φ будем считать попарно неэквивалентными между собой.

ДНФ (КНФ) Φ называется совершенной дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной формулой [сокращенно — СДНФ (СКНФ)], если в каждый дизъюнктивный (конъюнктивный) ее член входят все графически различные пропозициональные переменные формулы Φ , при этом каждая переменная может входить (с отрицанием или без) в дизъюнктивный (конъюнктивный) член только один раз.

§ 2.4. Построение формул по диаграммам Венна

Пусть дана диаграмма $D(a_1, \dots, a_n)$ (в скобках указаны все графически различные переменные a_1, \dots, a_n диаграммы Венна). Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_h$ — все различные ячейки, в которых на диаграмме D находятся точки. Ячейка α_i есть $\tilde{a}_1^i \dots \tilde{a}_n^i$, где

$$\tilde{a}_j^i = \begin{cases} a_j, & \text{если } \alpha_i \text{ принадлежит фигуре } a_j, \\ \bar{a}_j, & \text{если } \alpha_i \text{ принадлежит дополнению фигуры } a_j \end{cases}$$

$j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, h$.

Ячейке α_i поставим в соответствие формулу

$$\Phi_i = (\varepsilon_1^i a_1 \& \dots \& \varepsilon_n^i a_n),$$

где

$$\varepsilon_j^i = \begin{cases} \wedge, & \text{если } \tilde{a}_j^i \text{ есть } a_j, \\ \neg, & \text{если } \tilde{a}_j^i \text{ есть } \bar{a}_j, \end{cases}$$

\wedge — обозначает пустое слово. (Некоторые скобки в формулах опускаем в силу ассоциативности как конъюнкций, так и дизъюнкций.)

Диаграмме $D(a_1, \dots, a_n)$ поставим в соответствие СДНФ ($\Phi_1 \vee \dots \vee \Phi_h$).

Формулу, соответствующую диаграмме Венна D , будем обозначать $[D]$. В СДНФ часто будем опускать

все скобки, кроме внешних, и знак &, предполагая, что конъюнкция связывает сильнее дизъюнкции.

Например, бинарной матрице (2.5) соответствует формула $((\neg a \& \neg b \& c \& d \& \neg e) \vee (\neg a \& \neg b \& c \& d \& e) \vee \dots \vee (\neg a \& b \& \neg c \& \neg d \& \neg e) \vee (\neg a \& b \& c \& d \& \neg e) \vee \dots \vee (\neg a \& b \& c \& d \& e) \vee (a \& \neg b \& \neg c \& \neg d \& \neg e) \vee (a \& \neg b \& c \& \neg d \& e) \vee (a \& b \& \neg c \& \neg d \& e) \vee (a \& b \& c \& \neg d \& e))$.

Если диаграмма $D(a_1, \dots, a_n)$ не содержит точек, то в соответствие ей ставим тождественно ложную формулу, например, $(a_1 \& \neg a_1)$.

Если на диаграмме число ячеек, занятых точками, больше, чем число пустых ячеек, то для уменьшения логической длины построение удобнее начинать с пустых ячеек диаграммы и диаграмме $D(a_1, \dots, a_n)$ ставить в соответствие формулу $\neg(\Phi_{h+1} \vee \dots \vee \Phi_{2^n})$, не являющуюся ДНФ. При этом используется эквивалентность:

$$(\Phi_1 \vee \dots \vee \Phi_h) \equiv \neg(\Phi_{h+1} \vee \dots \vee \Phi_{2^n}).$$

Формулу Ψ называют совершенной дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной формой формулы Φ , если Ψ есть СДНФ (СКНФ) и $\Phi \equiv \Psi$.

Нетрудно доказать, что для любой формулы Φ , не являющейся тождественно ложной, формула $[[\Phi]]$ есть совершенная дизъюнктивная нормальная форма формулы Φ (предполагая, что формулы пишутся по ячейкам, занятых точками).

В силу установленного соответствия между диаграммами Венна и формулами исчисления высказываний можно говорить о графическом (диаграммном) построении исчисления высказываний.

§ 2.5. Вывод логических следствий с помощью диаграмм Венна

Формулу Ψ называют логическим следствием посылок Φ_1, \dots, Φ_m тогда и только тогда, когда

$$((\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m) \supset \Psi)$$

есть тождественно истинная формула.

Покажем, что формула Ψ будет логическим следствием посылок Φ_1, \dots, Φ_m тогда и только тогда, когда

$$[\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m]^n \subset [\Psi]^n,$$

где n — число графически неравных переменных, из которых составлена формула $(\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m)$.

1) Пусть Ψ есть логическое следствие формул Φ_1, \dots, Φ_m . Предположим, что в ячейках $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ на диаграмме $[\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m]$ есть точки, а на $[\Psi]$ — нет. Тогда на диаграмме

$$[(\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m) \supset \Psi]^n$$

ячейки $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ пусты, но $((\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m) \supset \Psi)$ есть тождественно истинная формула, т. е. формула, которой соответствует диаграмма, на которой нет пустых (не содержащих точки) ячеек. Мы пришли, таким образом, к противоречию.

Следовательно, если Ψ — логическое следствие посылок Φ_1, \dots, Φ_m , то $[\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m] \subset [\Psi]$.

2) Пусть $[\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m] \subset [\Psi]$. Тогда $[\neg(\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m)] \vee \vee [\Psi]$ есть тождественно истинная формула.

Следовательно, поскольку формула $[\neg(\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m)] \vee \vee [\Psi]$ равносильна формуле $((\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m) \supset \Psi)$, формула Ψ есть логическое следствие из посылок Φ_1, \dots, Φ_m .

Таким образом, для получения логического следствия из посылок Φ_1, \dots, Φ_m , составленного из δ переменных, где $\delta \geq n$, а n — число графически неравных переменных формулы $(\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m)$ надо построить диаграмму δ переменных $[\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m]^{\delta}$; далее, в некоторых из пустых ячеек диаграммы $[\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m]^{\delta}$ поставить по одной точке, потом написать формулу, соответствующую полученной диаграмме; эта формула и будет логическим следствием посылок Φ_1, \dots, Φ_m .

Проставляя точки в различных пустых ячейках диаграммы

$$[\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m],$$

мы будем получать различные логические следствия из посылок Φ_1, \dots, Φ_m .

Перебрав все возможные комбинации пустых ячеек диаграммы $[\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m]$ и проставив в них по одной точ-

ке, мы получим все возможные попарно неэквивалентные следствия из посылок Φ_1, \dots, Φ_m , составленные из δ переменных.

§ 2.6. Простые логические следствия

Логическое следствие Ψ из посылок Φ_1, \dots, Φ_m называют простым следствием из этих посылок, если Ψ есть дизъюнкция переменных (быть может, с отрицанием), не поглощаемая никаким другим логическим следствием того же вида из посылок Φ_1, \dots, Φ_m .

Понятие поглощения некоторой формулы (другой) формулой становится ясным из следующих законов поглощения в исчислении высказываний:

$$(\Phi \& (\Phi \vee \Psi)) \equiv \Phi,$$
$$(\Phi \vee (\Phi \& \Psi)) \equiv \Phi,$$

где Φ, Ψ — любые формулы; о формуле Φ говорят, в первом случае, что она поглощает формулу $(\Phi \vee \Psi)$, во втором — что она поглощает формулу $(\Phi \& \Psi)$. Например, формула $(\neg a \vee b)$ поглощает формулу $(\neg a \vee b \vee c)$, но не поглощает формулу $(\neg a \vee c \vee d)$.

Конъюнкцию всех попарно различных простых логических следствий посылок Φ_1, \dots, Φ_m называют *силлогистическим многочленом* формулы $(\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m)$.

Один из способов получения силлогистического многочлена основан на применении законов поглощения и выявления.

Законы выявления в исчислении высказываний: $((\Phi \vee \chi) \& (\Psi \vee \neg \chi)) \equiv ((\Phi \vee \chi) \& (\Psi \vee \neg \chi)) \& (\Phi \vee \neg \Psi)$, $((\Phi \& \chi) \vee (\Psi \& \neg \chi)) \equiv ((\Phi \& \chi) \vee (\Psi \& \neg \chi)) \vee (\Phi \& \Psi)$, где Φ, Ψ, χ — любые формулы.

Силлогистический многочлен получается следующим образом:

1. Берется произвольная конъюнктивная нормальная форма χ формулы $(\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m)$.

2. В формуле χ производятся все возможные выявления и поглощения; формула, которая получится в результате выполнения описанной процедуры, и будет силлогистическим многочленом формулы $(\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m)$.

Можно показать, что независимо от формулы χ и порядка применения законов выявления и поглощения сил-

логистический многочлен формулы ($\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m$) строится единственным образом (с точностью до перестановки членов).

Перейдем теперь к обзору всех простых логических следствий из посылок Φ_1, \dots, Φ_m с помощью диаграмм Венна. Предварительно разберем несколько предложений, из которых и будет вытекать общий метод нахождения простых логических следствий.

Пусть a_1, \dots, a_n — все графически неравные переменные, из которых составлена формула ($\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m$).

1. Если на бинарной матрице $[\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m]^n$ находится только одна единица, то простыми логическими следствиями посылок Φ_1, \dots, Φ_m будут $\varepsilon_1 a_1, \dots, \varepsilon_n a_n$, где ε_i есть пустое слово, если в элементарной последовательности γ , являющейся номером единицы, на i -ом месте стоит 1, и ε_i есть \neg , если на i -ом месте в последовательности γ находится 0 ($i = 1, \dots, n$); формула $(\varepsilon_1 a_1 \& \dots \& \varepsilon_n a_n)$ будет силлогистическим многочленом формулы ($\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m$).

Например, на бинарной матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

находится только одна единица, которая имеет номер 00111 (семь в двоичной системе), поэтому силлогистический многочлен формулы ($\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m$), бинарной матрицей которой является (2.7), есть $(\neg a_1 \& \neg a_2 \& a_3 \& a_4 \& a_5)$.

2. Пусть бинарная матрица формулы ($\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m$) содержит больше одной единицы. Пусть ψ — логическое следствие из посылок Φ_1, \dots, Φ_m .

Если единицы расположены на бинарной матрице формулы Ψ так, что им соответствуют все элементарные последовательности, в которых на местах i_1, \dots, i_k находятся, соответственно, числа $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$, то формула Ψ эквивалентна формуле

$$F \sqsubseteq (\gamma_{i_1} a_{i_1} \vee \dots \vee \gamma_{i_k} a_{i_k}),$$

где γ_{i_j} есть пустое слово, если $\varepsilon_j = 1$, и γ_{i_j} есть \neg , если $\varepsilon_j = 0$; в этом случае формула F , зависящая от k

переменных, есть логическое следствие из посылок Φ_1, \dots, Φ_m .

Например, на бинарной матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

формулы Ψ двадцать четыре единицы, им соответствуют все элементарные последовательности пяти переменных, в которых на третьем месте находится нуль, а на пятом единица, поэтому $\Psi \equiv (\neg a_3 \vee a_5)$.

3. Пусть Φ и Ψ — формулы. Если $[\Phi] \subset [\Psi]$, то формула Ψ поглощается формулой Φ .

Например, формула, бинарной матрицей которой является (2.8), поглощается формулой, бинарной матрицей которой является (2.7).

4. Пусть для некоторого s конъюнкция диаграмм всех простых логических следствий Ψ_1, \dots, Ψ_r , зависящих не более, чем от s переменных, равна диаграмме конъюнкции посылок Φ_1, \dots, Φ_m

$$([\Psi_1] \& \dots \& [\Psi_r]) = [\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m],$$

и ни для какого k (где $k = 1, \dots, s - 1$) не имеет места равенство

$$([\Psi_{j_1}] \& \dots \& [\Psi_{j_k}]) = [\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m],$$

где $\Psi_{j_1}, \dots, \Psi_{j_k}$ — все простые логические следствия посылок Φ_1, \dots, Φ_m , зависящие не более, чем от k переменных. Тогда $(\Psi_1 \& \dots \& \Psi_r)$ — силлогистический многочлен формулы $(\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m)$.

Предложения 1—4 легко могут быть доказаны.

Для примера рассмотрим предложение 3.

По условию: $[\Phi] \subset [\Psi]$. Поэтому

$$\Psi \equiv ([[\Phi]] \vee \chi),$$

где χ — формула, построенная по диаграмме, полученной из диаграммы $[\Psi]$ после стирания на ней точек, принадлежащих также и диаграмме $[\Phi]$, т. е. χ — есть формула $[[\Psi]] \& \neg [[\Phi]]$.

$$(\Phi \& \Psi) \equiv ([[[\Phi]] \& ([[[\Phi]] \vee \chi)]) \equiv [[[\Phi]]] \equiv \Phi.$$

Следовательно, формула Φ поглощает формулу Ψ , что и требовалось показать.

В качестве следствия предложения 2 можно получить условие исключения некоторых пропозициональных переменных из данной формулы.

Говорят, что пропозициональная переменная a_i исключается из формулы Φ , если существует такая формула Ψ , в которую переменная a_i не входит, и $\Phi \equiv \Psi$.

Пропозициональная переменная a_i может быть исключена (вместе с отрицанием) из формулы Ψ тогда и только тогда, когда во всех соседних относительно a_i строках (столбцах) бинарной матрицы $[\Psi]$ находятся попарно одинаковые числа. (Для сравнения см. операцию 1 увеличения числа переменных на диаграммах Венна в § 2.2 и метод исключения неизвестных по Венну в первой главе.)

Например, из формулы Ψ , бинарной матрицей которой является (2.6), переменную b можно исключить; в результате получится формула Φ , равносильная формуле Ψ ; матрица $[\Phi]$ есть (2.5).

Перейдем к алгорифму получения всех простых логических следствий из посылок Φ_1, \dots, Φ_m .

Пусть $\Psi_1, \dots, \Psi_{l_1}$ — все возможные различные логические следствия из Φ_1, \dots, Φ_m , состоящие (каждое) из одной переменной. Если $([\Psi_1] \& \dots \& [\Psi_{l_1}]) = [\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m]$, то $(\Psi_1 \& \dots \& \Psi_{l_1})$ — силлогистический многочлен формулы $(\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m)$. Если $([\Psi_1] \& \dots \& [\Psi_{l_1}]) \neq [\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m]$, то возьмем $\Psi_{l_1+1}, \dots, \Psi_{l_2}$ — все возможные различные логические следствия из Φ_1, \dots, Φ_m , состоящие из двух переменных, такие, что для любого i (где $i = 1, \dots, l_1$) и для любого j (где $j = l_1 + 1, \dots, l_2$) неверно, что $[\Psi_i] \subset \subset [\Psi_j]$. Если при этом $([\Psi_1] \& \dots \& [\Psi_{l_2}]) = [\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m]$, то $(\Psi_1 \& \dots \& \Psi_{l_2})$ — силлогистический многочлен формулы $(\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m)$. Если же $([\Psi_1] \& \dots \& [\Psi_{l_2}]) \neq [\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m]$, то берутся $\Psi_{l_2+1}, \dots, \Psi_{l_3}$ — все различные логические следствия из Φ_1, \dots, Φ_m , состоящие из трех переменных, такие, что для любого i (где $i = 1, \dots, l_2$) и для любого j (где $j = l_2 + 1, \dots, l_3$) неверно, что $[\Psi_i] \subset [\Psi_j]$. Эта процедура продолжается, пока мы не найдем такое k , что $([\Psi_1] \& \dots \& [\Psi_k]) = [\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m]$; тогда $(\Psi_1 \& \dots \& \Psi_k)$ — силлогистический многочлен формулы $(\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m)$.

Пример. Пусть диаграмма Венна D формулы $(\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m)$

$\dots \& \Phi_m$) имеет вид, показанный на рис. 51. Построим соответствующий силлогистический многочлен.

Все точки диаграммы D принадлежат классам c и \bar{a} , каждый из которых состоит из одной переменной. Нетрудно проверить, что, кроме c и \bar{a} , на рассматриваемой диаграмме нет классов, составленных из одной переменной

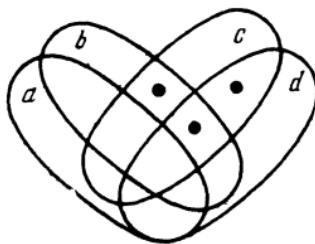


Рис. 51

и содержащих все ячейки, в которых на диаграмме расположены точки.

Поэтому $\neg a$ и c суть все различные логические следствия посылок Φ_1, \dots, Φ_m , состоящие из одной переменной.

Так как $([\neg a] \& [c]) \neq D$, то на диаграмме D выделим все такие различные классы, состоящие из двух переменных, которые содержат все ячейки диаграммы D с точками и в которые не входят ни класс \bar{a} , ни класс c . На диаграмме D видно, что такой класс один, он представляет собой объединение классов b и d .

$$([\neg a] \& [c] \& [b \vee d]) = D.$$

Следовательно, формула $(\neg a \& c \& (b \vee d))$ является требуемым силлогистическим многочленом.

В качестве других примеров читатель может построить силлогистические многочлены по диаграммам задач, разобранных в § 1.6.

В изложенном методе на каждом шаге находятся все простые логические следствия, состоящие из одного и того же числа переменных. На первом шаге находятся только простые логические следствия, являющиеся пропозициональными переменными или их отрицаниями, на втором — простые логические следствия, представляющие собой дизъюнкции переменных или их отрицаний, и т. д.

Одновременно решается и задача получения всех простых логических следствий, не содержащих некоторых пропозициональных переменных. Так, на первом шаге могут быть получены все простые логические следствия посылок Φ_1, \dots, Φ_m , не содержащие $(n - 1)$ пропозициональных переменных, где n — количество графически различных пропозициональных букв формулы $(\Phi_1 \& \dots \& \Phi_m)$.

При нахождении простых логических следствий из данных посылок мы использовали силлогистический многочлен, являющийся некоторой конъюнктивной нормальной формой конъюнкции посылок. Задача решалась геометрически, члены силлогистического многочлена определялись с помощью построения соответствующих диаграмм Венна.

Нетрудно обосновать следующий способ написания совершенных конъюнктивных нормальных форм формул по заданным диаграммам Венна.

Рассматриваем пустые ячейки данной диаграммы Венна. Классу x ставим в соответствие отрицание — $\neg x$, дополнению класса x — пропозициональную переменную x ; пересечению классов — дизъюнкцию, объединению — конъюнкцию; следовательно, по диаграмме Венна строится совершенная конъюнктивная нормальная формула. Легко доказать, что найденная формула эквивалентна совершенной дизъюнктивной нормальной формуле, которая определяется по ячейкам, заполненным точками. (Напомним, что Венн при рассмотрении пустых ячеекставил в соответствие классам — переменные, дополнению — отрицание, пересечению — конъюнкцию, объединению — дизъюнкцию, т. е. Венн фактически исследовал формулы в их отрицательной форме, обращая основное внимание на случаи, когда значением формул является 0.)

Очевидно, что диаграммы Венна позволяют среди двух совершенных нормальных форм (конъюнктивной и дизъюнктивной) формул выбрать ту, которая имеет меньшую логическую длину. Кроме того, описанный метод построения силлогистического многочлена формулы Φ может быть использован при определении минимальных по логической длине (или по числу вхождений букв) конъюнктивных или дизъюнктивных нормальных форм формулы Φ .

§ 2.7. Диаграмма Венна как оператор

Формула Φ исчисления высказываний называется избыточной, если существует эквивалентная ей формула Ψ , имеющая меньшее число вхождений пропозициональных переменных или логических знаков.

В литературе, относящейся к техническим приложениям математической логики, много внимания уделяется проблеме минимизации формул. При рассмотрении вопросов, связанных, например, с проблемой создания надежных устройств из относительно ненадежных элементов, существенную роль играют, наоборот, избыточные формулы. Избыточные формулы, как мы увидим ниже, удобно строить с помощью сетей диаграмм Венна. При этом понятие «диаграмма Венна» расширяется — диаграммы играют роль операторов.

Прежде чем переходить к описанию строения и функционирования сетей, покажем, как дерево построения формулы можно преобразовать в сеть диаграмм.

Как известно, каждой формуле исчисления высказываний, составленной из пропозициональных переменных a_1, \dots, a_n , можно поставить в соответствие дерево ее построения. Например, формуле

$$\Phi \equiv (((a_1 \& (\neg a_2 \& \neg a_3)) \vee (a_1 \& \neg(a_3 \supset a_2))) \vee a_2)$$

взаимно однозначно соответствует дерево, показанное на рис. 52. На рисунке в вершинах расположены логические знаки формулы, кривые, оканчивающиеся в вершинах, нумеруются (когда порядок не существен, номера опускаются).

Дерево построения формулы можно преобразовать в сеть бинарных матриц (диаграмм Венна) следующим образом:

Первый ряд (ранг) образуем из матриц, соответствующих пропозициональным переменным, из которых составлена формула. (Построение таких матриц см. в § 2.3.)

Остальные ранги получаем заменой логических знаков в дереве построения формулы соответствующими бинарными матрицами; при этом число переменных матрицы совпадает с количеством кривых, оканчивающихся в рассматриваемой вершине.

а) Допустим, что сеть, соответствующая дереву формулы A , построена. Сеть, соответствующую дереву формулы $\neg A$, получим, заменяя в нем вершину



матрицей $(1 \downarrow 0)$.

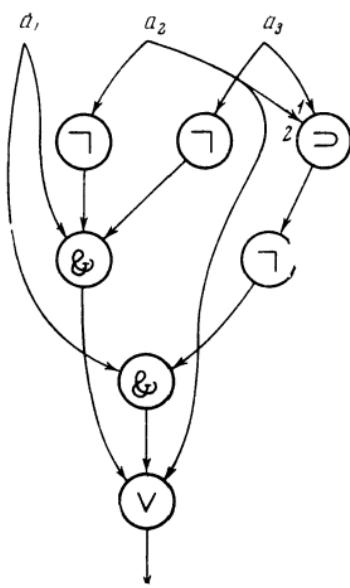


Рис. 52

б) Допустим, что сети, соответствующие деревьям формул A_1, \dots, A_m , построены. Сеть, соответствующую дереву формулы $(A_1 \& \dots, \& A_m)$, получим, заменяя в нем вершину, например, при $m = 3$, матрицей

$$\begin{pmatrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

При построении сети, соответствующей дереву формулы $(A_1 \vee \dots, \vee A_m)$, заменяем, например, при $m = 3$, вершину матрицей

$$\begin{pmatrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

При построении сети, соответствующей дереву формулы $(A_1 \supset A_2)$, заменяем вершину матрицей

$$(1 \downarrow 1 \quad 2 \downarrow \\ 1 \quad 0 \quad 1).$$

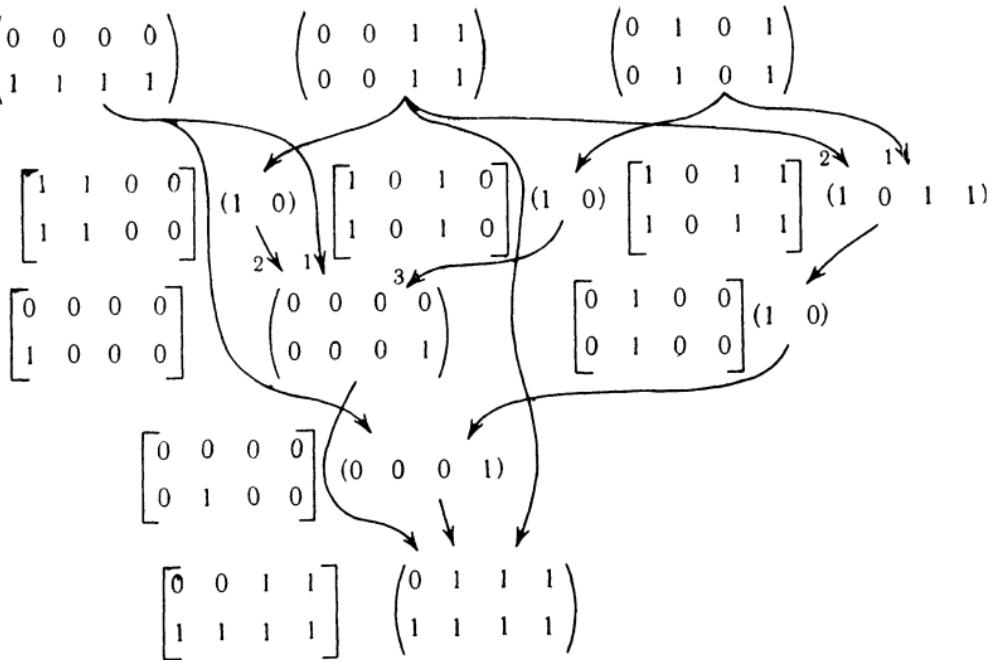


Рис. 53—57

Например, по дереву формулы Φ (рис. 52) строим сеть:

Только что построенную сеть читатель может рассматривать в качестве примера; почему вершинам дерева построения формулы мы сопоставили такие матрицы, а не другие, и каков смысл матриц, стоящих в квадратных скобках, станет ясно после того, как мы опишем строение и функционирование сетей произвольного вида.

Описание строения и функционирования сетей диаграмм. Сеть состоит из нескольких рядов (рангов) диаграмм. Диаграммы первого ранга являются входными диаграммами, диаграммы последнего ранга — выходными (на рисунках ранги сети диаграмм нумеруются сверху вниз).

Каждая диаграмма сети диаграмм, начиная со второго ранга, связана кривыми с одной или несколькими диаграммами сети, на которых эти кривые начинаются. Кривые оканчиваются стрелками на диаграммах. Все кривые данной диаграммы нумеруются числами, которые ставятся слева от стрелки. Число кривых, оканчивающихся на данной диаграмме, равно числу различных переменных этой диаграммы.

Каждую диаграмму сети будем рассматривать как некоторый оператор, функционирование которого ведет к построению диаграммы независимых (входных) переменных. Последнюю будем называть результирующей диаграммой данного оператора.

Обозначения: $D_{r,i}^\tau$ — диаграмма Венна, расположенная в r -ом ранге на i -ом месте (диаграммы в ранге нумеруются слева направо); $\lfloor D_{r,i}^\tau \rfloor$ — результирующая диаграмма оператора $D_{r,i}^\tau$.

Результирующие диаграммы операторов последнего ранга сети будем называть результирующими диаграммами сети. Их число совпадает с числом выходных диаграмм сети.

Одноранговые сети. Каждая диаграмма n переменных является одноранговой сетью с одним выходом. Результирующей диаграммой такой сети считаем данную диаграмму или результат операции увеличения числа переменных над данной диаграммой. В последнем случае результирующую диаграмму помещаем в квадратных скобках рядом с оператором.

Двухранговые сети с одним выходом. Первый ранг образуют k -диаграмм соответственно n_1, \dots, n_k переменных. Во втором ранге находится одна диаграмма n_{k+1} переменных, на которой оканчиваются стрелками n_{k+1} кривых, начинающихся на диаграммах первого ранга. Результирующие диаграммы первого ранга строятся аналогично уже рассмотренному случаю одноранговых сетей; пусть все они имеют одинаковое число переменных n , $n \geq \max\{n_1, \dots, n_k\}$.

Пусть β_i, \dots, β_h — все ячейки, в которых на $D_{2,1}^\tau$ находятся точки. Образуем диаграммы D_1, \dots, D_m где индексы $1, \dots, m$ совпадают с номерами кривых, оканчивающихся на $D_{2,1}^\tau$ (здесь $m = n_{k+1}$): если i -ая кривая начинается на $D_{1,j}^\tau$, (где $j = 1, \dots, k$), то положим $D_i \Leftrightarrow D_{1,j}^\tau \lfloor$ (здесь $i = 1, \dots, m$).

Пусть для определенности β_1 имеет номер (в двоичной системе) $1 \dots 10 \dots 0$, количество единиц которого равно i . Построим символ Венна n переменных. В ячейках, совпадающих по нумерации с ячейками, в которых на D_1, \dots, D_i находятся точки, а на D_{i+1}, \dots, D_m нет точек (и только таких ячейках), поставим по одной точке.

Аналогично поступаем с остальными ячейками β_l на $D_{2,1}^r$, $1 < l \leq h$; при этом занятые точками ячейки результирующей диаграммы (для $\beta_1, \dots, \beta_{l-1}$) не рассматриваются. Получим результирующую диаграмму $\square D_{2,1}$.

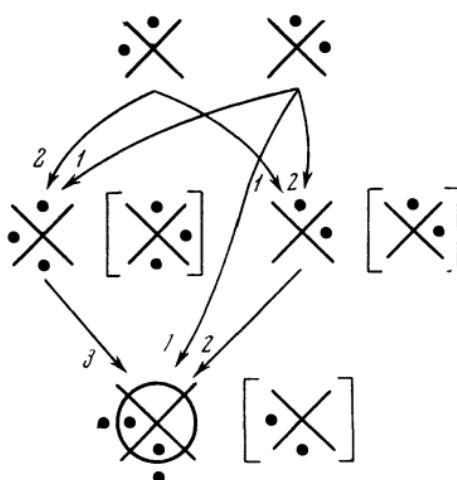


Рис. 58

которую на рисунках помещаем в квадратных скобках около оператора.

Построение результирующих диаграмм многоранговых сетей ведется последовательно: на i -м шаге конструируются результирующие диаграммы i -го ранга; при этом диаграммы i -го ранга играют роль операторов над связанными с ними результирующими диаграммами в вышестоящих рангах. Результирующие диаграммы последнего ранга являются результирующими диаграммами сети.

Например, на рис. 53—57 в квадратных скобках расположены результирующие диаграммы соответствующих операторов.

Регулярные сети диаграмм Венна. Сеть диаграмм будем называть регулярной, если 1) диаграммы i -го ранга содержат одинаковое число переменных; 2) на каждой диаграмме i -го ранга может начинаться только одна кривая, оканчивающаяся на данной диаграмме ($i+1$)-го ранга; 3) диаграммы $(i+1)$ -го ранга соединяются кривыми только с диаграммами i -го ранга; 4) нумерация кривых, оканчивающихся на диаграмме $(i+1)$ -го ранга, совпадает с нумерацией диаграмм в i -м ранге

(слева направо); $i \geq 1$. Ясно, что в случае регулярных сетей кривые на рисунках можно опускать.

Две сети будем называть эквивалентными, если их результирующие диаграммы совпадают.

Для любой сети диаграмм (без обратных связей) можно построить эквивалентную ей регулярную сеть. Построение осуществляется с помощью следующих двух операций:

1. *Изменение нумерации кривых оператора.* Пусть дана двухранговая сеть с одним выходом; β_1, \dots, β_h — все ячейки, в которых на $D_{2,1}^{\tau}$ находятся точки; $1, \dots, m$ — номера кривых сети. Построим новую двухранговую сеть с одним выходом (операторы этой сети обозначим \hat{D}_{ij}), обладающую следующими свойствами: диаграммы первого ранга совпадают с результирующими диаграммами первого ранга исходной сети и имеют одинаковое число переменных; кривые сети по расположению также совпадают с кривыми исходной сети, но их номера представляются — число l заменяется на l' , где $1 \leq l' \leq m$; каждая ячейка β на $D_{2,1}^{\tau}$ имеет номер $\alpha_1^{\beta}, \dots, \alpha_m^{\beta}$, где α_i^{β} есть 1 или 0 ($i = 1, \dots, m$), ячейке β на $D_{2,1}^{\tau}$ соответствует на $\hat{D}_{2,1}$ ячейка δ с номером $\gamma_1^{\delta}, \dots, \gamma_m^{\delta}$, где γ_j^{δ} совпадает с α_j^{β} , $j' = 1, \dots, m$; на $\hat{D}_{2,1}$ точки стоят только в ячейках $\delta_1, \dots, \delta_h$, соответствующих ячейкам β_1, \dots, β_h на $D_{2,1}^{\tau}$. Нетрудно убедиться, что полученная сеть эквивалентна исходной.

2. *Увеличение числа кривых оператора.* Пусть дана двухранговая сеть с одним выходом; β_1, \dots, β_h — все ячейками, в которых на $D_{2,1}^{\tau}$ находятся точки; $1, \dots, m$ — номера кривых сети. Построим новую одновыходную двухранговую сеть, операторы этой сети обозначим \bar{D}_{ij} .

Диаграммами первого ранга будем считать результирующие диаграммы первого ранга исходной сети и какую-то произвольную диаграмму; это значит, что число диаграмм первого ранга новой сети равно $k + 1$, где k — число диаграмм в первом ранге исходной сети. Новая диаграмма может быть расположена в любом месте первого ранга. Будем предполагать, что все диаграммы первого ранга сети имеют одинаковое число переменных n , $n = \max\{n_1, \dots, n_k\}$, где n_i — число переменных на $D_{1,i}^{\tau}$, $i = 1, \dots, k$. Сеть имеет $m + 1$ кривую: m кривых по расположению и

нумерации совпадают с кривыми исходной сети, $(m + 1)$ -я кривая начинается на новой $(k + 1)$ -й диаграмме первого ранга. Оператором $\bar{D}_{2,1}$ будем считать диаграмму,

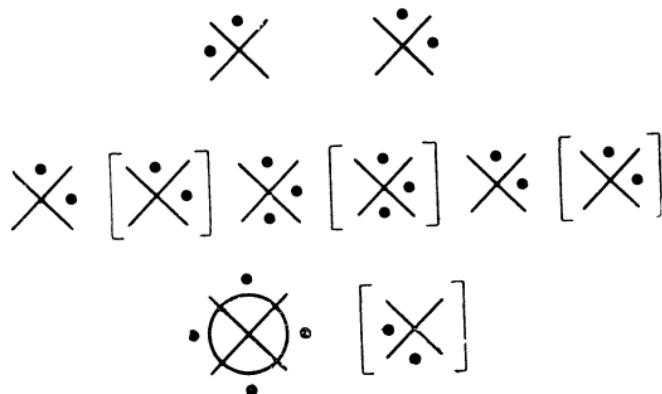


Рис. 59

являющуюся результатом увеличения числа переменных диаграммы $D_{2,1}^{\tau}$ на единицу; новая переменная соответствует $(m + 1)$ -й кривой.

Нетрудно проверить, что в результате получаем сеть, эквивалентную исходной.

Например, используя операции 1 и 2, преобразуем сеть на рис. 58 в эквивалентную ей регулярную сеть (рис. 59).

Обратные связи в сетях диаграмм Венна. Рассмотрим сети, на каждой диаграмме которых могут оканчиваться кривые, связывающие эту диаграмму с любыми диаграммами сети (в том числе саму с собой). Иначе говоря, на каждой из диаграмм n_i переменных, начиная со второго ранга, $i > k_1$, стрелками оканчивается n_i кривых, соединяющих эту диаграмму с некоторыми диаграммами сети, и на каждой из диаграмм первого ранга n_j переменных, $1 \leq j \leq k_1$, могут также оканчиваться стрелками n_j кривых.

В таких сетях понятие ранга не имеет значения (оно наиболее существенно для регулярных сетей), но для удобства будем им пользоваться; будем называть, как и выше, диаграммы первого ранга входными, а диаграммы последнего ранга — выходными.

Будем говорить, что сеть является сетью с обратной связью, если в ней имеется по крайней мере одна диаграмма $D_{r,j}^t$, на которой находятся стрелки кривой, связывающей эту диаграмму с одной из диаграмм $(r+i)$ -го ранга, $i \geq 0$.

Рассматривать работу сетей будем в равноотстоящие моменты времени. Такой временной подход необходим прежде всего для сетей с обратной связью; сети без обратных связей можно исследовать независимо от времени.

Построение результирующих диаграмм в равноотстоящие моменты времени происходит следующим образом.

Будем предполагать, что в момент времени t (начальный момент) строятся только результирующие диаграммы всех входных операторов (правила построения те же, что и для диаграмм первого ранга двухранговой сети); для остальных диаграмм их результирующие диаграммы пусты, т. е. не содержат точек. В $(t+i)$ -й момент времени ($i > 0$) строятся только результирующие диаграммы, на которых оканчиваются стрелки кривых; правила построения те же, что и для диаграмм второго ранга двухранговой сети без обратной связи; для остальных диаграмм их результирующие пусты.

Пример. На рис. 60 — трехранговая сеть с обратной связью; вторая кривая диаграммы $D_{2,1}^t$ и первая кривая диаграммы $D_{2,2}^t$ начинаются на диаграмме $D_{3,1}^t$. На рис. 61—67 в квадратных скобках расположены результирующие диаграммы операторов сети в различные моменты времени. Из чертежа видно, что результирующая диаграмма сети, т. е. результат работы $D_{3,1}^t$, не пуста, начиная с $(t+1)$ -го момента времени, и что результаты функционирования всех операторов сети периодически повторяются, начиная с $(t+2)$ -го момента времени — результирующие диаграммы в момент $t+2$ графически совпадают с результирующими диаграммами в момент $t+6$.

Определение. Будем говорить, что сеть образует временной цикл длины μ , если результирующие диаграммы всех операторов сети периодически (с периодом μ) повторяются, начиная с некоторого момента времени; этот момент времени будем называть началом цикла.

В нашем примере момент времени $t+2$ является началом цикла, длина которого μ равна 4.

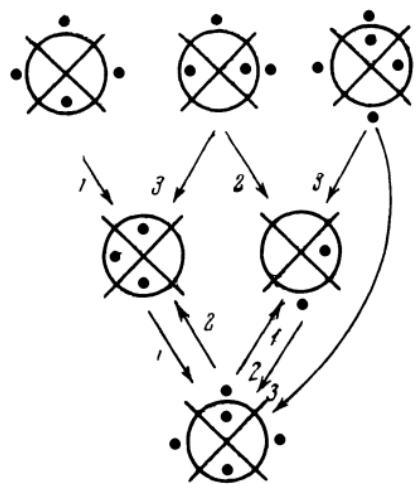


Рис. 60

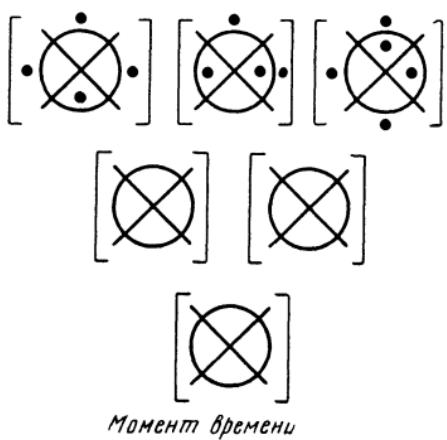
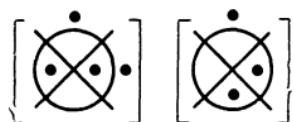
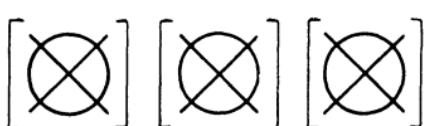
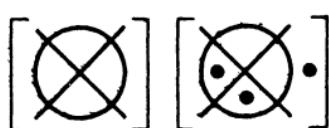


Рис. 61



Момент времени t+

Рис. 62



Момент времени t+2

Рис. 63

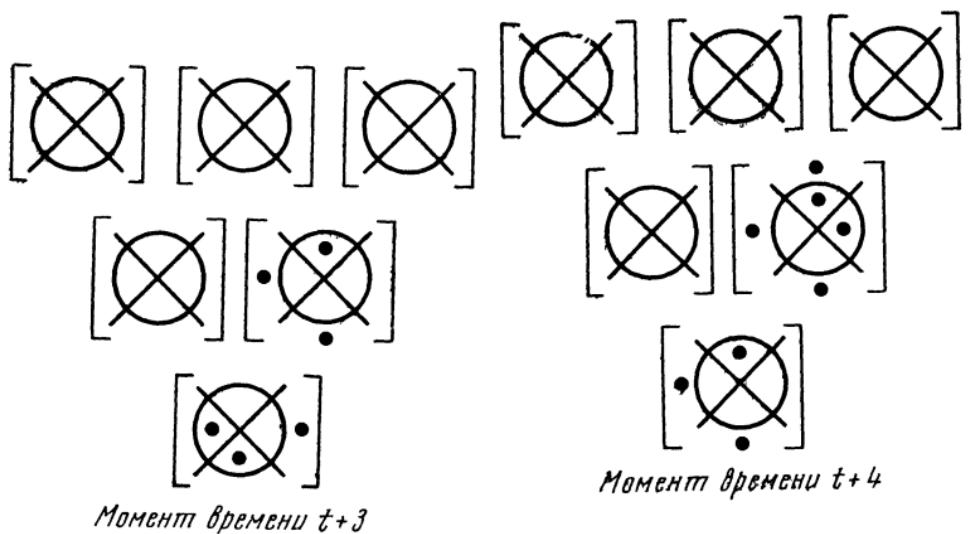


Рис. 64

Момент времени $t+4$

Рис. 65

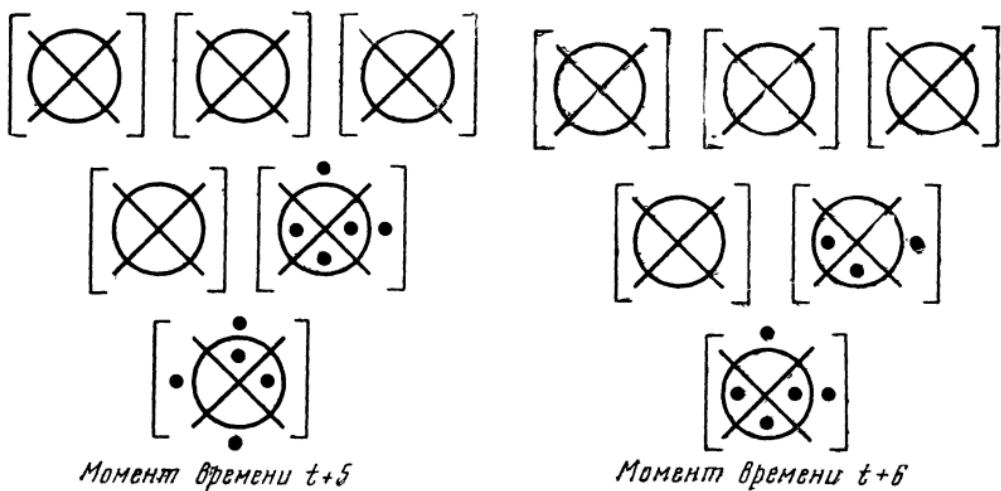


Рис. 66

Рис. 67

§ 2.8. Вероятностные диаграммы

На сетях диаграмм Венна точки в некоторых ячейках операторов не оказывают влияния на соответствующие результирующие диаграммы. Аналогично можно заметить, что в некоторых других ячейках (пустых) операторов можно поставить точки, не изменяя результата работы (что, конечно, ведет к увеличению избыточности сети).

Каждой ячейке диаграммы Венна n переменных взаимно однозначно соответствует определенная последовательность из n единиц и нулей. Среди всех последовательностей, образуемых переменными оператора, можно выделить те, которые не влияют на результат работы этого оператора. Для выделения на операторе ячеек, точки в которых не изменяют результата функционирования оператора или только входных диаграмм сети, можно использовать так называемые вероятностные диаграммы.

Определение. Матрицу из 2^k столбцов и 2^n строк

$$\begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{2^k-1} \\ b_{2^k} & b_{2^k+1} & \dots & b_{2^k+1-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{2^k(2^m-1)} & b_{2(2^m-1)+1} & \dots & b_{2^k+m-1} \end{pmatrix},$$

где $k \geq 0$, $m \geq 0$, $k + m \neq 0$, будем называть вероятностной матрицей n переменных ($n = k + m$), если элементами матрицы являются буквы 0, p , 1, т. е. если $b_i \in \{0, p, 1\}$, $i = 0, \dots, 2^n - 1$.

На языке диаграмм получаем, что вероятностная диаграмма n переменных есть символ Венна n переменных, во всех ячейках которого расположена одна из трех букв 1, p , 0.

В настоящем параграфе рассматривается случай, когда каждая из букв p вероятностной матрицы может принимать значение 1 или 0, независимо от остальных букв p на этой матрице (аналогично см. [10, 25, 83]).

Между вероятностными и бинарными матрицами n переменных можно установить соответствие: по вероятностной матрице n переменных A можно получить 2^l бинарных матриц, где l — количество букв p на матрице

A , заменяя каждую из букв p на 0 и 1, независимо от остальных букв p .

Например, вероятностной матрице

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

соответствуют четыре бинарные матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что строки (столбцы) бинарных матриц можно воспринимать как числа, записанные в двоичной системе счисления. Тогда (для сокращения записи), переводя числа в десятичную систему счисления, любую бинарную матрицу можно представить в виде колонки (строки) десятичных чисел.

Например, последнюю из приведенных выше матриц можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

или $(14, 3, 8, 5)$.

Сеть вероятностных диаграмм является бинарной, если диаграммы сети не содержат букв p .

Бинарную диаграмму будем называть пустой, если на ней нет единиц.

Ясно, что каждой сети бинарных диаграмм взаимно однозначно соответствует сеть диаграмм Венна.

Из вероятностных диаграмм можно конструировать сети. Построение осуществляется аналогично случаю сетей диаграмм Венна. Единственное отличие от последних состоит в предположении, что все входные диаграммы, содержащие, по крайней мере, по одной букве p ,

имеют одинаковое число переменных — обозначим его через n , — а все остальные диаграммы первого ранга имеют число переменных, не превосходящее n . Для простоты будем предполагать далее, что все диаграммы первого ранга имеют одинаковое число переменных.

Как известно, основой надежности является избыточность. Ниже избыточность сетей вероятностных диаграмм будет использована при конструировании надежных устройств из мало надежных элементов. Как обычно, решению задачи синтеза будет предшествовать анализ сетей вероятностных диаграмм — построение их результирующих диаграмм.

Способ 1: Перебор всех бинарных сетей, соответствующих данной сети вероятностных диаграмм. Пусть дана сеть G вероятностных диаграмм с одним выходом. Пусть I — число всех букв r на диаграммах сети G . Заменяя все буквы r единицами и нулями всеми возможными способами, получаем бинарные сети. Число всех бинарных сетей, соответствующих данной сети G , равно 2^I . Для каждой из 2^I сетей бинарных диаграмм можно построить соответствующую результирующую диаграмму n переменных, n — число различных переменных в первом ранге.

Предположим, что все 2^I результирующие диаграммы построены; обозначим их через D_1, \dots, D_{2^I} . Тогда результирующая вероятностная диаграмма исходной сети такова: возьмем символ Венна n переменных; если в ячейках s_1, \dots, s_k на каждой из диаграмм D_1, \dots, D_{2^I} есть единицы, то в соответствующих ячейках s_1, \dots, s_k символа Венна поставим единицы; если ячейки i_1, \dots, i_r на каждой из диаграмм D_1, \dots, D_{2^I} содержат нули, то в соответствующих ячейках символа Венна поставим нули; в каждой из остальных ячеек символа Венна поставим буквы r . В полученной результирующей диаграмме сети G буквы r расположены в тех и только тех ячейках, в которых по крайней мере на одной из диаграмм D_1, \dots, D_{2^I} находятся нули и в которых на некоторых из этих диаграмм обязательно есть единицы.

Если дана сеть G вероятностных диаграмм с несколькими выходами, то результирующие диаграммы для каждого выхода можно строить независимо от остальных выходов.

Остановимся на функционировании сетей вероятностных диаграмм во времени, обращая особое внимание на сети с обратными связями.

Каждой сети вероятностных диаграмм G соответствует 2^I сетей диаграмм Венна, где I — число всех букв r на диаграммах сети G . Если G — сеть с несколькими выходами, то и каждая из 2^I сетей диаграмм Венна имеет столько же выходов.

В каждый данный момент времени $t + i$ (здесь $i \geq 0$) для каждой из 2^I сетей диаграмм Венна можно построить свою результирующую диаграмму (см. § 2.7). Перебирая все 2^I сетей диаграмм Венна в момент времени $t + i$, можно построить результирующие вероятностные диаграммы исходной сети G в момент времени $t + i$ аналогично случаю сетей вероятностных диаграмм без обратных связей (не зависящих от времени).

Для каждой ячейки первого ранга буква в ячейке с тем же номером на результирующей вероятностной диаграмме определяется независимо от букв в остальных ячейках первого ранга, а каждая буква любого оператора, начиная со второго ранга, на бинарной сети функционирует независимо от остальных букв. Поэтому при построении результирующей вероятностной диаграммы можно ограничиться рассмотрением только бинарных сетей, которые получаются, когда все буквы r на каждой вероятностной диаграмме исходной сети принимают одинаковые значения.

Способ 2: Перебор элементарных последовательностей.

Пусть G — произвольная сеть вероятностных диаграмм, n — число различных переменных на каждой из диаграмм первого ранга.

Если G — сеть с обратной связью, то ее поведение исследуется в фиксированные моменты времени $t + i$, $i \geq 0$. Если G — сеть без обратных связей, то ее функционирование можно изучать как независимо от времени, так и в зависимости от момента времени, — сеть работает аналогично сетям с обратными связями.

При анализе сетей, зависящих от времени, основную роль играют связи между диаграммами; на чертежах эти связи выражаются с помощью кривых (иногда кривые можно опускать, тогда они подразумеваются). В момент времени $t + i$, $i \geq 0$ функционируют только те диаграммы сети, на которых оканчиваются стрелки кривых. Все

остальные диаграммы сети будем рассматривать как пустые, — результатом их работы также являются пустые диаграммы. В момент времени t (начальный момент) функционируют только диаграммы первого ранга — входные диаграммы, а все остальные диаграммы считаются пустыми.

Таким образом, в каждый данный момент времени вместе сети G рассматривается другая сеть, отличающаяся от G только тем, что некоторые диаграммы сети G воспринимаются как пустые. Поэтому при изложении второго способа построения результирующих диаграмм мы не будем специально выделять случай, когда работа сети зависит от времени.

Каждой ячейке на диаграммах первого ранга соответствует определенная последовательность S_l из букв 1, p , 0, где l — номер ячейки ($l = 0, \dots, 2^n - 1$), $S_l = \delta_{1,l} \dots \delta_{k,l}$, где k — число диаграмм в первом ранге, $\delta_{i,l} = 1$, 0 или p в зависимости от того, какая из этих букв (1, 0, p) стоит в l -й ячейке на i -й диаграмме первого ранга, $i = 1, \dots, k$. Если среди $\delta_{1,l}, \dots, \delta_{k,l}$ нет букв p , то S_l есть элементарная последовательность. Если среди $\delta_{1,l}, \dots, \delta_{k,l}$ встречается r букв p , то придавая p значение 1 или 0, получим 2^r различных элементарных последовательностей. Для каждой последовательности S_l в случае регулярных сетей можно проследить, переходя от диаграмм j -го ранга к диаграммам $(j + 1)$ -го ранга ($1 \leq j \leq g - 1$, где g — число рангов в сети), какое значение 1, 0, или p принимает данный выход сети G . Для сетей более сложных, чем регулярные, существенную роль играют связи между диаграммами.

Способ 3: Уменьшение числа рангов в регулярной сети вероятностных диаграмм. Первые два способа построения результирующих диаграмм сети связаны с перебором. Для регулярных сетей можно предложить еще один метод нахождения результирующих диаграмм. Он состоит в последовательном уменьшении числа рангов, для чего два последних ранга сети заменяются вероятностными диаграммами их работы. При этом каждую выходную диаграмму сети можно рассматривать как оператор с определенными правилами функционирования. Уменьшая число рангов, мы получаем новую сеть, эквивалентную исходной.

Две сети G_1 и G_2 вероятностных диаграмм назовем эк-

вивалентными, если все результирующие диаграммы сети G_1 и только они являются результирующими диаграммами сети G_2 .

Построим вероятностные диаграммы работы сети, состоящей из двух рангов — последнего и предпоследнего — исходной сети G . Заменим найденными диаграммами два последних ранга сети G . Получим сеть G_1 вероятностных диаграмм, состоящую из $g - 1$ рангов, где g — число рангов в сети G . Сеть G_1 эквивалентна сети G . Действуя таким образом, последовательно уменьшаем число рангов в сети G . В конце концов мы получим одноранговую сеть, диаграммы которой являются результирующими диаграммами сети G .

На каждом шаге описанной процедуры строятся результирующие диаграммы двухранговых сетей. Выходные диаграммы двухранговых сетей можно считать операторами, работающими над диаграммами первого ранга. Введение операторов позволяет полностью исключить перебор. Так как результирующие диаграммы для каждого оператора строятся независимо друг от друга, то мы ограничимся случаем одновыходных сетей. Будем также предполагать, что на выходной диаграмме содержится, по крайней мере, одна из букв $1, p$ (в противном случае результирующая диаграмма имеет, как и оператор, только нули, и тогда выходную диаграмму мы называем пустым оператором).

Правила работы выходного оператора двухранговой сети.

Π_0 : оператор N -переноса. Пусть выходная диаграмма $D_{2,1}^p$ сети G имеет только две ячейки, $n_{k+1} = 1$, $k = 1$, т. е. в первом ранге находится только одна диаграмма $D_{1,1}^p(n)$. Пусть на диаграмме $D_{2,1}^p(1)$ в нулевой ячейке находится 0, в первой — 1; на диаграмме $D_{1,1}^p$ в ячейках β_1, \dots, β_l находятся единицы, в ячейках $\beta_{l+1}, \dots, \beta_r$ — буквы p , в ячейках $\beta_{r+1}, \dots, \beta_{2^n}$ — нули.

Построим символ Венна n переменных; в ячейки поставим буквы, графически равные буквам, лежащим в соответствующих ячейках диаграммы $D_{1,1}^p$. Получим вероятностную диаграмму $\lfloor D_{2,1}^p \rfloor$ — результат работы данной сети G . В этом случае диаграмму $D_{2,1}^p$ называем оператором N -переноса. В силу построения $\lfloor D_{2,1}^p \rfloor \equiv D_{1,1}^p(n)$.

Π_0^p : оператор N_p -переноса. Пусть предположения правила Π_0 сохраняются, за исключением того, что в первой ячейке на $D_{2,1}^p$ стоит не единица, а p . Диаграмму $D_{2,1}^p$ называем оператором N_p -переноса. В ячейках β_1, \dots, β_r , нового символа Венна поставим букву p , в ячейках $\beta_{r+1}, \dots, \beta_{2^n}$ — нули. Получим вероятностную диаграмму $\lfloor D_{2,1}^p \rfloor$.

Π_1 : оператор N -отрицания. Пусть предположения правила Π_0 сохраняются, за исключением того, что на диаграмме $D_{2,1}^p$ в нулевой ячейке находится 1, а в первой — 0. Такую диаграмму $D_{2,1}^p$ будем называть оператором N -отрицания. Построим символ Венна n переменных, в ячейках $\beta_{r+1}, \dots, \beta_{2^n}$ этого символа поставим 1, в ячейках $\beta_{l+1}, \dots, \beta_r$ — поставим p , в ячейках β_1, \dots, β_l , поставим 0. Получим вероятностную диаграмму $\lfloor D_{2,1}^p \rfloor$.

Π_1^p : оператор N_p -отрицания. Пусть предположения правила Π_1 сохраняются, только в нулевой ячейке на диаграмме $D_{2,1}^p$ стоит не единица, а буква p . В этом случае диаграмму $D_{2,1}^p$ называем оператором N_p -отрицания. В ячейках $\beta_{l+1}, \dots, \beta_{2^n}$ символа Венна поставим p , в ячейках β_1, \dots, β_l — нули. Получим вероятностную диаграмму $\lfloor D_{2,1}^p \rfloor$.

Π_2 : оператор N -конъюнкции. Пусть рассматривается сеть G , выходная диаграмма которой имеет четыре ячейки $n_{k+1} = 2$, $k = 2$, т. е. в первом ранге сети G расположены две диаграммы: $D_{1,1}^p(n)$ и $D_{1,2}^p(n)$. Пусть на $D_{2,1}^p(2)$ в третьей ячейке стоит 1, а в остальных ячейках — 0; в ячейках β_1, \dots, β_l диаграмм $D_{1,1}^p$ и $D_{1,2}^p$ находятся единицы; в ячейках $\beta_{l+1}, \dots, \beta_s$ диаграмм $D_{1,1}^p$ и $D_{1,2}^p$ находится p , в ячейках $\beta_{s+1}, \dots, \beta_m - 1$ на диаграмме $D_{1,1}^p$ и буквы p на диаграмме $D_{1,2}^p$, в ячейках $\beta_{m+1}, \dots, \beta_q$ — p на $D_{1,1}^p$ и 1 на $D_{1,2}^p$, во всех остальных ячейках стоит нуль, по крайней мере, на одной из диаграмм $D_{1,1}^p$ или $D_{1,2}^p$. Диаграмму $D_{2,1}^p$ будем называть оператором N -конъюнкции. Построим символ Венна n переменных, в ячейках β_1, \dots, β_l которого поставим 1, в ячейках $\beta_{l+1}, \dots, \beta_q$ поставим p , а во всех остальных ячейках — 0. Получим вероятностную диаграмму $\lfloor D_{2,1}^p \rfloor$ — результат работы оператора N -конъюнкции.

Π_2^p : оператор N_p -конъюнкции. Пусть предположения правила Π_2 сохраняются, за тем исключением, что в третьей ячейке диаграммы $D_{2,1}^p$ стоит не единица, а p . В ячейках

β_1, \dots, β_q построенного символа Венна поставим p , во всех остальных — 0. Получим результирующую вероятностную диаграмму $\lfloor D_{2,1}^p \rfloor$. В этом случае $D_{2,1}^p$ называем оператором N_p -конъюнкции.

П₃. Рассмотрим случай, когда на выходной диаграмме $D_{2,1}^p$ находится только одна отличная от нуля буква — единица. Предположим, что диаграмма $D_{2,1}^p$ отличается от выходных диаграмм в правилах П₀, П₁, П₂. Пусть эта единственная единица на $D_{2,1}^p(m)$ лежит в ячейке $\Delta \sqsupseteq z_1 \dots z_m$, где d_1, \dots, d_m — все графически различные переменные диаграммы $D_{2,1}^p$, $z_j \sqsupseteq \bar{d}_j$,

$$z_j = \begin{cases} d_j, & \text{если } \Delta \text{ принадлежит фигуре } d_j, \\ \bar{d}_j, & \text{если } \Delta \text{ не принадлежит фигуре } d_j, j = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Для определенности пусть $\Delta \sqsupseteq \bar{d}_1 \dots \bar{d}_i d_{i+1} \dots d_m$ ($0 \leq i \leq m$, $i = 0$ означает, что $\Delta \sqsupseteq d_1 \dots d_m$, $i = m$ означает, что $\Delta \sqsupseteq \bar{d}_1 \dots \bar{d}_m$).

Построим N -отрицания диаграмм $D_{1,1}^p(n), \dots, D_{1,i}^p(n)$ (по правилу П₁). К полученным диаграммам $\lfloor D_{1,1}^p \rfloor(n), \dots, \lfloor D_{1,i}^p \rfloor(n)$ и к диаграммам $D_{1,i+1}^p, \dots, D_{1,m}^p$ применим последовательно правило П₂: от диаграмм $\lfloor D_{1,1}^p \rfloor$ и $\lfloor D_{1,2}^p \rfloor$ перейдем к диаграмме D_1^p , от диаграмм D_1^p и $\lfloor D_{1,3}^p \rfloor$ — к диаграмме D_2^p и так далее; от диаграмм D_{i-1}^p и $\lfloor D_{1,i+1}^p \rfloor$ — к диаграмме D_i^p , и так далее; наконец, от D_{m-2}^p и $D_{1,m}^p$ — к диаграмме D_{m-1}^p , являющейся результирующей диаграммой работы исходной сети.

Правило П₃ можно сформулировать также следующим образом:

Перенесем на символ Венна результирующей диаграммы, во-первых, те и только те единицы, для которых соответствующие ячейки на всех диаграммах $D_{1,1}^p, \dots, D_{1,i}^p$ пусты, а ячейки на всех диаграммах $D_{1,i+1}^p, \dots, D_{1,m}^p$ заполнены единицами, во-вторых, те и только те нули, для которых в соответствующих ячейках по крайней мере на одной из диаграмм $D_{1,1}^p, \dots, D_{1,i}^p$ стоит единица, или по крайней мере на одной из диаграмм $D_{1,i+1}^p, \dots, D_{1,m}^p$ — нуль. Во всех остальных ячейках результирующей диаграммы (не заполненных нулями и единицами) расположим по одной букве p .

Правило Π_3 является обобщением правил Π_0 , Π_1 и Π_2 . Поэтому в дальнейшем предполагаем, что Π_0 , Π_1 и Π_2 — частные случаи правила Π_3 .

Π_3^p . Правило Π_3^p отличается от Π_3 только тем, что на диаграмме $D_{2,1}^p$ единица заменена на p , а вместо правила Π_2 применяется правило Π_2^p . Правило формулируется так:

Перенести на символ Венна результирующей диаграммы те и только те нули, для которых в соответствующих ячейках, по крайней мере на одной из диаграмм $D_{1,1}^p$, ..., $D_{1,i}^p$, находится единица или на одной из диаграмм $D_{1,i+1}^p$, ..., $D_{1,m}^p$ — нуль; во всех остальных ячейках поставить буквы p . Аналогично правилу Π_3 , правило Π_3^p является обобщением правил Π_0^p , Π_1^p и Π_2^p .

Π_4 : оператор N -дизъюнкции. Пусть на $D_{2,1}^p(m)$ находится s , $s \geq 1$, отличных от нуля букв $1, p: \Delta_1, \dots, \Delta_r, \dots, \Delta_s$, где $\Delta_i \sqsupseteq 1$, $i = 1, \dots, r$ (где $r \geq 0$); $\Delta_j \sqsupseteq p$, $j = r + 1, \dots, s$ (где $s \geq r$).

По правилу Π_3 для Δ_1 , если $\Delta_1 \sqsupseteq 1$, можно построить вероятностную диаграмму; не обращая внимания на буквы $\Delta_2, \dots, \Delta_s$, сотрем на ней все нули; получим диаграмму C_1 . По правилу Π_3 для Δ_2 , при $\Delta_2 \sqsupseteq 1$, построим вероятностную диаграмму; не обращая внимания на буквы $\Delta_1, \Delta_3, \dots, \Delta_s$, перенесем с нее все знаки $1, p$ в соответствующие ячейки диаграммы C_1 ; получим диаграмму C_2 , в некоторых ячейках которой могут содержаться две буквы p . И так далее.

По правилу Π_3 для Δ_r , при $\Delta_r \sqsupseteq 1$, построим вероятностную диаграмму, не обращая внимания на буквы $\Delta_1, \dots, \Delta_{r-1}, \Delta_{r+1}, \dots, \Delta_s$; перенесем с нее все знаки $1, p$ в соответствующие ячейки диаграммы C_{r-1} ; получим диаграмму C_r .

По диаграмме C_r построим вероятностную диаграмму $D_r^p(n)$. В ячейках β_i этой диаграммы, соответствующих пустым ячейкам диаграммы C_r , поставим 0; в ячейке β_i поставим 1, если 1 находится в ячейке β_i диаграммы C_r , или, если в m -членной последовательности из знаков $1, 0, p$, соответствующей ячейке β_i вероятностных диаграмм первого ранга, находится только t букв p , а в ячейке β_i диаграммы C_r находится 2^t букв p . Пусть β_1, \dots, β_u — все ячейки, в которых поставлена одна из букв $1, 0$. Во всех остальных ячейках поставим по одной букве p . Полу-

чим диаграмму $D_r^p(n)$. Если $r = 0$, то будем считать, что на $D_r^p(n)$ находятся только нули.

По правилу Π_3^p для Δ_{r+1} , при $\Delta_{r+1} \sqsupseteq p$, построим вероятностную диаграмму, не обращая внимания на буквы $\Delta_1, \dots, \Delta_r, \Delta_{r+2}, \dots, \Delta_s$; перенесем с нее знаки p в соответствующие ячейки диаграммы $D_r^p(n)$, не занятые 1, p (заменив 0 на p); получим диаграмму $D_{r+1}^p(n)$. И так далее.

По правилу Π_3^p для Δ_s , при $\Delta_s \sqsupseteq p$, построим вероятностную диаграмму, не обращая внимания на буквы $\Delta_1, \dots, \Delta_{s-1}$; перенесем с нее знаки p в соответствующие ячейки диаграммы $D_{s-1}^p(n)$, не занятые 1, p (заменив 0 на p); получим диаграмму $D_s^p(n)$ — результат работы исходной сети. В этом случае диаграмму $D_{2,1}^p(m)$ называем оператором N -дизъюнкции, а диаграмму $D_s^p(n)$ — результатом функционирования оператора N -дизъюнкции.

При построении вероятностной диаграммы работы регулярной сети третий способ предпочтительнее, потому что выходная диаграмма двухранговых сетей есть оператор с указанными правилами работы. У многоранговых регулярных сетей последовательное уменьшение рангов можно вести снизу вверх, заменив два последних ранга сети вероятностной диаграммой их работы, но нельзя вести сверху вниз, — нельзя заменять первые два ранга сети результатами работы соответствующих двухранговых сетей.

Рассмотренные правила работы выходных операторов двухранговых сетей связаны с операциями исчисления высказываний не только по названию. Если ограничиться бинарными сетями, то оператору N -отрицания соответствует операция отрицания, оператору N -конъюнкции — операция конъюнкции, а результату работы оператора N -дизъюнкции соответствует s -кратное применение операции дизъюнкции (s — количество единиц оператора N -дизъюнкции).

Определения. Сеть вероятностных диаграмм называется надежной, если результирующие диаграммы этой сети не содержат букв p .

Сеть называется не вполне надежной, если среди ее результирующих диаграмм имеется по крайней мере одна, содержащая буквы p .

§ 2.9. Надежные сети вероятностных диаграмм

На языке вероятностных диаграмм задача построения надежных сетей из не вполне надежных элементов ставится следующим образом.

Даны бинарные диаграммы n переменных

$$D_1^p(n), \dots, D_k^p(n), \quad k \geq 1.$$

Требуется построить надежную сеть G вероятностных диаграмм, состоящую из g рангов, $g > 1$, и имеющую в r -м ранге n_r вероятностных диаграмм, содержащих максимально возможное число букв p , $r = 1, \dots, g$, так, чтобы результирующими диаграммами сети G являлись только данные бинарные диаграммы

$$D_1^p(n), \dots, D_k^p(n).$$

Предложим способ синтеза двухранговых надежных сетей вероятностных диаграмм с одним выходом. Сети будем строить так, чтобы диаграммы первого ранга имели в среднем одинаковое число букв p . Для простоты ограничимся рассмотрением регулярных сетей.

Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ — номера ячеек данной бинарной диаграммы, в которых расположены единицы.

1. Начертим m символов Венна n переменных: M_1, \dots, M_m . В ячейках с номерами $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ каждого символа поставим единицы. Расположим $2^n - l$ нулей так, чтобы для любого k , $k \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$, $k \neq \alpha_1, \dots, \alpha_l$, существовал символ M_i , $i = 1, \dots, m$ в k -й ячейке которого находится нуль, и чтобы на каждом M_i осталось в среднем одинаковое число пустых ячеек, в которых поставим по одной букве p . Построенные вероятностные диаграммы обозначим $\mathfrak{U}_{1,1}, \dots, \mathfrak{U}_{1,m}$. Образуем N -отрицания диаграмм $\mathfrak{U}_{1,i}$, $i = 1, \dots, m$: $\neg \mathfrak{U}_{1,i}$, где \neg — знак N -отрицания.

2. Из каждой пары $\mathfrak{U}_{1,i}$ и $\neg \mathfrak{U}_{1,i}$ выделим в первый ранг сети по одной диаграмме, которую обозначим $\mathfrak{B}_{1,i}$, $i = 1, \dots, m$.

3. Начертим символ Венна $M_{m+1} m$ переменных. Каждой ячейке $\beta_1 \dots \beta_m$, где β_i есть 0 или 1, символа M_{m+1} поставим в соответствие диаграмму

$$\mathfrak{C}_{\beta_1 \dots \beta_m} \equiv (\Delta_1 \mathfrak{B}_{1,1} \& \dots \& \Delta_m \mathfrak{B}_{1,m}),$$

где $\Delta_j \equiv \Lambda$, если $\beta_j = 1$, $\Delta_j \equiv \neg$, если $\beta_j = 0$, $\&$ —

знак N -конъюнкции, $\beta_1 \dots \beta_m$ — номер ячейки на M_{m+1} в двоичной системе.

В ячейке $\beta_1^0 \dots \beta_m^0$, где $\beta_j^0 = 1$, если $\mathfrak{B}_{1,j} \equiv \mathfrak{A}_{1,j}$ и $\beta_j^0 = 0$, если $\mathfrak{B}_{1,j} \neq \mathfrak{A}_{1,j}$, поставим единицу, предполагая, что $l \geq 1$. Тогда $\mathfrak{C}_{\beta_1^0 \dots \beta_m^0} \equiv \mathfrak{C}$, где \mathfrak{C} — данная бинарная диаграмма, и для любой ячейки с номером β_1, \dots, β_m , отличном от $\beta_1^0 \dots \beta_m^0$, диаграмма $\mathfrak{C}_{\beta_1 \dots \beta_m}$ не совпадает с \mathfrak{C} .

Если $l = 0$ (в этом случае данная бинарная диаграмма \mathfrak{C} соответствует тождественно ложной формуле исчисления высказываний), то в ячейке $\beta_1^0 \dots \beta_m^0$ на M_{m+1} поставим p , $\mathfrak{C}_{\beta_1^0 \dots \beta_m^0} \equiv 0$.

4. Среди ячеек на M_{m+1} , отличных от $\beta_1^0 \dots \beta_m^0$, выделим такие, для которых $\mathfrak{C}_{\beta_1 \dots \beta_m} \equiv 0$. В этих ячейках на M_{m+1} поставим по одной букве p . Во всех остальных ячейках M_{m+1} поставим нули, получим сеть, каждая вероятностная диаграмма первого ранга которой имеет p букв p ,

$$\mu = 2^n - \frac{2^n - l}{m} - l, \text{ если } \frac{2^n - l}{m} \text{ — целое, } \mu = 2^n - \left[\frac{2^n - l}{m} \right] - l$$

или $\mu = 2^n - \left[\frac{2^n - l}{m} \right] - l - 1$, если $\frac{2^n - l}{m}$ не является целым $\left(\left[\frac{2^n - l}{m} \right] \text{ — целая часть числа } \frac{2^n - l}{m} \right)$; при этом в любой другой двухранговой сети (с одним выходом и с одной единицей на выходном операторе), результирующей диаграммой которой является диаграмма \mathfrak{C} , существует диаграмма первого ранга, количество букв p на которой не превосходит $2^n - \left[\frac{2^n - l}{m} \right] - l$.

5. Каждой ячейке диаграмм первого ранга построенной сети соответствует определенная m -членная последовательность из букв 1, 0, p . Такую последовательность будем называть N_i -последовательностью, где i — номер соответствующей ячейки. В каждой N_i -последовательности имеется не более $m - 1$ букв p . Все N_i -последовательности делятся на группы, состоящие из одинаковых последовательностей. Всего таких групп не более $m + 1$.

Если в ячейке с номером $\beta_1^{00} \dots \beta_m^{00}$ (в двоичной системе) символа M_{m+1} заменим 0 на p , то для того, чтобы диаграмма $\mathfrak{C}_{\beta_1^{00} \dots \beta_m^{00}}$ была пустой (т. е. не влияла на результат рабо-

ты сети), в каждой N_i -последовательности по крайней мере на одном из мест j_1, \dots, j_r ($\beta_{j_1}^{00} = \dots = \beta_{j_r}^{00} = 1$) или на одном из мест s_1, \dots, s_u ($\beta_{s_1}^{00} = \dots = \beta_{s_u}^{00} = 0$) поставим соответственно нуль или единицу. Таким образом, при увеличении числа букв p на M_{m+1} количество букв p на

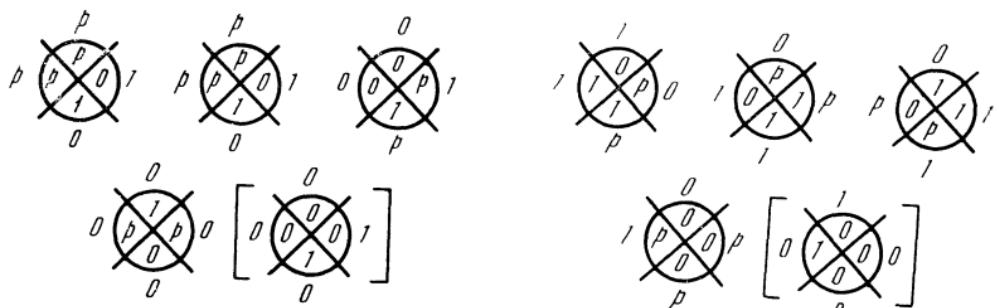


Рис. 68

69

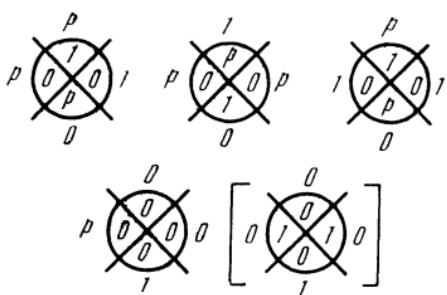


Рис. 70

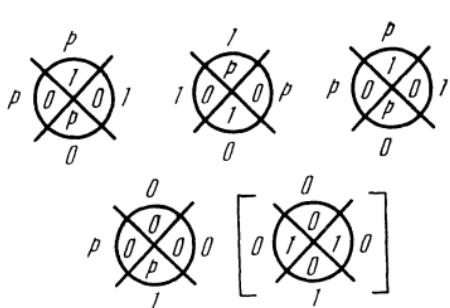


Рис. 71

диаграммах первого ранга может убывать. Наибольшее число букв p на M_{m+1} не превосходит $2^m - 1$, число $2^m - 1$ может быть получено, например, когда во всех ячейках данной бинарной диаграммы \mathfrak{C} находятся единицы.

Например, двухранговые надежные сети из не вполне надежных элементов (рис. 68—70), построенные этим способом, реализуют, соответственно, формулы

$$\begin{aligned} & (\bar{a}_1 \bar{a}_2 a_3 \vee \bar{a}_1 a_2 \bar{a}_3), \\ & (a_1 \bar{a}_2 a_3 \vee a_1 a_2 \bar{a}_3), \\ & (\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \vee \bar{a}_1 a_2 a_3 \vee a_1 \bar{a}_2 a_3). \end{aligned}$$

Количество букв на входном операторе рис. 70 можно увеличить, не изменяя результата работы сети (рис. 71).

Нетрудно показать, что невозможно составить надежную сеть, у которой (1) выходная диаграмма имеет две переменные, (2) все операторы содержат не менее одной буквы p и (3) формула результирующей диаграммы не является ни тождественно ложной, ни тождественно истинной.

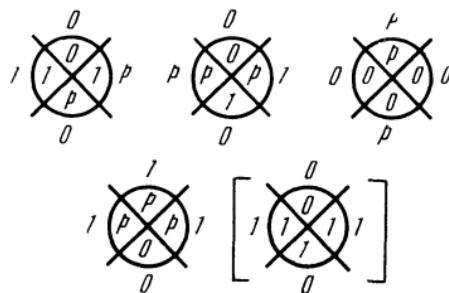


Рис. 72

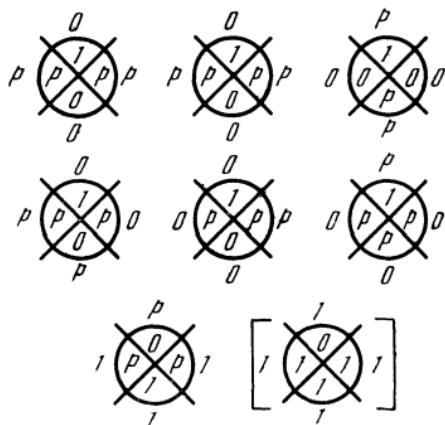


Рис. 73

Описанный способ является обобщением способа, предложенного Мак-Каллоком [25]. Использование свойств оператора N -дизъюнкции позволяет увеличить число единиц на результирующей диаграмме. Так, на рис. 72 синтезирована надежная сеть из не вполне надежных элементов, реализующая СДНФ

$$(\bar{a}_1 \bar{a}_2 a_3 \vee \bar{a}_1 a_2 \bar{a}_3 \vee \bar{a}_1 a_2 a_3 \vee a_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \vee a_1 \bar{a}_2 a_3),$$

или эквивалентную ей СКНФ

$$(a_1 \vee a_2 \vee a_3) \& (\neg a_1 \vee \neg a_2 \vee a_3) \& (\neg a_1 \vee \neg a_2 \vee \neg a_3).$$

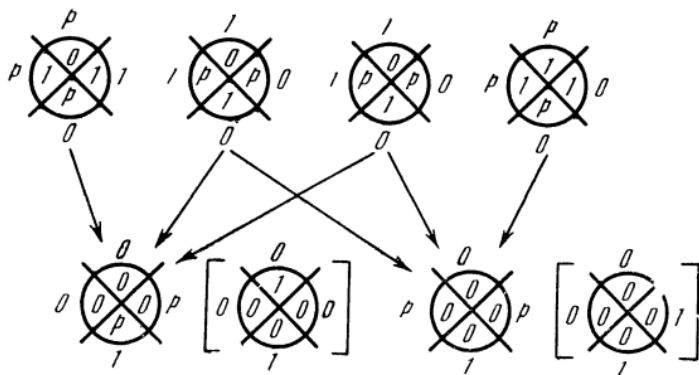


Рис. 74

Кроме того, можно также конструировать надежные сети из не вполне надежных элементов, имеющие более двух рангов (рис. 73) или несколько выходов (рис. 74).

§ 2.10. Вероятностные диаграммы (продолжение)

Определяя выше (§ 2.8) вероятностную диаграмму (матрицу) и изучая сети таких диаграмм (матриц), мы нигде по существу не пользовались понятием вероятности. Буква p играла роль неинтерпретируемого символа, о котором говорилось только, что он может принимать значения 0 и 1. Между тем название для этого класса диаграмм выбрано не случайно, и диаграмме действительно можно придать вероятностный смысл. Первые шаги в этом направлении сделаны Мак-Каллоком [25]. Оказывается, что при этом более глубоко проясняются идеи, лежащие в основе алгорифмов построения надежных сетей.

Изложение начнем с разбора соответствующего аналитического аппарата.

Случайной булевой функцией F n аргументов назовем случайную функцию, определенную для всевозможных наборов значений аргументов, принимающих два значения 0 и 1, значениями которой являются случайные величины, могущие принимать тоже только два значения 0 и 1.

Как и выше, будем рассматривать наборы n нулей и единиц как двоичные записи чисел от 0 до $2^n - 1$. Тогда

на наборе, которому соответствует число i , $0 \leq i \leq 2^n - 1$, значением функции F окажется случайная величина A_i , принимающая значение 1 с вероятностью p_i , и значение 0 с вероятностью $1 - p_i$.

Для случайной булевой функции F рассмотрим функцию Φ n переменных, определенную на тех же наборах, что и F , и равную p_i на наборе, которому соответствует число i . Такую функцию Φ назовем вероятностной функцией случайной функции F .

Очевидно, что задание вероятностной функции вполне определяет случайную булеву функцию. Поэтому в дальнейшем будем иметь дело исключительно с вероятностными функциями. Независимое от понятия случайной булевой функции определение вероятностной функции Φ состоит в том, что это — функция n переменных, определенная на наборах нулей и единиц, значения которой удовлетворяют условию $0 \leq \Phi(x_1, \dots, x_n) \leq 1$. В частности, все булевые функции входят в класс вероятностных функций.

Наглядный смысл вероятностных функций состоит в следующем. Пусть имеется некоторое техническое устройство с n входами и с одним выходом, существующее вычислять некоторую определенную булеву функцию n переменных (булеву функцию n переменных можно представлять в виде диаграммы Венна n переменных). Идеально функционирующее устройство в ответ на любую комбинацию входных воздействий выдает вполне определенный выходной сигнал, обозначаемый 0 или 1. Предположим, однако, что устройство функционирует не идеально. В таком случае для любой комбинации входных воздействий определена лишь вероятность того, что на выходе будет 1 (в частности, она может превращаться в уверенность: $p = 1$ или $p = 0$).

Руководствуясь этой наглядной картиной и некоторыми элементарными теоретико-вероятностными соображениями, определим над вероятностными функциями ряд операций.

Во-первых, предположим, что выход устройства проpusкается через инвертор, который, со своей стороны, работает вполне надежно. Очевидно, что, если на выходе устройства с вероятностью p была единица, то на выходе инвертора с такой же вероятностью будет нуль, а единица на выходе инвертора будет с вероятностью $1 - p$.

Это дает основание для следующего определения операции отрицания.

Пусть F — вероятностная функция. Операция отрицания дает новую вероятностную функцию, которую обозначим \bar{F} , причем $p_i^{\bar{F}} \Leftrightarrow 1 - p_i^F$ [выражение « p_i^Φ » обозначает значение функций Φ на наборе с номером i , предполагаем (как и выше), что наборы занумерованы теми числами i , двоичными изображениями которых эти наборы являются].

Во-вторых, пусть выходы двух устройств подведены к прибору, осуществляющему конъюнкцию. Если вероятность появления 1 на выходе первого устройства есть p , а вероятность появления 1 на выходе второго устройства есть q , то вероятность получить 1 на выходе прибора равна pq (в предположении, естественно, независимости событий).

Если же на прибор, реализующий конъюнкцию, дважды подается выход одного и того же устройства, то вероятность получить на выходе прибора 1 будет, очевидно, p (а не p^2). Введем теперь операцию конъюнкции.

Операция конъюнкции, примененная к различным вероятностным функциям F и Φ , дает функцию $(F \& \Phi)$ такую, что

$$p_i^{(E \& \Phi)} \Leftrightarrow p_i^F \cdot p_i^\Phi. \quad p_i^{(\Phi \& F)} \Leftrightarrow p_i^\Phi.$$

Таким образом, при применении операции конъюнкции к двум функциям их значения на одном и том же наборе подвергаются операции квазумножения, отличающегося от обычного умножения действительных чисел тем, что $p_i^\Phi \cdot p_i^\Phi = p_i^\Phi$. Поэтому мы помечаем вероятности p_i индексом вверху, указывающим соответствующую функцию.

В-третьих, пусть выходы двух устройств подведены к прибору, осуществляющему дизъюнкцию. Вероятность того, что на выходе прибора появится 1, равна, очевидно,

$$\begin{aligned} pq + p(1 - q) + (1 - p)q &= pq + p - pq + \\ &+ q - pq = p + q - pq. \end{aligned}$$

Если мы имеем дело с одним устройством, то, как и для конъюнкции, вероятность появления единицы будет просто p . Легко видеть, что мы получим это автоматически, если

будем понимать умножение как квазиумножение:

$$p + p - pp = p + p - p = p.$$

Определение. Операция дизъюнкции, примененная к вероятностным функциям F и Φ , дает вероятностную функцию $(F \vee \Phi)$ такую, что

$$p_i^{(F \vee \Phi)} \Leftrightarrow p_i^F + p_i^\Phi - p_i^F p_i^\Phi,$$

где умножение понимается как квазиумножение.

Наконец, дадим еще определение операции умножения вероятностной функции на число.

Операция умножения вероятностной функции F на число q , $0 \leq q \leq 1$, дает $\Phi \sqsubseteq qF$, $p_i^\Phi \Leftrightarrow qp_i^F$.

Эта операция, очевидно, не выводит за пределы класса вероятностных функций. Ей тоже можно дать теоретико-вероятностное истолкование: p_i^Φ есть вероятность появления единицы при условии, что произошло некоторое другое событие, вероятность которого есть q , и которое не зависит от первого (например, при условии, что применяются преобразователи, о которых речь шла выше).

Обозначим через 1 функцию, которая на всех наборах равна 1, а через 0 — функцию, которая на всех наборах равна 0. Определим импликацию и эквивалентность вероятностных функций F и Φ : $(F \supset \Phi) \Leftrightarrow (\bar{F} \vee \Phi)$,

$$(F \equiv \Phi) \Leftrightarrow ((F \supset \Phi) \& (\Phi \supset F)).$$

Из определения операций непосредственно следует:

$$\begin{aligned} (F \& 1) &\equiv F, & (1 \& F) &\equiv F, & (F \& 0) &\equiv 0, & (0 \& F) &\equiv 0, \\ (F \vee 1) &\equiv 1, & (1 \vee F) &\equiv 1, & (F \vee 0) &\equiv F, & (0 \vee F) &\equiv F \end{aligned}$$

для любой функции F .

Для конъюнкции и дизъюнкции непосредственно следует коммутативность этих операций:

$$(F \& \Phi) \equiv (\Phi \& F), \quad (F \vee \Phi) \equiv (\Phi \vee F)$$

и их ассоциативность:

$$(F \& (\Phi \& \Psi)) \equiv ((F \& \Phi) \& \Psi),$$

$$(F \vee (\Phi \vee \Psi)) \equiv ((F \vee \Phi) \vee \Psi).$$

Докажем ассоциативность дизъюнкции.

$((F \vee \Phi) \vee \Psi)$ означает: $p_i^F + p_i^\Phi - p_i^F p_i^\Phi + p_i^\Psi - (p_i^F + p_i^\Phi - p_i^F p_i^\Phi) p_i^\Psi = p_i^F + p_i^\Phi + p_i^\Psi - p_i^F p_i^\Phi - p_i^F p_i^\Psi - p_i^\Phi p_i^\Psi + p_i^F p_i^\Phi p_i^\Psi$;

с другой стороны, $(F \vee (\Phi \vee \Psi))$ дает: $p_i^F + p_i^\Phi + p_i^\Psi - p_i^\Phi p_i^\Psi - p_i^F (p_i^\Phi + p_i^\Psi - p_i^\Phi p_i^\Psi) = p_i^F + p_i^\Phi + p_i^\Psi - p_i^F p_i^\Phi - p_i^F p_i^\Psi - p_i^\Phi p_i^\Psi + p_i^F p_i^\Phi p_i^\Psi$,

таким образом, $((F \vee \Phi) \vee \Psi) \equiv (F \vee (\Phi \vee \Psi))$.

Докажем дистрибутивность дизъюнкции по отношению к конъюнкции.

$((F \vee \Phi) \& \Psi)$ дает: $(p_i^F + p_i^\Phi - p_i^F p_i^\Phi) p_i^\Psi = p_i^F p_i^\Psi + p_i^\Phi p_i^\Psi - p_i^F p_i^\Phi p_i^\Psi$,

с другой стороны, $((F \& \Psi) \vee (\Phi \& \Psi))$ означает $p_i^F p_i^\Psi + p_i^\Phi p_i^\Psi - p_i^F p_i^\Psi p_i^\Phi p_i^\Psi = p_i^F p_i^\Psi + p_i^\Phi p_i^\Psi - p_i^F p_i^\Phi p_i^\Psi$.

Таким образом, $((F \vee \Phi) \& \Psi) \equiv ((F \& \Psi) \vee (\Phi \& \Psi))$.

Докажем дистрибутивность конъюнкции по отношению к дизъюнкции.

$((F \& \Phi) \vee \Psi)$ дает: $p^F p^\Phi + p^\Psi - p^F p^\Phi p^\Psi$ (для сокращения вместо p_i пишем p); $((F \vee \Psi) \& (\Phi \vee \Psi))$ дает: $(p^F + p^\Psi - p^F p^\Psi) (p^\Phi + p^\Psi - p^\Phi p^\Psi) = p^F p^\Phi + p^\Psi p^\Phi - p^F p^\Psi p^\Phi + p^F p^\Psi + p^\Psi p^\Phi - p^F p^\Psi p^\Psi - p^F p^\Phi p^\Psi - p^\Psi p^\Phi p^\Psi + p^F p^\Psi p^\Phi p^\Psi = p^F p^\Phi + p^\Phi p^\Psi - p^F p^\Phi p^\Psi + p^F p^\Psi + p^\Psi - p^F p^\Psi - p^F p^\Phi p^\Psi - p^\Phi p^\Psi + p^F p^\Phi p^\Psi = p^\Psi + p^F p^\Phi - p^F p^\Phi p^\Psi$, таким образом, $((F \& \Phi) \vee \Psi) \equiv ((F \vee \Psi) \& (\Phi \vee \Psi))$.

Законы де-Моргана тоже имеют место:

$\overline{(F \& \Phi)}$ дает: $1 - p^F p^\Phi$,

$\overline{(F \vee \Phi)}$ дает: $(1 - p^F) + (1 - p^\Phi) - (1 - p^F)(1 - p^\Phi) = 1 - p^F + 1 - p^\Phi - 1 + p^F + p^\Phi - p^F p^\Phi = 1 - p^F p^\Phi$, т. е. $\overline{(F \& \Phi)} \equiv \overline{(F \vee \Phi)}$.

$\overline{(F \vee \Phi)}$ дает: $1 - p^F - p^\Phi + p^F p^\Psi$;

$\overline{(F \& \Phi)}$ дает: $(1 - p^F)(1 - p^\Phi) = 1 - p^F - p^\Phi + p^F p^\Phi$ и, таким образом, $\overline{(F \vee \Phi)} \equiv \overline{(F \& \Phi)}$.

Наконец, очевидным образом

$$(F \& \bar{F}) \equiv 0 \text{ дает: } p^F(1 - p^F) = p^F - p^F p^F = p^F - p^F = 0,$$
$$(F \vee \bar{F}) \equiv 1 \text{ дает: } p^F + 1 - p^F = 1.$$

Все это показывает, что алгебра вероятностных функций является моделью для аксиом булевой алгебры.

Имеет место теорема о разложении, являющаяся точным аналогом теоремы о разложении булевой функции в совершенную дизъюнктивную нормальную форму:

Пусть x_j^0 есть \bar{x}_j , x_j^1 есть x_j , вместо $(x_i \& x_k)$ пишем просто $x_i x_k$, тогда $F(x_1, \dots, x_n) \equiv \bigvee_{0 \leq i \leq 2^n - 1} p_i^F x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$, где $i_1 \dots i_n$ есть двоичная запись числа i .

Дадим аналитический аналог понятия сети вероятностных диаграмм. Начнем с двухранговой регулярной сети.

Пусть дана вероятностная функция n переменных $F(b_1, \dots, b_n)$ и n вероятностных функций (тоже n переменных) $b_1(a_1, \dots, a_n), \dots, b_n(a_1, \dots, a_n)$. Эту совокупность можно, очевидно, рассматривать как аналитический аналог двухранговой регулярной сети вероятностных диаграмм, результирующей функцией которой является $F(b_1(a_1, \dots, a_n), \dots, b_n(a_1, \dots, a_n))$. Здесь используется понятие подстановки вероятностной функции в вероятностную функцию; его достаточно определить для элементарных функций x_1, \dots, x_n и операций \neg , $\&$, \vee , так как по теореме о разложении любая вероятностная функция выражается с помощью этих средств. Определение обычное:

$$F_{\Phi \sqsubset}^{x_i} x_k \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi, & \text{если } i = k, \\ x_k, & \text{если } i \neq k; \end{cases} \quad F_{\Phi \sqsubset}^{x_i} \bar{\Psi} \Leftrightarrow \overline{F_{\Phi \sqsubset}^{x_i} \Psi};$$
$$F_{\Phi \sqsubset}^{x_i} (\Psi \& \chi) \Leftrightarrow (F_{\Phi \sqsubset}^{x_i} \Psi \& F_{\Phi \sqsubset}^{x_i} \chi);$$
$$F_{\Phi \sqsubset}^{x_i} (\psi \vee \chi) \Leftrightarrow (F_{\Phi \sqsubset}^{x_i} \psi \vee F_{\Phi \sqsubset}^{x_i} \chi).$$

Теорема. Пусть дана двухранговая сеть $F(b_1, \dots, b_n), b_1(a_1, \dots, a_n), \dots, b_n(a_1, \dots, a_n)$. Тогда результирующая функция сети Φ определяется соотношением

$$p^\Phi = \sum_{0 \leq j \leq 2^n - 1} p_j^F (p^{b_1})^{j_1} (p^{b_2})^{j_2} \dots (p^{b_n})^{j_n},$$

где $j_1 \dots j_n$ есть двоичная запись числа j ; а $(p^{b_k})^1 \Leftrightarrow p^{b_k}$,

$$(p^{b_k})^0 \Leftrightarrow 1 - p^{b_k}.$$

$$\Phi(a_1, \dots, a_n) \equiv F(b_1(a_1, \dots, a_n), \dots, b_n(a_1, \dots, a_n)).$$

Доказательство. Возьмем СДНФ для F и подставим вместо b_1, \dots, b_n их СДНФ, заметив предварительно, что $\bar{b}_i(a_1, \dots, a_n) \equiv \bigvee_k (p_k^{b_i})^0 a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n}$ (следует непосредственно из определения операции отрицания).

В силу определения конъюнкции $((a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n}) \& (a_1^{k'_1} \dots a_n^{k'_n})) \equiv 0$, если набор $k_1 \dots k_n$ отличен от набора $k'_1 \dots k'_n$. Поэтому мы получим:

$\Phi(a_1, \dots, a_n) \equiv \bigvee_i p_i^F (\bigvee_j (p_j^{b_1})^{i_1} (p_j^{b_2})^{i_2} \dots (p_j^{b_n})^{i_n} a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n})$ ($i_1 \dots i_n$ — двоичная запись числа i ; $j_1 \dots j_n$ — двоичная запись числа j). Теперь заметим, что если $i_1 \dots i_n$ не совпадает с $i'_1 \dots i'_n$, то $(p_j^{b_1})^{i_1} \dots (p_j^{b_n})^{i_n} (p_j^{b_1})^{i'_1} \dots (p_j^{b_n})^{i'_n} = 0$ (в силу свойств квазиумножения). Следовательно, $(p_i^F (p_j^{b_1})^{i_1} \dots (p_j^{b_n})^{i_n} a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n}) \bigvee p_k^F (p_j^{b_1})^{k_1} \dots (p_j^{b_n})^{k_n} a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n}) \equiv \equiv (p_i^F (p_j^{b_1})^{i_1} \dots (p_j^{b_n})^{i_n} + p_k^F (p_j^{b_1})^{k_1} \dots (p_j^{b_n})^{k_n}) a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n}$, и мы получаем искомое, сгруппировав $a_1^{j_1} \dots a_n^{j_n}$.

Проиллюстрируем теорему на случае $n = 2$. \bar{p} означает p^0 . Имеем $F(b_1, b_2) \equiv (p_0^F \bar{b}_1 \bar{b}_2 \bigvee p_1^F \bar{b}_1 b_2 \bigvee p_2^F b_1 \bar{b}_2 \bigvee \bigvee p_3^F b_1 b_2)$, $b_i \equiv (p_0^{b_i} \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bigvee p_1^{b_i} \bar{a}_1 a_2 \bigvee p_2^{b_i} a_1 \bar{a}_2 \bigvee p_3^{b_i} a_1 a_2)$, $i = 1, 2$, откуда $\bar{b}_i \equiv (\bar{p}_0^{b_i} \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bigvee \bar{p}_1^{b_i} \bar{a}_1 a_2 \bigvee \bar{p}_2^{b_i} a_1 \bar{a}_2 \bigvee \bar{p}_3^{b_i} a_1 a_2)$. Подставим b_i, \bar{b}_i в $F(b_1, b_2)$:

$$\begin{aligned} & (p_0^F (\bar{p}_0^{b_1} \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bigvee \bar{p}_6^{b_1} \bar{a}_1 a_2 \bigvee \bar{p}_2^{b_1} a_1 \bar{a}_2 \bigvee \bar{p}_3^{b_1} a_1 a_2)) (\bar{p}_0^{b_2} \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bigvee \\ & \quad \bigvee \bar{p}_1^{b_2} \bar{a}_1 a_2 \bigvee \bar{p}_2^{b_2} a_1 \bar{a}_2 \bigvee \bar{p}_3^{b_2} a_1 a_2) \bigvee p_1^F (\bar{p}_0^{b_1} \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bigvee \\ & \quad \bigvee \bar{p}_1^{b_1} \bar{a}_1 a_2 \bigvee \bar{p}_2^{b_1} a_1 \bar{a}_2 \bigvee \bar{p}_3^{b_1} a_1 a_2) (p_0^{b_2} \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bigvee p_1^{b_2} \bar{a}_1 a_2 \bigvee \\ & \quad \bigvee p_2^{b_2} a_1 \bar{a}_2 \bigvee p_3^{b_2} a_1 a_2) \bigvee p_2^F (p_0^{b_1} \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bigvee p_1^{b_1} \bar{a}_1 a_2 \bigvee \\ & \quad \bigvee p_2^{b_1} a_1 \bar{a}_2 \bigvee p_3^{b_1} a_1 a_2) (\bar{p}_0^{b_2} \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bigvee \bar{p}_1^{b_2} \bar{a}_1 a_2 \bigvee \bar{p}_2^{b_2} a_1 \bar{a}_2 \bigvee \\ & \quad \bigvee \bar{p}_3^{b_2} a_1 a_2) \bigvee p_3^F (p_0^{b_1} \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bigvee p_1^{b_1} \bar{a}_1 a_2 \bigvee p_2^{b_1} a_1 \bar{a}_2 \bigvee p_3^{b_1} a_1 a_2) \\ & \quad (p_0^{b_2} \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bigvee p_1^{b_2} \bar{a}_1 a_2 \bigvee p_2^{b_2} a_1 \bar{a}_2 \bigvee p_3^{b_2} a_1 a_2) \equiv \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv ((p_0^F \bar{p}_0^{b_1} \bar{p}_0^{b_2} + p_1^F \bar{p}_0^{b_1} p_0^{b_2} + p_2^F p_0^{b_1} \bar{p}_0^{b_2} + p_3^F p_0^{b_1} p_0^{b_2}) \bar{a}_1 \bar{a}_2 \vee \\
&\quad \vee (p_0^F \bar{p}_1^{b_1} \bar{p}_1^{b_2} + p_1^F \bar{p}_1^{b_1} p_1^{b_2} + p_2^F p_1^{b_1} \bar{p}_1^{b_2} + p_3^F p_1^{b_1} p_1^{b_2}) \bar{a}_1 a_2 \vee \\
&\quad \vee (p_0^F \bar{p}_2^{b_1} \bar{p}_2^{b_2} + p_1^F \bar{p}_2^{b_1} p_2^{b_2} + p_2^F p_2^{b_1} \bar{p}_2^{b_2} + p_3^F p_2^{b_1} p_2^{b_2}) a_1 \bar{a}_2 \vee \\
&\quad \vee (p_0^F \bar{p}_3^{b_1} \bar{p}_3^{b_2} + p_1^F \bar{p}_3^{b_1} p_3^{b_2} + p_2^F p_3^{b_1} \bar{p}_3^{b_2} + p_3^F p_3^{b_1} p_3^{b_2}) a_1 a_2).
\end{aligned}$$

Результат теоремы может быть получен и с помощью элементарных теоретико-вероятностных рассуждений. Воспользуемся тем же примером. Какова вероятность, что входная последовательность 00 дает на выходе 1? Последовательность 00 с вероятностью $\bar{p}_0^{b_1} \bar{p}_0^{b_2}$ дает на выходе первого ранга (значения функций b_1 и b_2 мы рассматриваем как вероятность получить 1 в первом ранге) 00, с вероятностью $\bar{p}_0^{b_1} p_0^{b_2}$ дает 01, с вероятностью $p_0^{b_1} \bar{p}_0^{b_2}$ дает 10 и с вероятностью $p_0^{b_1} p_0^{b_2}$ дает 11. Эти события не пересекаются. Поэтому вероятность получить 1 во втором ранге будет:

$$p_0^{F-b_1-b_2} + p_1^{F-b_1} p_0^{b_2} + p_2^{F} p_0^{b_1-b_2} + p_3^{F} p_0^{b_1} p_0^{b_2}.$$

Но это и есть найденное нами значение функции $\Phi(a_1, a_2)$ на наборе 00.

Нетрудно видеть, что сеть является надежной, если результирующая функция сети — булева. Задача состоит в том, чтобы по заданной булевой функции построить надежную сеть, для которой данная функция будет результирующей. Иными словами, надо подобрать $p_0^F, \dots, p_{2^n-1}^F, p_0^{b_1}, \dots, p_{2^n-1}^{b_n}$ так, чтобы

$$p^\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{0 \leq j \leq 2^n-1} p_j^F (p^{b_1})^{j_1} \dots (p^{b_n})^{j_n}, \text{ где } p^\Phi \text{ — либо 0, либо 1.}$$

Посмотрим, когда выражение справа будет равняться единице.

Так как рассмотрение для всех n совершенно единообразно, но запись условий — весьма громоздка, продемонстрируем это на примере $n = 3$. В этом случае

$$\begin{aligned}
p_i^\Phi &\stackrel{\text{def}}{=} p_0^{F-b_1-b_2-b_3} p_i^{b_1} + p_1^{F-b_1-b_2-b_3} p_i^{b_2} + p_2^{F-b_1-b_2-b_3} p_i^{b_3} + p_3^{F-b_1-b_2-b_3} p_i^{b_1} p_i^{b_2} p_i^{b_3} + \\
&+ p_4^{F-b_1-b_2-b_3} p_i^{b_1} p_i^{b_2} p_i^{b_3} + p_5^{F-b_1-b_2-b_3} p_i^{b_1} p_i^{b_3} p_i^{b_2} + p_6^{F-b_1-b_2-b_3} p_i^{b_2} p_i^{b_1} p_i^{b_3} + p_7^{F-b_1-b_2-b_3} p_i^{b_3} p_i^{b_1} p_i^{b_2}.
\end{aligned}$$

Прежде всего, $p_i^\Phi = 1$, если набор $p_i^{b_1}, p_i^{b_2}, p_i^{b_3}$ состоит только из 0 и 1, а p_j^F , где j — номер этого набора, рассматриваемого как двоичное разложение, есть 1. Например, пусть

$p_i^F = 1$, тогда при $p_i^{b_1} = 0$, $p_i^{b_2} = 0$, $p_i^{b_3} = 1$, $p_i^\Phi = 1 \cdot 0 \cdot \dots \cdot 0 \cdot 1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.

Пусть теперь не все $p_i^{b_k}$ равны 0 или 1. Например, рассмотрим набор $\{0, 0, p\}$. Если мы его подставим в выражение для p_i^Φ , то $p_i^\Phi = p_0^F \bar{0} \bar{0} \bar{p} + p_1^F \bar{0} \bar{0} p = p_0^F \bar{p} + p_1^F p$. Если $p_0^F = p_1^F = 1$, то $p_c^\Phi = \bar{p} + p = 1 - p + p = 1$.

Вообще, если наш набор будет содержать p_i , отличное от 0 и 1, и только одно, то для того, чтобы $p_i^\Phi = 1$ на этом наборе, придется два из p_j^F положить равными 1.

Наконец, если набор содержит два p_i , отличных от 0 и 1, то придется положить равными 1 четыре коэффициента p_j^F . Например, набор $\{1, p, q\}$ дает $p_i^\Phi = 1$, если $p_4^F = \bar{p}_5^F = p_6^F = p_7^F = 1$, так как $\bar{p} \bar{q} + \bar{p} q + p \bar{q} + p q = 1$.

Набор $\{p, q, r\}$ дает 1 только тогда, когда все $p_i^F = 1$, т. е. $F(b_1, b_2, b_3)$ является тавтологией; практического интереса этот случай не представляет.

Для произвольного n обобщение условий очевидно.

Условия для $p_i^\Phi = 0$ получаются из условий $p_i^\Phi = 1$ заменой единицы нулем.

Используя условия, можно легко сформулировать алгорифмы построения надежных сетей. Сразу видно, однако, что сети строятся неоднозначно. С другой стороны, для построения надежной сети существенно лишь общее число единиц среди p_i^Φ и совершенно несущественных номера,— в том смысле, что, если построена надежная сеть, реализующая булеву функцию, равную единице на k наборах, то для любой другой булевой функции, равной единице на k —других, вообще говоря — наборах, надежная сеть получится из первой простым изменением нумерации p_i . Наконец, случай k единиц и l нулей эквивалентен случаю k нулей и l единиц (с заменой $p_i^F = 1$ на $p_i^F = 0$ и наоборот). Поэтому для практически интересных случаев $n = 3$, $n = 4$ и т. п. (для не очень больших n) можно построить стандартные сети; например для $n = 3$, если не интересоваться тавтологией и противоречием, будет всего $1 + \frac{2^3 - 2}{2} = 4$ сети. Рассмотрим эти случаи в качестве примера.

1. Булева функция равна единице на четырех наборах. Пусть их номера i_1, i_2, i_3, i_4 ; на наборах с номерами j_1, j_2 ,

j_3, j_4 функция равна нулю. Положим $p_0^F = p_1^F = p_7^F = p_5^F = p_3^F = 1$.

Получим $p_2^F \bar{p}_i^{b_1} \bar{p}_i^{b_2} \bar{p}_i^{b_3} + \bar{p}_i^{b_1} p_i^{b_2} \bar{p}_i^{b_3} + p_4^F p_i^{b_1} \bar{p}_i^{b_2} \bar{p}_i^{b_3} + p_i^{b_1} \bar{p}_i^{b_2} p_i^{b_3} + p_6^F p_i^{b_1} \bar{p}_i^{b_2} \bar{p}_i^{b_3} + p_i^{b_1} p_i^{b_2} p_i^{b_3}$.

Легко видеть, что на наборе $\{p_i^{b_1}, 1, 1\}$ это даст 1, на наборе $\{1, p_i^{b_2}, 1\}$ — то же, а на наборах $\{0, 0, 0\}$ и $\{0, 0, p_i^{b_3}\}$ — нуль. Поэтому достаточно считать, что, например,

$$p_{j_1}^{b_1} = p_{j_2}^{b_1} = p_{j_3}^{b_1} = p_{j_4}^{b_1} = 0; \quad p_{i_1}^{b_1} = p_{i_2}^{b_1} = 1.$$

$$p_{j_1}^{b_2} = p_{j_2}^{b_2} = p_{j_3}^{b_2} = p_{j_4}^{b_2} = 0; \quad p_{i_1}^{b_2} = p_{i_2}^{b_2} = 1.$$

$$p_{j_1}^{b_3} = 0; \quad p_{i_1}^{b_3} = p_{i_2}^{b_3} = p_{i_3}^{b_3} = p_{i_4}^{b_3} = 1.$$

2. Булева функция равна 1 на пяти наборах; p_i^F — те же номера наборов, дающих 1, суть i_1, \dots, i_5 ; номера наборов, дающих 0, суть j_1, j_2, j_3 .

$$p_{j_1}^{b_1} = p_{j_2}^{b_1} = p_{j_3}^{b_1} = 0; \quad p_{i_1}^{b_1} = p_{i_2}^{b_1} = 1.$$

$$p_{j_1}^{b_2} = p_{j_2}^{b_2} = p_{j_3}^{b_2} = 0; \quad p_{i_1}^{b_2} = p_{i_2}^{b_2} = p_{i_5}^{b_2} = 1.$$

$$p_{j_1}^{b_3} = 0; \quad p_{i_1}^{b_3} = p_{i_2}^{b_3} = p_{i_3}^{b_3} = p_{i_4}^{b_3} = p_{i_5}^{b_3} = 1.$$

3. Булева функция равна 1 на шести наборах i_1, \dots, i_6 , нулю — на двух наборах j_1, j_2 .

$$p_0^F = 0, \quad p_7^F = p_6^F = p_5^F = p_3^F = 1.$$

$$b_1: \quad p_{j_1} = p_{j_2} = 0; \quad p_{i_3} = p_{i_4} = p_{i_5} = p_{i_6} = 1.$$

$$b_2: \quad p_{j_1} = p_{j_2} = 0; \quad p_{i_1} = p_{i_2} = p_{i_5} = p_{i_6} = 1.$$

$$b_3: \quad p_{j_1} = p_{j_2} = 0; \quad p_{i_1} = p_{i_2} = p_{i_3} = p_{i_4} = 1.$$

4. Булева функция равна 1 на семи наборах i_1, \dots, i_7 и нулю на наборе j_1 ; p_i^F — те же.

$$b_1: \quad p_{j_1} = 0; \quad p_{i_4} = p_{i_5} = p_{i_6} = p_{i_7} = 1.$$

$$b_2: \quad p_{j_1} = 0; \quad p_{i_1} = p_{i_2} = p_{i_3} = p_{i_6} = p_{i_7} = 1$$

$$b_3: \quad p_{j_1} = 0; \quad p_{i_1} = p_{i_2} = p_{i_3} = p_{i_4} = p_{i_5} = 1.$$

Пока мы рассматривали двухранговые сети. Совершенно аналогичным образом можно рассмотреть многоранговые регулярные сети. Например, регулярная трехранговая сеть требует указания $2n + 1$ функций:

$$F(c_1, \dots, c_n);$$

$$c_1(b_1, \dots, b_n), \dots, c_n(b_1, \dots, b_n);$$

$$b_1(a_1, \dots, a_n), \dots, b_n(a_1, \dots, a_n).$$

результатирующая функция сети получается посредством подстановки b_j в c_j , а c_j в F . Надежность определяется так же, как в случае двухранговой регулярной сети, и методы остаются теми же.

Наконец, можно снять требование регулярности, т. е. использовать более или менее произвольные подстановки. Это делает анализ более громоздким, но не прибавляет существенных трудностей.

Вероятностные функции, нужные для синтеза надежных сетей, отличаются тем, что среди их значений обязательно есть единицы. Иными словами, они описывают работу таких устройств, служащих для реализации булевых функций, которые на определенные комбинации входных воздействий отвечают безошибочно. Можно сказать, что в реализуемых ими СДНФ часть членов присутствует обязательно, а часть — с некоторой вероятностью.

В качестве работающих именно таким образом элементов ниже (глава 4) разбираются формальные нейроны.

Описанный в настоящем параграфе аналитический аппарат предложен С. Л. Никогосовым весной 1966 г. На диаграммах все вычисления, как нетрудно видеть, упрощаются. Разберем два примера.

Пример 1. Возьмем сеть, отличающуюся от сети, изображенной на рис. 73, только тем, что все ее буквы p различны; для краткости вместо $p_{1,1,k}$, $p_{1,2,k}$, $p_{1,3,k}$, $p_{2,1,k}$, $p_{2,2,k}$, $p_{2,3,k}$, $p_{3,1,k}$ (индексы буквы $p_{i,j,k}$ обозначают: i — номер ранга, j — номер диаграммы в ранге, k — номер ячейки диаграммы) будем писать соответственно p_k , q_k , r_k , s_k , u_k , v_k , w_k :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & p_2 & p_3 \\ p_4 & p_5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_2 & q_3 \\ q_4 & q_5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 & r_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_6 & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} s_0 & 0 & 0 & s_3 \\ s_4 & s_5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_5 & 0 & u_2 & u_3 \\ 0 & u_5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & v_1 & 0 & v_3 \\ 0 & v_5 & v_6 & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & w_3 \\ 1 & w_5 & w_6 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Остановимся на функционировании первой диаграммы второго ранга. Обозначим через $[s_i]$ вероятность появления единицы в i -ой ячейке ее результатирующей диаграммы. Получим

$$\begin{aligned}
[s_0] &= \bar{0}\bar{0}\bar{r}_0 s_0 + \bar{0}\bar{0}r_0 0 + \bar{0}\bar{0}\bar{r}_0 0 + \bar{0}\bar{0}r_0 s_3 + 0\bar{0}\bar{r}_0 s_4 + 0\bar{0}r_0 s_5 + \\
&\quad + 00\bar{r}_0 0 + 00r_0 1 = \bar{r}_0 s_0, \\
[s_1] &= \bar{r}_1 s_0, \\
[s_2] &= \bar{p}_2 \bar{q}_2 s_0 + p_2 \bar{q}_2 s_4, \\
[s_3] &= \bar{p}_3 \bar{q}_3 s_0 + p_3 \bar{q}_3 s_4, \\
[s_4] &= \bar{p}_4 \bar{q}_4 s_0 + p_4 \bar{q}_4 s_4, \\
[s_5] &= \bar{p}_5 \bar{q}_5 s_0 + p_5 \bar{q}_5 s_4, \\
[s_6] &= \bar{r}_6 s_0, \\
[s_7] &= 1.
\end{aligned}$$

Аналогично для остальных диаграмм второго ранга:

$$\begin{aligned}
[u_0] &= 0, [u_1] = 0, [u_2] = \bar{p}_2 q_2 u_2, [u_3] = \bar{p}_3 q_3 u_2, \\
[u_4] &= \bar{p}_4 q_4 u_2, [u_5] = \bar{p}_5 q_5 u_2, [u_6] = 0, [u_7] = 1; \\
[v_0] &= r_0 v_1, [v_1] = r_1 v_1, [v_2] = p_2 q_2 v_6, [v_3] = p_3 q_3 v_6, \\
[v_4] &= p_4 q_4 v_6, [v_5] = p_5 q_5 v_6, [v_6] = r_6 v_1, [v_7] = 1.
\end{aligned}$$

Итак результирующие диаграммы второго ранга имеют, соответственно, вид

$$\begin{bmatrix} [s_0] & [s_1] & [s_2] & [s_3] \\ [s_4] & [s_5] & [s_6] & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & [u_2] & [u_3] \\ [u_4] & [u_5] & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} [v_0] & [v_1] & [v_2] & [v_3] \\ [v_4] & [v_5] & [v_6] & 1 \end{bmatrix}.$$

Перейдем к построению результирующей диаграммы сети.

$$\begin{aligned}
[w_0] &= \overline{[s_0]} \overline{[v_0]} + \overline{[s_0]} [v_0] + [s_0] \overline{[v_0]} + [s_0] [v_0] w_5 = \\
&= \overline{[s_0]} \overline{[v_0]} + [s_0] [v_0] w_5 = \overline{\bar{r}_0 s_0 r_0 v_1} + \bar{r}_0 s_0 r_0 v_1 w_5 = 1, \\
[w_1] &= \overline{[s_1]} \overline{[v_1]} + [s_1] [v_1] w_5 = \overline{\bar{r}_1 s_0 r_1 v_1} + \bar{r}_1 s_0 r_1 v_1 w_5 = 1, \\
[w_2] &= \overline{[s_2]} \overline{[u_2]} \overline{[v_2]} + \overline{[s_2]} \overline{[u_2]} [v_2] + \overline{[s_2]} [u_2] \overline{[v_2]} + \\
&\quad + \overline{[s_2]} [u_2] [v_2] w_3 + [s_2] \overline{[u_2]} \overline{[v_2]} + [s_2] \overline{[u_2]} [v_2] w_5 + \\
&\quad + [s_2] [u_2] \overline{[v_2]} w_6 = (\bar{p}_2 \bar{q}_2 s_0 + p_2 \bar{q}_2 s_4) \overline{p_2 q_2 u_2} + \\
&\quad + (\bar{p}_2 \bar{q}_2 s_0 + p_2 \bar{q}_2 s_4) \overline{p_2 q_2 u_2} \overline{p_2 q_2 v_6} + (\bar{p}_2 \bar{q}_2 s_0 + p_2 \bar{q}_2 s_4) \cdot \\
&\quad \cdot \overline{p_2 q_2 u_2} \overline{p_2 q_2 v_6} w_6 = p_2 q_2 + p_2 \bar{s}_4 + \bar{s}_0 \bar{p}_2 \bar{q}_2 + \bar{s}_0 \bar{q}_2 \bar{s}_4 + \\
&\quad + \bar{s}_0 \bar{p}_2 \bar{u}_2 + q_2 \bar{v}_2 + p_2 \bar{u}_2 \bar{s}_4 - \bar{s}_0 \bar{u}_2 \bar{s}_4 + \bar{p}_2 q_2 u_2 + \\
&\quad + \bar{p}_2 \bar{q}_2 s_0 + p_2 \bar{q}_2 s_4 = p_2 + \bar{p}_2 \bar{q}_2 + \bar{p}_2 q_2 = 1.
\end{aligned}$$

Аналогично получим, что $[w_3] = [w_4] = [w_5] = 1$, $[w_6] = 1$, $[w_7] = 0$. Таким образом, полученная результирующая диаграмма совпадает с результатом работы надежной сети, изображенной на рис. 73.

Пример 2. Построим сеть, аналогичную сети, изображенной на рис. 1.60 книги [10], для краткости вместо $p_{1,1,k}$, $p_{1,2,k}$, $p_{2,1,k}$, $p_{2,2,k}$, $p_{2,3,k}$, $p_{3,1,l}$ будем писать, p_k , q_k , r_k , s_k , u_k , v_l :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & p_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 & q_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} r_0 & 0 \\ r_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & u_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & v_3 \\ 0 & 1 & v_6 & v_7 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$[r_0] = \bar{q}_0 r_0 + \bar{q}_0 0 + 0 \bar{q}_0 r_2 + 0 q_0 1 = \bar{q}_0 r_1,$$

$$\begin{aligned} [r_1] = & \bar{p}_1 \bar{q}_1 r_0 + \bar{p}_1 q_1 0 + p_1 \bar{q}_1 r_2 + p_1 q_1 1 = p_1 q_1 + \\ & + p_1 \bar{q}_1 r_0 + p_1 \bar{q}_1 r_2, \end{aligned}$$

$$[r_2] = \bar{1} \cdot \bar{1} \cdot r_0 + \bar{1} \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot \bar{1} \cdot r_2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1,$$

$$[r_3] = \bar{1} \cdot \bar{0} \cdot r_0 + \bar{1} \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot \bar{0} \cdot r_2 + 1 \cdot 0 \cdot 1 = r_2,$$

$$[s_0] = \bar{q}_0 s_0, \quad [s_1] = \bar{p}_1 \bar{q}_1 s_0, \quad [s_2] = [s_3] = 0;$$

$$\begin{aligned} [u_0] = & q_0 u_1, \quad [u_1] = p_1 q_1 + \bar{p}_1 q_1 u_1, \\ [u_2] = & 1, \quad [u_3] = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, результирующие диаграммы второго ранга суть

$$\begin{bmatrix} [r_0] & [r_1] \\ 1 & [r_3] \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} [s_0] & [s_1] \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} [u_0] & [u_1] \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Выходная диаграмма дает

$$\begin{aligned} [v_0] = & \overline{[r_0]} [s_0] [u_0] v_3 + [r_0] \overline{[s_0]} [u_0] \cdot 1 + [r_0] [s_0] \overline{[u_0]} v_6 + \\ & + [r_0] [s_0] [u_0] v_7 = \bar{q}_0 r_0 \bar{q}_0 s_0 q_0 u_1 v_3 + \bar{q}_0 r_0 \bar{q}_0 s_0 q_0 u_1 + \bar{q}_0 r_0 \bar{q}_0 s_0 \times \\ & \times q_0 u_1 v_6 + \bar{q}_0 r_0 \bar{q}_0 s_0 q_0 u_1 v_7 = \bar{q}_0 r_0 s_0 (\bar{q}_0 + \bar{u}_1) v_6 = \bar{q}_0 r_0 s_0 v_6 + \\ & + \bar{q}_0 r_0 s_0 \bar{u}_1 v_6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[v_1] &= \overline{[r_1]} [s_1] [u_1] v_3 + \overline{[r_1]} \overline{[s_1]} [u_1] + \overline{[r_1]} [s_1] \overline{[u_1]} v_6 + \\
&+ [r_1] [s_1] [u_1] v_7 = (\underline{p_1 q_1} + \overline{p_1} \bar{q}_1 r_0 + p_1 \bar{q}_1 r_2) \overline{p_1} \bar{q}_1 s_0 (p_1 q_1 + \\
&+ \overline{p_1} \bar{q}_1 u_1) v_3 + (p_1 q_1 + \overline{p_4} \bar{q}_1 r_0 + p_1 \bar{q}_1 r_2) \overline{\underline{p_1} \bar{q}_1 s_0} (p_1 q_1 + \overline{p_1} q_1 u_1) + \\
&+ (p_1, p_1 + \overline{p_1} \bar{q}_1 r_0 + p_1 \bar{q}_1 r_2) \overline{p_1} \bar{q}_1 s_0 (p_1 q_1 + \overline{p_1} q_1 u_1) v_6 + (p_1 q_1 + \\
&+ \overline{p_1} \bar{q}_1 r_0 + p_1 \bar{q}_1 r_2) \overline{p_1} \bar{q}_1 s_0 (p_1 q_1 + \overline{p_1} q_1 u_1) v_7 = p_1 q_1 + \overline{p_1} \bar{q}_1 s_0 \bar{u}_1 v_6,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[v_2] &= \overline{[r_2]} [s_2] [u_2] v_3 + [r_2] \overline{[s_2]} [u_2] + [r_2] [s_2] \overline{[u_2]} v_6 + \\
&+ [r_2] [s_2] [u_2] v_7 = \bar{1} \cdot 0 \cdot 1 \cdot v_3 + 1 \cdot \bar{0} \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot \bar{1} \cdot v_6 + 1 \cdot 0 \cdot 1 \cdot v_7 = 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[v_3] &= \overline{[r_3]} [s_3] [u_3] v_3 + [r_3] \overline{[s_3]} [u_3] + [r_3] [s_3] \overline{[u_3]} v_6 + [r_3] \times \\
&\times [s_3] [u_3] v_7 = \bar{r}_2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot v_3 + r_2 \cdot \bar{0} \cdot 0 + r_2 \cdot 0 \cdot \bar{0} \cdot v_6 + r_2 \cdot 0 \cdot 0 \cdot v_7 = 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, результат работы сети имеет вид

$$\begin{bmatrix} [v_0] & [v_1] \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для сравнения см. результирующую диаграмму сети, изображенной на рис. 1.60 в книге [10]:

$$\begin{bmatrix} p & p \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**ДИАГРАММЫ ВЕННА
В КЛАССИЧЕСКОМ ИСЧИСЛЕНИИ
ОДНОМЕСТНЫХ ПРЕДИКАТОВ**

Формулы исчисления одноместных предикатов определяются следующим образом.

Рассматривается алфавит, состоящий из предикатных переменных $P_1 \dots P_s$, предметных переменных $x_1 \dots x_h$, логических знаков \neg & \vee \supset \forall \exists , скобок (), где s, h — целые положительные числа, \forall — квантор общности, \exists — квантор существования.

1. Если P_i — предикатная, x_j — предметная переменные, то слово $P_i(x_j)$ ($i = 1, \dots, s, j = 1, 1.., h$) считается атомарной формулой. Атомарная формула считается формулой.

2. Если Φ — формула, то $\neg \Phi$ считается формулой.

3. Если Φ и Ψ — формулы, то $(\Phi \& \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \supset \Psi)$ считаются формулами.

4. Если Φ — формула, x — предметная переменная, то $\forall x \Phi$, $\exists x \Phi$ считаются формулами. О формуле Φ в этом случае говорят, что она является областью действия соответствующего квантора.

Вхождение переменной x в формулу Ψ называется связанным, если оно является вхождением в область действия квантора $\forall x$ или $\exists x$; в противном случае вхождение называется свободным.

Если переменная x входит в качестве свободной (связанной) переменной в Ψ , то говорят, что x является свободной (связанной) переменной в Ψ .

Мы не будем описывать подробно исчисление одноместных предикатов (предполагая, что читатель может познакомиться с ним в литературе, например, в [6, 17]), ограничимся введением лишь некоторых необходимых для изложения понятий.

**§ 3.1. Диаграммы Венна и формулы исчисления одноместных предикатов
(определения, построение формул по диаграммам)**

Квазибазисные высказывания формулы. Пусть Φ — формула, $Q_1 \dots Q_m$ — все графически различные предикатные переменные, из которых составлена формула Φ .

Формулы вида $(\alpha_1 Q_1(x) \& \dots \& \alpha_m Q_m(x))$, где x — предметная переменная формулы Φ , α_i есть или Λ (пустое слово), или \neg , $i = 1, \dots, m$, будем называть квазибазисными высказываниями формулы Φ . Например, $(\neg Q_1(x) \& Q_2(x) \& \neg Q_3(x))$ суть квазибазисное высказывание формулы

$$\forall y (Q_1(x) \supset Q_2(y)). \quad (3.1)$$

Базисные высказывания формулы. Пусть Φ — формула, $\Psi(x)$ — квазибазисное высказывание формулы Φ . Формулу $\exists x \Psi(x)$ будем называть базисным высказыванием формулы Φ .

Например, $\exists x (\neg Q_1(x) \& Q_2(x) \& \neg Q_3(x))$ суть базисное высказывание формулы (3.1), а $\exists x (\neg Q_1(x) \& \neg \neg Q_3(x))$ не является базисным высказыванием формулы (3.1).

Из построения базисных высказываний непосредственно следует, что всего графически различных базисных высказываний формулы Φ , содержащих предикатные переменные Q_1, \dots, Q_m и одну предметную переменную x , может быть 2^m .

Пусть X — произвольная предметная область (предполагаем, что предметная область не пуста — см. § 1.3; в качестве предметной области можно брать непустые множества «произвольной природы», однако для понимания материала достаточно ограничиться множествами, состоящими из конечного числа элементов). Пусть R_1, \dots, R_m — произвольные одноместные предикаты, определенные на X .

Каждому предикату R_i ($i = 1, \dots, m$) можно поставить в соответствие класс тех элементов x предметной области X , на которых предикат R_i выполняется, или, как говорят, $R_i(x)$ принимает значение 1 (единицей обозначается «истина», нулем — «ложь»).

Всего графически различных последовательностей значений предикатов R_1, \dots, R_m будет 2^m , их можно собрать в следующую таблицу:

Таблица

	R_1	R_2	R_3	...	R_{m-1}	R_m
0)	0	0	0	...	0	0
1)	0	0	0	...	0	1
2)	0	0	0	...	1	0
3)	0	0	0	...	1	1

$2^m - 3)$	1	1	1	...	0	1
$2^m - 2)$	1	1	1	...	1	0
$2^m - 1)$	1	1	1	...	1	1

Нетрудно заметить, что последовательности значений предикатов R_1, \dots, R_m являются элементарными.

Для каждого элемента x рассматриваемой предметной области X каждая формула $R_i(x)$, $i = 1, \dots, m$, принимает значение 1 или 0. Поэтому каждому элементу x предметной области X отвечает одна и только одна m -членная элементарная последовательность, члены которой являются значениями $R_i(x)$. Объединяя все элементы, которым соответствует одна элементарная последовательность, разделим предметную область X на 2^m попарно непересекающихся классов. Так как предметная область X есть непустое множество, то по крайней мере один из 2^m классов не пуст.

Каждой m -членной элементарной последовательности β будет соответствовать только один из полученных 2^m классов, для элементов которого последовательность значений предикатов R_1, \dots, R_m совпадает с данной последовательностью β . Из последовательности β можно образовать, заменяя 0 на \neg , 1 на пустое слово Λ , последовательность α_β : $\alpha_1 \dots \alpha_m$. Для элементов указанного класса

последовательность значений предикатов $\alpha_1 R_1, \dots, \alpha_m R_m$ образует элементарную последовательность, имеющую номер $2^m - 1$ (эта последовательность состоит из m единиц).

Последовательности α_β соответствует одно базисное высказывание формулы Φ :

$$\exists x (\alpha_1 Q_1(x) \& \dots \& \alpha_m Q_m(x)).$$

Поскольку любую предметную область X для любых предикатов R_1, \dots, R_m , определенных на X , можно разделить на 2^m попарно непересекающихся классов, по крайней мере, один из которых не пуст, то хотя бы одно базисное высказывание формулы Φ принимает значение 1.

Эквивалентные формулы. Каждая формула представляет собой определенное утверждение, истинное или ложное, когда оно относится к определенной предметной области X и когда все предикатные переменные и все свободные предметные переменные замещены, соответственно, индивидуальными предикатами, определенными на X , и индивидуальными предметами из X .

Говорят, что две формулы Φ и Ψ эквивалентны на предметной области X , если при всех таких замещениях они принимают одинаковое значение 1 или 0.

Если две формулы Φ и Ψ эквивалентны на любых предметных областях, то их называют просто эквивалентными, и записывают $\Phi \equiv \Psi$.

Общезначимые формулы. Если формула Φ принимает значение 1 для некоторой предметной области X , некоторых предикатов, определенных на X , и некоторых значений предметных переменных из X , то формулу Φ называют выполнимой.

Если Φ принимает значение 1 для любых предикатов, определенных на некоторой предметной области X , и при любых значениях предметных переменных из X , то формулу Φ называют общезначимой на X .

Если формула Φ общезначима на любой предметной области, то формулу Φ называют универсально общезначимой или тождественно истинной.

Формулу называют тождественно ложной, или невыполнимой, если ни для какой предметной области ни при каких замещениях предикатов и предметных переменных она не принимает значения 1.

Формулы Φ и Ψ называются равносильными (относительно общезначимости), если Φ общезначима тогда и только тогда, когда общезначима Ψ .

Конъюнктивные приведенные формулы. Формулу Φ будем называть конъюнктивной приведенной формулой, если в нее входит только одна предметная переменная и если Φ есть конъюнкция дизъюнкций, членами которых являются базисные высказывания формулы Φ и отрицания базисных высказываний формулы Φ . (Предполагаем, что все рассматриваемые базисные высказывания формулы Φ составлены, как и всюду в дальнейшем, из одних и тех же предикатных переменных.)

Нетрудно доказать следующее предложение 3.1:

Конъюнктивная приведенная формула Φ универсально общезначима тогда и только тогда, когда или каждый ее конъюнктивный член F_j есть дизъюнкция всех базисных высказываний формулы Φ , или в F_j одновременно входят, по крайней мере, одно базисное высказывание формулы Φ и его отрицание.

Конъюнктивные приведенные формы формул. Если Φ — формула, Ψ — конъюнктивная приведенная формула, и $\Phi \equiv \Psi$, то Ψ будем называть конъюнктивной приведенной формой формулы Φ .

Дизъюнктивные приведенные формулы. Формулу Φ будем называть дизъюнктивной приведенной формулой, если в нее входит только одна предметная переменная и если Φ есть дизъюнкция конъюнкций, членами которых являются базисные высказывания формулы Φ и отрицания базисных высказываний формулы Φ .

Нетрудно доказать следующее предложение 3.2:

Дизъюнктивная приведенная формула Φ тождественно ложна тогда и только тогда, когда или каждый ее дизъюнктивный член F_j есть конъюнкция всех отрицаний базисных высказываний формулы Φ , или в F_j одновременно входят, по крайней мере, одно базисное высказывание формулы Φ и его отрицание.

Дизъюнктивные приведенные формы формул. Если Φ — формула, Ψ — дизъюнктивная приведенная формула и $\Phi \equiv \Psi$, то Ψ будем называть дизъюнктивной приведенной формой формулы Φ .

Диаграммы Венна. В формулу может входить более одной предметной переменной, поэтому остановимся на вопросе о расположении на плоскости k

(где $k \geq 1$) попарно непересекающихся предметных областей.

Пусть X_1, \dots, X_k — любые предметные области. Разделим плоскость по методу Венна на 2^{m+1} ячеек (см. § 1.5), где m — число одноместных предикатов Q_1, \dots, Q_m , определенных на областях X_1, \dots, X_k .

Предметную область X_2 будем изображать внутренностью $(m + 1)$ -ой замкнутой линии Жордана на плоскости; предметную область X_3 будем изображать внутренностью $(m + 2)$ -ой замкнутой линии Жордана, проведенной по методу Венна так, что она не пересекает область

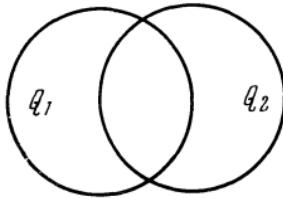


Рис. 75

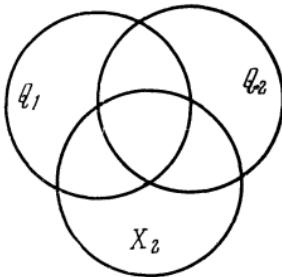


Рис. 76

X_2 , а совпадает с ее границей от точки бывшего входа в область X_2 до точки бывшего выхода из X_2 ; при этом пересечение X_2 и X_3 , то есть $X_2 \cap X_3$ — пустое множество; и так далее. Предметную область X_k будем изображать внутренностью $(m + k + 1)$ -ой замкнутой линии Жордана, проведенной по методу Венна так, что она не пересекает область $X_2 \cup \dots \cup X_{k-1}$, а совпадает с границей области $X_2 \cup \dots \cup X_{k-1}$ от точки бывшего входа в эту область до точки бывшего выхода из нее, при этом $X_2 \cap \dots \cap X_k$ — пустое множество. Предметную область X_1 будем изображать дополнением к множеству $X_2 \cup \dots \cup X_k$. При таком расположении $m + k - 1$ фигур плоскость делится на $k \cdot 2^m$ ячеек, и каждая предметная область X_j — на 2^m ячеек с помощью фигур Q_1, \dots, Q_m . Например, пусть $m = 2$, способы разбиения плоскости на $k \cdot 2^m$ ячеек приведены при $k = 1$, на рис. 75, при $k = 2$ — на рис. 76, при $k = 3$ — на рис. 77, при $k = 4$ — на рис. 78.

Приведенный метод разбиения плоскости на $k \cdot 2^m$ ячеек с помощью $m + k - 1$ фигур будем называть *обобщенным методом Венна*. Аналогично строятся обобщен-

ные таблицы Венна и вводится обобщенный символ Венна. На рис. 79 изображена обобщенная таблица Венна при $k = 3$ и $m = 5$.

Определения. Построим обобщенный символ Венна; в некоторых ячейках поставим знаки \circ , $*$, \otimes и соединим

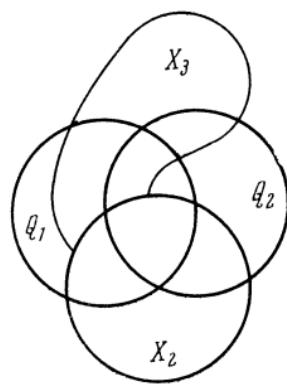


Рис. 77

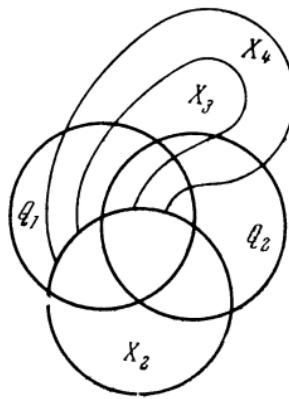


Рис. 78

их, начиная с самого нижнего левого, последовательно прямыми. Ломаную, в вершинах которой находятся знаки \circ , $*$, \otimes , будем называть $\circ * \otimes$ -ломаной.

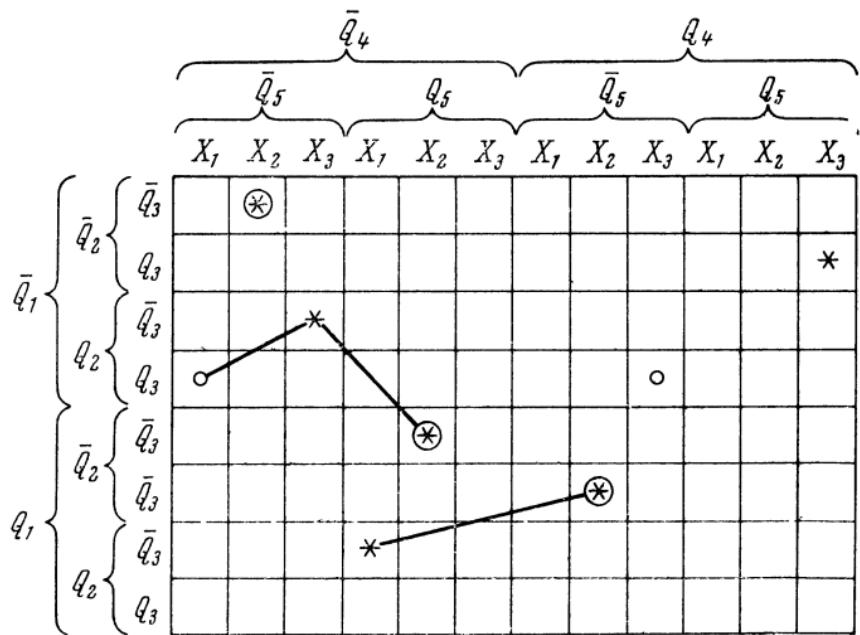


Рис. 79

Обобщенный символ Венна, в котором расположено несколько $\circ * \circledast$ -ломаных, будем называть диаграммой Венна в исчислении одноместных предикатов. (Для краткости в настоящем разделе вместо слов «диаграмма Венна в исчислении одноместных предикатов» часто будем говорить «диаграмма Венна».)

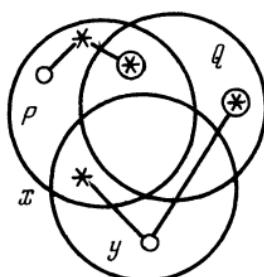


Рис. 80

Каждой диаграмме Венна можно поставить в конъюнктивное или дизъюнктивное соответствие некоторую формулу Φ следующим образом. Кружочку \circ ставим в соответствие квазибазисное высказывание, звездочке $*$ — базисное высказывание, звездочке в кружке \circledast — отрицание базисного высказывания некоторой формулы Φ . Каждой $\circ * \circledast$ -ломаной дизъюнктивно (конъюнктивно) соответствует конъюнкция (дизъюнкция) формул, написанных по знакам \circ , $*$ и \circledast . Диаграмме Венна дизъюнктивно (конъюнктивно) поставим в соответствие дизъюнкцию (конъюнкцию) формул, соответствующих $\circ * \circledast$ -ломаным. Смысл понятий дизъюнктивного (конъюнктивного) соответствия поясним на следующих примерах.

Диаграмме, изображенной на рис. 80, дизъюнктивно соответствует формула

$$(((P(x) \& \neg Q(x)) \& \exists x(P(x) \& \neg Q(x))) \& \neg \exists x(P(x) \& \& Q(x))) \vee (\exists y(P(y) \& \neg Q(y)) \& (\neg P(y) \& \neg Q(y)) \& \& \neg \exists x(\neg P(x) \& Q(x))),$$

конъюнктивно — формула

$$(((P(x) \& \neg Q(x)) \vee \exists x(P(x) \& \neg Q(x))) \vee \neg \exists x(P(x) \& \& Q(x))) \& (\exists y(P(y) \& \neg Q(y)) \vee (\neg P(y) \& \neg Q(y)) \vee \neg \exists x(\neg P(x) \& Q(x)));$$

по диаграмме, изображенной на рис. 67, аналогично строятся формулы:

дизъюнктивно —

$$(\neg \exists x_2 (\neg Q_1(x_2) \& \neg Q_2(x_2) \& \neg Q_3(x_2) \& \neg Q_4(x_2) \& \neg Q_5(x_2)) \vee ((\neg Q_1(x_1) \& Q_2(x_1) \& Q_3(x_1) \& \neg Q_4(x_1) \& \neg Q_5(x_1)) \& \exists x_3 (\neg Q_1(x_3) \& Q_2(x_3) \& \neg Q_3(x_3) \& \neg Q_4(x_3) \& \neg Q_5(x_3))) \& \neg \exists x_2 (Q_1(x_2) \& \neg Q_2(x_2) \& \neg Q_3(x_2) \& \neg Q_4(x_2) \& \neg Q_5(x_2))) \vee (\exists x_1 (Q_1(x_1) \& Q_2(x_1) \& \neg Q_3(x_1) \& \neg Q_4(x_1) \& Q_5(x_1)) \& \neg \exists x_2 (Q_1(x_2) \& \neg Q_2(x_2) \& Q_3(x_2) \& Q_4(x_2) \& \neg Q_5(x_2)) \vee (\neg Q_1(x_3) \& Q_2(x_3) \& Q_3(x_3) \& Q_4(x_3) \& \neg Q_5(x_3)) \vee \exists x_3 (\neg Q_1(x_3) \& \neg Q_2(x_3) \& Q_3(x_3) \& Q_4(x_3) \& Q_5(x_3))),$$

конъюнктивно —

$$(\neg \exists x_2 (\neg Q_1(x_2) \& \neg Q_2(x_2) \& \neg Q_3(x_2) \& \neg Q_4(x_2) \& \neg Q_5(x_2)) \& \& ((\neg Q_1(x_1) \& Q_2(x_1) \& Q_3(x_1) \& \neg Q_4(x_1) \& \neg Q_5(x_1)) \vee \exists x_3 (\neg Q_1(x_3) \& Q_2(x_3) \& \neg Q_3(x_3) \& \neg Q_4(x_3) \& \neg Q_5(x_3))) \vee \neg \exists x_2 (Q_1(x_2) \& \neg Q_2(x_2) \& \neg Q_3(x_2) \& \neg Q_4(x_2) \& Q_5(x_2))) \& (\exists x_1 (Q_1(x_1) \& Q_2(x_1) \& \neg Q_3(x_1) \& \neg Q_4(x_1) \& Q_5(x_1)) \vee \neg \exists x_2 (Q_1(x_2) \& \neg Q_2(x_2) \& Q_3(x_2) \& Q_4(x_2) \& \neg Q_5(x_2)) \& (\neg Q_1(x_3) \& Q_2(x_3) \& Q_3(x_3) \& Q_4(x_3) \& \neg Q_5(x_3)) \& \exists x_3 (\neg Q_1(x_3) \& \neg Q_2(x_3) \& Q_3(x_3) \& Q_4(x_3) \& Q_5(x_3))).$$

§ 3.2. Операции над диаграммами Венна в логике одноместных предикатов

Операция Q_1 . Пусть L_i — $\circ * @$ -ломаная диаграммы Венна, $i = 1, \dots, l$. Преобразуем каждую L_i так, чтобы ни в одной ячейке диаграммы на L_i не находилось двух и более одинаковых знаков. Полученную диаграмму будем называть результатом операции O_1 . Операция O_1 соответствует эквивалентности $(A \vee A) \equiv A$ при конъюнктивном соответствии или $(A \& A) \equiv A$ при дизъюнктивном соответствии, где A — или квазибазисное высказывание некоторой формулы Φ , или базисное высказывание формулы Φ , или отрицание базисного высказывания формулы Φ .

Операция O_2 . Пусть L_1, \dots, L_l — все $\circ * @$ -ломаные диаграммы Венна B . Если на B существуют такие две ломаные L_k и L_j , $k \neq j$, что в каждой ячейке, в которой ле-

жит некоторый знак ломаной L_k , находится такой же знак ломаной L_j , то ломаную L_j можно уничтожить. Результатом операции O_2 является такая диаграмма, на которой не существует таких пар ломанных. Операция O_2 соответствует закону поглощения $(A \vee (A \& C)) \equiv A$ при дизъюнктивном соответствии или закону поглощения $(A_1 \& (A_1 \vee C_1)) \equiv A_1$ при конъюнктивном соответствии, где A и $(A \& C)$ — конъюнкции квазибазисных, базисных и отрицаний базисных высказываний некоторой формулы Φ , A_1 и $(A_1 \vee C_1)$ — дизъюнкции квазибазисных, базисных и отрицаний базисных высказываний некоторой формулы Φ_1 .

Операция O_3 . Операция O_3 состоит в уничтожении на диаграмме таких ломанных, у которых по крайней мере два знака $*$, \otimes лежат в одной ячейке области X_k , и таких ломанных, на которых находится не менее двух кружков, один из которых принадлежит одной из ячеек области $X_j \cap Q_i$, другой — одной из ячеек области $X_j \setminus Q_i$. В случае, когда все $* \otimes$ -ломаные уничтожаются, результатом операции O_3 будем считать диаграмму, разбитую на то же число ячеек, что и исходная, в которой расположена только одна $* \otimes$ -ломаная, состоящая только из двух знаков $*$ и \otimes , находящихся в одной ячейке. Преобразования при применении операции O_3 соответствуют эквивалентностям:

$$(\exists x A(x) \& \neg \exists x A(x) \& D) \equiv 0, (B(y) \& C(y) \& D) \equiv 0$$

при дизъюнктивном соответствии или

$$\begin{aligned} (\exists x A(x) \vee \neg \exists x A(x) \vee D) &\equiv 1, \\ (B(y) \vee \neg B(y) \vee D) &\equiv 1 \end{aligned}$$

при конъюнктивном соответствии, где $A(x)$, $B(y)$ и $C(y)$ — квазибазисные высказывания некоторой формулы Φ и в $B(y)$ входит предикат P , а в $C(y)$ входит его отрицание $\neg P$.

Операция O_4 . Пусть L_1, \dots, L_h — все ломаные диаграммы. В ячейках области X_j вместо кружков на всех L_i , $i = 1, \dots, h$, поставим звездочки; к полученной диаграмме применим последовательно операции O_1 , O_2 , O_3 . Если на диаграмме останутся только $* \otimes$ -ломаные, то сотрем границы областей X_2, \dots, X_k ; в результате плоскость или

таблица разделится на 2^n ячеек; к полученной диаграмме применим последовательно операции O_1 , O_2 , O_3 .

Операция O_4 соответствует эквивалентности

$$\exists x_j((A \& B) \vee (C \& D)) \equiv ((\exists x_j A \& B) \vee (C \& \exists x_j D))$$

при дизъюнктивном соответствии, где A , D — квазибазисные высказывания некоторой формулы Φ , в которые входит предметная переменная x_j ; B , C — конъюнкции квазибазисных, базисных и отрицаний базисных высказываний формулы Φ , не содержащие свободно переменную x_j .

Операция O_5 . Пусть B_1 , B_2 — диаграммы Венна (у которых, как и обычно при одновременном рассмотрении нескольких диаграмм, предметные и предикатные переменные соответственно совпадают). Перенесем на B_1 все ломаные диаграммы B_2 ; к полученной диаграмме применим последовательно операции O_1 , O_2 , O_3 .

Операция O_5 соответствует дизъюнкции двух формул $(A_1 \vee \dots \vee A_k)$, $(C_1 \vee \dots \vee C_l)$ при дизъюнктивном соответствии или конъюнкции двух формул

$$(A_1 \& \dots \& A_k), \quad (C_1 \& \dots \& C_l)$$

при конъюнктивном соответствии, где A_i , C_j — конъюнкции или дизъюнкции квазибазисных, базисных и отрицаний базисных высказываний некоторой формулы.

Операция O_6 . Пусть L_1, \dots, L_r — все ломаные диаграммы B_1 ; M_1, \dots, M_s — все ломаные диаграммы B_2 . Перенесем M_1 на B_1 и присоединим к L_j ; ... и т. д.; перенесем M_s на B_1 и присоединим к L_j ; $j = 1, \dots, r$. К полученной диаграмме применим последовательно операции O_1 , O_2 , O_3 .

Операция O_6 соответствует конъюнкции двух формул $(A_1 \vee \dots \vee A_r)$, $(C_1 \vee \dots \vee C_s)$ при дизъюнктивном соответствии или дизъюнкции двух формул

$$(A_1 \& \dots \& A_r), \quad (C_1 \& \dots \& C_s)$$

при конъюнктивном соответствии, где A_i , C_j — конъюнкции или дизъюнкции квазибазисных, базисных и отрицаний базисных высказываний некоторой формулы.

Операция O_7 . Пусть L_1, \dots, L_n — все ломаные диаграммы B . Построим диаграммы D_i , $i = 1, \dots, n$, каждая из

которых содержит только одну ломаную L_i диаграммы B . Предположим, что k_i — число знаков * на L_i , p_i — число знаков \circledast на L_i , l_i — число областей X_s на D_i , содержащих по одному кружку. Вместо ломаной L_i на D_i построим $k_i + p_i + l_i (2^m - 1)$ ломанных, где 2^m — число ячеек каждой области на D_i : M_j ($j = 1, \dots, k_i$) — \circledast -ломанные; M_t ($t = k_i + 1, \dots, k_i + p_i$) — *-ломанные; M_v ($v = k_i + p_i + 1, \dots, k_i + p_i + l_i$ ($2^m - 1$)) — \circ -ломанные; M_j : заменим знак * на знак \circledast ; M_t : заменим знак \circledast на знак *; M_v : в каждой ячейке, не содержащей знаков \circ , области X_s поставим по одному знаку \circ , в каждой области X_s получим $2^m - 1$ \circ -ломанных. Построенные диаграммы обозначим E_i , $i = 1, \dots, n$.

Если $n = 1$, то результат операции O_7 есть диаграмма E_1 . Если $n > 1$, то результатом операции O_7 является следующая диаграмма B_n : к диаграммам E_1 и E_2 применим операцию O_6 , получим диаграмму B_2 ; к диаграммам B_2 и E_3 применим операцию O_6 , получим диаграмму B_3 ; и т. д.; к диаграммам B_{n-1} и E_n применим операцию O_6 , получим диаграмму B_n .

Операция O_7 — операция отрицания диаграммы.

§ 3.3. Соответствие между формулами и диаграммами Венна в исчислении одноместных предикатов

Укажем индуктивный способ построения диаграмм Венна для записи информации, заданной в виде произвольной формулы Φ . Диаграмму Венна, соответствующую формуле Φ , будем обозначать $[\Phi]$ или $[\Phi] \circ * \circledast$.

Пусть Φ — произвольная формула. Пусть Q_1, \dots, Q_m — все графически неравные предикатные переменные формулы Φ , x_1, \dots, x_k — все графически неравные предметные переменные формулы Φ . Индукцию будем вести по логической длине формулы Φ .

1. Пусть Ψ — атомарная подформула $Q_i(x_j)$ формулы Φ . Построим обобщенный символ Венна из $k \cdot 2^m$ ячеек. Во всех ячейках области $X_j \cap Q_i$ поставим по одному кружку. Получим $[\Psi] \circ$.

2. Пусть A, B — любые подформулы формулы Φ . Предположим, что $[A]$ и $[B]$ построены. Построим $[\exists x A]$, $[A \vee B]$, $[A \& B]$, $[\neg A]$, $[A \supset B]$, $[\forall x A]$, предпола-

гая, что соответствующие формулы являются подформулами формулы Φ .

- 1) Применим к $[A]$ операцию O_4 . Получим $[\exists x A]$.
- 2) Применим к $[A]$ и $[B]$ операцию O_5 . Получим $[A \vee B]$.
- 3) Применим к $[A]$ и $[B]$ операцию O_6 . Получим $[A \& B]$.
- 4) Применим к $[A]$ операцию O_7 . Получим $[\neg A]$.
- 5) $[A \supset B]$ определим как $[\neg A \vee B]$.
- 6) $[\forall x A]$ определим как $[\neg \exists x \neg A]$.

В силу соответствия между формулами исчисления одноместных предикатов и диаграммами Венна можно говорить о графическом (диаграммном) построении исчисления одноместных предикатов.

§ 3.4. Решение проблемы разрешения в логике одноместных предикатов с помощью диаграмм Венна

Определение. Формулу Ψ , дизъюнктивно соответствующую диаграмме $[\Phi]$, будем называть *дизъюнктивной квазиприведенной формулой* и обозначать Ψ_Φ , где Φ — формула.

Можно доказать следующие предложения:

3.3. $\Phi \equiv \Psi_\Phi$, где Φ — произвольная формула.

3.4. Если диаграмма $[\Phi] \circ * \odot$ не содержит кружков, то формула Ψ_Φ есть дизъюнктивная приведенная форма формулы Φ .

3.5. Для каждой формулы Φ существует равносильная (относительно общезначимости) дизъюнктивная приведенная формула Ψ .

Сформулируем предложение 3.2 на языке диаграмм Венна:

Формула Φ тождественно ложна тогда и только тогда, когда на диаграмме $[\Psi]$, где Ψ — равносильная (относительно общезначимости) формуле Φ дизъюнктивная приведенная формула, находится одна $* \odot$ -ломаная или содержащая 2^m знаков \odot , которые лежат в различных ячейках, или на которой находится только два знака $*$, \odot , которые лежат в одной ячейке.

3.6. Для каждой формулы Φ существует равносильная (относительно общезначимости) конъюнктивная приведенная формула Ψ .

В силу теоремы 3.5. построим $[F] * \odot$, применим к $[F] * \odot$ следующую операцию O_8 .

Операция O_8 . Пусть L_1, \dots, L_n — все $* \circledast$ -ломаные диаграммы. Построим диаграммы $B_{0,i}$, $i = 1, \dots, n$, каждая из которых содержит только одну ломаную L_i . Уничтожим на каждой диаграмме $B_{0,i}$ прямые, соединяющие знаки $*$, \circledast , получим диаграммы $B_{1,i}$.

К диаграмме $B_{1,1}$ применим последовательно операции O_1, O_2, O_3 , получим диаграмму B_1 . К диаграммам B_1 и $B_{1,2}$ применим операцию Q_6 получим диаграмму Венна B_2 . И так далее. К диаграммам $B_{n-1}, B_{1,n}$ применим операцию O_6 , получим диаграмму Венна B_n .

Операция O_8 соответствует переходу от дизъюнктивной приведенной формы к конъюнктивной приведенной форме данной формулы. F эквивалентна Ψ , где Ψ — конъюнктивная приведенная формула, конъюнктивно соответствующая диаграмме B_n . Полученную диаграмму B_n будем называть *приведенной диаграммой Венна*.

Сформулируем предложение 3.1 для диаграмм Венна:

Формула Φ универсально общезначима тогда и только тогда, когда в соответствующей приведенной диаграмме Венна находится только одна $* \circledast$ -ломаная, или содержащая только 2^m звездочек, которые лежат в различных ячейках, или на которой находится только два знака $*$, \circledast , лежащие в одной ячейке.

Например, пусть Φ есть формула

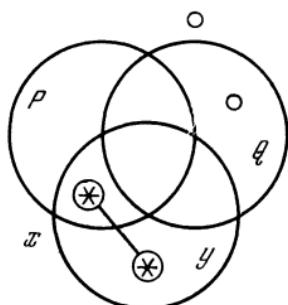
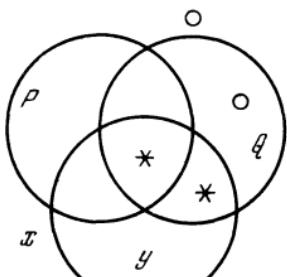
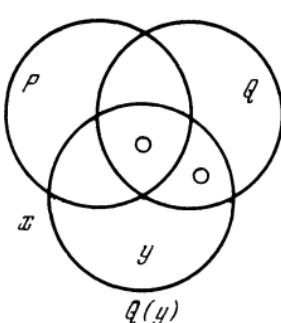
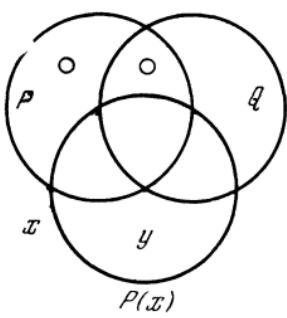
$$(\forall x \forall y (\neg P(x) \vee Q(y)) \supset \forall x \exists y (P(x) \supset Q(y))).$$

На рис. 81 приведено построение ее диаграммы Венна, приведенная диаграмма дана на рис. 82. Полученная приведенная диаграмма Венна содержит только одну ломаную, на которой имеется только два знака $*$, \circledast , лежащие в одной ячейке; следовательно, формула Φ универсально общезначима.

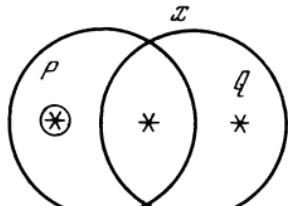
Ясно, что с увеличением числа переменных, особенно предметных, наглядность метода диаграмм уменьшается. Поэтому следует обратить внимание на классы формул, для которых метод диаграмм Венна наиболее прост и нагляден. Эти классы — следующие.

I. В формулу Φ входит только одна предметная переменная и не входят логические знаки \forall и \exists ; формула Φ фактически есть формула исчисления высказываний (см. главу 2).

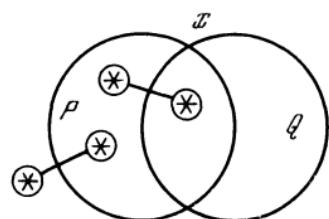
II. Формула Φ имеет вид $\exists x \Psi$, где Ψ формула класса I с предметной переменной x . Тогда на диаграмме $[\Phi]$



$$\exists y(P(x) = q(y)) \equiv \exists y(\neg P(x) \vee q(y)) \quad \forall y(\neg P(x) \vee q(y)) \equiv \forall y(\neg(\neg P(x) \vee q(y)))$$



$$\forall x \exists y(P(x) = q(y))$$



$$\forall x \forall y(\exists P(x) \vee q(y))$$

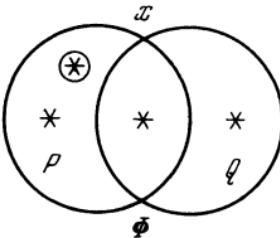


Рис. 81

находятся только *-ломаные, т. е. $[\Phi]$ фактически является диаграммой $[\Phi]^*$; на каждой ломаной лежит только один знак *, и в каждой ячейке диаграммы может быть только один знак *.

III. Формула Φ имеет вид $\forall x \Psi$, где Ψ — формула класса I с предметной переменной x . Тогда на диаграмме $[\Phi]$ находятся только @*-ломаные, т. е. диаграмма $[\Phi]$

совпадает с диаграммой $[\Phi] \otimes$; на каждой ломаной лежит только один знак \otimes , и в каждой ячейке диаграммы может быть только один знак \otimes .

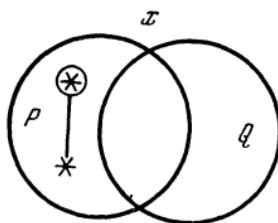


Рис. 82

Предложения класса III изучались в работах Венна [99 — 106] (см. главу 1 настоящей работы). Для записи информации, заданной прежде всего формулами этого класса, Венн и ввел свои диаграммы.

§ 3.5. Обзор простых логических следствий из посылок, выражимых на языке формул исчисления одноместных предикатов, с помощью диаграмм Венна

Пусть Φ_1, \dots, Φ_k — любые формулы. Формулу Ψ будем называть *простым логическим следствием* посылок Φ_1, \dots, Φ_k в том и только в том случае, если Ψ есть дизъюнкция базисных высказываний формулы ($\Phi_1 \& \dots \& \Phi_k$) и их отрицаний и если Ψ не поглощается никаким другим логическим следствием посылок Φ_1, \dots, Φ_k того же вида.

Силлогистическая формула. Пусть Φ_1, \dots, Φ_k — любые формулы, все предметные переменные которых связаны; Q_1, \dots, Q_m — все графически неравные предикатные переменные формул Φ_i , $i = 1, \dots, k$; $\Psi_1, \dots, \Psi_{2^m}$ — все графически неравные базисные высказывания формул Φ_i , содержащие только одну предметную переменную формул Φ_i . Начертим приведенную диаграмму Венна B для записи информации, заданной в виде формулы ($\Phi_1 \& \dots \& \Phi_k$). Пусть Ψ — формула, конъюнктивно соответствующая диаграмме B . Формулу F будем называть силлогистической, если результат всех возможных выявлений и поглощений, проведенных в формуле Γ , есть формула F .

Теорема 3.7: Формула F_i является простым логическим следствием посылок Φ_j , $j = 1, \dots, k$, тогда и только

тогда, когда F_i является конъюктивным членом силлогистической формулы F . Следовательно, на приведенной диаграмме Венна, соответствующей формуле F , каждой *⊗-ломаной соответствует простое логическое следствие посылок Φ_1, \dots, Φ_k .

Преобразование формулы Ψ в формулу F можно проводить на приведенных диаграммах Венна: операция поглощения есть операция O_2 . Операция выявления есть следующая операция O_9 .

Операция O_9 . Пусть B — диаграмма Венна.

1. Предположим, что среди ломанных существует, по крайней мере, одна пара ломанных L_1 и L_2 такая, что в одной ячейке β одновременно находятся знаки *, ⊗, принадлежащие разным ломанным. Начертим на B новую ломаную L_3 : во всех ячейках, кроме β , через которые проходят L_1 и L_2 , поставим знаки, графически равные знакам на L_1 и L_2 ; в ячейке β знаков на L_3 нет.

2. Если среди ломанных не существует таких пар ломанных L_1 и L_2 , что в одной ячейке одновременно находятся знаки *, ⊗, принадлежащие разным ломанным, то результатом операции O_9 является диаграмма B .

Операция O_9 соответствует закону выявления.

В исчислении одноместных предикатов простое логическое следствие посылок Φ_1, \dots, Φ_k определено как дизъюнкция базисных высказываний (и их отрицаний) формулы $(\Phi_1 \& \dots \& \Phi_k)$; при этом базисные высказывания, зависящие от всех графически различных предикатных переменных формулы $(\Phi_1 \& \dots \& \Phi_k)$, играют роль «кирпичей», из которых строятся логические следствия посылок Φ_1, \dots, Φ_k . Однако в исчислении предикатов возможны и дальнейшие упрощения, которые зависят от связей между базисными высказываниями формулы $(\Phi_1 \& \dots \& \Phi_k)$. Приведем два характерных примера.

Пример 1. Формула Φ , конъюнктивно соответствующая диаграмме, изображенной на рис. 83, является силлогистической; ее предикатные переменные: X, Y, Z, W , предметная — p . Простые логические следствия формулы Φ :

1. $\Psi_1 \circ \neg \exists p (X(p) \& Y(p) \& \neg Z(p) \& \neg W(p))$,
2. $\Psi_2 \circ \neg \exists p (X(p) \& Y(p) \& Z(p) \& \neg W(p))$,
3. $\Psi_3 \circ \neg \exists p (X(p) \& Y(p) \& \neg Z(p) \& W(p))$,
4. $\Psi_4 \circ \neg \exists p (X(p) \& Y(p) \& Z(p) \& W(p))$.

Так как в каждой ячейке класса XY находятся зна-
ки \otimes , то конъюнкция формул Ψ_1, \dots, Ψ_4 эквивалентна
формуле

$$\Psi \sqsubseteq \neg \exists p (X(p) \& Y(p)), \quad (\Psi_1 \& \dots \& \Psi_4) \equiv \Psi.$$

Нетрудно убедиться, что Ψ — логическое следствие
формулы Φ , а формулы $(\Psi_i \& \Psi)$, $i=1, \dots, 4$, эквивалентны

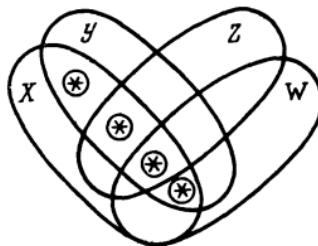


Рис. 83

Ψ . Таким образом, формула Ψ является более «простым»
логическим следствием формулы Φ , хотя в Ψ не входят
предикатные переменные Z и W формулы Φ .

Заметим, что диаграмму, изображенную на рис. 83,
можно рассматривать как приведенную диаграмму конъ-
юнкции посылок:

$$\Phi_1 \sqsubseteq \forall p (X(p) \supset ((Y(p) \& Z(p)) \vee \neg Y(p))).$$

$$\Phi_2 \sqsubseteq \forall p ((X(p) \& Y(p) \& Z(p)) \supset W(p)),$$

$$\Phi_3 \sqsubseteq \neg \exists p (W(p) \& X(p) \& Y(p) \& Z(p)).$$

Эти посылки соответствуют условию задачи 8.1 в § 1.6.
Знаки \otimes диаграммы, изображенной на рис. 83, соответ-
ствуют пустым ячейкам диаграммы, представленной на
рис. 43.

Пример 2. Формула Φ , конъюнктивно соответствую-
щая диаграмме, изображенной на рис. 84, является сил-
логистической. На диаграмме находится только две \otimes -
ломаных, поэтому

$$\begin{aligned} \Psi_1 \sqsubseteq & (\exists p (\neg X(p) \& Y(p) \& Z(p) \& W(p)) \vee \exists p (\neg X(p) \& \\ & \& \neg Y(p) \& Z(p) \& W(p)) \vee \exists p (\neg X(p) \& \neg Y(p) \& Z(p) \& \\ & \& \neg W(p)) \vee \exists p (\neg X(p) \& Y(p) \& Z(p) \& \neg W(p)) \vee \\ & \vee \exists p (\neg X(p) \& Y(p) \& \neg Z(p) \& \neg W(p))) \end{aligned}$$

и

$$\Psi_2 \equiv (\exists p (X(p) \& \neg Y(p) \& \neg Z(p) \& W(p)) \vee \\ \vee \neg \exists p (\neg X(p) \& \neg Y(p) \& \neg Z(p) \& W(p)))$$

суть все простые логические следствия формулы Φ . Так как в каждой ячейке класса $\bar{X}\bar{Z}$ находятся знаки $*$, при-

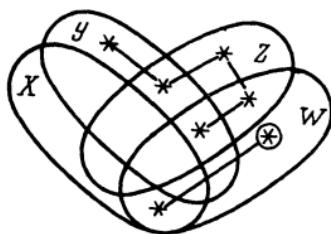


Рис. 84

надлежащие одной ломаной, то логическое следствие Ψ_1 можно упростить в силу эквивалентности

$$(\exists p (\neg X(p) \& Y(p) \& Z(p) \& W(p)) \vee \exists p (\neg X(p) \& \neg Y(p) \& \\ \& Z(p) \& W(p)) \vee \exists p (\neg X(p) \& \neg Y(p) \& Z(p) \& \neg W(p)) \vee \\ \vee \exists p (\neg X(p) \& Y(p) \& Z(p) \& \neg W(p))) \equiv \exists p (\neg X(p) \& \\ \& Z(p)).$$

Мы получим:

$$\Psi_1 \equiv (\exists p (\neg X(p) \& Z(p)) \vee \exists p (\neg X(p) \& Y(p) \& \neg Z(p) \& \\ \& \neg W(p))).$$

И далее, поскольку для любых формул A и B верно, что

$$(A \vee (B \& \neg A)) \equiv (A \vee B),$$

то

$$\Psi_1 \equiv (\exists p (\neg X(p) \& Z(p)) \vee \exists p (\neg X(p) \& \\ \& Y(p) \& \neg W(p))).$$

[выявления и поглощения проводятся в области действия квантора существования формулы

$$\exists p ((\neg X(p) \& Z(p)) \vee (\neg X(p) \& Y(p) \& \\ \& \neg Z(p) \& \neg W(p))),$$

при этом можно воспользоваться методами, изложенными в § 2.6].

Г л а в а 4

ДИАГРАММЫ ВЕННА В ФОРМАЛЬНЫХ НЕЙРОННЫХ СХЕМАХ

§ 4.1. Формальные нейроны Мак-Каллока

Формальный нейрон Мак-Каллока (для краткости — нейрон) является моделью, отражающей деятельность нервной клетки живых организмов. Он описывается следующим образом:

1. Нейрон имеет тело (изображается на рис. 85 и следующих треугольником), входы a_1, \dots, a_n (предполагается, что все входы разные) и один выход. Входы нейрона не находятся на теле и не касаются его. Выход расположен на теле нейрона.

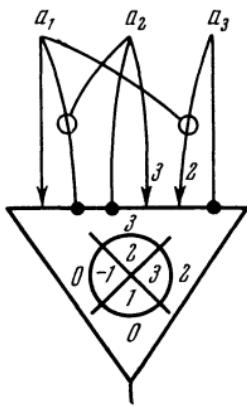


Рис. 85

2. Входы и выход могут находиться только в одном из двух состояний — возбужденном или невозбужденном.

3. Нейрон может иметь возбуждающие, тормозящие и запрещающие волокна, которые начинаются на его входах и кончаются на его теле. Каждое волокно может

активироваться (возбуждаться) тогда и только тогда, когда возбужден вход, на котором оно начинается. Возбуждающее волокно (оканчивающееся на рисунках стрелкой на теле нейрона) вводит (в активном состоянии) положительную единицу возбуждения ($+1$). Тормозящее волокно (на рис. 85 и следующих оканчивается точкой на теле нейрона) вводит отрицательную единицу возбуждения (-1). Запрещающее волокно (на схеме оканчивается петлей на другом, запрещаемом волокне) предотвращает поступление сигнала (возбуждения) по запрещаемому волокну.

В работах Мак-Каллока и его последователей рассматривается только случай, когда запрещающие волокна оканчиваются на возбуждающих и тормозящих волокнах (при этом запрещающее и запрещаемое волокна начинаются на разных входах), и устанавливается, что волокна могут ветвиться, но не могут объединяться.

4. Сигналы могут проходить только в одном направлении — от входов к выходу (на рисунках — сверху вниз). При передаче сигналов через синапс (место контакта волокна с телом нейрона) получается задержка на единицу времени.

5. Нейрон обладает порогом Θ , который выражается целым числом. Изменение порога во времени задается конечным набором различных целых чисел $\{\Theta_1, \dots, \Theta_r\}$, расположенных (для определенности) в порядке убывания. В каждый данный момент времени t порог Θ принимает одно из значений Θ_j из набора $\{\Theta_1, \dots, \Theta_r\}$.

6. Выход нейрона возбуждается в момент времени t только в том случае, если сумма положительных и отрицательных единиц возбуждения, поступивших на тело в момент времени $t - 1$ (с учетом действия запрещающих волокон), не меньше Θ_j — значения порога в момент t .

В каждый данный момент времени t входы нейрона A (a_1, \dots, a_n) образуют определенную последовательность из n нулей и единиц, где единица на i -ом месте обозначает возбужденность входа a_i , нуль на j -ом месте — невозбужденность входа a_j . Эту последовательность из n нулей и единиц будем называть элементарной, или входной, последовательностью переменных a_1, \dots, a_n .

Каждой элементарной последовательности поставим во взаимно однозначное соответствие ячейку символа Венна n переменных. При этом будем предполагать, что номер ячейки, записанной в двоичной системе, совпадает с рас-

сматриваемой элементарной последовательностью. Например, для $n = 3$ (рис. 29) числа, написанные в ячейках плоскости, можно воспринимать, как соответствующие входные последовательности нейрона, который имеет три входа.

Порог Θ нейрона в момент времени t принимает определенное значение Θ_j . Нейрон возбуждается в рассматриваемый момент времени t , если сумма возбуждающих и тормозящих единиц, соответствующих входной последовательности в момент времени $t - 1$ (с учетом действия всех запретов), не меньше Θ_j .

Если значение порога Θ фиксировано ($\Theta = \Theta_0$), то нейрон возбуждается или нет в зависимости только от входных последовательностей. Функционирование нейрона с n входами при фиксированном значении его порога, $\Theta = \Theta_0$, можно описать на языке диаграмм Венна в классическом исчислении высказываний: если нейрон возбуждается при данной входной последовательности s , то в s -ой ячейке символа Венна n переменных ставится точка; если нейрон не возбуждается при данной входной последовательности s , то s -ая ячейка символа Венна n переменных пуста.

При изменении значения порога Θ диаграмма Венна может изменяться, и для каждого значения порога Θ может быть вычерчена своя диаграмма Венна. Например, функционирование нейрона, изображенного на рис. 85 при $\Theta=3$, описывается диаграммой нейрона

$$(0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0),$$

а при $\Theta = 0$ — диаграммой

$$(1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1).$$

Из нейронов строятся сети. В сетях Мак-Каллока нейроны располагаются по рангам (рядам); в последнем ранге находится один, — называемый выходным — нейрон; во всех остальных рангах — n нейронов, где n — число входов каждого нейрона сети; входы первого ранга независимы (их число равно n); входами нейронов ($i + 1$)-го ранга являются выходы нейронов i -го ранга, $i = 1, \dots, q - 1$, где q — количество рангов в сети ($q > 0$).

Описанные сети Мак-Каллока будем называть одновыходными регулярными сетями. Пример регулярной сети нейронов с одним выходом приведен на рис. 86.

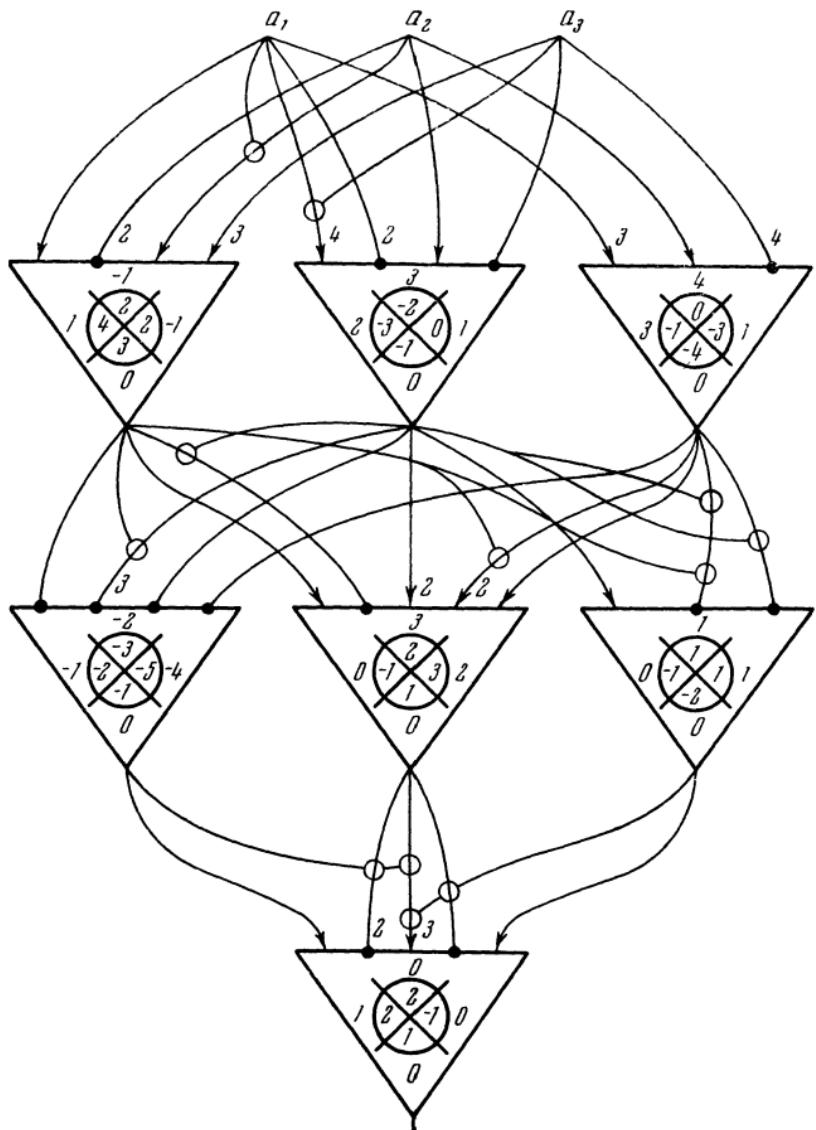


Рис. 86

Определения. 1. Символ Венна n переменных, во всех ячейках которого, кроме ячейки номер нуль, стоят (по одному) произвольные целые числа (положительные, отрицательные и нули), а в ячейке номер нуль обязательно находится нуль, будем называть *пороговой диаграммой* n переменных.

Например, на теле нейрона, изображенного на рис. 85, расположена пороговая диаграмма трех переменных.

2. Символ Венна n переменных, в каждой ячейке которого находится одно из чисел $1, 2, \dots, m$, $m \leq 2^n$, будем называть *порядковой диаграммой n переменных*.

Обозначения: D^0 — пороговая, D^π — порядковая диаграммы, иногда в скобках справа будем указывать число переменных или сами переменные, например, $D^\pi(n)$ или $D^\pi(a_1, \dots, a_n)$ — порядковая диаграмма n переменных.

Записывать диаграммы будем не только с помощью символа Венна, но и в линейной форме. Например, $(0, 2, -3, -1, 2, 4, -1, 1, -1, 1, -4, -2, -1, 1, -2, 0)$ — линейная запись пороговой диаграммы четырех переменных.

Установим соответствие между пороговыми, порядковыми и вероятностными диаграммами n переменных, с одной стороны, и формальными нейронами — с другой.

а) *Пороговые диаграммы нейронов.* Дан нейрон A (a_1, \dots, a_n).

Построим символ Венна n переменных; в ячейке, соответствующей элементарной последовательности S , поставим число γ_S , равное разности между числами, соответствующими активированным возбуждающим и тормозящим волокнам элементарной последовательности S с учетом действия запретов.

Пороговая диаграмма нейрона характеризуется тем, что в нулевой ячейке символа Венна стоит нуль — $\gamma_0 = 0$ —, а в остальных ячейках — целые числа (возможны и нули). Следовательно, пороговая диаграмма нейрона с n входами есть пороговая диаграмма n переменных.

Если порог нейрона Θ фиксирован: $\Theta = \Theta_0$, то по пороговой диаграмме этого нейрона можно однозначно определить, как те элементарные последовательности, при которых нейрон возбуждается, так и те, при которых он не возбуждается: если $\gamma_S \geq \Theta_0$, то нейрон возбуждается; если $\gamma_S < \Theta_0$, то нейрон не возбуждается (см. построение пороговой диаграммы нейрона), $S = 0, 1, \dots, 2^n - 1$.

Следовательно, пороговая диаграмма нейрона позволяет представить полную картину его функционирования. По пороговой диаграмме можно, кроме того, определить, во-первых, те значения его порога, при которых он всегда возбуждается (при любой из 2^n элементарных последовательностей), во-вторых, те значения его порога, при которых он не возбуждается, и, в-третьих, те значе-

ния его порога, при которых для некоторых элементарных последовательностей он возбуждается, а для других — не возбуждается; в первом случае соответствующая диаграмма Венна полна (в каждой ячейке находится точка), во втором случае — пуста, в третьем — имеет как пустые ячейки, так и ячейки, содержащие точки.

б) *Порядковые диаграммы нейронов.* На порядковой диаграмме n переменных можно указать порядок (отсюда название диаграммы) появления точек на диаграммах Венна n переменных, описывающих работу нейрона при уменьшении значений порога, начиная с пустой диаграммы Венна. Например, порядок появления точек на диаграммах нейрона (рис. 85) при уменьшении значения порога, начиная с $\Theta = 3$, описывается на одной порядковой диаграмме трех переменных: (4, 3, 2, 1 4, 5, 1, 2).

в) *Вероятностные диаграммы нейронов.* Функционирование сети формальных нейронов с входами a_1, \dots, a_n (в частности, одного нейрона) в зависимости от элементарных последовательностей переменных a_1, \dots, a_n (совпадающих с входами) можно описывать на вероятностных диаграммах n переменных.

Пусть для каждого нейрона сети задан свой интервал изменения порога. Тогда для данного выхода сети можно построить следующим образом вероятностную диаграмму n переменных. Единица, стоящая в i -й ячейке символа Венна n переменных, обозначает, что, если входы сети образуют i -ую элементарную последовательность, то для любых значений порогов всех нейронов сети из указанных для них интервалов сеть возбуждается. Нуль, стоящий в j -ой ячейке символа Венна n переменных, обозначает, что если входы сети образуют j -ую элементарную последовательность, то для любых значений порогов всех нейронов сети из указанных для них интервалов сеть не возбуждается. Буква p , стоящая в k -ой ячейке символа Венна n переменных, обозначает, что, если входы сети образуют k -ую элементарную последовательность, то существуют такие значения порогов всех нейронов сети из указанных для них интервалов, что сеть возбуждается, и существуют такие значения порогов у всех нейронов сети из указанных для них интервалов, что сеть не возбуждается.

На языке теории вероятностей единица в i -й ячейке вероятностей диаграммы означает, что сеть из формальных нейронов возбуждается с вероятностью 1, когда вхо-

ды сети образуют i -ую элементарную последовательность; нуль в j -ой ячейке вероятностной диаграммы означает, что сеть возбуждается с вероятностью 0, когда входы сети образуют j -ую элементарную последовательность; буква r в k -ой ячейке вероятностной диаграммы говорит, что при k -ой входной последовательности сеть возбуждается с вероятностью r , $0 < r < 1$.

Описанную диаграмму будем называть результирующей вероятностной диаграммой нейронной сети при заданных интервалах изменения нейронов. Методы построения результирующих вероятностных диаграмм разбирались в главе 2.

Таким образом, понятие «диаграмма» в формальных нейронных схемах получает дальнейшее расширение. Для описания функционирования формальных нейронов используются диаграммы Венна в классическом исчислении высказываний, вероятностные, пороговые и порядковые диаграммы n переменных. Мы не будем подробно описывать теорию формальных нейронных схем, отсылая читателя к соответствующей литературе [8–10, 25, 49, 83, 95], остановимся только на некоторых ее аспектах.

§ 4.2. Синтез оптимальных формальных нейронов по пороговым диаграммам n переменных

Аналитические выражения n переменных. В [8, 25, 49] задание нейронов, тесно связано с их геометрическим представлением. При увеличении количества входов и волокон наглядность геометрического изображения резко уменьшается. Поэтому — а также в целях уточнения понятия «формальный нейрон» — вводятся аналитические выражения n переменных [10].

Определение. Пусть A — набор переменных a_1, \dots, a_n , H — целое число ($H \neq 0$).

1. Если $\alpha \in A$, то $H\alpha$ считаем *аналитическим выражением* переменных a_1, \dots, a_n (в дальнейшем для краткости — выражением).

2. Если $\alpha \in A$, то $(1 - \alpha)$ считаем квазивыражением.

3. Если B — квазивыражение, $\alpha \in A$, то $B(1 - \alpha)$ считаем квазивыражением.

4. Если B — квазивыражение, $\alpha \in A$, то $H\alpha B$ считаем выражением, $(1 - \alpha)B$ — квазивыражением первого рода.

5. Если B — квазивыражение первого рода, D — или квазивыражение или квазивыражение первого рода, то BD и DB считаем квазивыражениями первого рода.

6. Если B — квазивыражение первого рода, $\alpha \in A$, то $(1 - \alpha B)$ считаем квазивыражением первого рода.

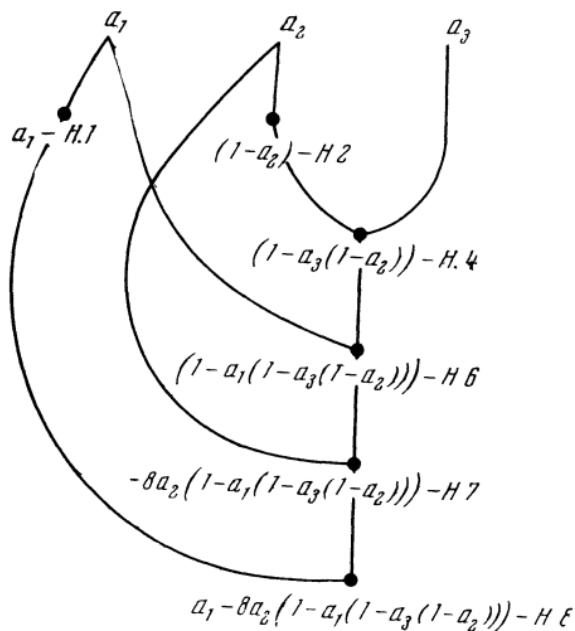


Рис. 87

7. Если B — квазивыражение первого рода, $\alpha \in A$, то $H\alpha B$ считаем выражением.

8. Если B, D — выражения, то $B+D$ считаем выражением. Например, $a_1 - 8a_2(1 - a_1(1 - a_3(1 - a_2)))$ — аналитическое выражение четырех переменных a_1, \dots, a_4 дерево его построения приведено на рис. 87, в точках ветвления указаны номера шагов индуктивного определения.

Между аналитическими выражениями n переменных и формальными нейронами с n входами можно установить взаимно однозначное соответствие. Мы не будем разбирать этот вопрос подробно, заметим лишь, что: (а) можно указать индуктивный способ построения нейронов по заданным аналитическим выражениям, (б) каждому слагаемому аналитического выражения можно поставить в соответствие только одну из ветвей, оканчивающихся на теле нейрона (вместе со всеми связанными с ней запретами);

при этом сомножители $(1 - a_j)$ соответствуют запрещающим ветвям, сомножители a_i — ветвям, оканчивающимся на теле нейрона, коэффициенты H указывают веса соответствующих ветвей. Таким образом, задание аналитического выражения позволяет полностью определить нейрон, т. е. указать его входы, типы ветвей волокон и их распределение по входам.

Коэффициенты аналитического выражения Ω_n могут быть неопределены (тогда мы записываем их в виде букв с индексами). Например,

$$\begin{aligned}
 & H_1 a_1 + H_2 a_2 + H_3 a_3 + H_{1(2)} a_1 (1 - a_2) + H_{1(3)} a_1 (1 - a_3) + \\
 & + H_{2(1)} a_2 (1 - a_1) + H_{2(3)} a_2 (1 - a_3) + H_{3(1)} a_3 (1 - a_1) + \\
 & + H_{3(2)} a_3 (1 - a_2) + H_{1(2,3)} a_1 (1 - a_2) \times \\
 & \times (1 - a_3) + H_{2(1,3)} a_2 (1 - a_1) (1 - a_3) + H_{3(1,2)} a_3 (1 - a_1) \times \\
 & \times (1 - a_2) + H_{1(2(3))} a_1 (1 - a_2 (1 - a_3)) + H_{2(1(3))} \times \\
 & \times a_2 (1 - a_1 (1 - a_3)) + H_{3(1(2))} a_3 (1 - a_1 (1 - a_2)) — (4.1)
 \end{aligned}$$

аналитическое выражение переменных a_1, a_2, a_3 с неопределенными коэффициентами $H_1, \dots, H_{3(1(2))}$. В (4.1) есть члены, соответствующие ветвям типа «запрет запрета» (запрещающая ветвь оканчивается на другой запрещающей ветви).

Синтез оптимальных формальных нейронов. В § 4.1 изложен диаграммический анализ формальных нейронов. Интересна и обратная задача: по данной диаграмме n переменных (одного из рассмотренных выше видов) построить нейрон с n входами, диаграмма — указанного типа — которого совпадает с заданной.

Задача сформулирована для нейронов Мак-Каллока. При ее постановке для обобщенных нейронов (обобщенные нейроны описаны нами в [10]) приходится задавать несколько диаграмм, соответствующих различным моментам времени.

Предложим общий метод синтеза формальных нейронов по пороговым диаграммам n переменных. Для простоты ограничимся формальными нейронами Мак-Каллока. Если нам задана не пороговая диаграмма, а, скажем, вероятностная, то синтез нейрона можно начинать с построения соответствующей пороговой диаграммы.

При решении задачи синтеза введение аналитических выражений позволяет рассматривать произвольные соч-

тания ветвей нейронов. Синтез начинается с задания аналитического выражения с неопределенными коэффициентами. Требуется найти числовые значения неопределенных коэффициентов. Перебирая все 2^n различные входные последовательности и подставляя их члены вместо соответствующих переменных a_i в аналитическое выражение с неопределенными коэффициентами, получим систему $2^n - 1$ линейных алгебраических уравнений (в правых частях уравнений стоят числа γ_j данной пороговой матрицы) и одно тождество $0 = 0$ (для входной последовательности из n нулей — $0\dots 0$). Например, при $n = 3$ без ветвей типа «запрет запрета» мы получим систему уравнений с 12-ю неизвестными:

$$\left. \begin{array}{l} H_3 + H_{3(1)} + H_{3(2)} + H_{3(1,2)} = \gamma_1 \\ H_2 + H_{2(1)} + H_{2(3)} + H_{2(1,3)} = \gamma_2 \\ H_2 + H_3 + H_{2(1)} + H_{3(2)} = \gamma_3 \\ H_1 + H_{1(2)} + H_{1(3)} + H_{1(2,3)} = \gamma_4 \\ H_1 + H_3 + H_{1(2)} + H_{3(2)} = \gamma_5 \\ H_1 + H_2 + H_{1(3)} + H_{2(3)} = \gamma_6 \\ H_1 + H_2 + H_3 = \gamma_7 \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

Если полученная таким образом система уравнений противоречива, то задача синтеза при взятом аналитическом выражении не имеет решения, — необходимо перейти к другому аналитическому выражению.

Предположим, что выбранное аналитическое выражение Ω_n с неопределенными коэффициентами $H_{\alpha_1}, \dots, H_{\alpha_l}$ таково, что система относительно $H_{\alpha_1}, \dots, H_{\alpha_l}$ непротиворечива. Тогда для любого ее решения (в силу взаимно однозначного соответствия между нейронами и аналитическими выражениями) конструируется нейрон, пороговая матрица которого совпадает с заданной. Если же система уравнений является неопределенной, то, естественно, возникает вопрос о нахождении среди ее решений оптимального (относительно некоторых параметров).

Рассмотрим два критерия оптимальности:

1. *Минимум общего числа волокон нейрона.* Требуется найти такое решение системы уравнений, на котором

$$W = \sum_{i=1}^l \overline{\alpha_i} |H_{\alpha_i}|,$$

где $\bar{\alpha}_i$ равно количеству номеров переменных, входящих в α_i (например, если α_i есть 1 (2 (3), 4 (1, 2)), то $\bar{\alpha}_i = 6$), достигает минимума (W_{\min}).

2. Минимум общего числа ветвей нейрона. Требуется найти решение системы уравнений, при котором

$$V = \sum_{i=1}^l \bar{\alpha}_i \operatorname{sign}^2 H_{\alpha_i}$$

принимает минимальное значение V_{\min} .

Заметим, что в обоих случаях речь идет об оптимальных решениях относительно выбранного аналитического выражения с неопределенными коэффициентами $H_{\alpha_1}, \dots, H_{\alpha_l}$.

В [8, 10, 95] для построения оптимальных в первом смысле нейронов используются средства линейного программирования. Методы построения оптимальных во втором смысле нейронов полностью не изучены.

Изложим способ синтеза оптимальных нейронов путем перебора возможных значений W или V . Для сокращения перебора могут быть использованы предлагаемые ниже таблицы.

Очевидно: $W_{\min} \geq 0$, $V_{\min} \geq 0$. Оптимальное решение в одном из указанных смыслов можно найти перебором возможных значений W или V , начиная с нуля. На каждом шаге проверяется, имеет ли соответствующая система решение. Если при $W=L$ (соотв. $V=L$) система не противоречива, а для любого W , $W < L$ (соответственно, V , $V < L$) система противоречива, то $W_{\min} = L$ ($V_{\min} = L$). При переборе значений W (соответственно, V) можно пользоваться таблицей. Последняя строится по матрице системы уравнений: число строк ее равно числу уравнений, число столбцов — на единицу больше числа различных переменных; если элемент $c_{i,j}$ матрицы равен нулю, то в соответствующей ячейке таблицы (находящейся в j -ом столбце и в i -ой строке) ставится нуль; если $c_{i,j} = 1$, то соответствующая ячейка таблицы оставляется пустой; в последнем столбце располагаются числа γ_i .

Решение системы сводится к заполнению пустых ячеек такими целыми числами, что сумма чисел в каждой i -ой строке равна числу γ_i , и в каждом j -ом столбце во всех пустых ячейках одновременно ставятся равные между собою числа.

Например, при $n = 3$ (без ветвей типа «запрет запрета») общее число ветвей нейрона записывается в виде:

$$V = \text{sign}^2 H_1 + \text{sign}^2 H_2 + \text{sign}^2 H_3 + 2 (\text{sign}^2 H_{1(2)} + \\ + \text{sign}^2 H_{1(3)} + \text{sign}^2 H_{2(2)} + \text{sign}^2 H_{2(3)} + \text{sign}^2 H_{3(1)} + \\ + \text{sign}^2 H_{3(2)}) + 3 (\text{sign}^2 H_{1(2,3)} + \text{sign}^2 H_{2(1,3)} + \text{sign}^2 H_{2(1,2)}).$$

Таблица имеет 13 столбцов (табл. 1 — см. матрицу системы (4.2)).

Т а б л и ц а 1

H_1	$H_{1(2)}$	$H_{1(3)}$	$H_{1(2,3)}$	H_2	$H_{2(1)}$	$H_{2(3)}$	$H_{2(1,3)}$	H_3	$H_{3(1)}$	$H_{3(2)}$	$H_{3(1,2)}$	γ_i
0	0	0	0	0	0	0	0					γ_1
0	0	0	0					0	0	0	0	γ_2
0	0	0	0			0	0			0	0	γ_3
				0	0	0	0	0	0	0	0	γ_4
		0	0	0	0	0	0		0		0	γ_5
	0		0		0		0	0	0	0	0	γ_6
0	0	0		0	0	0		0	0	0	0	γ_7

Если $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_4 = 1$, $\gamma_3 = \gamma_5 = \gamma_6 = \gamma_7 = 0$, то с помощью таблицы (табл. 2) получаем решение

$$H_{1(2,3)} = H_{2(1,3)} = H_{3(1,2)} = 1,$$

$$H_1 = H_{1(2)} = H_2 = H_{2(1)} = H_{2(3)} = H_3 = H_{3(1)} = H_{3(2)} = 0,$$

по которому синтезируется нейрон с $V = 9$ (рис. 88).

Если в аналитическое выражение не входят только ветви типа «запрет запрета», то

$$0 \leq V \min \leq n \cdot 2^{n-1}.$$

Отметим, что введение ветвей типа «запрет запрета»

Таблица 2

H_1	$H_1(2)$	$H_1(3)$	$H_1(2,3)$	H_2	$H_2(1)$	$H_2(3)$	$H_2(1,3)$	H_3	$H_3(1)$	$H_3(2)$	$H_3(4,2)$	γ_i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

может привести к уменьшению общего числа ветвей нейрона. Например, нейрон с $V = 3$ (рис. 89), имеющий ветвь

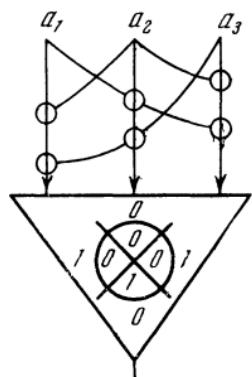


Рис. 88

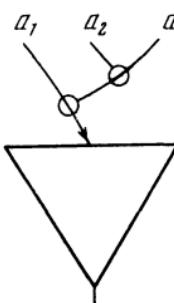


Рис. 89

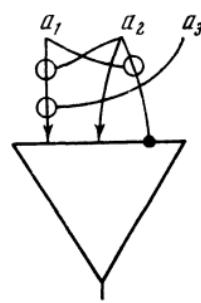


Рис. 90

типа «запрет запрета», и нейрон без ветвей этого типа с $V = 6$ (рис. 90) эквивалентны, т. е. имеют одну и ту же пороговую матрицу

$$(0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1).$$

§ 4.3. Надежные сети формальных нейронов

Каждая сеть состоит из нескольких рядов (рангов) нейронов. Входами сети являются все различные входы нейронов первого ранга, не совпадающие с выходами каких-либо нейронов сети; выходами — все выходы нейронов последнего ранга. Входами нейронов, начиная со второго ранга, могут являться только входы сети или выходы некоторых нейронов сети (возможен случай, когда выход нейрона совпадает с его входом). Все входы нейрона нумеруются числами, которые проставляются слева от них. Для однозначности иногда справа от номеров входов нейрона в круглых скобках мы будем ставить номер ранга r и номер i нейрона в ранге. Например, $2(5,3)$ — второй вход третьего нейрона в пятом ранге, $r = 5$, $i = 3$ (на рисунках ранги нумеруются сверху вниз, нейроны — слева направо). В случае, когда входы расположены линейно (слева направо) и когда не может быть их разночтения, числа — номера входов — мы будем опускать. В качестве примера см. нейронные сети, изображенные на рис. 85, 86.

Сеть нейронов будем называть *сетью с обратной связью*, если в ней имеется, по крайней мере, один нейрон $A_{r,i}$, $r \geq 1$ с входами, которые совпадают с выходами нейронов $(r+i)$ -го ранга, $i \geq 0$.

Например, на рис. 91 изображен трехходовый нейрон с обратной связью. На теле нейрона расположена пороговая диаграмма четырех переменных (выход нейрона рассматривается как его четвертый вход).

Для каждого нейрона сети можно построить диаграмму Венна в исчислении высказываний (бинарную матрицу) при фиксированном значении порога или вероятностную диаграмму (матрицу) при указанном интервале изменения порога. В результате получаем сеть диаграмм Венна (бинарных матриц) или вероятностных диаграмм (матриц), соответствующую данной сети нейронов. Например, на рис. 58 дана сеть диаграмм Венна, соответствующая двухранговой сети нейронов (рис. 92) при $\Theta_{1,1}=0$, $\Theta_{1,2}=1$, $\Theta_{2,1}=-1$ (первый ранг сети диаграмм соответствует входам нейронной сети).

Правила функционирования сетей бинарных и вероятностных диаграмм описаны во второй главе. Отметим, что при построении сети диаграмм, соответствующей задан-

ной сети нейронов, можно рассматривать следующие два случая:

1. Прохождение сигнала по волокнам не зависит от времени, т. е. поведение окончания волокна исследуется в

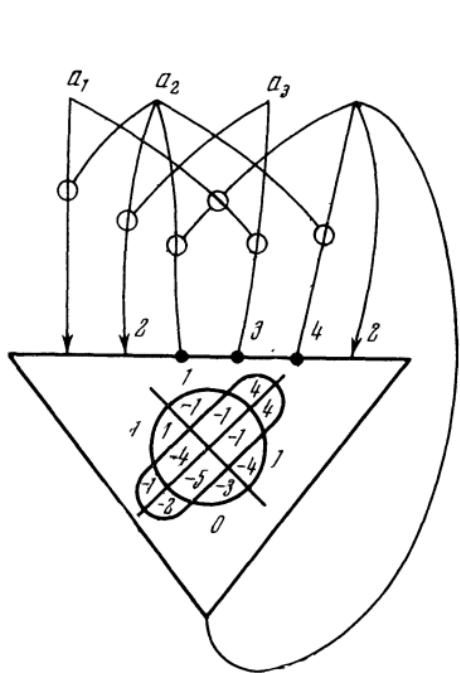


Рис. 91

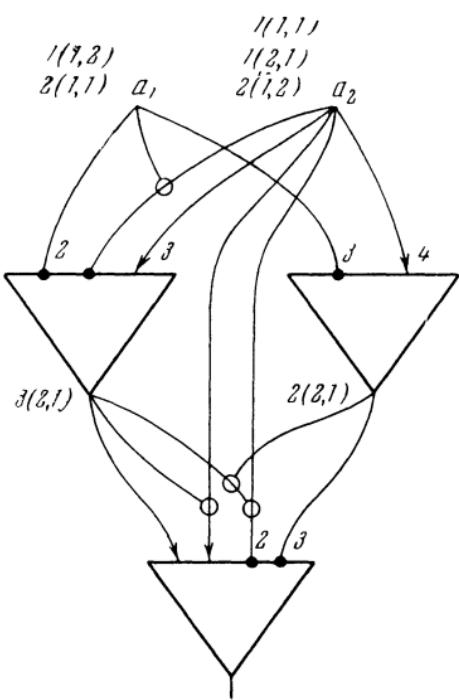


Рис. 92

тот же момент времени t , в который входы образуют данную элементарную последовательность. При этом можно выделить более простой подслучай, когда не учитывается и синаптическая задержка.

2. Вершины волокон играют роль задержек сигналов на единицу времени. При этом в момент времени $t + i$ конструируется определенная сеть диаграмм. Ее поведение можно исследовать или независимо от времени, или в равновременные моменты времени (начальным моментом является момент $t + i$). Таким образом, второй случай в свою очередь разбивается на два подслучаи.

Ясно, что первый подслучай, как и случай 1, относится только к сетям без обратных связей. Если не учитывать синаптические задержки, то сети без обратных связей представляют собой однотактные автоматы.

Для любой сети бинарных матриц без обратных связей можно найти эквивалентную ей регулярную сеть (способ регуляризации изложен в § 2.7).

Следовательно, любая нерегулярная нейронная сеть без обратных связей может быть заменена эквивалентной ей регулярной сетью из формальных нейронов.

Как подчеркивалось в главе 2, надежность сети из не вполне надежных элементов может быть обеспечена за счет избыточности последних. Так как на одном формальном нейроне можно реализовать несколько неэквивалентных между собой формул исчисления высказываний (без обратных связей число таких формул не превосходит $2^n + 1$, введение обратных связей позволяет увеличить их количество до 2^{n+1} , см. § 4.4), то формальные нейроны можно использовать в качестве не вполне надежных элементов при конструировании надежных схем описанного во второй главе вида.

§ 4.4. Формальные нейроны с обратными связями

Пороговые матрицы формальных нейронов с обратными связями. Формальный нейрон с обратными связями характеризуется тем, что от его выхода могут быть направлены волокна, принадлежащие этому же нейрону, т. е. выход нейрона в этом случае можно рассматривать как его вход, который мы будем называть *несобственным* (а остальные входы — *собственными*). Будем предполагать, что все входы нейрона a_1, \dots, a_n различны; несобственный вход обозначим через a_{n+1} . Например, формальный нейрон, изображенный на рис. 91, имеет три собственных входа и один несобственный.

В начальный момент времени t могут быть возбуждены некоторые из собственных входов нейрона. Таким образом, моменту времени t можно ставить в соответствие пороговую матрицу $(n + 1)$ -ой переменной; при этом несобственный вход a_{n+1} считается фиктивным. Вход a_i нейрона мы называем *фиктивным*, если на этом входе не начинаются волокна нейрона.

Нетрудно видеть, что если вход a_i нейрона фиктивен, то все соседние относительно входа a_i строки или столбцы пороговой матрицы попарно совпадают, и, наоборот, если все соседние относительно входа a_i строки или столб-

цы пороговой матрицы попарно совпадают, то пороговую матрицу можно реализовать на нейроне, у которого вход a_i фиктивен.

Две строки (столбца) матрицы будем называть соседними относительно входа a_i , если соответствующие им входные последовательности отличаются друг от друга только тем, что в одной из них на i -ом месте находится нуль, а в другой — единица.

Пусть все соседние относительно входа a_i строки или столбцы пороговой матрицы $(n+1)$ -ой переменной попарно совпадают. Для построения $(n+1)$ -входового нейрона с фиктивным входом a_i в матрице можно вычеркнуть из каждой пары соседних относительно входа a_i строк или столбцов по одной строке или одному столбцу; в результате мы получим пороговую матрицу n переменных; по ней строится нейрон, к входам которого можно добавить фиктивный вход a_i (на вопросах синтеза нейронов по пороговым матрицам остановимся ниже).

Пороговую матрицу, соответствующую моменту времени t , мы в дальнейшем будем называть t -пороговой матрицей.

В момент времени $t+1$ могут возбуждаться как собственные входы нейрона, так и несобственный вход. Возбуждение несобственного входа зависит от информации, поступившей по возбужденным волокнам на тело нейрона в момент времени t , и от значения порога нейрона в момент времени $t+1$. Т. е. моменту $t+1$ соответствует $(t+1)$ -пороговая матрица $(n+1)$ -ой переменной; вообще говоря, $(t+1)$ -пороговая матрица отличается от t -пороговой матрицы. В моменты времени $t+i$, $i > 1$, поведение нейрона описывается $(t+i)$ -пороговыми матрицами, которые, как нетрудно показать, графически совпадают с $(t+1)$ -пороговой матрицей. Из сказанного следует, что n -входовый формальный нейрон с обратными связями имеет две графически различные пороговые матрицы $(n+1)$ -ой переменной: t -пороговую и $(t+1)$ -пороговую. В t -пороговой матрице все соседние относительно входа a_{n+1} столбцы попарно совпадают, а все $(2r-1)$ -ые столбцы совпадают с соответствующими столбцами $(t+1)$ -пороговой матрицы ($r = 1, \dots, 2^k$, где 2^k — количество столбцов в матрицах). Следовательно, t -пороговую матрицу нейрона можно построить, если известна $(t+1)$ -пороговая матрица,

Например, t -пороговая и $(t + 1)$ -пороговая матрицы трехходового нейрона, изображенного на рис. 91, имеют, соответственно, вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -4 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & -5 \\ 1 & 4 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(для сравнения с последней матрицей см. $(t + 1)$ -пороговую диаграмму на теле нейрона).

Мы разобрали случай, когда несобственный вход имеет номер $n + 1$. Аналогично можно описать функционирование формального нейрона, когда несобственный вход имеет номер i , $i < n + 1$.

Синтез нейронов с обратными связями. Нетрудно заметить, что любую пороговую матрицу $(n + 1)$ -ой переменной можно считать $(t + 1)$ -пороговой диаграммой n -входового нейрона с несобственным входом a_i , $1 \leq i \leq n + 1$. Синтез формальных нейронов с обратными связями по заданной $(t + 1)$ -пороговой матрице $(n + 1)$ -ой переменной можно осуществить изложенным выше (§ 4.2) способом. Несобственным входом можно считать любой из входов a_1, \dots, a_{n+1} .

При фиксированном значении порога на нейроне реализуется некоторая бинарная матрица. Реализуемая на нейроне бинарная матрица может изменяться в зависимости от изменения значения порога. Все числа пороговой матрицы могут быть различными, поэтому на одном n -входовом нейроне без обратных связей можно реализовать (при изменении значения порога) не более $2^n + 1$ графически различных матриц n переменных.

Введение обратных связей позволяет увеличить количество графически различных бинарных матриц n переменных, реализуемых на одном нейроне, до 2^{n+1} . Действительно, расположим 2^{n+1} различных целых чисел на $(t + 1)$ -пороговой диаграмме (матрице) A ($n + 1$)-ой переменной так, чтобы каждое из чисел в ячейках фигуры a_i , соответствующей несобственному входу, было больше каждого из чисел в остальных ячейках и чтобы числа γ^* и γ^{**} находились в ячейках, соседних относительно фигуры a_i (где γ^* — наименьшее из чисел в ячейках фигуры

a_i , γ^{**} — наибольшее из чисел в ячейках, принадлежащих дополнению фигуры a_i). Тогда при изменении значения порога от $\gamma^{**} + 1$ до γ_{\min} на n -входовом нейроне \mathfrak{A} с несобственным входом a_i , построенном по $(t + 1)$ -пороговой матрице A , в момент времени t может быть реализовано $2^n + 1$ графически различных бинарных матриц (n переменных), где γ_{\min} — наименьшее из чисел матрицы A . При уменьшении значения порога от γ_{\max} до $\gamma^* + 1$ (где γ_{\max} — наибольшее из чисел матрицы A) на построенном нейроне \mathfrak{A} в момент $t + i$, $i \geq 1$, может быть реализовано $2^n - 1$ графически различных бинарных матриц (n переменных), не совпадающих ни с одной из матриц, реализуемых в момент времени t .

Следовательно, на n -входовом нейроне с обратными связями, синтезированном по матрице A , можно реализовать 2^{n+1} графически различных бинарных матриц n переменных. Например, на трехходовом нейроне с несобственным входом a_4 и $(t + 1)$ -пороговой матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 14 & 1 & 12 \\ 2 & 10 & 3 & 11 \\ 4 & 15 & 5 & 13 \\ 6 & 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

можно реализовать следующие бинарные диаграммы трех переменных.

В момент t , управляя порогом в интервале $[0, 8]$:
 $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$: $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$
 $(0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$; $(0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ $(0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1)$
 $(0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$; $(0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$ $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1)$.

В момент $t + 1$, управляя порогом в интервале $[9, 15]$:
 $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$; $(1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0)$; $(1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$
 $(1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0)$; $(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$; $(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$.

t -пороговая и пороговая матрицы нейрона имеют соответственно вид:

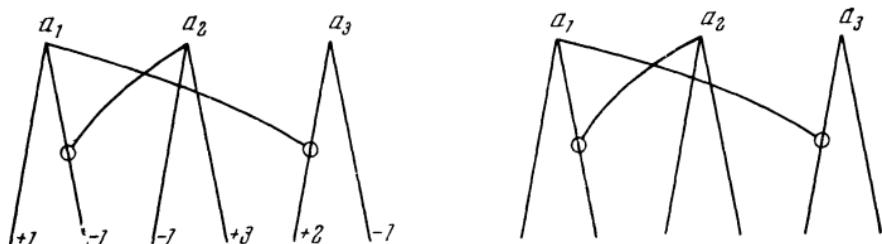
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 7 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$$

§ 4.5. Алгебраические аспекты теории формальных нейронов¹

Условимся в графических изображениях нейронов опускать «тело» и окончания ветвей — «стрелки» и «точки». Справа от ветвей будем указывать их вес со знаком «плюс» для ветвей из возбуждающих волокон и знаком «минус» — для ветвей из тормозящих волокон (напомним, что «запрет» некоторой «проводящей» ветви веса ρ сам считается ветвью веса ρ). Назовем получившееся изображение N -графом нейрона. Опуская же в N -графе указания весов ветвей, получим граф нейрона.

На табл. 3 показаны, соответственно, N -граф и граф нейрона, изображенного на рис. 85.

Таблица 3



Таким образом, нейрон полностью определяется своим N -графом. Граф нейрона характеризует лишь его структуру; результаты работы нейронов с одинаковыми графиками в общем случае различны.

В дальнейшем запись пороговой диаграммы нейрона мы будем производить следующим образом. Занумеруем входы справа налево. Состояние возбуждения входов будем символизировать единицей, состояние невозбуждения — нулем. При всякой комбинации состояний входов нули и единицы будем записывать в строку в порядке, соответствующем порядку входов.

Пусть число входов равно k . Тогда каждая комбинация состояний входов выражается k -значным двоичным

¹ Настоящий параграф содержит материал, разработанный и написанный для книги А. Л. Гавронским.

числом. Всех таких комбинаций 2^k . Каждой из них соответствует некоторое целое число. Запишем эти числа в вектор-строку размерности 2^k (индексы координат его суть $0, 1, 2, \dots, i, \dots, 2^k - 1$). Присвоим числу такой индекс, двоичный код которого выражает комбинацию состояний входов, давшую это число. Это эквивалентно тому, как если бы входы занумеровать числами $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{k-1}$ и числу, получаемому при возбуждении некоторой комбинации входов, присваивать индекс, равный сумме номеров возбужденных входов. Итак, запишем диаграмму работы нейрона в виде:

$$(\mu)_k^0 \Leftrightarrow (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{2^k-1});$$

вектор $(\mu)_k^0$ получается из матрицы (2.2) при $m = 0$.

Из описания работы нейрона следует, что $\mu_0 = 0$; поэтому мы чаще будем пользоваться вектором

$$(\mu)_k \Leftrightarrow (\mu_1, \dots, \mu_{2^k-1}).$$

Эти же диаграммы, записанные в виде столбцов, обозначим, соответственно, через $[\mu]_k^0$ (см. (2.2) при $k = 0$), $[\mu]_k$.

Основная решаемая ниже задача состоит в синтезе формального нейрона, реализующего заданную пороговую диаграмму.

1) *Свойства формальных нейронов. A).* Пусть даны k -нейроны (нейроны с k входами) N_{k1} и N_{k2} с диаграммами $(\mu)_{k1}$ и $(\mu)_{k2}$, соответственно. Определим сложение данных нейронов как объединение их в один k -нейрон N_k , при котором одноименные входы данных нейронов, объединяясь, дают вход нейрона N_k с тем же номером; все волокна и связи между ними каждого из данных нейронов переносятся и сохраняются в N_k . Граф нейрона N_k получается наложением графов нейронов N_{k1} и N_{k2} друг на друга с совпадением входов. При таком определении сложения нейронов диаграмма $(\mu)_k$ суммы нейронов равна покоординатной сумме диаграмм:

$$(\mu)_k = (\mu)_{k1} + (\mu)_{k2}.$$

B). Определим умножение k -нейрона N на целое число b , bN , как умножение на это число весов всех ветвей, входящих в данный нейрон. Структура самого нейрона и

его граф при этом не меняются. Если нейрон умножить на целое число, то каждый элемент диаграммы нейрона умножится на это же число:

$$b(\mu)_k = (b\mu_1, \dots, b\mu_{2^k-1}).$$

Правило умножения на целое число $\pm b$ ($b > 0$) является следствием правила сложения, примененного к b одинаковым k -нейронам N или $-N$. Нейрон $-N$, который можно назвать *противоположным* данному, получается из N заменой всех возбуждающих волокон тормозящими, а тормозящих — возбуждающими. Диаграмма нейрона $-N$ есть $- (\mu)_k$:

$$- (\mu)_k = (-\mu_1, \dots, -\mu_{2^k-1}).$$

Операции A и B позволяют говорить о линейных комбинациях формальных нейронов. Если нейрон N_k есть формальная линейная комбинация с целыми коэффициентами ρ_j r нейронов N_{kj} с диаграммами $(\mu)_{kj} = (\mu_{1,j}, \dots, \mu_{2^{k-1},j})$:

$$N_k = \sum_{j=1}^r \rho_j N_{kj},$$

то i -тый элемент диаграммы $(\mu)_k$ нейрона N_k есть

$$\mu_i = \sum_{j=1}^r \rho_j \mu_{i,j}$$

C). Пусть дан нейрон N_k с диаграммой $(\mu)_k$. Образуем нейрон \tilde{N}_k добавлением нового $(k+1)$ -го входа к входам N_k . Вход, от которого не исходит ни одного волокна, является фиктивным. В остальном строение нейрона остается тем же. Покажем, что диаграммы $(\mu)_{k+1}^0$ и $(\mu)_{k+1}^1$ нового нейрона \tilde{N}_k образуются из диаграмм $(\mu)_k^0$ и $(\mu)_k^1$ исходного нейрона N_k следующим образом:

$$(\mu)_{k+1}^0 = ((\mu)_k^0, (\mu)_k^0) = (0, (\mu)_k, 0, (\mu)_k),$$

$$(\mu)_{k+1}^1 = ((\mu)_k^1, (\mu)_k^1) = ((\mu)_k, 0, (\mu)_k).$$

Действительно, пусть комбинации состояний входов

нейрона N_k

$$\alpha \overline{\circ} \alpha_k \alpha_{k-1} \dots \alpha_1,$$

где $\alpha_i = 1$, если i -й вход возбужден, и $\alpha_i = 0$, если он не возбужден, соответствует в диаграмме $(\mu)_k$ координата μ_j (j — десятичный код двоичного числа α). Тогда комбинациям состояний входов в \tilde{N}_k

$$0\alpha_k \alpha_{k-1} \dots \alpha_1 \text{ и } 1\alpha_k \alpha_{k-1} \dots \alpha_1$$

будут соответствовать координаты диаграммы $(\mu)_{k+1}$, равные μ_j , а их индексы будут, соответственно, j и $2^k + j$. Утверждение доказано.

D). Пусть теперь в нейроне \tilde{N}_k с фиктивным $(k+1)$ -м входом наложены от этого нового входа запреты на все проводящие ветви нейрона N_k . Получившийся нейрон обозначим через \bar{N}_k , а его диаграммы через $(\bar{\mu})_k^0$ и $(\bar{\mu})_k$. Тогда, как нетрудно видеть,

$$(\bar{\mu})_k^0 = ((\mu)_k^0, (0)_k^0) = (0, (\mu)_k, 0, (0)_k),$$

$$(\bar{\mu})_k = ((\mu)_k, (0)_k^0) = ((\mu)_k, 0, (0)_k).$$

Действительно, так как $(k+1)$ -й вход находится сначала в невозбужденном состоянии, первые $2^k - 1$ координаты в $(\mu)_{k+1}$ образуют диаграмму $(\mu)_k$; координата с индексом 2^k нулевая, она соответствует единственному возбужденному $(k+1)$ -му входу, от которого не исходит ни одной возбуждающей ветви; далее, $(k+1)$ -й вход остается возбужденным все время и подавляет сигналы от остальных входов; таким образом, последние $2^k - 1$ координат нулевые, вектор из них обозначен через $(0)_k$.

Свойства *A* и *B* составляют основу излагаемых ниже методов синтеза формальных нейронов; свойства *C* и *D* позволяют систематически применять индукцию при распространении этих методов на нейроны с любым числом входов.

2) *Схема-I синтеза формальных нейронов.* Пусть некоторый нейрон имеет диаграмму

$$(\mu)_k \overline{\circ} (\mu_1, \dots, \mu_i, \dots, \mu_{2^k-1}).$$

Представим $(\mu)_k$ в виде линейной комбинации:

$$(\mu)_k = + \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 \cdot (1, 0, 0, \dots, 0, \dots, 0) \\ \mu_2 \cdot (0, 1, 0, \dots, 0, \dots, 0) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \mu_i \cdot (0, 0, 0, \dots, 1, \dots, 0) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \mu_{2^k - 1} \cdot (0, 0, 0, \dots, 0, \dots, 1). \end{array} \right.$$

В сжатой форме это представление можно записать так:

$$(\mu)_k = \sum_{i=1}^{2^k - 1} \mu_i \cdot (I)_{ki},$$

где $(I)_{ki}$ — вектор размерности $2^k - 1$ со всеми нулевыми координатами, кроме i -й, равной $+1$. Вектор $(I)_{ki}$ будем считать диаграммой некоторого нейрона N_{ki} . Тогда в силу свойств A и B , образуя формальную линейную комбинацию

$$N_k = \sum_{i=1}^{2^k - 1} \mu_i N_{ki},$$

мы получим один из k -нейронов, реализующих диаграмму $(\mu)_k$.

Итак, для построения нейрона по приведенной схеме, которую мы назовем «схема-1», достаточно уметь строить нейроны N_{ki} , реализующие диаграммы $(I)_{ki}$. Построение N_{ki} будем вести индукцией по k . Заметим, что

$$(I)_{11} \sqsubseteq (1).$$

Пусть при некотором k нейроны N_{ki} построены. Построим $N_{k+1,j}$. Добавим во всех нейронах N_{ki} по одному $(k+1)$ -му входу и образуем нейроны \tilde{N}_{ki} и \bar{N}_{ki} . В силу свойств C , D , имеем диаграммы этих нейронов:

$$D(\tilde{N}_{ki}) \sqsubseteq ((I)_{ki}, 0, (I)_{ki}), \quad D(\bar{N}_{ki}) \sqsubseteq ((I)_{ki}, 0, (0)_k).$$

Легко заметить, что диаграммы $D(\bar{N}_{ki})$ суть векторы $(I)_{k+1,j}$ для $j \leq 2^k - 1$, а разности диаграмм $D(\tilde{N}_{ki}) -$

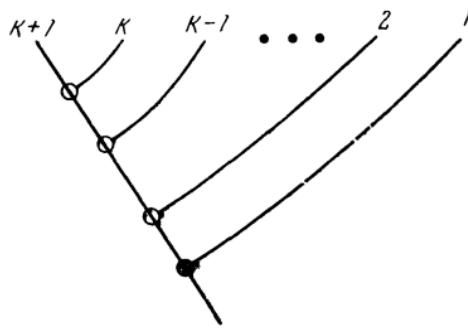
$- D(\bar{N}_{ki})$ — суть векторы $(I)_{k+1,j}$ для $j = 2^k + i$. Отсюда следует, что

$$N_{k+1,j} \stackrel{\circ}{=} \bar{N}_{kj}, \quad j \leq 2^k - 1;$$

$$N_{k+1,j} \stackrel{\circ}{=} \tilde{N}_{ki} - \bar{N}_{ki}, \quad j = 2^k + i, \quad i \leq 2^k - 1.$$

Таким образом построены все нейроны $N_{k+1,j}$, используемые в схеме-1, кроме $N_{k+1,2^k}$, реализующего диаграмму $(I)_{k+1,2^k}$. В этой диаграмме все координаты нулевые, исключая координату с индексом 2^k . Поэтому от k первых входов не должно исходить проводящих волокон. Если же возбужден один только $(k+1)$ -й вход, то в теле нейрона мы получаем $+1$; это требует от $(k+1)$ -го входа возбуждающего волокна. Так как, далее, при возбуждении любой комбинации из k входов вместе с $(k+1)$ -м входом в теле нейрона мы получаем нули, то естественно наложить запрет от каждого из k первых входов на проводящее волокно от $(k+1)$ -го входа. На табл. 4 приведен график нейрона $N_{k+1,2^k}$.

Таблица 4

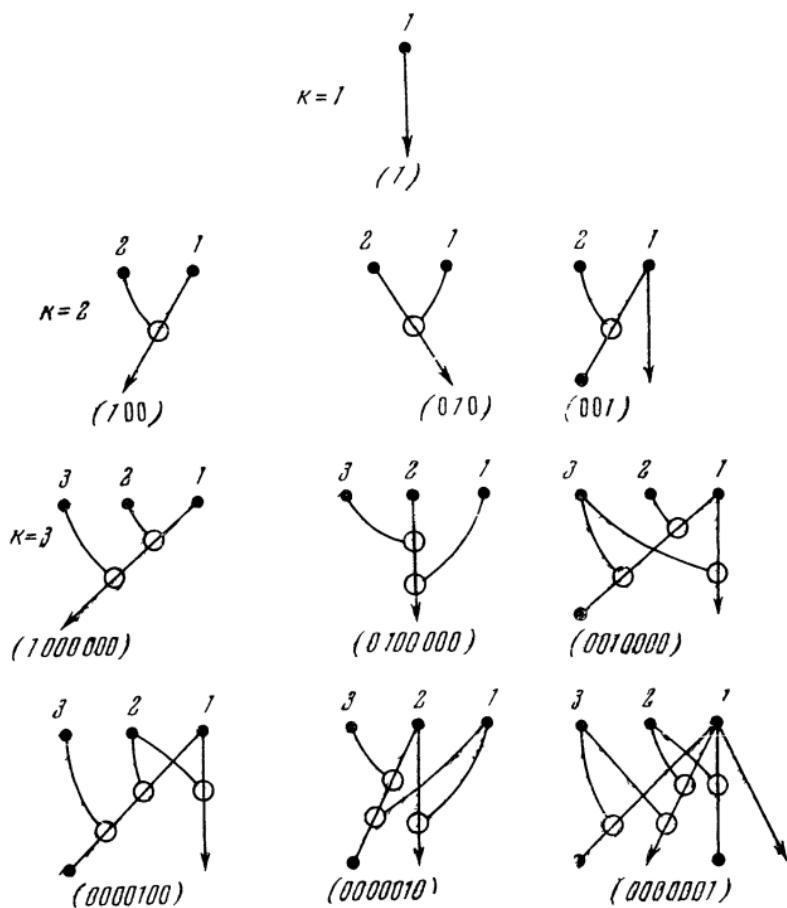


Полученная система нейронов N_{ki} , строящаяся по индукции, позволяет синтезировать из них нейрон N_k с любой заданной диаграммой. Для синтеза нужно включить в общий нейрон N_k все нейроны N_{ki} , соответствующие ненулевым μ_i диаграммы $(\mu)_k$, и веса проводящих ветвей в N_{ki} взять равными именно μ_i .

На табл. 5 приведены нейроны N_{ki} для схемы-1, вместе со своими диаграммами $(I)_{ki}$ для $k = 1, 2, 3$. Так

как веса всех ветвей равны ± 1 , то для указания знака здесь можно воспользоваться общепринятыми обозначениями — стрелкой и точкой соответственно.

Таблица 5



3) *О структуре формальных нейронов.* Рассмотрим нейроны, имеющие только одно проводящее (возбуждающее или тормозящее) волокно с произвольно наложенными на него запретами от других входов. Такие нейроны назовем *элементарными* или просто *элементами*. В силу свойств A и B каждый нейрон можно считать линейной комбинацией своих элементов; таким образом, структуру нейрона можно определить набором входящих в него элементов.

Рассмотрим для данного k полную систему элементов, то есть систему всех различных элементарных k -нейронов.

Нейрон, содержащий все элементы полной системы, назовем полным (в смысле структуры). Свойство полноты нейрона геометрически можно выразить так: граф полного k -нейрона содержит граф любого k -нейрона.

Найдем число элементов L_k полной системы и число ветвей V_k полного нейрона, что дает максимальное число ветвей в k -нейроне. Для удобства вычислений возьмем число входов, равное $n + 1$. Зафиксируем в $(n + 1)$ -нейроне произвольный вход и выберем все элементы с проводящей ветвью от этого входа. Число таких элементов l_{n+1} и число ветвей в них v_{n+1} не зависят от номера фиксированного входа; очевидно,

$$L_{n+1} = (n + 1) l_{n+1}, \quad V_{n+1} = (n + 1) v_{n+1},$$

i запретов можно наложить на проводящую ветвь C_n^i способами, откуда $l_{n+1} = 2^n$ и $L_k = k \cdot 2^{k-1}$.

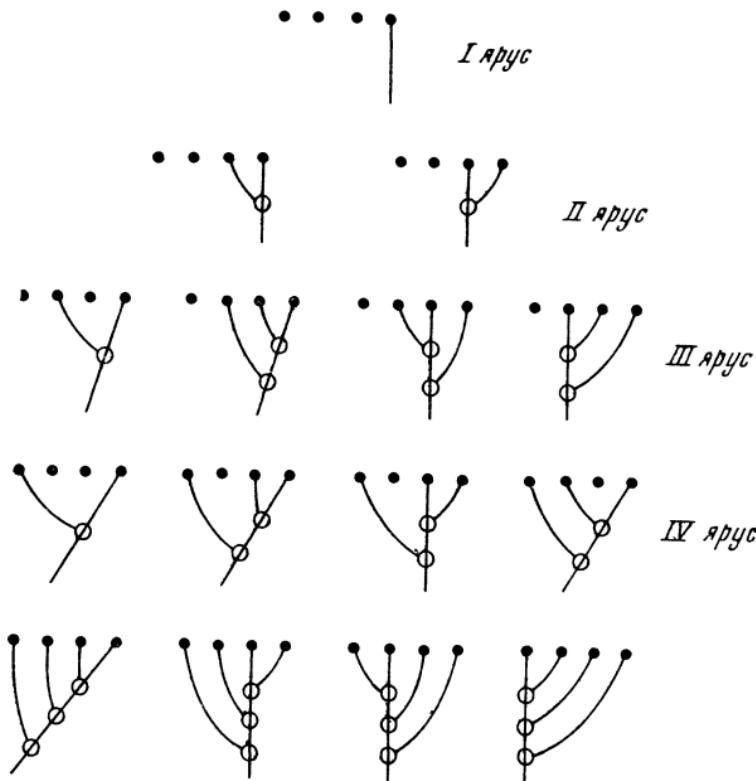
Число ветвей в элементе, содержащем i запретов, равно $i + 1$, то есть $v_{n+1} = \sum_{i=1}^n (i + 1) C_n^i = \sum_{i=0}^n i C_n^i + 2^n$.

$$i C_n^i = i \frac{n!}{i! (n-i)!} = n \frac{(n-1)!}{(i-1)! [(n-1)] - (i-1)!} = n C_{n-1}^{i-1},$$

$$v_{n+1} = n 2^{n-1} + 2^n = (n + 2) 2^{n-1}, \quad V_k = k (k + 1) 2^{k-2}.$$

Изучим теперь структуру нейронов, синтезируемых по схеме-1. Речь идет о выделении системы S_k элементов (S_k -системы), входящих в общем случае в нейроны, синтезируемые по этой схеме.

При построении $(k + 1)$ -нейронов в схеме-1 использовались уже построенные k -нейроны, реализующие диаграммы I_{ki} . Пусть система S_k элементов построена. Рассматривая нейрон N_{ki} как линейные комбинации элементов S_k -системы и получая $N_{k+1,j}$ по указанным в пункте 2 правилам, мы замечаем, что каждый элемент S_k -системы порождает два элемента S_{k+1} -системы. В S_{k+1} -систему, кроме того, войдет образующий нейрон $N_{k+1,2^k}$, являющийся, очевидно, элементарным. Таким образом, число элементов p_k в S_k -системе удовлетворяет рекуррентному соотношению $p_{k+1} = 2p_k + 1$, $p_1 = 1$, откуда $p_k = 2^k - 1$.



В таблице 6 показано построение системы S_k элементарных нейронов, используемых в схеме-1 (до $k = 4$). Построение ведется по «ярусам». В первом ярусе стоит один элементарный нейрон для $k = 1$. Каждый новый ярус получается из элементов предыдущих добавлением одного ($k + 1$)-го входа ко всем элементам предыдущих ярусов и наложением запретов от него на проводящие ветви. В предыдущих ярусах при этом в каждом элементе добавляется новый фиктивный вход. В каждом ярусе последним является нейрон $N_{i,2^{i-1}}$, где i — номер яруса. Полученные таким образом элементы в ($k + 1$)-м ярусе образуют S_{k+1} -систему. (Элементы в таблице даны в графах.)

Пусть R_k — максимальное число ветвей в нейроне, строящемся по схеме-1, т. е. R_k есть число ветвей во всех элементарных нейронах S_k -системы. Нетрудно установить, что

$$R_{k+1} = 2R_k + 2^k + k, \quad R_1 = 1.$$

Отсюда следует, что

$$R_k = k \cdot 2^{k-1} + 2^k - (k+1).$$

Назовем экономичностью алгорифма синтеза нейрона по пороговой диаграмме (обозначение: \mathcal{E}_k) отношение числа ветвей в полном нейроне к максимальному числу ветвей в нейронах, синтезируемых по данному алгорифму. Для схемы-1 $\mathcal{E}_k = \frac{V_k}{R_k}$. Для нашего примера: $\frac{k+1}{4} < \mathcal{E}_k < \frac{k+1}{2}$.

Замечание. Условимся каждому элементарному k -нейрону ставить в соответствие строку из k знаков, принимающих значения 0, β , α . При этом α обозначает вход (α -вход), от которого исходит проводящая ветвь; β — вход (β -вход), от которого наложен запрет на проводящую ветвь; 0 — фиктивный вход (0-вход). Для иллюстрации приведем элементарные нейроны, изображенные на табл. 21, в символической записи:

- I (000 α)
- II (00 $\beta\alpha$) (00 $\alpha\beta$)
- III (0 $\beta\beta\alpha$) (0 $\beta\beta\alpha$) (0 $\beta\alpha\beta$) (0 $\alpha\beta\beta$)
- IV (000 α) (00 $\beta\alpha$) (0 $\beta\alpha\beta$) (0 $\beta\beta\alpha$) (0 $\beta\beta\beta\alpha$)
($\beta\beta\alpha\beta$) ($\beta\alpha\beta\beta$) ($\alpha\beta\beta\beta$).

4) *Схема-2 синтеза формальных нейронов.* Рассмотрим предварительно полное решение задачи о синтезе двухвходового нейрона. Полная система элементов в этом случае состоит из 4-х элементов: (0 α), ($\beta\alpha$), ($\alpha 0$), ($\alpha\beta$). Оказывается, любое сочетание трех элементов из полной системы дает решение задачи о синтезе.

Возьмем, например, сочетание $\{(0\alpha), (\beta\alpha), (\alpha 0)\}$ и найдем веса ρ_1, ρ_2, ρ_3 , с которыми нужно брать эти элементы в нейроне с диаграммой (μ_1, μ_2, μ_3) .

Диаграмма (μ_1, μ_2, μ_3) есть, очевидно, сумма диаграмм взятых элементов, именно,

$$\begin{array}{lcl} \rho_1 0 \rho_1 & & \rho_1 + \rho_3 = \mu_1 \\ + 0 \rho_2 \rho_2 & \text{т. е.} & \rho_2 = \mu_2 \\ \rho_3 0 0 & & \rho_1 + \rho_2 = \mu_3, \\ \hline \mu_1 \mu_2 \mu_3, & & \end{array}$$

откуда

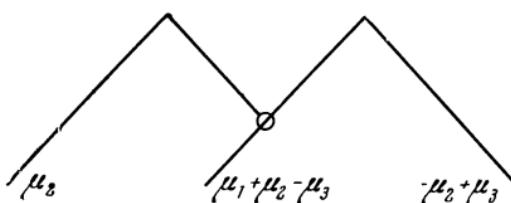
$$\rho_1 = -\mu_2 + \mu_3$$

$$\rho_2 = \mu_2$$

$$\rho_3 = \mu_1 + \mu_2 - \mu_3.$$

N -граф синтезированного нейрона имеет вид, показанный в табл. 7.

Т а б л и ц а 7



Аналогично устанавливается разрешимость задачи синтеза для остальных сочетаний элементов. Заметим, что приведенное решение требует лишь четырех ветвей, по сравнению с пятью, получающимися в схеме-1. Поэтому предложим иную схему синтеза формальных нейронов — схему-2.

Диаграмму

$$(\mu)_3 \odot (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_7)$$

представим в виде:

$$(\mu)_3 = (\mu)_3^* + (\tilde{\mu})_2 + (\bar{\mu})_2,$$

где

$$(\mu)_3^* \Leftrightarrow (0, 0, 0, \mu_4, \mu_4, \mu_4, \mu_4),$$

$$(\bar{\mu})_2 \Leftrightarrow (\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3, 0, 0, 0, 0), \quad (\tilde{\mu})_2 \Leftrightarrow (\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \tilde{\mu}_3, 0, \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \tilde{\mu}_3),$$

причем

$$(\bar{\mu}_i = \mu_{4+i} - \mu_i \quad (i = 1, 2, 3); \quad \bar{\mu}_j = \mu_j - \tilde{\mu}_j \quad (i = 1, 2, 3),$$

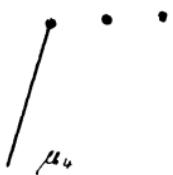
т. е.

$$\begin{array}{ccccccc} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & \mu_6 & \mu_7 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \mu_4 & \mu_4 & \mu_4 & \mu_4 \\ + & & & & & & \\ \tilde{\mu}_1 & \tilde{\mu}_2 & \tilde{\mu}_3 & 0 & \tilde{\mu}_1 & \tilde{\mu}_2 & \tilde{\mu}_3 \\ + & & & & & & \\ \bar{\mu}_1 & \bar{\mu}_2 & \bar{\mu}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} (\mu)_3^* \\ (\tilde{\mu})_2 \\ (\bar{\mu})_2 \end{array}$$

Единственность такого представления очевидна.

Для реализации диаграммы $(\mu)_3^*$ достаточно элементарного нейрона ($\alpha 00$) веса μ_4 (табл. 8).

Таблица 8



Диаграммы $(\tilde{\mu})_2$ и $(\bar{\mu})_2$ в силу свойств C и D (пункт 1) реализуются нейронами \tilde{N}_{21} и \bar{N}_{22} , соответственно; последние синтезируются в соответствии с изложенным выше решением задачи синтеза для двухходовых нейронов. В этом случае для синтеза нейрона достаточно 12 ветвей.

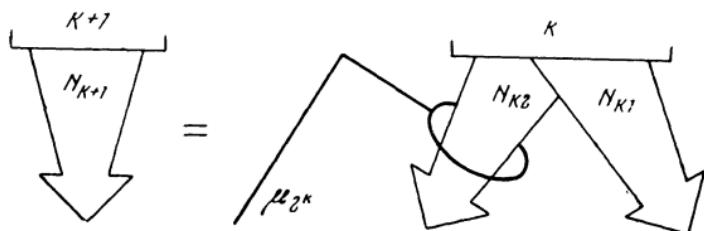
В общем случае произвольная диаграмма $(\mu)_{k+1}$ представляется в виде суммы диаграмм $(\mu)_{k+1}^*$, $(\tilde{\mu})_k$, $(\bar{\mu})_k$ следующим образом:

$$\begin{array}{c} \mu_1 \dots \mu_{2^k-1} \quad \mu_{2^k} \quad \mu_{2^k+1} \dots \mu_{2^{k+1}-1} \\ \hline 0 \dots 0 \quad \mu_{2^k} \quad \mu_{2^k} \quad \dots \mu_{2^k} \\ + \\ \tilde{\mu}_1 \dots \tilde{\mu}_{2^k-1} \quad 0 \quad \tilde{\mu}_1 \quad \dots \quad \tilde{\mu}_{2^k-1} \\ + \\ \bar{\mu}_1 \dots \bar{\mu}_{2^k-1} \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0, \end{array}$$

$$\tilde{\mu}_i = \mu_{2^k+i} - \mu_{2^k}, \quad \bar{\mu}_i = \mu_i - \tilde{\mu}_i \quad (1 \leq i \leq 2^k - 1).$$

Пусть k -диаграммы $(\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_{2^k-1})$ и $(\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_{2^k-1})$ реализуются, соответственно, нейронами N_{k1} и N_{k2} , синтезированными по схеме-2. Тогда нейрон N_{k+1} , реализующий диаграмму $(\mu)_{k+1}$ и синтезированный также по схеме-II, может быть символически представлен в виде, показанном на табл. 9.

Таблица 9



Символ, находящийся на табл. 9 слева от знака равенства, обозначает $(k + 1)$ -нейрон; общая петля запрета от $(k + 1)$ -го входа на нейроне N_{k_2} означает, что каждое проводящее волокно этого нейрона запрещено $(k + 1)$ -м входом.

Максимальное число ветвей в нейронах, строящихся по схеме-2, удовлетворяет, как легко видеть, соотношению:

$$R_{k+1} = 2R_k + 2^k, \quad R_1 = 1.$$

Отсюда $R_k = k \cdot 2^{k-1}$ и $\mathcal{Z}_k = \frac{k+1}{2}$, т. е. экономичность схемы-2 при небольших k значительно выше экономичности схемы-1.

Замечание 1. *Обобщенная схема.* Вообще говоря, в приведенной схеме можно вместо элементарного нейрона $(\alpha, 00\dots 0)$ веса μ_{2^k} брать произвольный элемент с $(k+1)$ -м α -ходом, обозначая, как и раньше, диаграмму этого элементарного нейрона через (μ_{k+1}^*) (его ненулевые координаты, очевидно, равны μ_{2^k}):

$$(\mu)_{k+1}^* = (0, \dots, 0, \mu_0^*, \mu_1^*, \dots, \mu_{2^k-1});$$

тогда мы получим следующие соотношения для диаграмм $(\tilde{\mu})_k$ и $(\bar{\mu})_k$:

$$\tilde{\mu}_i = \mu_{2^k+i} - \mu_i^*, \quad \bar{\mu}_r = \mu_i - \tilde{\mu}_i \quad (0 \leq i \leq 2^k - 1).$$

Таким образом, если схемы синтеза формальных нейронов, отвечающие различным элементам с $(k+1)$ -м α входом, считать различными и обозначать их число через Z_{k+1} , то будем иметь

$$Z_{k+1} = Z_k^2 \cdot 2^k.$$

Как было упомянуто выше, для $k = 2$ имеется четыре различных решения (схемы) задачи синтеза, т. е. $Z_2 = 4$. Можно показать индукцией, что

$$Z_k = \frac{2^{5 \cdot 2^{k-2}}}{2^{k+1}}.$$

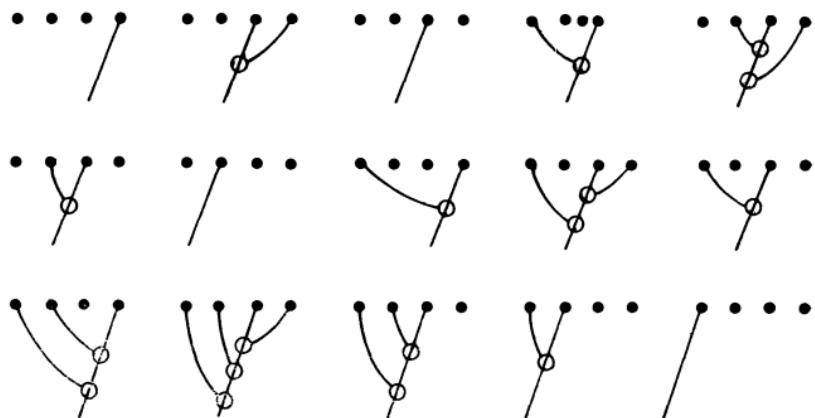
Например, $Z_3 = 64$.

Структуру нейронов, синтезируемых по любой из описанных схем, легко получить аналогично тому, как это де-

лалось для схемы-I (которая, кстати, входит в обобщенную схему).

Схема-II выделена благодаря некоторым свойствам, которые будут описаны ниже. Решение задачи синтеза по этой схеме, если двухходовые нейроны на втором шаге синтеза имеют структуру, изображенную на табл. 6, а построение ведется по табл. 9 (при этом N_{k1} и N_{k2} имеют одинаковую структуру), мы назовем каноническим решением. На табл. 10 приведена система элементарных нейронов (в графах), используемых в каноническом решении до $k = 4$.

Таблица 10



В символической записи табл. 10 имеет вид:

(000 α), (00 $\alpha\beta$), (00 $\alpha 0$), (0 $\beta 0\bar{\alpha}$), (0 $\beta\alpha\beta$), (0 $\beta\alpha 0$),
($\alpha 00$), ($\beta 00\alpha$), ($\beta 0\alpha\beta$), ($\beta 0\alpha 0$), ($\beta\beta 0\alpha$), ($\beta\beta\alpha\beta$),
($\beta\beta\alpha 0$), ($\beta\alpha 00$), ($\alpha 000$).

Замечание 2. Рассмотрим случай нулевой диаграммы $(0)_k$. С помощью описанных схем синтеза формальных нейронов можно получить множество нетривиальных реализаций этой диаграммы. Тривиальным нейроном, реализующим нулевую диаграмму, является нейрон, все входы которого фиктивны. Нулевую диаграмму можно рассматривать как разность двух одинаковых произвольных диаграмм: $(0)_k = (\mu)_k - (\mu)_k$. Реализуя диаграмму $(\mu)_k$ дважды различными (то есть в разных схемах) нейронами N_{k1} и N_{k2} и беря их разность $N_k = N_{k1} - N_{k2}$, получим нетривиальный нейрон N_k , реализующий диаграмму $(0)_k$.

5) *Матричный подход.* По существу задача синтеза нейрона по заданной пороговой диаграмме сводится к системам линейных уравнений, решения которых дают значения весов элементарных нейронов, входящих в искомый нейрон. При этом сразу обнаруживается неоднозначность решения (см. § 4.2, 4.4). Действительно, полная система элементов k -нейронов содержит $L_k = k2^{k-1}$ элементов, т. е. в общем случае столько неизвестных величин — весов, с которыми нужно брать эти элементы, — сколько надо, чтобы получить данную диаграмму $(\mu)_k$, число координат которой $2^k - 1$ равно числу уравнений системы. Неравенство $k2^{k-1} > 2^{k-1}$ и влечет неоднозначность решения системы.

Построенные выше схемы синтеза приводят к мысли о том, что существуют минимальные системы элементарных нейронов, с помощью которых можно синтезировать нейрон, реализующий любую данную пороговую диаграмму. Такие системы мы назовем базами. Алгебраически это означает, что диаграммы элементарных нейронов, входящих в базу, образуют максимальную линейно независимую систему векторов размерности $2^k - 1$. Отсюда следует, что в базе в точности $2^k - 1$ элементов. Базами являются, например, системы, приведенные в таблицах 6 и 10.

Пусть дана некоторая база S_k и соответствующая ей максимальная линейно независимая система элементарных диаграмм. Элементы берутся с некоторыми весами ρ_i , что дает нейрон N_k . Если записать диаграммы элементов базы S_k как столбцы матрицы, обозначаемой через B_k , веса ρ_i записать в вектор-столбец $[\rho]_k$, то произведение $B_k [\rho]_k = [\mu]_k$ дает диаграмму нейрона N_k , записанную в столбец. Заметим, что это есть матричное решение прямой задачи: найти пороговую диаграмму данного нейрона (причем даже для систем, не обязательно являющихся базами). Но обратная задача единственным образом решается только для баз и решение выражается с помощью матрицы M_k , обратной B_k :

$$[\rho]_k = M_k [\mu]_k, \quad M_k = B_k^{-1}.$$

Подробно базы изучаются в пункте 7. Так как матрицы B_k для каждой базы бинарные, т. е. состоят из нулей и единиц, то нахождение обратных матриц в каждом конкретном случае не представляет особых затруднений.

В некоторых случаях, однако, возможно дать явное выражение матриц M_k , избежав фактического обращения B_k .

Запишем в матричном виде каноническое решение задачи синтеза двухвходового нейрона (табл. 7):

$$\begin{aligned}\rho_1 &= -\mu_2 + \mu_3 \\ \rho_2 &= \mu_1 + \mu_2 - \mu_3; \text{ т. е. } \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Так же легко находятся матрицы для других решений в случае двухвходовых нейронов. Обратимся теперь к схеме-II, символически изображенной на табл. 9. Число μ_2^k (вес единственной проводящей ветви от $(k+1)$ -го входа) обозначим для удобства через ρ_3 . Пусть нейроны N_{k1} и N_{k2} имеют, соответственно, диаграммы $(\mu)_{k1}$ и $(\mu)_{k2}$. Тогда диаграмма $(\mu)_{k+1}$ нейрона N_{k+1} сокращенно запишется как сумма:

$$(\mu)_{k+1} = + ((\mu)_{k1}, 0, (\mu)_{k1}) \\ ((0)_k, \rho_3, (\rho_3)_k),$$

где $(0)_k$ — нулевая строка, $(\rho_3)_k$ — строка чисел ρ_3 (обе строки размерности $2^k - 1$).

Нейроны N_{k1} и N_{k2} независимы в том смысле, что в схеме-2 их можно строить в различных базах. Пусть по предположению N_{k1} и N_{k2} реализованы в элементах баз S'_k и S''_k , соответственно, и веса элементов в выражениях N_{k1} и N_{k2} через эти базы задаются столбцами $[\rho]_{k1}$ и $[\rho]_{k2}$, т. е:

$$[\rho]_{k1} = M'_k [\mu]_{k1}, \quad [\rho]_{k2} = M''_k [\mu]_{k2},$$

где M'_k и M''_k — матрицы, соответствующие базам S'_k и S''_k , считаются известными. Образуем из элементов баз S'_k и S''_k системы \tilde{S}'_k и \tilde{S}''_k для каждого нейрона $N'_k \in S'_k$, беря $\tilde{N}'_k \in \tilde{S}'_k$, и для $N''_k \in S''_k$, беря $\tilde{N}''_k \in \tilde{S}''_k$. Системы \tilde{S}'_k и \tilde{S}''_k вместе с элементом веса ρ_3 (с единственной проводящей ветвью от $(k+1)$ -го входа) образуют систему S_{k+1} , являющуюся, очевидно, базой $(n+1)$ -неронов. Элементы этой базы упорядочим следующим образом; этот порядок будем называть естественным.

Элементы системы \tilde{S}'_k старше элементов системы \tilde{S}''_k , элемент веса ρ_3 — самый младший в S_{k+1} . Элементы

в системах \tilde{S}'_k и \tilde{S}''_k считаются уже упорядоченными соответственно порядку в S'_k и S''_k . Таким образом, весовые коэффициенты элементов базы S_{k+1} в нейроне N_{k+1} , синтезируемом в элементах этой базы, запишутся в вектор-столбец $[\rho]_{k+1}$ так:

$$[\rho]_{k+1} = \begin{Bmatrix} [\rho]_{k1} \\ [\rho]_{k2} \\ \rho_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M'_k [\mu]_{k1} \\ M''_k [\mu]_{k2} \\ \rho_3 \end{Bmatrix}.$$

С другой стороны, используя сокращенную запись диаграммы $(\mu)_{k+1}$ и записывая ее в столбец $[\mu]_{k+1}$, имеем:

$$[\mu]_{k+1} = \begin{Bmatrix} [\mu]_{k1} + [\mu]_{k2} \\ \rho_3 \\ [\mu]_{k2} + [\rho_3]_k \end{Bmatrix}.$$

Задача состоит в том, чтобы найти матрицу M_{k+1} по M'_k и M''_k из матричного уравнения

$$M_{k+1} [\mu]_{k+1} = [\rho]_{k+1}.$$

Очевидно, что последняя строка матрицы M_{k+1} имеет вид $((0)_k, 1, (0)_k)$.

Матрицу M_{k+1} ищем в виде:

$$M_{k+1} = \begin{pmatrix} M_{k1} & R_{k1} & M_{k2} \\ M_{k3} & R_{k2} & M_{k4} \\ 0_k & 1 & (0)_k \end{pmatrix},$$

где M_{ki} — клетки матрицы размерности $2^k - 1$, R_{kj} — вектор-столбцы той же размерности.

Запишем наше уравнение в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} M_{k1} & R_{k1} & M_{k2} \\ M_{k3} & R_{k2} & M_{k4} \\ 0_k & 1 & (0)_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [\mu]_{k1} + [\mu]_{k2} \\ \rho_3 \\ [\mu]_{k1} + [\rho_3]_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M'_k [\mu]_{k1} \\ M''_k [\mu]_{k2} \\ \rho_3 \end{pmatrix}.$$

В силу определения умножения матрицы на вектор это матричное выражение распадается на два:

$$\begin{aligned} M_{k1} [\mu]_{k1} + M_{k1} [\mu]_{k2} + \rho_3 R_{k1} + \\ + M_{k2} [\mu]_{k1} + M_{k2} [\rho_3]_k = M'_k [\mu]_{k1}, \end{aligned}$$

$$M_{k3}[\mu]_{k1} + M_{k3}[\mu]_{k2} + \rho_3 R_{k2} + \\ + M_{k4}[\mu]_{k1} + M_{k4}[\rho_3]_k = M_k''[\mu]_{k2}.$$

В первом уравнении $[\mu]_{k2}$ в левой части входит со множителем M_{k1} , в то время как правая часть не зависит от $[\mu]_{k2}$. Поэтому, в силу произвольного $[\mu]_{k2}$ и независимости между $[\mu]_{k1}$ и $[\mu]_{k2}$ имеем $M_{k1} \equiv 0$. Далее, вектор $[\rho_3]_k$ также независим от $[\mu]_{k1}$, откуда $\rho_3 R_{k1} + M_{k2} [\rho_3]_k = 0$ и $M_{k2} = M'_k$; наконец $R_{k1} = -M'_k [I]_k$, где $[I]_k$ — вектор, все координаты которого равны единице.

Во втором уравнении, рассуждая аналогично, получим:

$$M_{k3}[\mu]_{k1} + M_{k4}[\mu]_{k1} = 0, \quad \text{откуда } M_{k3} = -M_{k4}; \quad \text{затем} \\ \rho_3 R_{k2} + M_{k4}[\rho_3]_k = 0, \quad \text{т. е. } R_{k2} = -M_{k4}[I]_k; \quad \text{наконец} \\ M_{k3}[\mu]_{k2} = M_k''[\mu]_{k2}, \quad \text{т. е. } M_{k3} = M_k'' \text{ и } R_{k2} = M_k''[I]_k.$$

Замечание. В случае обобщенной схемы синтеза в базе S_{k+1} младший элемент веса ρ_3 имеет диаграмму не $((0)_k, \rho_3, (\rho_3)_k)$, а $((0)_k, \rho_3, (\rho_3)_k^*)$, где вектор $(\rho_3)_k^*$ имеет некоторые координаты — нулевые и остальные — равные ρ_3 : $(\rho_3)_k^* = \rho_3 (I)_k^*$. Матричные уравнения при этом изменяются несущественно, а именно, вектор $[\rho_3]_k$ заменяется на $[\rho_3]_k^*$. В результате этого в решении претерпевают изменения только векторы R_{k1} и R_{k2} ; именно, оказывается, что

$$R_{k1} = -M'_k [I]_k^* \text{ и } R_{k2} = M_k'' [I]_k^*.$$

Рассмотрим теперь частный случай схемы-II, а именно, каноническое представление нейрона для случая, когда $M'_k = M_k''$, а начальная матрица $M_1 = (1)$. Как легко получить по предыдущему,

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица нам уже встречалась. В решении матричного уравнения получаем:

$$M_{k1} = 0; \quad M_{k2} = M_{k3} = -M_{k4} = M_k;$$

$$R_{k1} = R_{k2} = M_k [I]_k = R_k.$$

Найдем R_{k+1} , считая R_k известным из уравнения $R_{k+1} = M_{k+1}[I]_{k+1}$.

Положим:

$$R_{k+1} = \begin{Bmatrix} [r]_{k1} \\ [r]_{k2} \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad [I]_{k+1} = \begin{Bmatrix} [I]_k \\ 1 \\ [I]_k \end{Bmatrix}; \quad M_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -R_k & M_k \\ M_k & R_k - M_k & 0 \\ (0)_k & 1 & (0)_k \end{pmatrix}.$$

Действуя, как раньше, имеем: $[r]_{k1} = -R_k + M_k[I]_k$, но $R_k = M_k[I]_k$, т. е. $[r]_{k1} \equiv [0]_k$, $[r]_{k2} = M_k[I]_k + R_k - M_k[I]_k = R_k$; таким образом,

$$R_{k+1} = \begin{Bmatrix} [0]_k \\ R_k \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Так как $R_1 = [1]$, то R_k можно описать как вектор размерности $2^k - 1$ с k последними координатами, равными единице.

Приведем вид матрицы M_3 для канонического представления нейрона; разбиение ее на клетки подчеркивает «происхождение» ее из матрицы M_2 .

$$M_3 = \left(\begin{array}{ccc|c|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Матрицы M_k суть обратные к матрицам B_k , столбцы которых суть диаграммы элементарных нейронов баз S_k . Пусть база S_{k+1} — каноническая. Как указывалось, она строится как объединение систем \tilde{S}'_k и \tilde{S}''_k (с добавлением младшего элемента), причем должно быть $S'_k = S''_k = S_k$ — канонической. Учитывая естественный порядок элементов в S_k и S_{k+1} , получаем рекуррентное матричное

соотношение:

$$B_{k+1} = \begin{pmatrix} B_k & B_k & [0]_k \\ (0)_k & (0)_k & 1 \\ B_k & 0 & [I]_k \end{pmatrix}, \quad B_1 = (1).$$

при $k = 2$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а при $k = 3$

$$B_3 = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

6) *О полной системе элементов.* Рассмотрим полную систему элементарных k -нейронов [см. пункт 3)] и их пороговые диаграммы (т. е. диаграммы с координатой $\mu_0 = 0$), записанные по строкам в матрицу \mathfrak{A}_k в некотором порядке, который определим ниже. Переходя к полной системе $(k+1)$ -нейронов, образуем три группы элементов по типам. В первую группу включим $(k+1)$ -элементы, получившиеся из k -элементов добавлением фиктивного $k+1$ -го входа (т. е. элемента типа \tilde{N}_k с $(k+1)$ -ым 0-входом); их диаграммы вида $(\mu)_{k+1} = ((\mu)_k, 0, (\mu)_k)$ назовем симметричными. Во вторую группу включим $(k+1)$ -элементы, получившиеся из k -элементов наложением запрета от $(k+1)$ -го входа на проводящее волокно, т. е. элементы типа \bar{N}_k с $(k+1)$ -м β -входом; сами эти элементы и их диаграммы вида $((\mu)_k, 0, (0)_k)$ назовем косыми. В третью группу включим элементы, никак не связанные с предыдущей системой, имеющие проводящее волокно от $(k+1)$ -го входа, т. е. элементы с $(k+1)$ -м α -входом; эти элементы и их диаграммы вида $((0)_k, 1, (\mu)_k)$ назовем отмеченными.

Отмеченных $(k+1)$ -элементов будет $2^k = l_{k+1}$. Отбрасывая в отмеченных диаграммах нулевую левую грань, получим векторы размерности 2^k , из которых можно образовать матрицу A_k . В силу сказанного выше, мы можем теперь выразить матрицу \mathfrak{A}_{k+1} из диаграмм $(k+1)$ -элементов так:

$$\mathfrak{A}_{k+1} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_k & \mathfrak{A}_k \\ \mathfrak{A}_k & 0 \\ 0 & A_k \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы по этому рекуррентному выражению можно было строить полные системы элементов (в диаграммах), найдем связь между A_{k+1} и A_k . Пусть некоторый отмеченный $(k+1)$ -элемент имеет в символической записи вид $(\alpha, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k)$, где δ_i обозначает 0- или β -вход. Образуем из него два $(k+2)$ -элемента: $(\alpha, 0, \delta_1, \dots, \delta_k)$ и $(\alpha, \beta, \delta_1, \dots, \delta_k)$. В первом элементе при возбуждении α -входа, любом состоянии 0-входа и некоторой комбинации состояний входов δ_i мы получим тот же результат, который дает исходный $(k+1)$ -элемент при возбуждении $(k+1)$ -го α -входа и той же комбинации состояний входов δ_i . Это приводит к тому, что правая ненулевая грань первого элемента оказывается повторенной дважды правой ненулевой гранью исходного элемента. Ненулевая же грань второго элемента сама состоит из двух граней: левой, равной грани исходного элемента, и нулевой. Объединяя диаграммы первых элементов в одну группу, а вторых — в другую, получаем соотношение:

$$A_{k+1} = \begin{pmatrix} A_k & A_k \\ A_k & 0 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы A_k , $k \neq 1$, очевидно, равен +1.

Отметим, что $\mathfrak{A}_1 = (0, 1)$; \mathfrak{A}_2 имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Проведенными рекуррентными выражениями и начальными матрицами порядок диаграмм в \mathfrak{A}_k определяется однозначно. Такой порядок и соответствующий ему порядок

док в самой системе k -элементов мы назовем естественным.

Можно в полной системе k -элементов ввести и другой порядок, называемый (α, β) -порядком и определяемый так: а) всякий элемент с i -тым α -входом старше элемента с $(k+1)$ -м α -входом для элементов с фиксированным α -входом образуем β -шифр — k -значное двоичное число с единицами на местах, соответствующих β -входам, и нулями на остальных, элемент с меньшим β -шифром старше; β -шифр в десятичной системе, очевидно, равен $\Sigma 2^{k_\beta}$, где k_β — номера β -входов.

Порядок в полной системе элементов влечет порядок в базе, если в базе элементы расположены в той же последовательности, что и в полной системе. Например, при построении схемы-I, и схемы-II, и обобщенной схемы элементы располагались в естественном порядке. (α, β) -порядок удобен для произвольных баз, получаемых по другим схемам.

Представляется интересным следующее свойство отмеченных элементов и связанной с ними матрицы A_k . Нетрудно заметить тривиальный факт: разность строк матрицы A_1 дает единственную строку матрицы \mathfrak{A}_1 .

Докажем индукцией общий факт: каждая строка матрицы \mathfrak{A}_k есть разность двух строк матрицы A_k .

Пусть для A_k определена система разностей U_k , дающая полную систему строк \mathfrak{A}_k . Возьмем матрицу A_{k+1} как объединение двух матриц: (A_k, A_k) и $(A_k, 0)$. Очевидно, что применение системы разностей U_k как оператора к минорам A_k этих матриц дает системы строк $(\mathfrak{A}_k, \mathfrak{A}_k)$ и $(\mathfrak{A}_k, 0)$. Наконец, образование новых разностей, которые все вместе можно записать как матричную разность $(A_k, A_k) - (A_k, 0)$, дает систему $(0, A_k)$. Итак, вычисляя разности в матрице A_{k+1} , мы получим все составляющие части матрицы \mathfrak{A}_{k+1} , входящие в ее рекуррентное представление.

Описанное свойство отмеченных элементов может быть использовано для построения несколько необычной схемы синтеза формальных нейронов. Пусть k -нейрон синтезирован из k -элементов и дает некоторую пороговую диаграмму $(\mu)_k^0$. Введем $(k+1)$ -вход и рассмотрим пары $(k+1)$ -входовых отмеченных элементов, разности которых дают k -элементы взятого нейрона. Беря члены пар с соответствующими коэффициентами, мы получим $(k+$

$+1$ -входовый нейрон, имеющий диаграмму $((0)_k^0, (\mu)_k^0)$ и отличающийся тем, что все проводящие ветви его исходят из одного $(k+1)$ -го входа. Требуемую диаграмму мы получим на таком нейроне, если всякую комбинацию первых k входов возбуждать вместе с возбуждением $(k+1)$ -го входа. Изучение этой схемы синтеза может, как нам кажется, представить самостоятельный интерес.

7) *Общие свойства баз.* 1°. Пусть дана база S_{k+1} . Образуем из диаграмм элементов базы, записанных в строки, матрицу \mathfrak{B}_{k+1} . Эта матрица невырождена. В силу теоремы Лапласа об определителях в \mathfrak{B}_{k+1} можно в первых $2^k - 1$ столбцах найти отличный от нуля минор \mathfrak{B}_k с ненулевым алгебраическим дополнением \mathfrak{B}_k^* , элементы которого берутся из остальных 2^k столбцов. Строки матрицы \mathfrak{B}_{k+1} можно расположить так, что выделенные миноры \mathfrak{B}_k и \mathfrak{B}_k^* будут угловыми, то есть:

$$\mathfrak{B}_{k+1} = \left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{B}_k & \mathfrak{B}_k^* \\ \hline \mathfrak{B}_k' & \mathfrak{B}_k^* \end{array} \right).$$

Обозначение минора через \mathfrak{B}_k оправдано тем, что его строки являются диаграммами элементарных k -нейронов и в силу невырожденности \mathfrak{B}_k образуют (как будет показано ниже в лемме 2) некоторую базу S_k .

Пусть в \mathfrak{B}_{k+1} числа симметричных, косых и отмеченных диаграмм, соответственно, равны a , b и c . Очевидно, что $a + b + c = 2^{k+1} - 1$, так как $(2^{k+1} - 1)$ — размерность матрицы \mathfrak{B}_{k+1} . Кроме того, имеют место неравенства: $a \leq 2^k - 1$, $b \leq 2^k - 1$, $0 < c \leq 2^k$.

Действительно, если $a > 2^k - 1$, то в \mathfrak{B}_{k+1} диаграмм вида $((\mu)_k 0 (\mu)_k)$ больше, чем координат в $(\mu)_k$; система таких строк будет линейно зависима, так как будет линейно зависима система из строк $(\mu)_k$. Аналогично в случае $b > 2^k - 1$. Так как в базе обязательно должен быть хотя бы один отмеченный $(k+1)$ -элемент, а всего их 2^k , то последнее неравенство очевидно.

2°. *Лемма 1.* Для всякой базы S_k модуль определителя матрицы B_k , а значит \mathfrak{B}_k , равен единице.

Доказательство. База по определению суть такая система (диаграмм элементарных нейронов), что любой вектор $[\mu]_k$ она представляет линейной комбинацией с целыми

коэффициентами. Из этого следует, что все элементы матрицы $M_k = B_k^{-1}$ в формуле

$$[\rho]_k = M_k [\mu]_k$$

являются целыми числами. Ведь если бы в некоторой строке элемент m_{ij} был нецелым, то беря все μ_i в $[\mu]_k$ равными нулю, кроме $\mu_j = 1$, мы получили бы $\rho_i = m_{ij}$ — нецелое число. Но определитель $(\det) B_k$ — целое число, так как как B_k — бинарная матрица. Отсюда в силу $\det B_k^{-1} = \det M_k = 1/\det B_k$, получаем $|\det M_k| = |\det B_k| = |\det \mathfrak{B}_k| = 1$; матрица \mathfrak{B}_k — транспортированная к B_k .

До сих пор всюду считалось, что размерность базы S_k равна $2^k - 1$, хотя строгого обоснования не было дано.

Лемма 2. Всякая максимальная линейно независимая система элементарных диаграмм (т. е. диаграмм элементарных k -нейронов) является базой в пространстве диаграмм, а соответствующие элементарные k -нейроны образуют базу S_k .

Доказательство. Возьмем произвольную максимальную линейнонезависимую систему \mathfrak{B}_k элементарных диаграмм и покажем, что модуль определителя матрицы \mathfrak{B}_k равен единице, что и приведет к доказательству леммы (так как утверждение, обратное к лемме 1, справедливо). Присоединим к \mathfrak{B}_k произвольный вектор $(1, (\mu)_k)$ некоторого отмеченного элемента и рассмотрим матрицу \mathfrak{B}_k^* :

$$\mathfrak{B}_k^* = \begin{pmatrix} [0]_k & \mathfrak{B}_k \\ 1 & (\mu)_k \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $\det \mathfrak{B}_k^* = -\det \mathfrak{B}_k$. \mathfrak{B}_k^* может быть получено из A_k : каждая строка \mathfrak{B}_k^* , кроме последней, есть разность двух строк A_k , откуда по известным теоремам об определителях и следует

$$|\det \mathfrak{B}_k^*| = |\det \mathfrak{B}_k| = |\det A_k| = 1.$$

Приведем одну элементарную лемму, не относящуюся непосредственно к нейронам.

Лемма 3 (о переходе). Для любых двух максимальных линейно независимых систем $\{\alpha\}$ и $\{\beta\}$ векторов одинаковой размерности можно последовательными заменами векторов из $\{\alpha\}$ на вектора из $\{\beta\}$ пройти к системе $\{\beta\}$ так,

что все промежуточные системы будут также максимальными линейно независимыми системами.

Для доказательства достаточно показать, что в $\{\alpha\}$ можно заменить хотя бы один вектор на некоторый вектор из $\{\beta\}$ с сохранением линейной независимости. Возьмем разложение некоторого вектора β по векторам системы $\{\alpha\}$: $\beta = \sum c_i \alpha_i$. Не все $c_i = 0$ одновременно. Выбирая ненулевой c_i и осуществляя замену α_i на β , получаем, очевидно, линейно независимую систему.

3°. Теорема. Во всякой базе S_k общее число ветвей в ее элементах $R_k \geq k \cdot 2^{k-1}$.

При $k = 2$ этот факт легко проверяется. Отметим два частных случая.

А). В базе S_{k+1} содержится полная система отмеченных элементов ($c = 2^k$). Тогда разбиение соответствующей матрицы \mathfrak{B}_{k+1} на миноры единственно и таково, что $\mathfrak{B}_k^* = A_k$, $\mathfrak{B}_k' = 0$; \mathfrak{B}_k — матрица, соответствующая по лемме 2 некоторой базе S_k . В полной системе отмеченных элементов число ветвей [пункт 3)] $v_{k+1} = (k+2) 2^{k-1}$. В базе S_k по предположению число ветвей $R_k \geq k 2^{k-1}$. Отсюда $R_{k+1} \geq k \cdot 2^{k-1} + (k+2) 2^{k-1} = (k+1) 2^k$. В этом случае теорема доказана. Заметим, что число баз Q_{k+1} , содержащих полную систему отмеченных элементов, легко выражается через число баз S_k . Ведь каждая строка матрицы $(\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_k')$ может быть либо симметричной, либо косой диаграммой, поэтому для данной матрицы \mathfrak{B}_k благодаря вариациям в \mathfrak{B}_k' , мы можем получить $2^{2^{k-1}}$ матриц \mathfrak{B}_{k+1} . Если же всех k -баз S_k существует z_k , то $(k+1)$ -баз с матрицей A_k в качестве \mathfrak{B}_k^* будет

$$Q_{k+1} = z_k 2^{2^{k-1}}.$$

Ограничиваюсь на каждом шаге только матрицами этого типа (кроме случая $k = 2$, когда берем четыре базы), мы получаем $Q_{k+1} = Q_k 2^{2^{k-1}}$, $Q_2 = 4$.

Можно вывести, что

$$Q_k = \frac{2^{2^k}}{2^k}.$$

Фактически всем этим развита еще одна конструктивная обобщенная схема синтеза, дающая довольно большое число общих решений. Например $Q_3 = 32$. Обе обобщенные схемы можно комбинировать, так что общее число

частных конструктивных схем еще более увеличивается, выражаясь рекуррентной формулой:

$$\tilde{Q}_{k+1} = \tilde{Q}_k 2^{2^k-1} + \tilde{Q}^2 2^k, \quad \tilde{Q}_2 = 4.$$

В). Во всей базе S_{k+1} лишь один отмеченный элемент. Оставшихся элементов $2^{k+1} - 2 = 2(2^k - 1) = a + b$, откуда, в силу неравенств пункта 1°, $a = b = 2^k - 1$. Тогда $2^k - 1$ симметричные диаграммы образуют базу симметричных диаграмм и требуют по предположению не менее $k \cdot 2^{k-1}$ ветвей, а косые диаграммы, также образующие базу, требуют не менее $k2^{k-1} + 2^k - 1$ ветвей, так как каждый косой элемент имеет дополнительный запрет от $(k+1)$ -го входа. Единственный отмеченный элемент требует хотя бы одной ветви. Итак:

$$R_{k+1} \geq k2^{k-1} + k2^{k-1} + 2^k - 1 + 1 = (k+1)2^k,$$

что и требовалось доказать.

Изложим ход доказательства в общем случае.

В системе строк $(\mathfrak{B}_k \mathfrak{B}_h^*)$ матрицы \mathfrak{B}_{k+1} отмеченных строк имеется c ($1 < c < 2^k$). По лемме 3 о переходе, от A_k можно перейти к \mathfrak{B}_k^* через линейно независимые системы заменой отмеченных строк, не входящих в \mathfrak{B}_k^* строками из \mathfrak{B}_k . Важно, что в диаграмме элемента с q фиктивными входами содержится ровно 2^q единиц (остальные координаты — нули). Если в промежуточной невырожденной матрице \mathfrak{B}_k^* заменить некоторую отмеченную строку неотмеченной с большим числом единиц, то линейная независимость нарушается. Действительно, как показано в пункте б), всякая элементарная диаграмма $(\alpha)_k^0$ есть разность двух строк из A_k : $(\alpha)_k^0 = \gamma' - \gamma''$, причем в γ' единиц вдвое больше, чем в $(\alpha)_k^0$, а в γ'' их столько же, сколько в $(\alpha)_k^0$. С другой стороны, по лемме о переходе, для сохранения линейной независимости замену в \mathfrak{B}_k^* на вектор $(\alpha)_k^0$ можно произвести лишь того вектора, который входит в линейное выражение $(\alpha)_k^0$ через векторы системы \mathfrak{B}_k^0 с ненулевым коэффициентом. Однако по предыдущему в выражении $(\alpha)_k^0$ участвуют лишь векторы с тем же или большим числом единиц. Таким обра-

зом, заменить на $(\alpha)_k^0$ вектор с меньшим числом единиц с сохранением линейной независимости нельзя.

Возьмем в базе S_{k+1} все отмеченные элементарные нейроны, входящие своими строками в \mathfrak{B}_k^* , и элементарные k -нейроны, дающие остальные строки \mathfrak{B}_k^* . Общее число фиктивных входов в этих нейронах не больше числа фиктивных входов во всех отмеченных $(k+1)$ -элементах. Последнее равно $(k+1)2^k - v_{k+1} = (k+1)2^k - (k+2)2^{k-1} = = k2^{k-1}$. По предположению в S_k $R_k \geq k2^{k-1}$; тогда число фиктивных входов $\Phi_k \leq k(2^k - 1) - k2^{k-1} = = k(2^{k-1} - 1)$. В S_{k+1} число фиктивных входов $\Phi_{k+1} \leq \leq k(2^{k-1} - 1) + k2^{k-1} + a$, но $a \leq 2^k - 1$, т. е. $\Phi_{k+1} \leq (k+1) \times \times (2^k - 1)$, откуда $R_{k+1} \geq (k+1)(2^{k+1} - 1) - \Phi_{k+1} = = (k+1)2^k$, что и требуется.

Замечание. Полученный результат показывает, что не существует алгорифма синтеза формальных нейронов с экономичностью выше, чем $\frac{k+1}{2}$; таким образом, выделенное каноническое решение задачи синтеза обладает наивысшей экономичностью.

4°. Пусть дан некоторый нейрон N_k ; образуем нейрон N'_k некоторой перестановкой входов в N_k с сохранением всех связей между волокнами. Нейроны N_k и N'_k назовем изоморфными. На табл. 11 приведены два изоморфных нейрона, полученные перестановкой 1-го и 3-го входов.

Таблица 11



Каждому k -нейрону соответствует $k!$ изоморфных нейронов. Пороговые диаграммы изоморфных нейронов отличаются также перестановками своих координат. Пусть перестановка входов задана подстановкой

$$\begin{pmatrix} 1, 2, \dots, k \\ p_1, p_2, \dots, p_k \end{pmatrix}$$

Соответствующая перестановка элементов диаграмм дает подстановку

$$\begin{pmatrix} 0, 1, 2, \dots, 2^k - 1 \\ q_0, q_1, q_2, \dots, q_{2^k-1} \end{pmatrix},$$

где q_j — индексы элементов пороговой диаграммы нейрона N_k . Легко установить, что $q_{2^m-1} = 2^{2^m-1}$, откуда следует, что

$$q_{2^m-1+l} = q_{2^m-1} + q_l \quad (1 \leq l < 2^{m-1}).$$

Этим и задается правило соответствия перестановок координат диаграмм перестановкам входов.

При перестановке входов в некоторой системе элементов возможно, что какие-либо элементарные нейроны перейдут в нейроны этой же системы или в себя. Если это имеет место для всех элементов некоторой системы, то будем говорить, что система перешла в себя.

Теорема. При перестановке входов никакая база не переходит в себя.

Иначе: всякая система $2^k - 1$ диаграмм элементарных нейронов, образующих систему, переходящую в себя, линейно зависима. Изложим ход доказательства. Его достаточно провести для систем, переходящих в себя при перестановке первых двух входов. Система, переходящая в себя, разбивается на две подсистемы: подсистему пар элементов, переходящих друг в друга, и подсистему элементов, переходящих в себя (одинарные элементы).

Возьмем два элемента, переходящих друг в друга при нашей перестановке, и их пороговые диаграммы. Разобьем эти диаграммы на грани (кварты) по четыре координаты в каждой. Очевидно, что если в некоторой кварте нет единиц у одной диаграммы, то их нет в этой же кварте и у другой диаграммы, причем ненулевые кварты в пределах одной диаграммы одинаковы. Беря разность таких диаграмм, можно установить, что разность кварт имеет вид (01—10). Обозначая такую кварту через I , а нулевую (0, 0, 0, 0) через 0, устанавливаем соответствие между разностями переходящих друг в друга диаграмм и векторами размерности 2^{k-2} . Отсюда следует, что система более чем 2^{k-2} пар переходящих друг в друга диаграмм размерности 2^k линейно зависима.

В случае одинарных диаграмм, т. е. переходящих в себя, можно заметить, что у них карты бывают только двух типов (1000) и (1111). Отсюда следует, что система более чем $2^{k-1} - 2$ одинарных диаграмм линейно зависима, так как первая грань у всех одинарных диаграмм нулевая и соответствие устанавливается с векторами размерности $2^{k-2} - 1$. Таким образом, так как $2^k - 1 > 2 \cdot 2^{k-2} + (2^{k-1} - 2)$, всякая система $2^k - 1$ диаграмм, переходящая в себя, оказывается линейно зависимой.

Итак, полная система баз k -нейронов разбивается на не-пересекающиеся классы по $k!$ изоморфных между собой баз. Выбирая из некоторого класса базу и находя ее M_k , можно произвести синтез нейронов во всех базах взятого класса, применяя M_k к диаграммам, полученным из данной перестановками, соответствующими всем перестановкам входов.

5°. Пример. Назовем правильными базы, приводящие к более экономному синтезу нейронов. Нахождение правильных баз в общем случае весьма трудная (пока не решенная) задача. Для $k = 3$ правильных баз (с числом ветвей, равным 12), как нетрудно установить, имеется 24. Эта система замкнута относительно перестановок входов и по предыдущему представляется четырьмя базами. Приведем этих представителей. Для краткости представим их как объединения:

$$\{S_3^i\} = \{[a] \vee [bi]\},$$

где элементы подсистем записаны символически

$$\begin{aligned}[a] &\Rightarrow [(00\alpha), (0\alpha 0), (\alpha 00), (\beta\beta\alpha)], \\ [b1] &\Rightarrow [(0\beta\alpha), (\beta 0\alpha), (\beta\alpha 0)], \\ [b2] &\Rightarrow [(0\beta\alpha), (\alpha 0\beta), (\alpha\beta 0)], \\ [b3] &\Rightarrow [(0\beta\alpha), (\beta\alpha 0), (\alpha 0\beta)], \\ [b4] &\Rightarrow [(0\alpha\beta), (\beta\alpha 0), (\alpha 0\beta)].\end{aligned}$$

В базе S_3^1 легко узнать каноническую базу, ее матрица M_3^1 есть матрица M_3 , приведенная в пункте 5. Приведем остальные матрицы M_3^j , считая базы $\{S_3^j\}$ упорядоченными в (α, β) -порядке, $j = 2, 3, 4$.

$$M_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_3^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$M_3^4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

8) *О синтезе оптимальных формальных нейронов.*
Критерии оптимальности нейрона могут быть различными в зависимости от преследуемых целей. Выделим две основные задачи (см. также § 4.2, 4.4).

1. Синтезировать нейрон с минимальным числом волокон, реализующий данную диаграмму.

2. Синтезировать нейрон с минимальным числом ветвей, реализующий данную диаграмму.

Пусть нейрон реализует данную диаграмму и является минимальным по числу ветвей. Тогда элементы, из которых он построен, образуют линейно независимую систему. В ином случае некоторые элементы можно исключить, представляя их через оставшиеся, что противоречит оптимальности. Таким образом, система элементарных нейронов оптимального по числу ветвей нейрона либо сама

является базой, либо может быть дополнена (возможно неединственным образом) до некоторой базы S_k . Пусть S_k соответствует матрица M_k . В силу однозначности представления любой данной диаграммы в элементах любой базы, умножение M_k на диаграмму $[\mu]_k$ дает весовые коэффициенты элементов, составляющих именно оптимальный нейрон. Этим, собственно, дается принципиальное решение задачи П оптимального синтеза. Из-за обширности множества баз k -нейронов применение этой методики требует даже при небольших k использования быстродействующих вычислительных машин.

Можно также принципиально показать существование диаграмм, которые нельзя реализовать k -нейронами с числом ветвей, меньшим, чем $k \cdot 2^{k-1}$.

Возьмем произвольную базу S_k и ее матрицу M_k . Нейрон, реализующий данную диаграмму, имеет число ветвей, меньшее числа ветвей в S_k , если некоторые координаты весового вектора

$$[\rho]_k = M_k [\mu]_k$$

равны нулю. Если $\rho_i = 0$, то

$$\sum m_{ij} \mu_j = \rho_i = 0,$$

где $(m_{ij}) = M_k$ и $\mu_j \in [\mu]_k$. Считая диаграмму $(\mu)_k$ точкой в $(2^k - 1)$ -мерном пространстве, в случае $\rho_i = 0$ получаем, что точка $(\mu)_k$ лежит на гиперплоскости размernosti $(2^k - 2)$, перпендикулярной вектору $(m_{i,1}, \dots, \dots, m_{i,2^k-1})$ и проходящей через начало координат. Очевидно, что множество допускающих оптимальную реализацию диаграмм есть множество целочисленных точек, лежащих на описанных гиперплоскостях, и только оно.

При $k = 2$ легко указать систему плоскостей в трехмерном пространстве векторов (μ_1, μ_2, μ_3) , на которых лежат точки диаграммы нейронов, допускающих оптимальную реализацию. Эти плоскости суть:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0, \quad \mu_2 - \mu_3 = 0, \\ \mu_2 &= 0, \quad \mu_1 - \mu_2 = 0, \quad \mu_1 + \mu_2 - \mu_3 = 0. \end{aligned}$$

В заключение приведем подсчет числа всех баз S_3 . Запишем систему строк \mathfrak{A}_3 (4.5.6) без первого нулевого столбца в три группы: симметричные, косые и отмеченные

диаграммы.

$$\begin{array}{l|l|l} (1) = (1010101), & (21) = (1010000), & (31) = (0001111) \\ (12) = (1000100), & (22) = (1000000), & (32) = (0001010) \\ (13) = (0110011), & (23) = (0110000), & (33) = (0001100) \\ (14) = (0100010), & (24) = (0100000), & (34) = (0001000). \end{array}$$

Каждой диаграмме присвоим индекс (i, j) : i — номер группы, j — номер диаграммы. Произведем подсчет минимальных линейно зависимых систем диаграмм; диаграммы в системах указаны своими индексами.

$$\begin{array}{l|l} \{1^\circ\} = \{11, 12, 13, 14\} & \{1\} = \{12, 13, 14, 21, 31, 32\} \\ \{2^\circ\} = \{21, 22, 23, 24\} & \{2\} = \{11, 13, 14, 22, 33, 34\} \\ \{1'\} = \{11, 21, 31, 32\} & \{3\} = \{11, 12, 14, 23, 31, 33\} \\ \{2'\} = \{12, 22, 33, 34\} & \{4\} = \{11, 12, 13, 24, 32, 34\} \\ \{3'\} = \{13, 23, 31, 33\} & \{5\} = \{22, 23, 24, 11, 31, 32\} \\ \{4'\} = \{14, 24, 32, 34\} & \{6\} = \{21, 23, 24, 12, 33, 34\} \\ & \\ \{7\} = \{21, 22, 24, 13, 31, 33\} & \\ \{8\} = \{21, 22, 23, 14, 32, 34\} & \\ \{9\} = \{11, 21, 32, 13, 23, 33\} & \\ \{10\} = \{11, 21, 31, 14, 24, 34\} & \\ \{11\} = \{12, 22, 34, 13, 23, 31\} & \\ \{12\} = \{12, 22, 33, 14, 24, 32\} & \end{array}$$

Заметим, что объединения систем $\{p^\circ\} \cup \{q'\}$ и $\{1'\} \cup \{3'\}$, $\{1'\} \cup \{4'\}$, $\{2'\} \cup \{3'\}$, $\{2'\} \cup \{4'\}$ содержат системы $\{1\} — \{12\}$. Это дает возможность учесть повторяющиеся линейно зависимые системы. Всех линейно зависимых систем по 7 диаграмм оказывается $L = 384$, откуда линейно независимых $C_{12}^7 - L = 408$. К тому же результату можно прийти систематическим построением баз S_3 , что, однако, гораздо более громоздко.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проблемы вывода логических следствий представляют собой основное содержание курсов математической логики и теории доказательства. Хотя, как известно, в наиболее интересных случаях задача разрешения неразрешима, тем не менее внимание логиков все больше и больше привлекают такие фрагменты логических исчислений, где проблему разрешения удается решить. Как это сформулировал Н. А. Шанин, существуют два разных способа решения этой проблемы: один, который он называет «алгорифм-оракул», и другой, который носит у него название «интеллектуальный партнер» [с этой терминологией автор познакомился в докладах Н. А. Шанина по математической логике в Москве (1963 и 1964 годы), о ней также рассказывали Б. В. Бирюков и С. А. Яновская — участники Первого Всесоюзного симпозиума по проблеме машинного поиска логического вывода в гор. Тракае Литовской ССР 1—7 июля 1964 года].

«Алгорифм-оракул» перерабатывает всякую формулу данного исчисления или его фрагмента в ответы «д а» или «н е т», т. е. дает ответ на вопрос, доказуема формула или нет. Алгорифм «интеллектуальный партнер» выдает по всякой доказуемой формуле ее вывод (вывод при этом является некоторым словом в определенном алфавите; речь идет об алгорифме поиска «естественного» вывода, т. е. вывода, достаточно похожего на обычный содержательный вывод, осуществляемый человеком). В применении к данной системе посылок в общем случае, однако, отнюдь не ясно, что именно является логическим следствием этих посылок, какую формулу нужно проверять с точки зрения того, является ли она следствием данных посылок или нет, вывод какой формулы нужно искать.

Работы логиков XIX века, к числу которых принадлежит и Венн, и теперь представляют еще интерес потому, что эти логики пытались ответить прежде всего на вопрос о том, какую именно информацию мы можем извлечь — и можем ли — из данных посылок. Если нам рассказано то-то и то-то о таких-то классах, то что именно следует отсюда в применении только к таким-то классам, какие заключения, и притом именно такого-то вида, мы можем сделать о таких-то классах. Именно на эти вопросы и должны были давать ответ алгебраические и геометрические методы этих логиков, именно они и составляют основную проблематику метода исключения неизвестных. Последний поэтому представляет логический интерес и в наши дни. А задачи, приводившиеся в этой связи логиками XIX столетия, заслуживают поэтому и теперь построения — там, где оно возможно, — алгорифмических способов их решения. Особый интерес в этой связи представляет то обстоятельство, что увеличение количества информации, связанной с сигналами, определяющими ячейку в диаграмме Венна (например, добавление информации, относящейся к порогам нейрона), позволяет расширить самую проблематику вывода логических следствий, — позволяет включить в нее, например, вопросы о том, как строить надежные нейронные схемы из не вполне надежных элементов; как обеспечить правильный ответ автомата на некоторый сигнал, даже в случае не вполне исправной работы его элементов. Эти и многие другие аналогичные вопросы, практическое значение которых достаточно ясно, представляют собой наилучшее обоснование того, сколь существенную роль может иметь и в наши дни дальнейшее развитие, уточнение и совершенствование того круга идей, над которыми бились уже Буль, Джевонс, Шрёдер, Порецкий, Венн, изучение работ которых и до сих пор является поэтому источником новых идей в математической логике и ее все более и более многочисленных и важных применениях.

**ДИСКУССИИ О ТОМ,
ЧТО ЗНАЧИТ РЕШИТЬ ЛОГИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ**

В § 1.2 сформулированы основные вопросы проблематики алгебры логики конца XIX в. Среди этих вопросов выделяется задача о логических уравнениях и исключении неизвестных, алгебраические методы решения которой изложены нами в § 1.4, а графические — в § 1.6. В связи с этой задачей среди логиков возникла дискуссия, которую мы постараемся осветить в настоящем разделе.

Достаточно ясное представление об этой дискуссии дают работы П. С. Порецкого и Э. Шрёдера, в которых Порецкий обвиняет Шрёдера в ошибках и догматизме, а Шрёдер парикует эти обвинения. Так как Порецкий критикует Шрёдера, то для понимания этой критики нужно начать с изложения работ Шрёдера. Заметим, что Порецкий не был знаком с основной работой Шрёдера — с его «Алгеброй логики» [93], в которой точка зрения Шрёдера изложена с наибольшей ясностью. Поскольку, однако, точка зрения Шрёдера на то, что значит решить уравнение по существу не изменялась, мы позволим себе пользоваться именно этим более поздним трудом Шрёдера (а не работой [91], с которой имел дело Порецкий).

Заметим, прежде всего, что всякое равенство по Шрёдеру можно привести относительно переменной x к так называемой «нулевой форме», — к виду

$$Ax + B\bar{x} = 0, \quad (1)$$

где A и B не содержат переменной x . Действительно, всякое включение класса A в класс B , т. е. отношение $A \subset B$ можно представить в виде $A\bar{B} = 0$. («Представить в виде» — значит заменить эквивалентным отношением, т. е. таким, которое логически следует из данного и из которого данное в свою очередь следует. Но если $A \subset B$, т. е. всякое A есть B , то нет таких A , которые суть не- B , т. е. $A\bar{B} = 0$. Наоборот, если нет таких A , которые суть не- B , т. е. если $A\bar{B} = 0$, то всякое A есть B , т. е. $A \subset B$. Иными словами, отношения $A \subset B$ и $A\bar{B} = 0$ эквивалентны.) Равенство же $A = B$ эквивалентно двум включениям: 1. $A \subset B$ и 2. $B \subset A$ (эти соотношения между равенством и включением были известны еще средневековым схоластическим логикам; в то же время вопрос о том, какое из этих двух соотношений следует принимать в качестве элементарного, а какое — вводить по определению через другое и как именно, не имеет точного смысла: любое из них может быть

принято за элементарное, существенно только умение переходить от равенства к включению, и наоборот). Поэтому равенство $A = B$ эквивалентно равенству $A\bar{B} + \bar{A}B = 0$, т. е. всякое равенство может быть заменено эквивалентным ему равенством в нулевой форме. Остается разложить левую часть полученного равенства по x , чтобы получить эквивалентное равенство вида (1).

Среди же равенств этого вида Шрёдер различал «аналитические», или тождественно истинные,— такие, например, как равенство $\bar{x} \cdot x + x\bar{x} = 0$,— и «синтетические», или истинные только для некоторых x . «Аналитические» равенства не могли быть, по Шрёдеру, уравнениями, поскольку уравнение рассматривалось им как условие, которому должна удовлетворять неизвестная x , иными словами, как задача найти такие значения переменной x (такие выражения для x через какие-нибудь термы: постоянные или переменные), которые при подстановке в уравнение обращали бы его в тождество: делали бы его тождественно истинным — «удовлетворяли» бы ему.

Таким образом, решить уравнение (1) по Шрёдеру — это означает: 1) выяснить, имеет ли оно решение, т. е. существуют ли такие выражения, которые, будучи подставлены на место x в уравнение (1), обращают его в тождество; 2) если такие выражения существуют, то найти какую-нибудь их общую форму (из которой при разных значениях входящих в нее переменных могли бы быть получены все решения уравнения (1)).

При этом ясно, почему Шрёдер не хочет включить в число уравнений аналитические тождества, т. е. выражения, эквивалентные тому, что $x = x$: они не представляют собой какого-либо условия, которому требовалось бы еще удовлетворить.

В «Алгебре логики» Шрёдер показывает, что на первый из поставленных выше вопросов отвечает результат исключения из уравнения (1), или резольвента, $AB = 0$, представляющая собой необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (1); на второй вопрос дает ответ форма

$$x = B\bar{u} + \bar{A}u \quad (2)$$

при любом значении u . Действительно, нетрудно убедиться в том, что если существует такое x , что $Ax + B\bar{x} = 0$, то, поскольку $Ax + B\bar{x}$ эквивалентно $Ax + B\bar{x} + AB$, AB также равно нулю. И наоборот, если $AB = 0$, то достаточно, например, положить $x = \bar{A}$, чтобы удовлетворить уравнению (1).

Условие $AB = 0$ является, таким образом, необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (1).

Но если это условие $AB = 0$ удовлетворено, то подстановка $x = B\bar{u} + \bar{A}u$ обращает уравнение (1) в

$$A(B\bar{u} + \bar{A}u) + B(\overline{B\bar{u} + \bar{A}u}) = 0,$$

т. е. в

$$A(B\bar{u} + \bar{A}u) + B(\overline{B\bar{u}} + \overline{\bar{A}u}) = 0,$$

или в

$$AB\bar{u} + A\bar{A}u + B\overline{B\bar{u}} + BAu = 0.$$

Если AB тождественно равно нулю, то здесь написано $0 \cdot \bar{u} + + 0 \cdot u + 0 \cdot \bar{u} + 0 \cdot u = 0$, т. е. действительное тождество. При этом существенно, что u — произвольный класс.

Наоборот, если какое-нибудь x удовлетворяет условию (1), то, как нетрудно убедиться, для этого же x верно и соотношение $x = B\bar{u} + \bar{A}u$ при $u = x$. Действительно,

$$Ax + \bar{A}x = x;$$

но так как x удовлетворяет условию (1), $Ax = 0$ и $B\bar{x} = 0$. Поэтому $Ax + \bar{A}x = Ax + B\bar{x}$, т. е. $x = B\bar{x} + \bar{A}x$, что и требовалось показать.

Таким образом, Шрёдер фактически показал, — если записать это более современным образом,— что

$$\forall x ((Ax + B\bar{x} = 0) \equiv ((AB = 0) \& \exists u (x = B\bar{u} + \bar{A}u))).$$

(Заметим, что поскольку

$$(\exists u \mathfrak{U}(u) \supset \mathfrak{B}) \equiv \forall u (\mathfrak{U}(u) \supset \mathfrak{B}),$$

то утверждение Шрёдера о существовании u такого, что x , определяемое равенством (2), удовлетворяет уравнению (1), эквивалентно утверждению о том, что $\exists u (x = B\bar{u} + \bar{A}u)$, удовлетворяющее равенству (3), дает решение уравнения (1).)

Решить уравнение (1), по Шрёдеру, оказалось, таким образом, эквивалентным тому, чтобы заменить это уравнение парой соотношений: $AB = 0$, $\exists u (x = B\bar{u} + \bar{A}u)$, в своей совокупности эквивалентных уравнению (1). Само собою разумеется, что соотношение (3) есть при этом логическое следствие из соотношения (1) только в том случае, если (2) берется вместе с квантором существования по u , хотя, наоборот, при всяком u соотношение (1) есть логическое следствие из (2).

Этого обстоятельства, по-видимому, не заметил Порецкий, который высказал, однако, целый ряд существенных и интересных соображений на тему о том, что значит решить логическое равенство. Эти соображения, вместе с его критикой в адрес Шрёдера, мы позволим себе поэтому привести здесь полностью, хотя, как мы увидим ниже. Порецкий не во всем был прав.

Согласно Порецкому, «Решить не тождественное логическое равенство (тождества не могут быть решаемы) значит вывести из него все или некоторые его логические следствия. Решение равенства будет полное или частное, смотря по тому, все или только некоторые его следствия нами найдены. Если найдено полное решение и представлено в виде одного равенства, то понятно, что это равенство будет только новою формою первоначального равенства, т. е. оба такие равенства тождественны между собою по своему логическому значению (т. е. касательно объема содержащихся в них сведений об отношениях между данными классами). Отсюда видим, что вопрос о полном решении равенства в сущности есть вопрос о нахождении новой его формы, т. е. о тождественном замещении его некоторым другим равенством. Чтобы судить о том, тождественны между собой, или нет, данные равенства, мы дадим особый критерий, а именно, условимся признавать два равенства тождественными между собой, коль скоро первое есть следствие второго и, обратно, второе есть

следствие первого. И вообще, две системы логических равенств мы будем считать между собой тождественными, коль скоро все равенства первой системы могут быть выведены из равенств второй (и обратно) при помощи известных нам логических операций сложения, умножения, отрицания...

Полезно прибавить, что ни полные, ни частные решения логического равенства вовсе не обладают свойством, будучи в него подставленными, обращать его в тождество...

Решить равенство сполна относительно класса $a \dots$ значит тождественно заменить его новым равенством, в левой части которого мы имели бы только $a \dots$, а в правой некоторую функцию данных классов $a, b, c, d \dots$ ([28], стр. 171—173).

Таким образом, Порецкий понимает уравнение не как условие, которому надо удовлетворить, а как посылку, из которой требуется вывести все или некоторые ее логические следствия определенного вида. В соответствии с этим у него получается и другое определение того, что значит решить логическое уравнение.

Само собою разумеется, что задача, поставленная Порецким, имеет не меньший смысл, чем задача, которую решал Шрёдер. С точки зрения логики, это даже более общая и важная задача: ведь основная задача логики и состоит как раз в выводе логических следствий (см. гл. 2, 3). Однако обвинения в ошибке, которую усмотрел у Шрёдера Порецкий, являются неоправданными.

Уравнение Шрёдера (1) Порецкий пишет в форме

$$0 = ax + a_1y, \quad (3)$$

где x и y не зависят ни от a , ни от a_1 (индекс 1 у Порецкого, как часто и у Шрёдера, обозначает дополнение), т. е. заменяет шрёдеровские A, B, x на x, y, a , соответственно, и добавляет, что, по Шрёдеру, равенство (3) «тождественно с парой равенств

$$0 = xy, \quad a = x_1(u + y),$$

где u неопределенный класс» ([28], стр. 199).

Того, что второе из этих равенств понимается у Шрёдера в смысле выполнимости по u (т. е. в смысле существования для всякого a , удовлетворяющего условию (3), такого u , что $a = x_1(u + y)$), Порецкий не заметил, почему и сделал в адрес Шрёдера очень тяжелый упрек. Действительно, Порецкий пишет: «Построив формулу $a = x_1(u + y)$, где u есть собственно неопределенный класс, и не видя никаких условий к определению u , Шрёдер начинает считать этот класс произвольным, допускающим все возможные значения от 0 до 1, и объявляет, что его формула, при изменении u от 0 до 1, доставляет все возможные корни a уравнения $0 = ax + a_1y$. Здесь можно сказать, что каждое слово есть ошибка, а причина всех ошибок есть недостаточное внимание к различию между понятиями неопределенного и произвольного. Этого мало. Можно доказать, что вовсе нет даже надобности считать u неопределенным классом, потому что можно доказать, что $u = a$. В этом отношении мы вполне разделяем мнение Джевонса, по которому во всех тех случаях, когда класс m содержится в классе n , нет надобности писать, подобно Булю и Шрёдеру, равенство $m = un$, где u неопределенный класс; достаточно писать так: $m = mn$. Например, фразу «Москва есть город» нет надобности передавать непременно так: «Москва есть

некоторый город»; вполне достаточно будет сказать: «Москва есть тот город, который есть Москва». Сказать же, будто «Москва есть какой угодно город», будет положительной нелепостью.

Если бы Шрёдер не употреблял неопределенных классов, а брал их подлинное значение, то доказательство его формулы сделалось бы крайне простым. Именно, т. к. равенство $0 = ax + a_1y$ тождественно с парой равенств $0 = ax$, $0 = a_1y$, из которых первое показывает, что a содержится в x_1 , т. е. $a = ax_1$, а второе, что y содержится в a , т. е. $a = a + y$, то легко заключить, что $a = ax_1 = (a + y)x_1$.

Это и есть формула Шрёдера, в которой u заменено его подлинным значением, т. е. через a . После этого делается вполне очевидным, что ни о различных значениях u , ни о всевозможных корнях a уравнения $0 = ax + a_1y$ не может быть и речи» ([28], стр. 201, 202).

В сноске к этому месту Порецкий добавляет: «Считаю долгом заметить, что я не сразу понял указанную ошибку Шрёдера и в своем первом сообщении (см. протокол 3-го заседания секции) безразлично называл u то произвольным, то неопределенным классом. Но во всяком случае, приводя формулу Шрёдера, я воздержался еще и тогда от воспроизведения указанного выше чисто фантастического ее толкования».

Конечно, Порецкий не только критиковал Шрёдера: он признавал за ним большие заслуги и даже писал: «Что касается оценки способа Шрёдера, то, без сомнения, способ этот вполне достигает цели и имеет тем большее значение, что представляет первое вполне общее и независящее ни от каких гипотез решение вопроса» ([28], стр. 200).

Свое решение задачи, состоящее в замене уравнения (3) эквивалентным ему равенством вида $a = f(a, b, c, \dots)$, Порецкий называл полным, а решение Шрёдера точным, и писал даже, что вопрос о том, какое из них следует предпочесть, не допускает категорического решения. «Категорически отвечать на этот вопрос в общем виде мы находим неудобным, потому что в одних случаях и для одних целей может быть предпочтена одна пара формул, в других — другая. Для отличия мы будем называть первую пару *полным*, а вторую *точным определением a*» ([28], стр. 227).

Под полным определением a при этом имелась в виду пара формул

$$\begin{aligned} a &= aM(1), \\ a &= a + M_1(0), \end{aligned}$$

где $M(a)$ — правая часть равенства $1 = M(a)$, эквивалентного равенству $A = B$ (Порецкий указывает способ приведения всякого равенства $A = B$ к виду $1 = M(a)$).

Под точным определением a имелась в виду пара формул: $a = aM(1)$, $a = a + M_1(0)M(1)$. (Для уравнения $0 = ax + a_1y$ $M(a)$ есть $ax_1 + a_1y_1$, поэтому полное решение имеет вид

$$\begin{cases} a = ax_1, \\ a = a + y, \end{cases}$$

а точное —

$$\begin{cases} a = ax_1, \\ a = a + yx_1, \end{cases}$$

т. е., как в этом нетрудно убедиться, приведя, например, все эти равенства к нулевой форме,— точное решение эквивалентно равенству $a = x_1(u + a)$ при $u = a$ в решении Шрёдера и получается из этого решения, если отбросить резольвенту $xy = 0$.)

Признание заслуг Шрёдера сопряжено, однако, у Порецкого с обвинениями Шрёдера в излишней математичности и даже формализме. «Тем не менее,— пишет Порецкий,— нельзя не признать за способом Шрёдера довольно крупного недостатка, это именно: формальность и искусственность решения. Формула Шрёдера не выведена, как бы следовало, из анализа существа дела, а искусственно подогнана и оставляет место для сомнений в том, не заключается ли в ней лишних членов» ([28], стр. 200, 201). «...сила, а в то же время и слабость,— пишет в другом месте Порецкий,— способа Шрёдера заключается в слишком формальном, слишком общем, слишком математичном решении задачи. У него речь идет об одной внешней оболочке дела, сущность которого совершенно игнорируется; кроме того, формула Шрёдера не представляет гарантий относительно отсутствия в ней лишних членов» ([28], стр. 204].

Логический смысл полного и точного решения Порецкий видел при этом в том, что полное решение обнимает все сведения задачи, точное же (относительно класса a) относится только к тем сведениям, «которые прямо предназначены к характеристике a » ([28], стр. 227). При этом точное решение получалось у Порецкого из полного решения путем отбрасывания из последнего всех членов, входящих в резольвенту (и равных поэтому нулю, когда задача имеет решение). Под сомнениями насчет «лишних членов», очевидно, имелось в виду то обстоятельство, что оставался невыясненным вопрос о том, учтены ли все «логические нули» задачи, т. е. все классы, которые в силу условий задачи должны быть равны нулю.

Критика Порецкого не осталась незамеченной Шрёдером. Во втором томе своей «Алгебры логики» Шрёдер специально остановился на методах Порецкого, привел ряд задач, предложенных и решенных Порецким, и наципал возражения на его критику. Так как мы во всех подробностях осветили критику Порецкого, то должны предоставить слово и Шрёдеру. Тем более, что он тоже был во многом прав.

Вот что пишет в свою защиту Шрёдер: «На стр. 41 [стр. 201 работы [28].— A. K.] г. Порецкий упрекает меня в ошибке, в том, что в моем «Operationskreis» ([91] в списке литературы.— A. K.) я недостаточно различал «неопределенное» и «произвольное». Конечно, он справедливо замечает — в применении к нашей теореме 43) ($a \subseteq b$) = $\Sigma(a = ub)$ [(« $a \subseteq b$ » эквивалентно тому, что существует такое u , что $a = ub$ ».— A. K.], — что предложение «Москва есть город» никак не совпадает с предложением «Москва есть произвольный город». В главной теореме в «Operationskreis» (стр. 20) я во всяком случае объяснил u как произвольное.

Но там я имел в виду решение уравнения по такой неизвестной, которую я молча предполагал подлежащей определению из уравнения и только из уравнения, а не решение по некоторому классу, уже где-нибудь и как-нибудь данному. Иначе я должен был бы объяснить про u , каким его нужно считать: «неопределенным» или «произвольным». Что я, однако, и тогда уже был далек от того, чтобы не замечать этого различия, показывает мое изложение в «Note über den Operationskreis des Logikkalkuls» ([92] в списке литературы.—

A. K.) (стр. 30), где я на одном из примеров пояснил именно это различие,— чего Порецкий, очевидно, не знал (ср. т. I, стр. 399 и § 21).— Но, если г. Порецкий на той же 41 стр. полагает, что о моем утверждении, состоящем в том, что выражение $x = a_1(u + b)$ охватывает для u , меняющегося от 0 до 1, все корни x уравнения $ax + bx_1 = 0$ («Operationskreis», стр. 22), можно сказать «здесь каждое слово — ошибка», то я могу это только оспаривать и теперь, как и раньше, настаивать на том, что здесь каждое слово правильно. (Необходимо, как ошибочно думает Порецкий, допущение $u = x$ дает только один из бесконечного в общем случае числа корней, и при том, когда мы понимаем под x некоторый определенный, уже иным способом данный, класс,— именно этот, данный, класс.) — Сделанный моему методу упрек в том, что он формалистичен, недостаточно близок к естественному мышлению (стр. 40) и производит впечатление искусственности, не в меньшей мере относится к способу г. Порецкого, как дуально соответствующему моему; и даже относится к его способу в еще большей мере, поскольку Порецкий работает еще с двойственными выражениями громоздких булевых схем разложения (как было показано, от этого упрека впервые свободен только метод McColl — Peirce'a). — Этим отнюдь не отрицаются заслуги автора как первого исследователя и творца в области логики в большом славянском государстве» ([94], стр. 446, 447).

Под «двойственными выражениями для булевых схем разложения» Шрёдер, очевидно, имеет в виду выражения равенств не в «нулевой», а в двойственной к нулевой — «единичной» форме, т. е. в виде равенства $M = 1$, эквивалентного данному равенству $A = B$.

Мы видим, таким образом, что вопрос о том, что значит решить логическое уравнение, действительно, представлял существенные трудности и мог решаться — да и решался на самом деле — разными авторами по-разному. Порецкий, в частности, не считал решения, предлагавшиеся Булем, Джевонсом, Венном и другими логиками, окончательными и полными. Он требовал прежде всего выяснения того, о каком решении: полном или точном, идет речь, и возражал против всяких решений с неопределенными классами. Он, в действительности, много содействовал тому, что задачей логики стало не решение уравнений и исключение неизвестных, а вывод логических следствий.

Естественно возникает вопрос о том, в какой связи находятся между собою решение уравнений и вывод логических следствий. Обычно нас ведь не просто интересуют логические следствия из какой-нибудь системы посылок: перед нами стоят некоторые определенные вопросы, ответ на которые мы ищем. Бывает и так, что мы хотим узнать, существует ли объект, удовлетворяющий определенным условиям, и тогда задача естественно приводится к тому, что мы формулируем это условие и ищем объект, удовлетворяющий ему. Если нам удается сформулировать это условие в виде равенства, то задача приводится к решению уравнения: к поиску такого объекта, который ему удовлетворяет.

Не следует думать, что всякая логическая задача обязательно приводится к решению уравнения или неравенства, но не следует отвергать и такие задачи, которые сводятся к решению уравнений или неравенств. Класс этих задач довольно обширен и в последнее время все более и более расширяется,— см., например, работу Р. Л. Гудстейна [62], определяющего логические связки через от-

ношении равенства и строящего, таким образом, логику без специфически логических знаков, или работы А. И. Таутса [34—36], сводящего разрешимые случаи формул исчисления предикатов к решению уравнений. Но и в случаях, где речь идет просто о выводе логических следствий из некоторой информации, последняя часто может быть выражена с помощью уравнений или неравенств, преобразование которых к некоторому определенному виду может рассматриваться,— теперь уже в точности следя Порецкому,— как решение уравнений (соответственно, неравенств). Алгорифмы этого решения во многих случаях могут быть сформулированы на диаграммах Венна.

Как именно это происходит, мы далее и попытаемся объяснить на некоторых примерах. Речь прежде всего пойдет о решении так называемой «задачи Венна».

Этой задаче,— приведенной Венном в статье «Логическая система Буля» [99] в 1876 году с целью проиллюстрировать необходимость преподавания общих методов символической логики,— почти все логики конца XIX века уделяли много внимания (она решается в «Основах науки» Джевонса [69], в «Алгебре логики» Шрёдера [93], Порецкий называет ее «известной» и неоднократно возвращается к ней (см. [28], стр. 209, 210, 244—246, 270—271, 287, 312—313)).

Задача формулируется следующим образом:

Известно, что все члены совета акционерного общества являются или владельцами облигаций, или владельцами акций, но не теми и другими одновременно. Кроме того известно, что все владельцы облигаций входят в совет. Спрашивается, какое можно вывести из этого заключение.

Пусть a — члены совета, b и c — владельцы, соответственно, облигаций и акций. Тогда посылки задачи можно записать символически в виде:

$$(1) \quad a = a(b\bar{c} + \bar{b}c),$$

$$(2) \quad b = ba.$$

Нетрудно построить диаграмму Венна, соответствующую условиям (1) и (2). В предложении (1) говорится, что та часть класса a , которая не входит в классы b и c (одновременно) или в \bar{b} и c , пуста, т. е. в классе a пусты ячейки abc и $\bar{a}\bar{b}c$. Условие (2) говорит о том, что ячейки класса b , не входящие в a , пусты. Таким образом, мы получаем диаграмму (рис. 93), в которой заштрихованы ячейки $\bar{a}\bar{b}c$, abc и \bar{ab} .

На рис. 93 видно, что класс bc пуст, т. е. лиц, обладающих одновременно облигациями и акциями, нет. Это и есть тот ответ, который удовлетворял Венна и который (как он пишет) получили только пять учеников из 150-ти.

В связи этой задачей Порецкий высказывает критические замечания. Прежде всего он пишет, что «Венн заканчивает задачу неопределенным вопросом, вследствие чего нет указания, в каком направлении надо мыслить, чтобы получить достойный внимания результат. Очевидно, для получения полного ответа на этот вопрос обязательно исследовать задачу по всем направлениям» ([28], стр. 271). И далее по поводу полученного Венном ответа Порецкий

продолжает: «... собственно постановка задачи требует, чтобы было доказано, что *никаких других* интересных заключений из данных посылок вывести нельзя» (там же). К этим словам он добавляет в списке: «На наш взгляд, то обстоятельство, что в данном случае, как мы доказали (см. § 11), простое равенство $b = a\bar{c}$ вполне выражает все условия задачи, также весьма интересно и гораздо более важно, чем результат, полученный самим Венном».

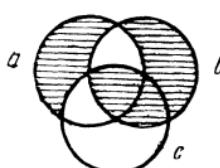


Рис. 93

Здесь имеется в виду то обстоятельство, что равенство $b = a\bar{c}$ эквивалентно условию задачи, между тем, как ответ, полученный Венном, есть только логическое следствие из этого условия. Конечно,

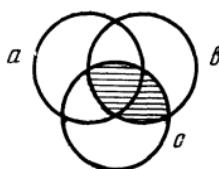


Рис. 94

то обстоятельство, что $bc = 0$ не исчерпывает условий задачи, также может быть обнаружено с помощью диаграмм Венна, т. к. равенству $bc = 0$ соответствует — в случае переменных a , b и c — диаграмма (рис. 94), отличная от диаграммы, соответствующей посылкам. Из последней видно, что в ячейке b остается непустой только часть $a\bar{c}$, т. е. что $b = a\bar{c}$. Диаграмма, соответствующая этому заключению, в точности совпадает, как нетрудно проверить, с диаграммой, соответствующей условию задачи (рис. 93). Нельзя не признать поэтому критику Порецкого вполне оправданной. По-видимому, и Венн заметил, что эта его задача недостаточно хороша и вряд ли может служить целям оправдания преимущества символической логики перед традиционной. Во всяком случае, он не поместил ее среди разнообразных примеров (глава 13) в своей «Символической логике» [106].

Между тем, в действительности диаграммы Венна очень не-трудно применить и для получения полного решения в смысле Порецкого относительно любого класса x . Для этого достаточно очертить этот класс на диаграмме Венна, соответствующей условиям задачи, и представить его в виде объединения всех незаштрихованных в нем частей, а затем поступить аналогично с классом \bar{x} . Вся информация, содержащаяся в условиях задачи, будет, таким образом, выражена в двух равенствах: $x = \mathfrak{A}$ и $\bar{x} = \mathfrak{B}$, или же в равенствах:

$x = \mathfrak{A}$ и $x = \mathfrak{B}$, откуда $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$. Ясно, что и, наоборот, если $x = \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, то $x = \mathfrak{B}$ или $\bar{x} = \mathfrak{B}$, т. е. что равенства $x = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ также дают полное решение задачи в смысле Порецкого.

Если за класс x мы возьмем в данном случае b , то, как это видно из рис. 93, получим (т. к. $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$, $bc = 0$ и $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$) $b = ac$, $\bar{b} = \bar{a} + c$, т. е. окажется, что решение $b = \bar{a}\bar{c}$ является полным в смысле Порецкого. Полное решение для a имеет вид: $a = ab\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$, $\bar{a} = \bar{a}\bar{b}$; для c оно дает $c = \bar{b}\bar{c}$, $\bar{c} = abc + \bar{a}\bar{b}\bar{c}$; таким образом, полное решение для b более короткое (по записи).

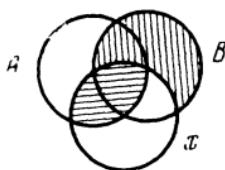


Рис. 95

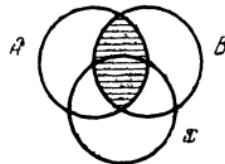


Рис. 96

Кроме полного решения равенства относительно класса x , Порецкий рассматривает точное решение этого равенства относительно класса x . Остановимся на этом вопросе более подробно. Уравнение $Ax + B\bar{x} = 0$ представим на диаграмме Венна трех переменных A , B , x (рис. 95). Это уравнение имеет решение относительно x , как мы видели выше, тогда и только тогда, когда $AB = 0$ (диаграмма для резольвенты $AB = 0$ в случае трех переменных A , B и x показана на рис. 96). Полное решение для x равенства (1) легко определяется графически (рис. 95) в виде пары равенств:

$$\begin{cases} x = \bar{A}x, \\ \bar{x} = \bar{B}\bar{x}, \end{cases} \quad (4)$$

или

$$\begin{cases} x = \bar{A}x, \\ x = B + x. \end{cases} \quad (5)$$

У Порецкого [28] пара (5) записывается, как отмечалось, в форме (относительно класса x).

$$\begin{cases} x = xM(1), \\ x = x + M_1(0), \end{cases}$$

и показывается, что эта пара эквивалентна («вполне тождественна») с равенством

$$x = xM(1) + x_1M_1(0). \quad (6)$$

(Для сравнения см. решение Шрёдера (2), из которого (6) получается после замены u на x , B на $M_1(0)$ и \bar{A} на $M(1)$.)

Последнее утверждение (об эквивалентности) может быть получено графически как следствие более общего предложения об эквивалентности пары равенств одному.

Пусть

$$\begin{cases} x = \mathfrak{A}, \\ x = \mathfrak{B} \end{cases} \quad (7)$$

— пара равенств. Диаграмма трех переменных \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , x , соответствующая (7), построена на рис. 97, где горизонтальная штриховка соответствует первому равенству, вертикальная — второму.

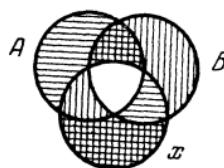


Рис. 97

Предположим, что равенства (7) таковы, что горизонтальная и вертикальная штриховка на диаграмме (рис. 97) не пересекаются, т. е., что $\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{B}}x$ и $\bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}x$ тождественно равны нулю ($\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{B}}x + \bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}x = 0$). Равенства, входящие в полное решение, определяемое по диаграмме, этим свойством обладают.

Тогда информация, записанная на рис. 97, может быть представлена равенством

$$\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{B}} + \bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{B} = 0. \quad (8)$$

Равенство (8) эквивалентно, как легко убедиться, равенству

$$x = (\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \bar{\mathfrak{A}}\bar{\mathfrak{B}})x + (\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{B}} + \bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{B})\bar{x}, \quad (9)$$

которое в нашем случае (когда $\bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}x = 0$) можно переписать в виде

$$x = \mathfrak{A}\mathfrak{B}x + (\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{B}} + \bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{B})\bar{x}. \quad (10)$$

Таким образом, пара равенств (7) при условии

$$\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{B}}x + \bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}x = 0$$

эквивалентна равенству (10), имеющему вид $x = f(x, a, \dots, u)$.

На рис. 95 горизонтальная штриховка соответствует первому равенству в паре (5), вертикальная — второму. Выражению $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ из (10) на диаграмме (рис. 95) соответствует объединение незаштрихованных ячеек, выражению $\bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}$ — объединение ячеек с вертикальной штриховкой, а выражению $\bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{B}$ — с горизонтальной штриховкой. Так по диаграмме (рис. 95) строится равенство вида (10), эквивалентное (5):

$$x = \bar{A}x + B\bar{x} \quad (11)$$

$\bar{A}\bar{B}\bar{x} = 0$, т. к. все ячейки с горизонтальной штриховкой находятся в классе x .

Нетрудно проверить, что равенство (11) является другой формой записи равенства Порецкого (6). Отметим также, что в результате подстановки в (1) вместо x выражения $\bar{A}x + B\bar{x}$ мы получаем $AB = 0$ (т. е. (11) есть решение уравнения (1) в смысле Шрёдера).

Как уже отмечалось, точное решение в смысле Порецкого уравнения (1) относительно x

$$\begin{cases} x = \bar{A}x \\ x = x + \bar{A}B \end{cases} \quad (12)$$

эквивалентно равенству $x = \bar{A}(u + B)$ при $u = x$ в решении Шрёдера [91] и получается из этого решения, если отбросить ре-

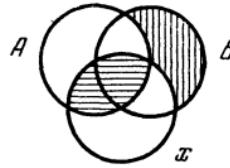


Рис. 98

зольвенту $AB = 0$. Диаграмма точного решения (12) построена на рис. 98. По этой диаграмме в силу (10) мы получаем

$$\begin{aligned} x &= \bar{A}x + \bar{A}B\bar{x}, \\ \text{т. е.} \\ x &= \bar{A}x + \bar{A}B \end{aligned} \quad (13)$$

(то самое, что получается и из решения Шрёдера). Точное решение равенства вида (1) относительно x характеризуется следующими свойствами:

1. Оно есть следствие из информации, выражаемой равенством вида (1) (на языке диаграмм Венна: заптрихованные ячейки диаграммы точного решения не принадлежат к числу незаптрихованных ячеек диаграммы исходного равенства).

2. Если к точному решению (на диаграмме) присоединить резольвенту (равенство вида $AB = 0$), то получим диаграмму, совпадающую с диаграммой исходного равенства.

3. Никакое логическое следствие равенства (1), не зависящее от x , не может логически следовать из точного решения уравнения (1) относительно x (см. диаграммы самого сильного логического следствия, не содержащего x , и точного решения — рис. 96 и 98).

4. Все логические следствия уравнения (1), в которые входит x , но не входит \bar{x} , являются логическими следствиями точного решения (относительно x) равенства (1). В этом смысле точное решение отно-

сительно x (12) можно называть «самым сильным» логическим следствием, содержащим x , из уравнения (1).

5. Если по диаграмме точного решения в силу (10) написать эквивалентное ему выражение вида $x = f(x, a, \dots, u)$, то результат подстановки в равенство (1) вместо x выражения $f(x, a, \dots, u)$ будет эквивалентен при условии $AB = 0$ тождеству $0 = 0$. [При одновременном рассмотрении нескольких диаграмм Венна мы предполагаем, если нет специальной оговорки, что все они построены из одних и тех же переменных.]

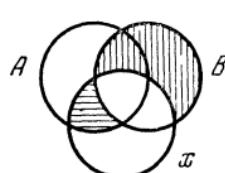


Рис. 99

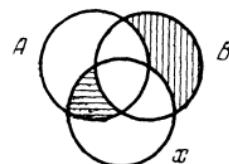


Рис. 100

Нетрудно проверить, что диаграмма, изображенная на рис. 99, представляет собой точное решение (в смысле Порецкого) уравнения (1) относительно \bar{x} — самое сильное логическое следствие, содержащее \bar{x} (и не содержащее x), из уравнения (1).

По диаграмме (рис. 99) находится пара равенств относительно \bar{x} :

$$\begin{cases} \bar{x} = \bar{x} + AB, \\ \bar{x} = \bar{B}\bar{x}, \end{cases} \quad (14)$$

или эквивалентная пара равенств (относительно x):

$$\begin{cases} x = (\bar{A} + B)x, \\ x = B + x. \end{cases} \quad (15)$$

В силу (10) каждая из пар (14), (15) эквивалентна

$$x = \bar{A}x + B$$

или

$$\bar{x} = \bar{B}\bar{x} + A\bar{B}.$$

Следует обратить внимание также на диаграмму, помещенную на рис. 100. Этой диаграмме соответствует пара равенств

$$\begin{cases} x = Bx + \bar{A}x, \\ x = x + \bar{A}B, \end{cases} \quad (16)$$

или

$$\bar{x} = \bar{x} + A\bar{B},$$

(17)

$$\bar{x} = (A + \bar{B})\bar{x}.$$

Из диаграммы (рис. 100) видно, что равенства, соответствующие этой диаграмме, удовлетворяют приведенным выше условиям 1—3, 5. В силу (10) решение, представленное этой диаграммой, можно пе-

реписать в виде

$$x = (B + \bar{A})x + \bar{A}B$$

или

$$x = (A + \bar{B})\bar{x} + A\bar{B}.$$

Кроме того, можно заметить, что все логические следствия уравнения (1), не вытекающие из резольвенты $AB = 0$, являются логическими следствиями решения, представленного диаграммой, изображенной на рис. 100.

Непосредственно из диаграмм (рис. 95, 98—100) следует также, что полное решение (рис. 95) уравнения (1) относительно x эквивалентно каждому из трех рассмотренных решений (см. диаграммы на рис. 98—100) только в случае, когда $AB \equiv 0$.

Так, в задаче Венна уравнение посылок имеет следующий вид относительно b :

$$(\bar{a} + c)b + a\bar{c}b = 0,$$

и

$$(\bar{a} + c)a\bar{c} = 0.$$

Поэтому решение $b = a\bar{c}$ является не только полным, но и точным относительно как b , так и \bar{b} в смысле Порецкого.

В § 1.6 (стр. 83—86) разбиралась задача Порецкого. При этом остался невыясненным вопрос об отношениях между различными группами девиц, присутствующих на балу. Найдем сначала полное определение класса благовоспитанных девиц, т. е. класса a . Из диаграммы Венна, соответствующей этой задаче (рис. 41), мы получаем: $a = a\bar{b}\bar{c}\bar{d}$, $\bar{a} = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$ (то же самое можно получить в силу (14)), или

$$a = a\bar{b}\bar{c}\bar{d} \quad a = a + \bar{b} + c + \bar{d}. \quad (18)$$

Так как равенство $A = AA_1 \dots A_k$ эквивалентно системе $A = AA_i$ ($i = 1, \dots, k$), а равенство $A = A + A_1 + \dots + A_k$ эквивалентно системе $A = A + A_i$ ($i = 1, \dots, k$), то равенства (18) эквивалентны системе равенств

$$a = a\bar{b}, \quad a = ac, \quad a = a\bar{d},$$

(19)

$$a = a + \bar{b}, \quad a = a + c, \quad a = a + \bar{d}.$$

Следовательно, полное определение a из условия задачи можно представить в виде шести равенств (19). Первое и четвертое равенства из (19) показывают, что a эквивалентно (тождественно) \bar{b} , $a = \bar{b}$. Второе и пятое,— что $a = c$. Третье и шестое из них говорят, что $a = \bar{d}$. Итак, получаем $a = \bar{b} = c = \bar{d}$, $\bar{a} = b = \bar{c} = d$.

Таким образом, благовоспитанные, молодые, невеселые и некрасивые девицы образуют один класс; верно, что и девицы неблаговоспитанные, немолодые, веселые и красивые были одни и те же.

К тому же самому мы придем, если станем искать полное определение любого из остальных признаков: b , c или d . Однако точное решение относительно некоторого класса не дает ответа на поставленный вопрос. Например, $a = \bar{b}\bar{c}\bar{d}$ — точное решение относительно класса a . Из него нельзя прямо заключить, что $a = \bar{b} = c = \bar{d}$.

Приложение 2

СОДЕРЖАНИЕ КНИГИ ВЕННА «СИМВОЛИЧЕСКАЯ ЛОГИКА»

Рассматриваем второе дополненное издание [106]; наши комментарии к некоторым разделам помещаем в квадратных скобках.

Введение. Возражения противникам введения математических символов в логику. Взаимоотношения этих символов. Обобщения символической логики и их отношение к обычной системе. Предшественники Буля, особенно Ламберт. Биографические замечания о Ламберте и Буле. Стр. IX—XXXIX.

[Во введении содержится обоснование применения математических символов в логике. Здесь Венн убедительно возражает противникам использования таких символов в логике; устанавливается связь между символами, выделяются прямые и обратные операции.]

Глава 1. О формах предложений: (1) традиционные логические формы; (2) исключение и включение, или гамильтоновы формы; (3) изолированные, или символические формы. Стр. 1—32.

[Разбираются различные формы предложений: традиционное (аристотелевское) представление предложений с помощью операций включения и исключения; символическое представление с помощью знаков равенства ($=$) и больше ($>$), а также на диаграммах Эйлера. Заметим, что знак «больше» в первом издании книги не встречается, для записи частных суждений в [105] Венн использовал неопределенный класс v (для сравнения см., например, стр. 31 во втором издании и стр. 30 в первом издании).]

Глава 2. Символы классов. Символы операций: (1) объединение классов; (2) исключение одного класса из другого; (3) ограничение одного класса другим. Символическое представление этих операций. Употребление символа уравнения. Стр. 33—72.

Глава 3. Обратная операция к логическому ограничению класса. Ее символизация с помощью знака деления. Процесс логической абстракции. Стр. 73—96.

Глава 4. О выборе символического языка. Основания к выбору языка математики для логических целей. Стр. 97—109.

[Основной материал глав 1—4 был Венным опубликован до выхода первого издания книги в статьях [99 — 104].]

Глава 5. Диаграмматическое представление. Недостатки известной схемы Эйлера; предложение новой схемы, более подходящей для представления сложных предложений символической логики. Ее применение к теоремам и предложениям. Логические машины. Стр. 110—140.

[В этой главе Венин вводит диаграммы, которые в дальнейшем были названы его именем (см., например, [23, 48]); диаграммы Венин использует (1) для представления сложных предложений символического и разговорного языков (в главе разбирается только случай универсальных предложений, пример частных предложений приведен в главе 14), (2) для вывода следствий из данной информации и (3) для построения логических машин. Графическому построению логики с помощью диаграмм Венин посвящает также работы [102, 104].]

Глава 6. Значение предложений в отношении действительного или условного существования их субъектов и предикатов. Такое существование сомнительно в обычной логике и безусловно не предполагается в символической. Применение этого принципа к (1) несовместимости предложений, (2) их независимости. Стр. 141—172.

Глава 7. Символическое выражение четырех обычных форм предложений: (1) общих, (2) частных. Экзистенциональное истолкование последних. Квантификация предиката. Дизъюнктивы. Стр. 173—208.

Глава 8. Гипотетические предложения; их реальное значение и их символическое выражение. Степени их сложности. Что здесь действительно представляют наши символы. Обсуждение некоторых особых случаев. Стр. 209—244.

[Так как Венин занимается объемной логикой, изучающей отношения включения и исключения классов, то какие-нибудь условные предложения он считает излишними в такой логике. Всякое условное предложение вида «Если A , то B » он считает имеющим двойной смысл: 1) оно выражает наличие общей связи (закона) между A и B , 2) оно говорит о том, что у лица, делающего такое утверждение, нет уверенности, что A действительно наступит. Так, когда это лицо говорит: «Если завтра пойдет дождь, то я надену галоши», оно имеет в виду, во-первых, связь между дождем и галошами, которая носит категорический характер («когда идет дождь, он надевает галоши»), и, во-вторых, свою неуверенность в том, что завтра действительно пойдет дождь. Такой психологический элемент в объемной логике классов не имеет, однако, смысла по Венину, и он приходит к заключению, что «гипотетическая форма может рассматриваться как косвенный способ сообщения категорической информации, и в этом категорическом сообщении нужно искать ее значение» ([106], стр. 230).]

Глава 9. Предметная область *<The Universe of Discourse>*. Ее интерпретация и символическое представление. Стр. 245—255.

Глава 10. О развертывании, или разложении: (1) посредством эмпирического процесса, (2) посредством обобщенного символического процесса.

[Например, $f(x, y) = f(1, 1)xy + f(1, 0)x\bar{y} + f(0, 1)\bar{x}y + f(0, 0)\bar{x}\bar{y}$] Символ $\frac{0}{0}$ и его истолкование. Формулы для противоречия. Некоторые особые случаи разложения. Стр. 256—288.

Глава 11. Логические предложения *<statements>*, или уравнения:— (1) явные, (2) неявные, (3) содержащие неопределенные классы как множители. Стр. 289—301.

[Главный предмет логики — по Венину — это интерпретация и решение логических уравнений. Такое подразделение соответ-

ствует двум главам обычной логики: о 1) предложениях и 2) рассуждениях,— хотя с существенными отличиями от традиционной их трактовки.

Глава 12. Логические высказывания, или уравнения (продолжение). Группы предложений, переводимые (1) утвердительно и (2) отрицательно. Сокращенные формулы. Интерпретация уравнений вообще. Так называемая индуктивная проблема: решения Джевонса, другие решения. Стр. 302—330.

Глава 13. Различные примеры, рассматриваемые символически и диаграмматически для иллюстрации предшествующих глав. Стр. 331—359.

Глава 14. Элиминация в логике, трактуемая эмпирически; (1) из предложений в их утвердительной, (2) в их отрицательной форме. Распространение на случай частных суждений. Диаграмматическая иллюстрация. Стр. 360—379.

Глава 15. Элиминация посредством общего символического правила. Смысл и употребление выражений $f(1)$ и $f(0)$ в логике. Неопределенное выражение $\frac{0}{0}$. Стр. 380—394.

Глава 16. Завершение решения логической проблемы посредством определения любой функции от наших терминов для классов из любой данной группы высказываний или уравнений: (1) эмпирически, (2) посредством общего символического правила. Силлогизм и его символическая трактовка. Стр. 395—413.

Глава 17. обобщения обычной логики; классы контрадикторные и контратрийные. Предложения, их обращение и противоположение, перечень их различных форм. Элиминация. Рассуждения. Стр. 414—425.

Глава 18. Символы классов как обозначающие предложения. Модификация интерпретации, требуемая этой точкой зрения. Стр. 426—452.

Глава 19. Интенсивная интерпретация вообще. Попытка провести ее строго. Стр. 453—476.

Глава 20. Исторические замечания; — (1) о различных схемах символьских обозначений, употребляемых для выражения общих отрицательных предложений; (2) о различных схемах геометрического или диаграмматического представления предложений. Стр. 477—527.

Ука з а т е л и. Предметный и библиографический. Стр. 529—540.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беркли Э. Символическая логика и разумные машины. М., 1961.
2. Бирюков Б. В. О работах Г. Фреге по философским вопросам математики. Сб. «Философские вопросы естествознания», вып. 2: «Некоторые философско-теоретические вопросы физики, математики и химии». М., 1959. Английский перевод в кн.: B. V. Biryukov. Two Soviet Studies on Frege, Translated and edited by J. Angelelli. Dordrecht (Holland), 1964.
3. Бирюков Б. В. Крушение метафизической концепции универсальности предметной области в логике, «Высшая школа». М., 1963.
4. Бирюков Б. В. Джевонс. Философская энциклопедия, т. 1, М., 1960.
5. Бирюков Б. В., Калужин И. А., Шестаков В. И. Логические машины.— «Философская энциклопедия», т. 3, М., 1964.
6. Гильберт Д., Аккерман В. Основы теоретической логики. М., 1947.
7. Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов. М., 1962.
8. Гутчин И. Б., Кузичев А. С. Об оптимальном синтезе формальных нейронов.— «Изв. АН СССР», «Техническая кибернетика», № 2, 1965.
9. Гутчин И. Б., Кузичев А. С. Некоторые вопросы теории надежных нейронных сетей.— Сб. «Бионика». М., 1965.
10. Гутчин И. Б., Кузичев А. С. Бионика и надежность (элементы теории формальных нейронов). М., 1967.
11. Жегалкин И. И. О технике вычислений предложений в символической логике.— Мат. сб., т. 34, 1927.
12. Жегалкин И. И. Арифметизация символической логики.— Мат. сб., т. 35, вып. 3—4, 1928; т. 36, вып. 3—4, 1929.
13. Калбертсон Дж. Т. Математика и логика цифровых устройств. М., 1965.
14. Кедров Б. М. О числе отношений множеств (понятий).— Сб. «Логические исследования». М., 1959.
15. Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику. М., 1963.
16. Клини С. К. Представление событий в нервных сетях и конечных автоматах.— Сб. «Автоматы», М., 1956.
17. Клини С. К. Введение в метаматематику. М., 1957.

18. Котарбинский Т. Лекции по истории логики. В кн.: Т. Котарбинский. Избранные произведения. М., 1963.
19. Кузнецов А. В. Алгебра логики.— «Филос. энциклопедия», т. 1. М., 1960.
20. Кутюра Л. Алгебра логики. Одесса, 1909.
21. Лукасевич Я. Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М., 1959.
22. Лупанов О. Б. О синтезе некоторых классов управляющих систем.— Сб. «Проблемы кибернетики», № 10, 1963.
23. Лущевска-Романова С. Анализ и обобщение метода проверки формул диаграммами Венна.— «Studia Logica», 1. Warszawa, 1953.
24. Мак-Каллок У. С., Питтс У. Логическое исчисление идей, относящихся к первной активности.— Сб. «Автоматы». М., 1956.
25. Мак-Каллок У. С. Надежность биологических систем. Сб. «Самоорганизующиеся системы». М., 1964.
26. Марков А. А. Теория алгорифмов.— Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XLII, 1954.
27. Нейман Дж. Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент.— Сб. «Автоматы». М., 1956.
28. Порецкий П. С. О способах решения логических равенств и об обратном способе математической логики.— В кн. «Собрание протоколов заседаний секций физико-математических наук Общества естествоиспытателей при Казанском университете», т. 2. Казань, 1884.
29. Порецкий П. С. Решение одной задачи теории вероятностей при помощи матем. логики. Там же, т. 5, 1887.
30. Слупецкий Е., Борковский Л. Элементы математической логики и теории множеств. М., 1965.
31. Стяжкин Н. И. Обоснование и анализ логических методов Дж. Буля.— «Вестник МГУ», сер. XIII, № 1, 1960.
32. Стяжкин Н. И. Формирование математической логики. М., 1967.
33. Стяжкин Н. И., Силаков В. Д. Краткий очерк истории общей и матем. логики в России. М., 1962.
34. Таутс А. И. Универсальная логика.— Тр. Ин-та физики и астрономии АН ЭССР, № 19, 3. Тарту, 1962.
35. Таутс А. И. Решение логических уравнений типа высказываний. Там же, № 20, 3, 1963.
36. Таутс А. И. Решение логических уравнений в исчислении одноместных предиктов первого порядка. Там же, № 24, 3, 1964.
37. Трахтенброт Б. А. Конечные автоматы и логика одноместных предиктов.— Сибирский мат. журн., т. III, № 1, 1962.
38. Цетлин М. Л., Применение матричного исчисления к синтезу релейно-контактных схем.— ДАН СССР, т. 86, № 3, 1952.
39. Чёрч А. Введение в математическую логику, т. 1. М., 1960.
40. Яблонский С. В. Функциональные построения в k -значной логике.— Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, т. LI, 1958.
41. Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. М., 1966.

42. Яновская С. А. Основания математики и математическая логика.— Сб. «Математика в СССР за тридцать лет».— М.— Л., 1948.
43. Яновская Г. А. Математическая логика и основания математики.— Сб. «Математика в СССР за сорок лет», т. 1. М., 1959.
44. Яновская С. А. Логика высказываний.— «Философ. энциклопедия», т. 3.
45. Яновская С. А. Логика классов. Там же.
46. Alsted J. H. Logicæ systema harmonicum. 1614.
47. Behmann H. Beiträge zur Algebra der Logik.— «Math. Ann.», B. 86, 1922.
48. Bennett A., Baylis Ch. Formal logic. N. Y., 1939.
49. Blum M. Properties of a neuron with many inputs. Bionics Symposium off. Tech. Serv., U. S. Dept. of Comm. Washington, 1960.
50. Bochenski J. M. Formal Logic. Freiburg — Munchen, 1956.
51. Bolzano B. Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen Darstellung der Logik. Sulzbach, 1837.
52. Boole G. The Claims of Science (Lecture in Queen's College, Cork, 1851).
53. Boole G. An investigation of the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities. London, 1854.
54. Boole G. Differential Equations. Cambridge — London, 1865.
55. De Morgan A. Camb. Phil. Transactions (Vols. VII, VIII, IX, X).
56. De Morgan A. Formal Logic, 1847.
57. De Morgan A. Trigonometry and Double Algebra, 1849.
58. Drobisch M. W. Neue Darstellung der Logik... Leipzig, 1836.
59. Dürr K. Les diagrammes logiques de Leonard Euler et de John Venn. Actes X-me Congr. Int. de Philos. Amsterdam, 1949.
60. Euler L. Letteres à une princesse d'Allemagne, t. 2. СПб., 1768.
61. Faris J. A. The Gergonne relations.— «Journ. of Symbol. Logic», v. 20, N 3, 1955.
62. Goodstein R. L. Recursive Number Theory (Studies in Logic), Amsterdam, 1957.
63. Hailperin T. Quantification theory and empty individual-domains.— «Journal of Symbol. Logic», v. 18, 1953.
64. Hamilton W. Lectures on Logic, 1860.
65. Hankel H. Vorlesungen über die complexen Zahlen..., 1867.
66. Harley R. Report of Britisch Association, 1866, 1870.
67. Hauberr K. F. Scholæ logico-mathematicæ, 1829.
68. Hilbert D., Bernays P. Grundlagen der Mathematik, t. 1, 1934.
69. Jevons W. S. The principles of Science, a Treatise on Logic and Scientific Evidence, 1877.
70. Jevons W. S. Studies in Deductive Logic, 1880.
71. Johnson W. E. The Logical Calculus.— «Mind», v. I, New Series, Nos. 1, 2, 3.

72. Kant J. Logik, 1876.
 73. Krause K. Ch. Abriss des Systemes der Logik, Göttingen,
 1828.
 74. Lambert J. H. Anlage zur Architectonic. Bd. 1—2, Riga,
 1771.
 75. Lambert J. H. Neues Organon. Leipzig, 1764.
 76. Lambert J. H. Deutscher Gelehrter Briefwechsel. 1768.
 77. Lange J. C. Inventum novum Quadratilogici. 1700.
 78. Lange J. C. Nucleus Logicæ Weisianæ, 1712.
 79. Latham R. G. Logic in its application to language. London,
 1856.
 80. Leechman J. Logic..., 1864.
 81. Lipschitz R. Grundlagen der Analysis. 1877.
 82. Maass J. G. E. Grundriss der Logik. 1793.
 83. McCulloch W. S. Agathe Tyche: of nervous nets — the
 lucky reckoners. Proc. Symp. on Mechanization of Thought
 Processes N. P. L. Teddington, 1958.
 84. Mich J. Grundriss der Logik. 1871.
 85. Mostowski A. On the rules of proof in the pure functional
 calculus of the first order.— «Journ. of Symbol. Logic», v. 16,
 1951.
 86. Ploucquet G. Fundamenta Philosophiæ speculativæ. 1759.
 87. Ploucquet G. Sammlung der Schriften welche den logi-
 schen Calcul Herrn Prof. Ploucquet's betreffen. 1766.
 88. Sanderson K. Logicæ Artis Compendium. 1680.
 89. Scholz H. Geschichte der Logik. Berlin, 1931.
 90. Schröder E. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. 1873.
 91. Schröder E. Operationkreis des Logikkalkulus. Leipzig,
 1877.
 92. Schröder E. Note über den Operationskreis des Logikkal-
 kuls.— «Math. Ann.», Bd. 12, 1877.
 93. Schröder E. Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte
 Logik), Bd. 1. Leipzig, 1890.
 94. Schröder E. Vorlesungen über die Algebra der Logik (exakte
 Logik), Bd. 2. Leipzig, 1905.
 95. Scott R. J. Construction of a neuron model. IRE Trans. on
 Bio-Medical Electronics, v. BME — 8, July, n. 3, 1961.
 96. Semler C. A. Versuch über die combinatorische Methode,
 ein Beitrag zur angewandten Logik und allgemeinen Methodik,
 1811.
 97. Suppes P. Introduction to logic. Princeton, 1957.
 98. Veitch E. W. A chart method for simplifying truth functions.
 Proc. of the Assoc. for Computing Machinery, Mellon Institute.
 Pittsburgh, 1952.
 99. Venn J. Bool's logical system.— «Mind», v. 1, 1876.
 100. Venn J. Symbolic Logic.— «The Princeton review». New
 York, Sept. 1880.
 101. Venn J. On the forms of logical proposition.— «Mind»,
 v. 5, 1880.
 102. Venn J. On the diagrammatic and mechanical representations
 of propositions and reasoning. — «The London, Edinburgh and
 Dublin philosophical magazine and journal of science», 5s.,
 v. 10, 1880.

103. V e n n J. On the various notations adopted for expressing the common propositions of logic (read. 6 Dec. 1880).— «Proceedings of the Cambridge Philosophical Society», v. 4, 1880—1883.
104. V e n n J. On the employment of geometrical diagrams for the sensible representation of logical propositions (read 6 Dec. 1880). *Ibid.*
105. V e n n J. Symbolic logic. London, 1881.
106. V e n n J. Symbolic logic. 2-nd. ed., rev., London, 1894.
107. V e n n J. The logic of chance, 3-ed., London, 1888.
108. V e n n J. The principles of empirical or inductive logic. London, 1889.
109. V i v e s L. *De censura veri*. 1555.
110. W e l t o n J. C. Manual of Logic. 1891.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аналитическое выражение 177
Атомарная формула 152
- Базисное высказывание 153
- Вероятностная матрица 124
— функция 139
Временной цикл 121
Выявления законы 108
- Графический метод Венна 57
Графический метод опровержения предложений
— у Лукасевича и Фериса 20
— у Шрёдера 19
— у Эйлера 15
Графический метод решения задач силлогистики
— у Ламберта 23—24
— у Эйлера 12
Графический метод решения логических уравнений 90
- Диаграммы бинарные 100, 125
— Венна в классическом исчислении высказываний 99
— Венна в классическом исчислении одноместных предикатов 156, 159
— Венна в логике классов 63
— Венна для элементарных предложений силлогистики 35—38
— вероятностные 124, 138, 176
— пороговые 174, 186
— порядковые 176
— пустые 125
- у Больцано 21—22
— у Шрёдера 17—19
Диаграмма Венна как оператор 114
Дополнение класса 11, 33
- Задачи
— Алисы 36
— Буля 64
— Венна 231
— Венна на обратные операции 53, 90
— Джевонса 76
— из статьи Венна 78
— на вывод логических следствий 86, 88
— на исключение неизвестных 94, 95
— об акционерном обществе 231
— об уставе клуба 79
— о девицах 83, 237
— о провалившихся на экзамене 82
— синтеза формальных нейронов 179, 191
- Избыточность 114
Исключение неизвестных 47
— в исчислении высказываний 111
— с помощью диаграмм Венна 94
История графических методов логики 20
- Квазибазисное высказывание 153
Квазивыражение 177—178
Квантор общности 152
— существования 152

- Классы (графическое представление) 11
 Критерий оптимальности 180
 Круги Эйлера 11
 Логика классов 11
 — термы 38
 — формулы 39
 Логические уравнения 26, 47, 90, 224
 — необходимое и достаточное условие их разрешимости 29, 41, 91, 225
 Логическое следствие
 — вывод с помощью диаграмм Венна 107
 — определение 106
 — самое сильное 52
 Матрицы бинарные 100
 — соответствующие диаграммам Венна 99
 — *t*-пороговые 187
 Мир речи 33

 Надежность 133, 145
 — сетей формальных нейронов 184
 Начало цикла 121
 Нейрона граф 190
 — *N*-граф 190
 Нейроны оптимальные 180, 181
 их свойства 191
 — с обратными связями 184, 186
 — формальные 171
 — изоморфные 216
 — элементарные 196
 Норма ячеек 60, 63

 Область действия 152
 Обобщенный метод Венна 157
 Обратные связи 120, 184
 Оператор *N*-дизъюнкции 132
 — *N*-конъюнкции 130
 — *N_p*-конъюнкции 130
 — *N*-отрицания 130
 — *N_p*-отрицания 130
 — *N*-переноса 129
 — *N_p*-переноса 130
 — Π_3 131
 — Π_3^p 132

- Операции над вероятностными функциями
 — дизъюнкции 140
 — импликации 141
 — конъюнкции 140
 — отрицания 139, 140
 — умножения на число q , $0 \leq q \leq 1$ 141
 — эквивалентности 141
 Операции над диаграммами Венна в классическом исчислении высказываний 101
 — дизъюнкции (объединения) 102
 — конъюнкции (пересечения) 101
 — отрицания (дополнения) 101
 — увеличения числа переменных 101, 102
 Операции над классами 26, 39
 — деления 41, 53
 — исключения (вычитания) 40
 — обратные 43, 44
 — объединения 40
 — пересечения (ограничения) 40
 Операции над операторами 119
 — изменения нумерации кривых 119
 — увеличения числа кривых 119
 Операции $O_1 - O_9$ над диаграммами Венна в логике одноместных предикатов 160—163, 165, 168
 Определение вхождения бинарных матриц 104
 — диаграммы Венна в классическом исчислении высказываний 99
 — диаграммы Венна в классическом исчислении одноместных предикатов 159
 — диаграммы *n*-переменных по Венну 63
 — равенства бинарных матриц 104
 — равенства диаграмм 89
 — следствия на диаграммах 89
 — о*-ломаной 158
 — класса (полное и точное) по Порецкому 88, 232

- Переменные предикатные 152
— предметные 152
— свободные 152
— связанные 152
- Плоскость
— разбиение на ячейки при $n = 2$ 11
— разбиение на 2^n ячеек 57
- Полная система элементов 196, 209
- Предметная область 153, 33
— графическое представление 11
- Приведенная диаграмма Венна 165
- Проблема разрешения 164
- Простое логическое следствие
— вывод в исчислении высказываний на диаграммах Венна 109
— вывод в исчислении одноместных предикатов 167
— определение 108, 167
- Равенства аналитические 225
— синтетические 225
- Регулярные сети 118, 143
- Результирующая диаграмма 117
— сети вероятностных диаграмм 126, 143
- Решение логических уравнений 26, 28, 48, 90, 224, 226
— полное и точное 226, 233
- Свойства операций вероятностных функций 141
- Сети вероятностных диаграмм 124, 143
— диаграмм Венна 116
— надежные 133, 134
— не вполне надежные 133
- Силлогистический многочлен
формулы 108
- Символ Венна 63
— обобщенный 157
- Символический язык Венна 31
- Синтез надежных сетей 134, 146
- Случайная булевая функция 138
- Соответствие между диаграммами Венна и формулами исчисления высказываний 103—106
— исчисления одноместных предикатов 163
- Соседние строки (столбцы) матрицы 102
- Соседние ячейки диаграммы 91
- Таблицы Венна 61
— для тождеств 46—47
- Теорема Гаубера 41, 86
— о разложении вероятностных функций 143
- Универсум 27, 33, 34
- Уравнение Джевонса 50
- Формулы исчисления высказываний
— дизъюнктивная нормальная (ДНФ) 105
— избыточные 114
— конъюнктивная нормальная (КНФ) 105
— определение 103
— различные 104
— совершенная ДН (СДНФ) 105
— совершенная КН (СКНФ) 105
— тождественно истинные (универсально общезначимые) 104
— тождественно ложные 105
— эквивалентные 104
- Формулы исчисления одноместных предикатов
— выполнимые 155
— дизъюнктивные квазиприведенные 164
— дизъюнктивные приведенные 156
— конъюнктивные приведенные 156
— общезначимые 155
— определение 152
— силлогистическая 167
— универсально общезначимые (тождественно истинные) 155
— эквивалентные 155
- Формы формул
— дизъюнктивные 106
— дизъюнктивные приведенные 156
— конъюнктивные 106
— конъюнктивные приведенные 156
- Функционирование сетей вероятностных диаграмм 124
- Экономичность алгорифма синтеза формальных нейронов 199
- Элементарные последовательности 100

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аккерман В. 241
Алстед 21, 243
Аристотель 6, 7, 12, 17, 32, 33,
35, 77

Бейлис Хр. 7, 243
Бемани Г. 243
Беннет А. 7, 243
Беннет А. 7, 243
Беркли Э. 97, 241
Бернайс П. 243
Бирюков Б. В. 4, 222, 241
Блюм М. 243
Больцано Б. 6, 22, 64, 243
Борковский Л. 242
Бохенский И. 21, 243
Буль Дж. 6, 26—31, 35, 37,
41—45, 48—50, 64, 65, 74, 94,
101, 223, 227, 230, 231, 238,
242, 243

Вайзе Х. 21
Велтон Дж. 24, 245
Вейч Э. 97, 244
Вени Дж. 6—10, 20—25, 30 —
61, 63, 64, 66, 74, 77—83,
86, 87, 90, 94—98, 111, 113,
157, 167, 223, 230, 231, 232,
237—240, 244, 245
Вени Дж. А. 10
Вивес Л. 17, 20, 245

Гаврилов Г. П. 242
Гавронский А. Л. 4, 190
Гальперин Т. 243
Гамильтон У. 21, 23, 243
Ганкель Г. 42, 243
Гаубер К. 41, 86, 243
Гёдель К. 5

Гильберт Д. 44, 241, 243
Глушков В. М. 77, 241
Гудстейн Р. Л. 230, 243
Гутчин И. Б. 241

Де Морган А. 6, 21, 23, 42,
46, 67, 142, 243
Дени-Папен И. 7
Джевонс У. С. 6, 29, 50, 63,
76, 77, 223, 227, 230, 231,
240, 241, 243
Джонсон 46, 243
Доджсон Ч. 36
Дробиш М. В. 22, 243
Дюрр К. 7, 243

Жегалкин И. И. 30, 241
Жергони Ж. Д. 6, 20, 243
Жордан 60, 157

Землер Х. А. 25, 63, 244

Калбертсон Дж. Т. 241
Калужнин Л. А. 241
Кант И. 23, 243
Карнау 97
Кедров Б. М. 241
Кемени Дж. 241
Клини С. К. 241
Котарбинский Т. 7, 242
Кофман А. 7
Коши О. Л. 44
Краузэ К. Х. 23, 244
Кудрявцев В. Б. 242
Кузнецов А. В. 4, 242
Кутюра Л. 7, 97, 242
Кэррол Л. 36

Ламберт И. Г. 6, 21, 23—25,
44, 45, 238, 244

- Ланге И. Х. 21, 244
Латам Р. 23, 244
Лейбниц Г. В. 5, 6, 21, 26, 31, 35
Липшиц Р. 42, 244
Личмен Дж. 23, 244
Лукасевич Я. 20, 78, 242
Луллий Р. 12
Лупанов О. Б. 242
Лущевска-Романова С. 97, 242

Маас И. Г. 23, 244
Мак-Каллок У. С. 7, 9, 97,
98, 137, 138, 171, 172, 173,
179, 242, 244
Мак-Колл Х. 230
Марков А. А. 242
Минский 60
Мих И. 23, 244
Мостовский А. 244

Нейман Дж. 242
Никогосов С. Л. 4, 148

Паций Ю. 21
Пирс Ч. 6, 230
Питтс У. 242
Плуке Г. 23, 244
Порецкий П. С. 6, 26, 29, 30,
83, 85—89, 223, 224, 226—233,
235—237, 242
Порфирий 20, 21
Пост Э. 242

Рассел Б. 5, 7
Ричардсон С. 33

Сандерсон К. 244
Сапис П. 25, 244

Силаков В. Д. 242
Скотт Р. 244
Слупецкий Е. 242
Снелл Дж. 241
Стоун М. 30
Стяжкин Н. И. 29, 242
Сэлфридж 60

Таутс А. И. 231, 242
Томпсон Дж. 241
Трахтенброт Б. А. 242

Уайтхед А. Н. 5, 7

Ферис Дж. А. 20, 243
Фор Р. 7
Фреге Г. 5, 6, 7, 241

Харлей Р. 42, 243

Цетлин М. Л. 242

Челпанов Г. И. 24
Чёрч А. 31, 242

Шанин Н. А. 222
Шестаков В. И. 241
Шольц Г. 20, 21, 244
Шрёдер Э. 6, 17—20, 22, 25,
29—31, 41—45, 48, 51, 53,
60, 64, 65, 74, 76—78, 81—83,
88, 223—231, 233, 235, 244

Эйлер Л. 6, 7, 12, 13, 15, 17,
21, 23, 25, 238, 243

Яблонский С. В. 242
Яновская С. А. 2, 3, 4, 222, 243

О ГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
Г л а в а 1. Диаграммы Венна в логике классов	11
§ 1.1. Круги Эйлера	11
§ 1.2. Постановка задач в алгебре логики XIX в. Способ решения логических уравнений по Булю	26
§ 1.3. Символический язык Венна	31
§ 1.4. Алгебраические методы решения логических уравнений и исключения неизвестных	47
§ 1.5. Графический метод Венна.	57
§ 1.6. Некоторые задачи логики классов, их решение с помощью диаграмм Венна	64
1. Задача Буля	64
2. Задача Джевонса	76
3. Задача из статьи Венна	78
4. Задача об уставе клуба	79
5. Задача о провалившихся на экзамене	82
6. Задача о девицах	83
7. Теорема Гаубера	86
8. О выводе логических следствий	86
9. Графический метод решения логических уравнений	90
10. Исключение неизвестных	94
Г л а в а 2. Диаграммы Венна в классическом исчислении высказываний	99
§ 2.1. Соответствие между диаграммами Венна и бинарными матрицами n переменных	99
§ 2.2. Операции над диаграммами Венна	101
§ 2.3. Построение диаграмм Венна по данным формулам	103
§ 2.4. Построение формул по диаграммам Венна	105
§ 2.5. Вывод логических следствий с помощью диаграмм Венна	106
§ 2.6. Простые логические следствия	108
§ 2.7. Диаграмма Венна как оператор	114
§ 2.8. Вероятностные диаграммы	124
§ 2.9. Надежные сети вероятностных диаграмм	134
§ 2.10. Вероятностные диаграммы (продолжение)	138

Г л а в а 3. Диаграммы Венна в классическом исчислении одноместных предикатов	152
§ 3.1. Диаграммы Венна и формулы исчисления одноместных предикатов (определения, построение формул по диаграммам)	153
§ 3.2. Операции над диаграммами Венна в логике одоместных предикатов	160
§ 3.3. Соответствие между формулами и диаграммами Венна в исчислении одноместных предикатов	163
§ 3.4. Решение проблемы разрешения в логике одоместных предикатов с помощью диаграмм Венна	164
§ 3.5. Обзор простых логических следствий из посылок, выражимых на языке формул исчисления одноместных предикатов, с помощью диаграмм Венна	167
Г л а в а 4. Диаграммы Венна в формальных нейронных схемах	171
§ 4.1. Формальные нейроны Мак-Каллока	171
§ 4.2. Синтез оптимальных формальных нейронов по пороговым диаграммам n переменных	177
§ 4.3. Надежные сети формальных нейронов	184
§ 4.4. Формальные нейроны с обратными связями	186
§ 4.5. Алгебраические аспекты теории формальных нейронов	190
Заключение	222
Приложение 1. Дискуссии о том, что значит решить логическое уравнение	224
Приложение 2. Содержание книги Венна «Символическая логика».	238
Литература	241
Предметный указатель	246
Именной указатель	249

Александр Сергеевич Кузичев

**Диаграммы Венна
История и применения**

Утверждено к печати

Научным Советом по комплексной проблеме «Кибернетика»

Редактор издательства Б. В. Бирюков

Технический редактор И. Н. Жмуркина

Сдано в набор 2/Х 1967 г. Подписано к печати 14/II 1968 г.

*Формат 84×108 $\frac{1}{2}$. Бумага № 2. Усл.-печ. л. 13,23. Уч.-изд. л. 12,3.
Тираж 5200. Т-04201. Тип. зак. 3644. Цена 74 к.*

Издательство «Наука». Москва, К-62, Подсосенский пер., 21

2-я типография издательства «Наука». Москва. Г-99, Шубинский пер., 10

О П Е Ч А Т К И

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
27	21 св.	$a + 1 =$	$a + 1 = 1$
27	22 св.	$a = 10$	$a = 0$
35	8 св.	$\bar{A}B, \bar{A}B,$	$\bar{A}B, A\bar{B},$
49	2 сн.	$\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}\bar{\mathfrak{A}}, \mathfrak{A}\bar{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A}\bar{\mathfrak{B}}$	$\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{B}\bar{\mathfrak{A}}, \mathfrak{A}\bar{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}\bar{\mathfrak{B}}$
92		Q_i	a_i
109	3 сн.	γ_{ii}	γ_{i_1}
110	13, 14 сн.	Ψ_{j_i}	Ψ_{j_1}
111	9 сн.	Ψ_{l_2+1}	Ψ_{l_2+1}
247	3 сн.	0* — ломаной	○ * (*) — ломаной
247	14 сн.	Норма	Номера