

Е. Ф. МИЩЕНКО, Н. Х. РОЗОВ

Дифференциальные
уравнения
с малым параметром
и релаксационные
колебания



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1975

Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1975, стр. 248.

Монография посвящена изложению метода построения асимптотических решений нормальных автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при некоторых производных. Описываемый метод позволяет получать асимптотические представления для траекторий таких систем на любом отрезке времени, вычислять периодические решения и находить различные характеризующие решение величины (в частности, период периодического решения). Рассматриваемые вопросы представляют интерес при исследовании ряда механических, физических и технических задач, например, в теории релаксационных колебаний.

Книга рассчитана на научных работников (математиков, механиков, физиков), на инженеров-исследователей и студентов, интересующихся дифференциальными уравнениями, теорией асимптотических методов и применением этих методов для решения прикладных задач.

Библ. 66 назв., рис. 50.

Оглавление

Предисловие	6
Глава I. Зависимость решений от малых параметров. Примеры релаксационных колебаний	7
§ 1. Случай гладкой зависимости. Теорема Пуанкаре	7
§ 2. Зависимость решений от параметра на бесконечном промежутке времени	9
§ 3. Уравнения с малым параметром при производных. Примеры	11
§ 4. Системы второго порядка. Быстрые и медленные движения. Релаксационные колебания	15
§ 5. Системы произвольного порядка. Быстрые и медленные движения. Релаксационные колебания	23
§ 6. Решения вырожденной системы уравнений	30
§ 7. Асимптотическое разложение решений по параметру	35
§ 8. Обзор основных результатов	40
Глава II. Системы второго порядка. Асимптотическое вычисление решений	45
§ 1. Основные предположения и определения	45
§ 2. Нулевое приближение	51
§ 3. Асимптотические приближения траектории на участке медленного движения	55
§ 4. Доказательство асимптотических представлений участка медленного движения	59
§ 5. Локальные координаты в окрестности точки срыва	63
§ 6. Асимптотические приближения траектории в начале участка срыва	67
§ 7. Связь асимптотических приближений с истинными траекториями в начале участка срыва	70
§ 8. Специальные переменные для участка срыва	75
§ 9. Одно уравнение типа Риккати	76
§ 10. Асимптотические приближения траектории в непосредственной близости от точки срыва	81
§ 11. Связь асимптотических приближений с истинными траекториями в непосредственной близости от точки срыва	85

§ 12. Асимптотические ряды для коэффициентов разложения вблизи точки срыва	92
§ 13. Регуляризация несобственных интегралов	98
§ 14. Асимптотические приближения траектории в конце участка срыва	107
§ 15. Связь асимптотических приближений с истинными тра- екториями в конце участка срыва	111
§ 16. Доказательство асимптотических представлений участка срыва	116
§ 17. Асимптотические приближения траектории на участке быстрого движения	121
§ 18. Доказательство асимптотических представлений участка быстрого движения	126
§ 19. Специальные переменные для участка падения	129
§ 20. Асимптотические приближения траектории на участке падения	134
§ 21. Доказательство асимптотических представлений участ- ка падения	142
§ 22. Асимптотические приближения траектории на началь- ных участках быстрого движения и падения	150

Глава III. Системы второго порядка. Периодические решения, близкие к разрывным 156

§ 1. Существование и единственность периодического реше- ния, близкого к разрывному	156
§ 2. Асимптотические приближения траектории периодичес- кого решения	160
§ 3. Вычисление времени медленного движения	161
§ 4. Вычисление времени срыва	163
§ 5. Вычисление времени быстрого движения	177
§ 6. Вычисление времени падения	178
§ 7. Асимптотическая формула для периода релаксационного колебания	186
§ 8. Уравнение Ван-дер-Поля. Формула Дородницына	191

Глава IV. Системы произвольного порядка. Асимптотическое вычисление решений 194

§ 1. Основные предположения	194
§ 2. Нулевое приближение	196
§ 3. Локальные координаты в окрестности точки срыва	200
§ 4. Асимптотические приближения траектории в начале участка срыва	204

§ 5. Асимптотические приближения траектории в непосредственной близости от точки срыва	212
§ 6. Асимптотические приближения траектории в конце участка срыва	218
§ 7. Вектор смещения	222
Глава V. Системы произвольного порядка. Периодические решения, близкие к разрывным	224
§ 1. Некоторые вспомогательные отображения	224
§ 2. Существование периодического решения, близкого к разрывному. Асимптотическое вычисление траектории	229
§ 3. Асимптотическая формула для периода релаксационного колебания	235
Литература	244

Предисловие

Обыкновенным дифференциальным уравнениям, содержащим малые параметры при производных, посвящена обширная литература. В настоящей книге рассматриваются вопросы, связанные с асимптотическим вычислением так называемых релаксационных колебаний — периодических решений, состоящих как из участков медленного, так и из участков быстрого изменения фазовых переменных. В связи с этим подробно исследуется поведение решений дифференциальных уравнений с малым параметром при производных вблизи сингулярных точек.

В основном результаты, излагаемые в настоящей книге, принадлежат Л. С. Понтрягину и авторам. Кроме того, учтены и использованы известные работы А. А. Дородницына об уравнении Ван-дер-Поля, Н. А. Железцова и Л. В. Родыгина о релаксационных колебаниях в радиотехнических системах, А. Н. Тихонова и А. Б. Васильевой о дифференциальных уравнениях с малым параметром при производных.

Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов

Зависимость решений от малых параметров. Примеры релаксационных колебаний

Описывая работу реального объекта или течение реального процесса дифференциальными уравнениями, мы переходим от самого объекта (процесса) к его идеализированной модели. Почти всякая математическая идеализация в значительной степени сводится к пренебрежению малыми величинами. Поэтому вопрос о том, насколько это пренебрежение искажает истинную картину явления, становится основным. Так возникает математическая проблема зависимости решений дифференциальных уравнений от малых параметров.

В настоящей главе будет дана общая характеристика различных типов этой зависимости для нормальной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для простоты изложения ограничимся случаем одного параметра.

§ 1. Случай гладкой зависимости. Теорема Пуанкаре

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^i = F^i(x^1, \dots, x^n, \varepsilon), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

или, в векторной форме,

$$\dot{x} = F(x, \varepsilon), \quad (1.2)$$

где $x = (x^1, \dots, x^n)$ — n -мерный вектор евклидова пространства R^n ; $F(x, \varepsilon) = (F^1(x, \varepsilon), \dots, F^n(x, \varepsilon))$ — n -мерная вектор-функция аргументов x и ε ; ε — числовой параметр. Впредь мы будем считать параметр ε малым:

$$0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad (1.3)$$

где ε_0 — малое число.

Пусть функции $F^i(x^1, \dots, x^n, \varepsilon)$, $i = 1, \dots, n$, определены и непрерывны в некоторой области G изменения переменных $x^1, \dots, x^n, \varepsilon$, где ε принадлежит отрезку (1.3). Обозначим через

$$x = \varphi(t, \varepsilon) \quad (1.4)$$

решение системы (1.2), удовлетворяющее начальному условию $x_0 = \varphi(t_0, \varepsilon)$, $(x_0, \varepsilon) \in G$. Наряду с системой (1.2)

рассмотрим систему

$$\dot{x} = F(x, 0), \quad (1.5)$$

получающуюся из (1.2) при $\varepsilon = 0$. Пусть

$$x = \varphi_0(t) \quad (1.6)$$

— решение системы (1.5) с тем же начальным условием $x_0 = \varphi_0(t_0)$ и определенное на некотором конечном отрезке времени

$$t_0 \leq t \leq T. \quad (1.7)$$

При малом ε правые части систем (1.2) и (1.5) являются близкими. Естественно поставить вопрос, как отличаются друг от друга решения (1.4) и (1.6). В большом числе практически важных случаев ответ на этот вопрос дают следующие хорошо известные теоремы (см., например, [45], [30], [23], [3]):

Теорема 1 (о непрерывной зависимости решений от параметра). *Если правые части системы (1.2) в области G непрерывно дифференцируемы по переменным x^1, \dots, x^n и непрерывны по ε , то при достаточно малом ε решение (1.4) определено на том же отрезке (1.7), что и решение (1.6), и может быть представлено в виде*

$$\varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0(t) + R_0(t, \varepsilon), \quad (1.8)$$

где $R_0(t, \varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по t на всем отрезке (1.7).

Теорема 2 (о дифференцируемости решений по параметру). *Если правые части системы (1.2) имеют в области G непрерывные частные производные до порядка $m \geq 1$ включительно по совокупности всех переменных, то при достаточно малом ε решение (1.4) можно представить в виде*

$$\varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0(t) + \varepsilon \varphi_1(t) + \dots + \varepsilon^{m-1} \varphi_{m-1}(t) + R_m(t, \varepsilon), \quad (1.9)$$

где $R_m(t, \varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ как величина порядка ε^m равномерно по t на всем отрезке (1.7).

Теорема 3 (теорема Пуанкаре об аналитичности решений по параметру). *Если правые части системы (1.2) являются в области G аналитическими функциями всех своих аргументов, то при достаточно малом ε*

решение (1.4) можно представить в виде ряда

$$\varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \varphi_m(t), \quad (1.10)$$

равномерно сходящегося на всем отрезке (1.7).

Теоремы 1, 2, 3 не только утверждают, что при малом ε на конечном отрезке времени решение (1.4) мало отклоняется от решения (1.6), но и указывают способ вычисления этого отклонения с произвольной степенью точности.

§ 2. Зависимость решений от параметра на бесконечном промежутке времени

Сформулированные теоремы 1, 2, 3 не дают ответа на вопрос, как отклоняется решение (1.4) от решения (1.6) на бесконечном промежутке времени. Простейшие примеры показывают, что это отклонение не всегда мало. Более того, если решение (1.6) определено при всех $t \geq t_0$, то решение (1.4), вообще говоря, не будет определено на всем промежутке $t \geq t_0$.

Пример 1. Скалярное уравнение

$$\dot{x} = (x + \varepsilon)^2 \quad (2.1)$$

при $\varepsilon = 0$ переходит в уравнение

$$\dot{x} = x^2. \quad (2.2)$$

Решением уравнения (2.2), имеющим при $t = 0$ нулевое начальное значение, является $x = \varphi_0(t) \equiv 0$, $0 \leq t < \infty$. Решением уравнения (2.1) с тем же начальным условием будет

$$x = \varphi(t, \varepsilon) \equiv \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon t} - \varepsilon;$$

это решение определено лишь на интервале $0 \leq t < 1/\varepsilon$.

Пример 2. Рассмотрим электрический контур, составленный из конденсатора емкости C и катушки с индуктивностью L , соединенных последовательно (рис. 1). Если пренебречь малым омическим сопротивлением проводников, то зависимость силы тока i от времени в этом

контуре описывается (см., например, [45]) уравнением

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = 0. \quad (2.3)$$

Но правомерна ли такая идеализация цепи, при которой мы пренебрегаем малым омическим сопротивлением R составляющих цепь проводников? Другими словами, близки ли решения уравнения (2.3) к решениям уравнения

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0 \quad (2.4)$$

при малом R ?

Если нас интересует лишь конечный отрезок времени, то, очевидно, решения уравнений (2.3) и (2.4) с одним и тем же начальным условием близки. На бесконечном же промежутке времени это не так: $I(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$,

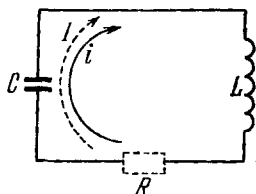


Рис. 1.

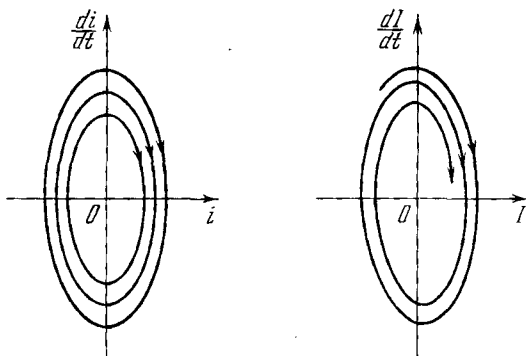


Рис. 2.

тогда как $i(t)$ совершает периодические колебания с постоянной амплитудой. Фазовые портреты уравнений (2.3) и (2.4) в плоскостях $(i, \frac{di}{dt})$, соответственно $(I, \frac{dI}{dt})$, существенно различны: единственное положение равновесия уравнения (2.3) является центром, а уравнения (2.4) — фокусом (рис. 2).

§ 3. Уравнения с малым параметром при производных. Примеры

Другой причиной неприменимости теорем 1, 2, 3 для оценки уклонения решения (1.4) от решения (1.6) даже на конечном отрезке времени может быть разрывная (или негладкая) зависимость правых частей системы (1.1) от параметра ε . Так, в частности, обстоит дело с нормальными системами, в которые малый положительный параметр ε входит множителем при некоторых производных, т. е. с системами вида

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}^i = f^i(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l), & i = 1, \dots, k, \\ \dot{y}^j = g^j(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l), & j = 1, \dots, l, \end{cases} \quad (3.1)$$

где f^i и g^j — гладкие функции всех своих $k+l=n$ аргументов. Очевидно, что если переписать систему (3.1) в виде (1.1), то в правых частях появятся функции $\frac{1}{\varepsilon} f^i$, которые неограниченно возрастают при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Систему (3.1) можно привести к виду (1.1) и так, чтобы параметр ε входил в правую часть гладко. Для этого достаточно сделать замену $t = \varepsilon \theta$; тогда получим

$$\begin{cases} \frac{dx^i}{d\theta} = f^i(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l), & i = 1, \dots, k, \\ \frac{dy^j}{d\theta} = \varepsilon g^j(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l), & j = 1, \dots, l. \end{cases} \quad (3.2)$$

К системе (3.2) теоремы 1, 2, 3 уже применимы, но практическая польза от этого не велика: можно гарантировать близость решений системы (3.2) и системы, получающейся из нее при $\varepsilon = 0$, лишь на конечном отрезке времени θ , т. е. на бесконечно малом вместе с ε отрезке времени t .

Рассмотрим два физических примера, приводящих к системам дифференциальных уравнений типа (3.1). В дальнейшем эти примеры будут играть важную иллюстративную роль.

Пример 3 (уравнение Ван-дер-Поля). Рассмотрим ламповый генератор на триоде с колебательным контуром в анодной цепи; схема генератора приведена на рис. 3. Если обозначить через I силу тока, идущего через сопротивление ba или, что то же самое, через индуктив-

ность kb , то оказывается, что величина I как функция времени t удовлетворяет дифференциальному уравнению (см. [45], [7], [3])

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{1}{C} f \left(M \frac{dI}{dt} \right), \quad (3.3)$$

где M — положительная константа (коэффициент взаимной индукции), а $f(u)$ — характеристика лампы — монотонно возрастающая гладкая функция аргумента u , график которой изображен на

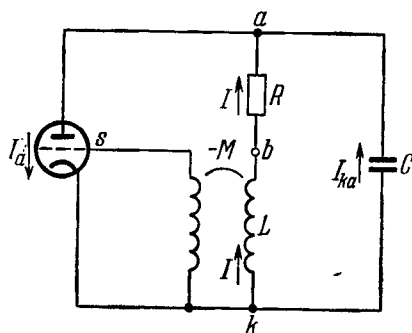


Рис. 3.

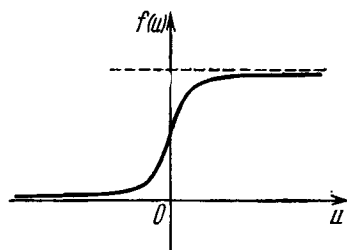


Рис. 4.

рис. 4. Можно считать, что производная $f'(u)$ принимает свое максимальное значение при $u=0$, т. е. что $f''(0)=0$, $f'''(0) < 0$.

Известно (см., например, [45]), что ламповый генератор является источником незатухающих периодических колебаний, если его параметры удовлетворяют условию

$$R < \frac{M}{C} f'(0); \quad (3.4)$$

в этом случае на фазовой плоскости $(I, \frac{dI}{dt})$ уравнения (3.3) имеется единственный устойчивый предельный цикл.

Если вместо $I(t)$ ввести неизвестную функцию $i(t) = I(t) - f(0)$, то из уравнения (3.3) получим

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + F \left(\frac{di}{dt} \right) + i = 0, \quad (3.5)$$

где $F(v) \equiv RCv - f(Mv) + f(0)$. Уравнение (3.5) называется уравнением Рэлея.

Рассмотрим идеализированный случай, когда характеристику $f(u)$ лампы можно (по крайней мере, для не

очень больших по абсолютной величине значений u) заменить кубической параболой:

$$f(u) = f(0) + f'(0)u + \frac{1}{6} f'''(0)u^3.$$

Тогда

$$F(v) = (RC - f'(0)M)v - \frac{1}{6} f'''(0)M^3 v^3,$$

причем $f'''(0)M^3 < 0$, а $RC - f'(0)M < 0$ в силу условия (3.4), и уравнение (3.5) принимает вид

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + \left[(RC - f'(0)M) - \frac{1}{6} f'''(0)M^3 \left(\frac{di}{dt} \right)^2 \right] \frac{di}{dt} + i = 0.$$

Если в этом уравнении перейти к новому времени $t = t/\sqrt{LC}$ и к новой неизвестной функции

$$z = \alpha i, \quad \text{где} \quad \alpha^2 = \frac{RC - f'(0)M}{\frac{1}{2} f'''(0)M^3} LC,$$

то приходим к уравнению

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \lambda \left[-\frac{dz}{dt} + \frac{1}{3} \left(\frac{dz}{dt} \right)^3 \right] + z = 0,$$

где $\lambda = \frac{f'(0)M - RC}{\sqrt{LC}} > 0$. Наконец, продифференцировав последнее уравнение еще раз по t и приняв за неизвестную функцию $x = \frac{dz}{dt}$, получим уравнение Ван-дер-Поля [11]

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda [-1 + x^2] \frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.6) в рассматриваемой идеализации описывает работу лампового генератора. Параметры самого генератора характеризуются здесь одним параметром λ . Мы уже упоминали, что при условии (3.4) в генераторе возникают самовозбуждающиеся периодические колебания (автоколебания); это математически адекватно тому факту, что уравнение Ван-дер-Поля при любом $\lambda > 0$ имеет в плоскости $\left(x, \frac{dx}{dt}\right)$ устойчивый предельный цикл.

При малых значениях параметра λ уравнение (3.6) близко к уравнению линейного осциллятора, и автоколебания в генераторе близки к простым гармоническим колебаниям. По мере роста λ автоколебания все более и

более отличаются от гармонических, а при больших значениях λ характер автоколебаний уже существенно иной — колебания, как говорят, становятся *релаксационными*.

При большом значении параметра $\lambda > 0$ уравнение (3.6) легко привести к системе вида (3.1). В самом деле, положим

$$y = \int_0^x (x^2 - 1) dx + \frac{1}{\lambda} \frac{dx}{dt}, \quad t_1 = \frac{t}{\lambda}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\lambda^2}; \quad (3.7)$$

тогда после очевидных преобразований из уравнения (3.6) получим систему второго порядка, в которой для краткости будем снова писать t вместо t_1 :

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dx}{dt} = y - \frac{1}{3} x^3 + x, \\ \frac{dy}{dt} = -x; \end{cases} \quad (3.8)$$

здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр. В дальнейшем систему (3.8) будем также называть уравнением Ван-дер-Поля.

Отметим, что к системам второго порядка вида (3.1) (т. е. при $k=l=1$) приводит изучение многих радиотехнических схем. Таковы, например, ламповый мультивибратор с одним RC -звеном, при описании работы которого существенную роль играют малые паразитные емкости (см. [3]), некоторые типы мультивибраторов на туннельных диодах (см. [54]) и др.

Пример 4. Работа ряда радиотехнических приборов (таких, как двухламповый генератор Фрюгауфа, симметричный мультивибратор и др.; см. [3]) при учете малых паразитных емкостей, индуктивностей и т. п. описывается системами дифференциальных уравнений четвертого порядка вида

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}^1 = -\alpha (y^1 - y^2) + \varphi(x^1) - x^2, \\ \varepsilon \dot{x}^2 = \alpha (y^1 - y^2) + \varphi(x^2) - x^1, \\ \dot{y}^1 = x^1, \\ \dot{y}^2 = x^2, \end{cases} \quad (3.9)$$

где $\alpha > 0$ — константа, а $\varphi(u)$, $-1 < u < 1$, — гладкая функция аргумента u , график которой изображен на

рис. 5 (эта кривая представляет собой преобразованную характеристику лампы, см. рис. 4). Без учета же паразитных параметров работа этих приборов описывается системой уравнений, получающейся из (3.9) при $\varepsilon = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha(y^1 - y^2) + \varphi(x^1) - x^2 = 0, \\ \alpha(y^1 - y^2) + \varphi(x^2) - x^1 = 0, \\ \dot{y}^1 = x^1, \\ \dot{y}^2 = x^2. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

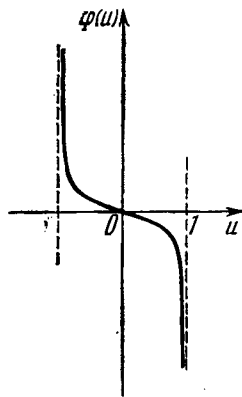


Рис. 5.

Радиофизикам давно было известно, что в упомянутых приборах могут возникать периодические колебания необычного характера: при некоторых значениях времени токи (или напряжения) претерпевают скачкообразные изменения, а в промежутке между этими значениями меняются плавно. Колебания такого типа называют *релаксационными*. Однако все попытки теоретически объяснить это явление с помощью системы (3.10) не удавались: приходилось вводить дополнительные физические гипотезы («гипотеза скачка»; см. [2]). Впервые чисто математически, без дополнительных физических гипотез, явление релаксационных колебаний в системе вида (3.1) было объяснено в работе [20] и ее развитии [38]. В § 5 мы воспроизведем это объяснение на примере систем (3.9) и (3.10).

§ 4. Системы второго порядка.

Быстрые и медленные движения.

Релаксационные колебания

Рассмотрим систему уравнений второго порядка

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{array} \right. \quad (4.1)$$

где x и y — скалярные функции времени t , а ε — малый положительный параметр. Пусть

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y) = 0, \\ \dot{y} = g(x, y) \end{array} \right. \quad (4.2)$$

— *вырожденная система*, соответствующая системе (4.1), т. е. система, получающаяся из (4.1) при $\varepsilon = 0$. Система (4.2) не является нормальной системой дифференциальных уравнений (первое из уравнений системы (4.2) не дифференциальное). Поэтому для нее не существует решения с произвольной начальной точкой (x_0, y_0) ; речь может идти лишь о решениях с начальной точкой, лежащей на кривой $f(x, y) = 0$, так как все траектории вырожденной системы (4.2) (в силу ее первого уравнения) расположены на указанной кривой.

Ввиду этого ставить вопрос о близости решений систем (4.1) и (4.2) имеет смысл лишь для тех решений системы (4.1), начальные точки которых лежат в малой (вместе с ε) окрестности кривой $f(x, y) = 0$. Оказывается, однако, что даже и такие решения системы (4.1) не всегда при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремятся к решениям вырожденной системы (4.2). Важно также выяснить, при каких условиях произвольная траектория системы (4.1) из своей начальной точки (x_0, y_0) , расположенной на конечном расстоянии от кривой $f(x, y) = 0$, попадет в малую (вместе с ε) окрестность этой кривой, сколько на это потребуется времени и т. д.

На все такие вопросы будут даны исчерпывающие ответы в главах II и III. Здесь же мы изложим лишь некоторые из результатов (без доказательств и точных оценок), дадим их наглядное обоснование и, в частности, покажем, что у системы типа (4.1) возможны периодические решения, имеющие характер релаксационных колебаний.

Начнем с уравнения Ван-дер-Поля (3.8). Соответствующей вырожденной системой будет

$$\begin{cases} y - \frac{1}{3}x^3 + x = 0, \\ \dot{y} = -x; \end{cases} \quad (4.3)$$

таким образом, траектории всех решений вырожденной системы лежат на кубической параболе

$$y - \frac{1}{3}x^3 + x = 0. \quad (4.4)$$

Если говорить о целых траекториях системы (4.3), то их, очевидно, всего пять (рис. 6): $(-\infty, S_1)$, $(+\infty, S_2)$,

$(0, S_1), (0, S_2)$ — направление движения по каждой из этих траекторий при возрастании t указано стрелками — и, наконец, точка O — единственное положение равновесия. Существенным обстоятельством является тот факт, что фазовая точка системы (4.3), начав движение из точки P_0 , лежащей, например, на ветви $(-\infty, S_1)$ кривой (4.4), за конечное время достигает точки S_1 . Однако из точки S_1 не выходит ни одна траектория системы (4.3), и потому из рассмотрения вырожденной системы невозможно сделать какое-либо заключение о дальнейшем движении фазовой точки.

С другой стороны, легко непосредственно построить векторное поле фазовых скоростей невырожденной системы

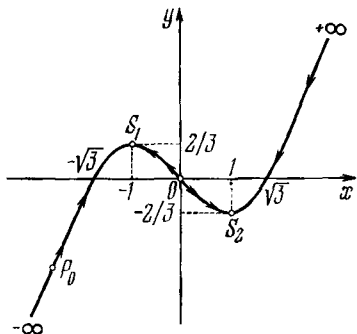


Рис. 6.

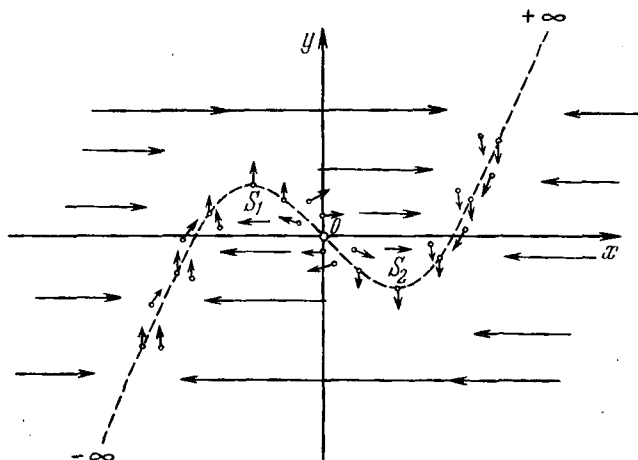


Рис. 7.

(3.8) (рис. 7). Из его анализа следует, что траектория системы (3.8) из произвольной начальной точки Q_0 , не лежащей на кривой (4.4), сначала входит в малую (вместе с ϵ) окрестность ветви $(-\infty, S_1)$ (или ветви $(+\infty, S_2)$),

а затем при всех значениях времени проходит вблизи контура $\mathfrak{Z}_0 = P_2 S_1 P_1 S_2$, состоящего из горизонтальных отрезков $S_1 P_1$, $S_2 P_2$ и дуг $P_2 S_1$, $P_1 S_2$ кривой (4.4) (рис. 8).

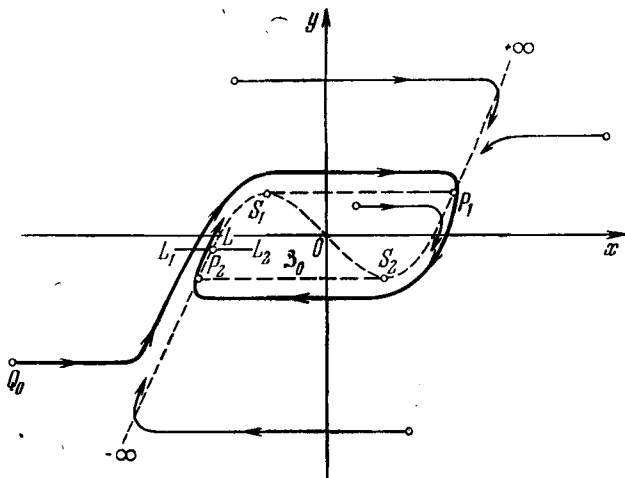


Рис. 8.

Отсюда уже ясно, что вблизи контура \mathfrak{Z}_0 существует замкнутая траектория \mathfrak{Z}_ε системы (3.8) (рис. 9). В самом

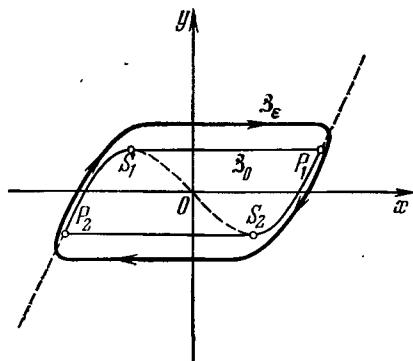


Рис. 9.

деле, возьмем (см. рис. 8) отрезок $L_1 L_2$ малой конечной длины, параллельный оси Ox и пересекающий дугу $P_2 S_1$ во внутренней точке L . В силу сказанного переходом по траекториям системы (3.8) этот отрезок отобразится в свою часть, расположенную на малом (вместе с ε) расстоянии от точки L . Такое отображение имеет неподвижную точку, через которую и проходит замкнутая траектория системы (3.8).

Как видно из уравнений (3.8), движение по участкам цикла \mathfrak{Z}_ε , расположенным вблизи дуг $P_2 S_1$ и $P_1 S_2$ кон-

тура Z_0 , происходит с конечной скоростью. Участки же, расположенные вблизи отрезков S_1P_1 и S_2P_2 , проходят почти мгновенно, так как вдоль этих участков горизонтальная составляющая вектора фазовой скорости имеет величину порядка $1/\epsilon$. Другими словами, при движении по траектории Z_ϵ сравнительно медленные, плавные изменения состояния системы чередуются с весьма

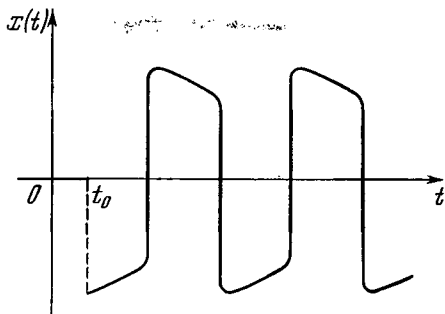


Рис. 10.

быстрыми, скачкообразными (рис. 10). Периодическое движение такого типа и называется *релаксационным* (или, иначе, *разрывным*) *колебанием* (см. [3], [7], [55]).

Такова, в общих чертах, фазовая картина уравнения Ван-дер-Поля. Ее специфической особенностью является наличие *быстрых* и *медленных* движений и переходов от одних к другим — *срывов* (вблизи точек S_1 и S_2) и *падений* (вблизи точек P_1 и P_2).

Эта специфика в полной мере присуща и фазовой картине произвольной системы второго порядка типа (4.1). Причины прохождения траекторий системы (4.1) вблизи некоторых участков кривой Γ , выделяемой в плоскости (x, y) уравнением

$$f(x, y) = 0, \quad (4.5)$$

можно объяснить кинематически, в терминах устойчивости и неустойчивости положения равновесия вспомогательного уравнения первого порядка, а явление срыва — бифуркацией этого положения равновесия.

Совокупность тех точек кривой Γ , в которых выполняется неравенство

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) < 0, \quad (4.6)$$

назовем *устойчивым участком* кривой Γ . Совокупность тех точек кривой Γ , в которых выполняется неравенство

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) > 0, \quad (4.7)$$

назовем *неустойчивым участком* кривой Γ . Устойчивые и неустойчивые участки разделяются точками, в которых

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0; \quad (4.8)$$

будем для простоты считать, что такие точки расположены на кривой Γ изолированно. Например, кривая Γ для уравнения Ван-дер-Поля (кубическая парабола (4.4)), как легко видеть, состоит из двух устойчивых участков $(-\infty, S_1)$, $(+\infty, S_2)$ и одного неустойчивого (S_1, S_2) , а разделяющих точек две: S_1 и S_2 (см. рис. 6).

Рассмотрим теперь первое из уравнений (4.1):

$$\dot{x} = f(x, y) \quad (4.9)$$

и будем считать величину y в нем параметром. Тогда при

фиксированном значении этого параметра, например, при $y = y_1$, уравнение (4.9) среди своих решений может иметь положения равновесия; пусть x_1 — одно из них. По самому определению положения равновесия $f(x_1, y_1) = 0$ и, следовательно, точка (x_1, y_1) принадлежит кривой Γ . Наоборот, если (x_1, y_1) — какая-либо точка кривой Γ , то x_1 является положением равновесия уравнения (4.9) при $y = y_1$.

Таким образом, мы имеем взаимно однозначное соответствие между всеми точками кривой Γ и всеми положениями равновесия семейства уравнений (4.9) при всевозможных значениях y . При этом в силу неравенств (4.6) и (4.7) устойчивые участки кривой Γ состоят из устойчивых положений равновесия, а неустойчивые — из неустойчивых. Разделяющие же точки, т. е. точки кривой (4.5), в которых выполняется равенство (4.8), являются точками слияния устойчивого и неустойчивого положений равновесия. Например, на рис. 11 координата $y = y_2$ точки

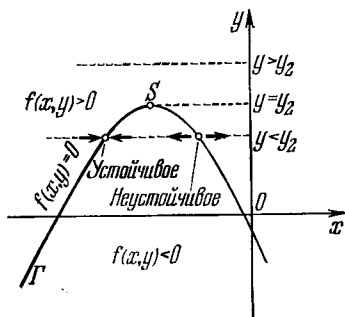


Рис. 11.

слияния S является бифуркационным значением параметра y : при $y < y_2$ в окрестности точки S уравнение (4.9) имеет два положения равновесия (одно устойчивое и одно неустойчивое), а при $y > y_2$ вблизи точки S положений равновесия нет.

Используя эти соображения, можно трактовать движение по произвольной фазовой траектории системы (4.1)

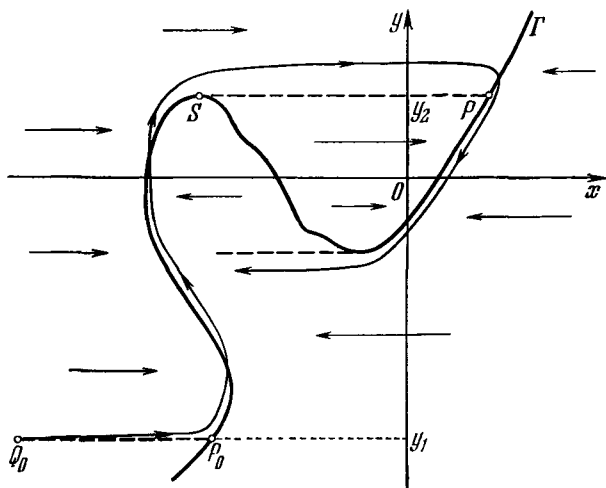


Рис. 12.

следующим образом (рис. 12). В каждой точке фазовой плоскости (x, y) (или той области, где рассматривается система (4.1)) определен вектор фазовой скорости системы (4.1) (ср. с рис. 7):

$$v(x, y) = \left(\frac{1}{\varepsilon} f(x, y), g(x, y) \right).$$

Пусть $Q_0(x_1, y_1)$ — начальная точка движения. Если она находится на конечном расстоянии от кривой (4.5), то вектор фазовой скорости в этой точке при конечной второй компоненте имеет бесконечно большую первую компоненту. Следовательно, произойдет быстрое, почти мгновенное изменение координаты x при почти неизменном значении координаты y , т. е. движение по траектории

системы (4.1) будет близким к движению по прямой $y = y_1$ в силу уравнения

$$\varepsilon \dot{x} = f(x, y_1). \quad (4.10)$$

Характер этого движения не изменится до тех пор, пока компоненты вектора фазовой скорости не станут сравнимыми, т. е. пока фазовая точка системы (4.1) не приблизится к кривой Γ (на расстояние порядка ε) или, что все равно, пока точка x , перемещающаяся по закону (4.10), не приблизится к одному из устойчивых положений равновесия. (В случае, когда уравнение (4.10) не имеет устойчивых положений равновесия, фазовая точка системы (4.1) с большой скоростью уйдет в бесконечность почти по прямой $y = y_1$.)

После этого движение по траектории системы (4.1) будет происходить плавно, вблизи устойчивого участка кривой Γ , как бы сопровождая движущееся по кривой Γ устойчивое положение равновесия уравнения (4.9) при меняющемся y . Изменение y происходит медленно в силу вырожденной системы (4.2).

Если на рассматриваемом устойчивом участке кривой Γ нет положений равновесия системы (4.2), то может случиться, что величина y за конечное время достигнет некоторого бифуркационного значения, например, $y = y_2$. (В случае, когда бифуркационного значения не окажется, фазовая точка системы (4.1) медленно уходит в бесконечность, оставаясь вблизи кривой Γ .) При этом значении y сопровождаемое устойчивое положение равновесия исчезает, а фазовая точка системы (4.1) быстро устремится (почти по прямой $y = y_2$) в окрестность другого устойчивого положения равновесия уравнения

$$\varepsilon \dot{x} = f(x, y_2)$$

(или, если такового нет, уйдет в бесконечность), и т. д.

Возможно, что в результате последовательного чередования медленных и быстрых движений возникнет замкнутая траектория (ср. с рис. 9). Тогда соответствующее ей периодическое решение системы (4.1) будет *релаксационным колебанием*. Легко привести примеры, когда таких замкнутых траекторий даже несколько (рис. 13).

Имея в виду описанную кинематическую интерпретацию, переменную x называют *быстрой*, а переменную y —

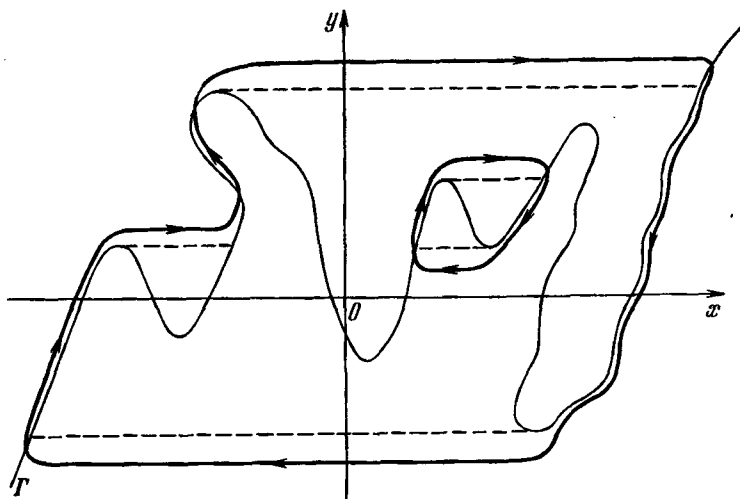


Рис. 13.

медленной. Уравнение (4.9), в котором y рассматривается как параметр, называется *уравнением быстрых движений*, соответствующим системе (4.1).

§ 5. Системы произвольного порядка.

Быстрые и медленные движения.

Релаксационные колебания

Рассмотрим систему уравнений (3.1) произвольного порядка с малым параметром при некоторых производных. Положив

$$\begin{aligned} x &= (x^1, \dots, x^k), & y &= (y^1, \dots, y^l), \\ f &= (f^1, \dots, f^k), & g &= (g^1, \dots, g^l), \end{aligned}$$

перепишем ее в векторной форме:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (5.1)$$

Фазовое пространство R^n , $n = k + l$, системы (5.1) естественно распадается в прямую сумму k -мерного подпространства X^k и l -мерного подпространства Y^l .

Пусть

$$\begin{cases} \dot{f}(x, y) = 0, \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (5.2)$$

— соответствующая *вырожденная система*, т. е. система, получающаяся из (5.1) при $\varepsilon = 0$. Первое из уравнений системы (5.2)

$$f(x, y) = 0 \quad (5.3)$$

выделяет в пространстве R^n l -мерную поверхность Γ и, следовательно, все траектории вырожденной системы (5.2) лежат на этой поверхности. Поэтому для системы (5.2) не существует решения с произвольной начальной точкой (x_0, y_0) , а речь может идти лишь о решениях с начальной точкой, принадлежащей поверхности Γ .

Ввиду этого ставить вопрос о близости решений систем (5.1) и (5.2) имеет смысл лишь для тех решений системы (5.1), начальные точки которых лежат в малой (вместе с ε) окрестности поверхности Γ . Оказывается, однако, что даже и такие решения системы (5.1) не всегда при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремятся к решениям системы (5.2). Важно также выяснить, при каких условиях произвольная траектория системы (5.1) из своей начальной точки (x_0, y_0) , расположенной на конечном расстоянии от поверхности (5.3), попадет в малую (вместе с ε) окрестность этой поверхности, сколько на это потребуются времени и т. д.

Все такие вопросы будут рассмотрены в главах IV, V. Здесь же мы дадим лишь качественное описание фазового портрета системы (5.1) и на примере проиллюстрируем возможность возникновения релаксационных колебаний в системе типа (5.1).

В каждой точке (x, y) фазового пространства R^n (или той области, где рассматривается система (5.1)) система (5.1) определяет вектор фазовой скорости

$$v(x, y) = \left(\frac{1}{\varepsilon} f(x, y), g(x, y) \right). \quad (5.4)$$

Вторая компонента вектора фазовой скорости имеет, как мы видим, конечное значение, первая же, вообще говоря, бесконечно велика. Поэтому для фазовой картины системы (5.1) характерно наличие *быстрых* и *медленных* движений. При этом быстрые движения происходят вдали от поверхности Γ почти параллельно подпространству X^k , а

медленные — вблизи поверхности Γ , там, где первая и вторая компоненты вектора (5.4) становятся сравнимыми.

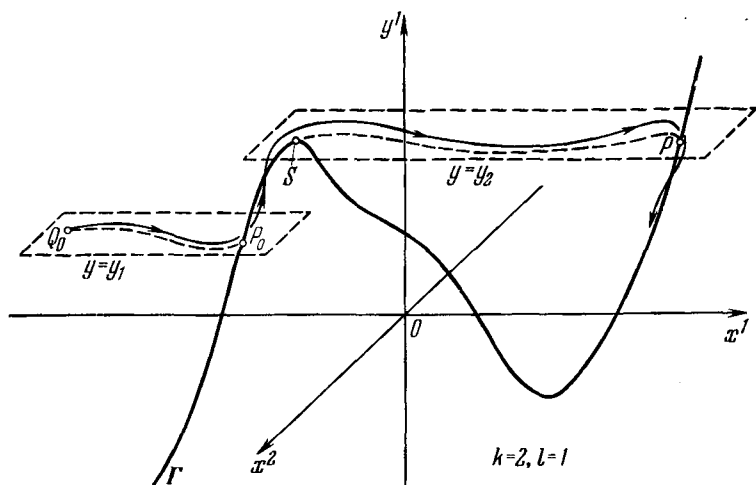


Рис. 14.

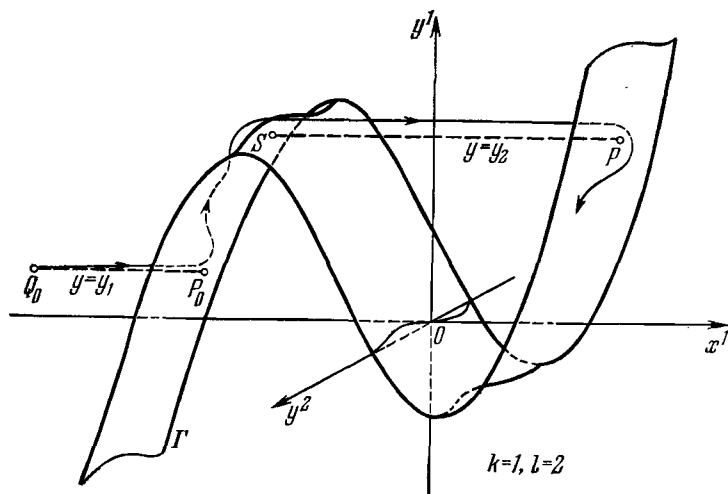


Рис. 15.

Опишем в общих чертах движение по произвольной фазовой траектории системы (5.1) (рис. 14, 15; ср. с рис. 12).

Если начальная точка $Q_0(x_1, y_1)$ находится на конечном расстоянии от поверхности (5.3), то можно считать, что вектор y почти не меняется, в то время как вектор x претерпевает быстрое, почти мгновенное изменение, т. е. движение по траектории системы (5.1) будет близким к движению по плоскости $y = y_1$ в силу системы

$$\varepsilon \dot{x} = f(x, y_1). \quad (5.5)$$

Систему

$$\dot{x} = f(x, y), \quad (5.6)$$

в которой y рассматривается как (векторный) параметр, будем называть *системой уравнений быстрых движений*, соответствующей системе (5.1), а переменную x — *быстрой* переменной.

Предположим, что система (5.6) при каждом значении y своими стационарными решениями может иметь лишь положения равновесия. Тогда, если система (5.5) имеет устойчивые положения равновесия, точка x , перемещающаяся по закону (5.5), быстро приблизится к одному из них, например, к $x = x_2$, а потому фазовая точка системы (5.1) попадет в окрестность (порядка ε) точки $P_0(x_2, y_1)$. (В случае, когда система (5.5) не имеет устойчивых положений равновесия, фазовая точка системы (5.1) с большой скоростью уйдет в бесконечность почти по плоскости $y = y_1$.)

После этого переменные x и y в системе (5.1) будут изменяться уже со сравнимыми скоростями, а движение по траектории этой системы будет происходить плавно, вблизи поверхности Γ . Заметим, что такое движение является как бы сопровождением устойчивого положения равновесия системы (5.6), перемещающегося по поверхности Γ при меняющемся y . Изменение y происходит медленно, подчиняясь вырожденной системе (5.2). Поэтому переменную y естественно назвать *медленной* переменной.

Характер движения фазовой точки системы (5.1) вблизи поверхности Γ сохранится до тех пор, пока при некотором бифуркационном значении y , например, при $y = y_2$, сопровождаемое устойчивое положение равновесие не исчезнет (в результате слияния с некоторым неустойчивым положением равновесия системы (5.6)). Тогда фазовая точка системы (5.1) быстро устремится (почти по

плоскости $y = y_2$) в окрестность другого устойчивого положения равновесия системы

$$\varepsilon \dot{x} = f(x, y_2)$$

(или уйдет в бесконечность, если такового нет), и т. д.

Может случиться, что в результате последовательного чередования медленных и быстрых движений возникнет замкнутая траектория. Тогда соответствующее ей периодическое решение системы (5.1) будет *релаксационным колебанием*.

Рассмотрим пример 4, т. е. систему уравнений (3.9). Соответствующая система уравнений быстрых движений такова:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}^1 = -\alpha(y^1 - y^2) + \varphi(x^1) - x^2, \\ \varepsilon \dot{x}^2 = \alpha(y^1 - y^2) + \varphi(x^2) - x^1; \end{cases} \quad (5.7)$$

она определена лишь в квадрате $|x^1| < 1$, $|x^2| < 1$ плоскости (x^1, x^2) . Положениями равновесия системы (5.7) являются точки пересечения кривых

$$K_1(x^1, x^2) \equiv -\alpha(y^1 - y^2) + \varphi(x^1) - x^2 = 0, \quad (5.8)$$

$$K_2(x^1, x^2) \equiv \alpha(y^1 - y^2) + \varphi(x^2) - x^1 = 0, \quad (5.9)$$

т. е. кривых, получающихся параллельным сдвигом графиков функций $x^2 = \varphi(x^1)$ и $x^1 = \varphi(x^2)$ (см. рис. 5) вдоль координатных осей. Легко убедиться, что в зависимости от значений параметров y^1, y^2 возможны лишь следующие три случая:

а) система (5.7) имеет три положения равновесия P_1, P_2, P_0 , причем P_1 и P_2 — устойчивые узлы, а P_0 — седло (рис. 16);

б) система (5.7) имеет два положения равновесия, $P_1 = P_0$ и P_2 (или $P_2 = P_0$ и P_1), первое из которых — неустойчивый седло-узел, а второе — устойчивый узел (рис. 17);

в) система (5.7) имеет лишь одно положение равновесия P_2 (или P_1), являющееся устойчивым узлом (рис. 18).

Фазовые портреты системы (5.7), соответствующие этим трем случаям, схематически изображены на рис. 19—21. Кроме того, легко установить (например, применив критерий Бендиксона; см. [3], [30]), что система (5.7) ни при каких значениях параметров y^1, y^2 не имеет замкнутых траекторий.

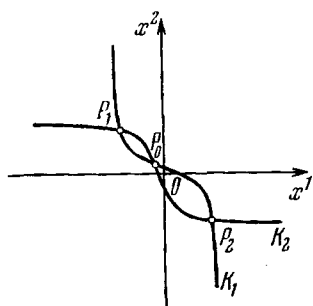


Рис. 16.

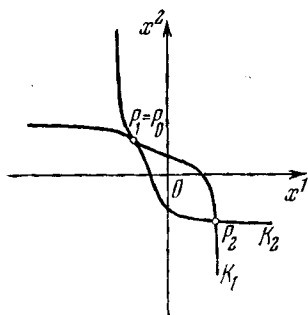


Рис. 17.

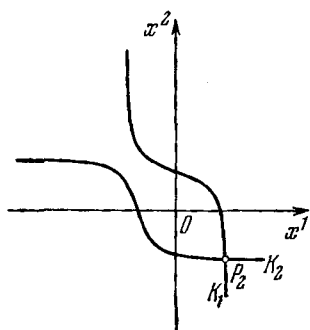


Рис. 18.

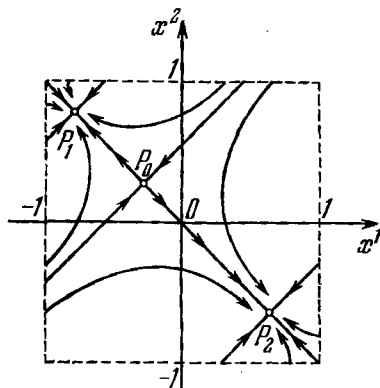


Рис. 19.

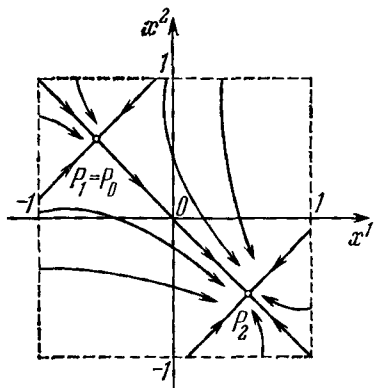


Рис. 20.

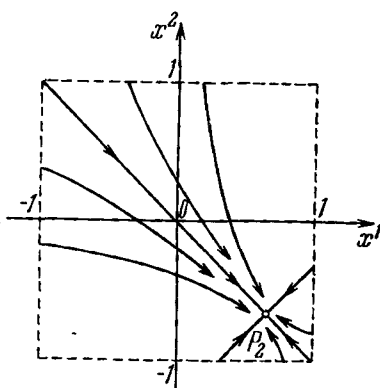


Рис. 21.

Пусть теперь $Q_0(x_1^1, x_2^1, y_1^1, y_2^1)$ — произвольная начальная точка траектории системы (3.9); будем считать, что при $y = y_1 = (y_1^1, y_2^1)$ в плоскости (x^1, x^2) для системы (5.7) осуществляется случай а) (см. рис. 16 и 19; другие возможности рассматриваются аналогично). Так как вектор $x = (x^1, x^2)$ меняется быстро, а вектор $y = (y^1, y^2)$ почти не меняется, то можно считать, что выходящая из точки Q_0 траектория системы (3.9), оставаясь вблизи плоскости $y^1 = y_1^1, y^2 = y_2^1$, быстро приблизится к одному из устойчивых положений равновесия системы

$$\begin{cases} \epsilon \dot{x}^1 = -\alpha (y_1^1 - y_2^1) + \varphi(x^1) - x^2, \\ \epsilon \dot{x}^2 = \alpha (y_1^1 - y_2^1) + \varphi(x^2) - x^1 \end{cases}$$

(ср. с системой (5.5) и рис. 14), например, к устойчивому узлу $P_1(-a, a)$, где $a > 0$.

Затем переменные x^1, x^2, y^1, y^2 начнут меняться со сравнимыми скоростями, и фазовая точка системы (3.9) будет сопровождать положение равновесия P_1 , медленно перемещающееся по мере изменения y^1 и y^2 (ср. с рис. 15). Характер этого перемещения легко проследить. Так как в силу двух последних уравнений системы (3.9)

$$\dot{y}^1 = x^1, \quad \dot{y}^2 = x^2, \quad (5.10)$$

а вблизи точки P_1 справедливы неравенства $x^1 < 0, x^2 > 0$, то при возрастании t разность $y^1 - y^2$ убывает. Это значит, что кривая (5.8) движется параллельно самой себе вверх вдоль оси x^2 , а кривая (5.9) — влево вдоль оси x^1 . Но тогда устойчивое положение равновесия P_1 движется навстречу седлу P_0 , и в некоторый момент времени при бифуркационном значении $y = y_2 = (y_2^1, y_2^2)$ сливается с ним, а затем исчезает (см. рис. 16, 17 и 19, 20).

После этого исчезновения переменные x^1, x^2 вновь начинают меняться быстро, а переменные y^1, y^2 почти не меняются. Поэтому можно считать, что фазовая точка системы (3.9), оставаясь вблизи плоскости $y^1 = y_2^1, y^2 = y_2^2$, быстро устремится к устойчивому положению равновесия системы

$$\begin{cases} \epsilon \dot{x}^1 = -\alpha (y_2^1 - y_2^2) + \varphi(x^1) - x^2, \\ \epsilon \dot{x}^2 = \alpha (y_2^1 - y_2^2) + \varphi(x^2) - x^1, \end{cases}$$

т. е. к устойчивому узлу $P_2(b, -b)$, где $b > 0$ (см. рис. 18 и 21).

данного выше определения устойчивая область Γ_- поверхности Γ состоит из устойчивых положений равновесия.

Перейдем к вырожденной системе (5.2). Чтобы найти ее решения, достаточно, очевидно, сначала разрешить

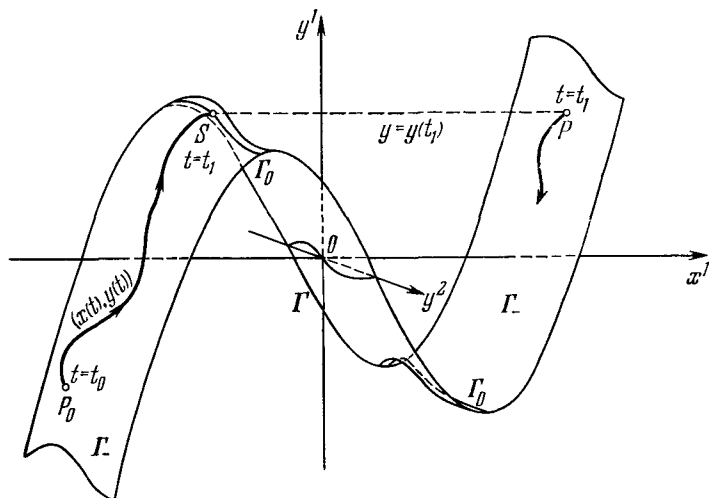


Рис. 24.

соотношения (6.1) относительно переменных x^1, \dots, x^k .

$$x^i = \psi^i(y^1, \dots, y^l), \quad i = 1, \dots, k, \quad (6.6)$$

а затем решить следующую нормальную систему l уравнений с l неизвестными функциями (см. второе из уравнений (5.2)):

$$\dot{y}^j = g^j(\psi^1(y^1, \dots, y^l), \dots, \psi^k(y^1, \dots, y^l), y^1, \dots, y^l), \quad j = 1, \dots, l. \quad (6.7)$$

Пусть (6.5)—некоторая точка поверхности Γ , так что (см. (6.6))

$$x_0^i = \psi^i(y_0^1, \dots, y_0^l), \quad i = 1, \dots, k,$$

и пусть

$$y^j = y^j(t), \quad j = 1, \dots, l,$$

— решение системы (6.7), удовлетворяющее начальным условиям

$$y_0^j = y^j(t_0), \quad j = 1, \dots, l.$$

Тогда ясно, что система функций

$$\begin{aligned} x^i &= x^i(t) \equiv \psi^i(y^1(t), \dots, y^l(t)), \quad i = 1, \dots, k, \\ y^j &= y^j(t), \quad j = 1, \dots, l, \end{aligned} \quad (6.8)$$

будет решением вырожденной системы (5.2) с начальным значением (6.5) при $t = t_0$. Другими словами, траектория решения (6.8) в момент $t = t_0$ исходит из точки (6.5) и лежит на поверхности Γ (см. рис. 24).

Нетрудно понять, что построение решения (6.8) вырожденной системы (5.2) возможно только для тех значений $t \geq t_0$, для которых соотношения

$$f^i(x^1, \dots, x^k, y^1(t), \dots, y^l(t)) = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

допускают однозначное разрешение относительно x^1, \dots, x^k . На основании известной теоремы о неявных функциях можно утверждать, что решение (6.8) заведомо определено от $t = t_0$ до того момента $t = t_1$, когда определитель

$$\det \mathfrak{A}(x^1(t), \dots, x^k(t), y^1(t), \dots, y^l(t)) \quad (6.9)$$

впервые обращается в нуль, или, что то же (см. (6.3)), когда траектория решения (6.8) впервые достигает линии срыва Γ_0 в некоторой точке

$$S(x^1(t_1), \dots, x^k(t_1), y^1(t_1), \dots, y^l(t_1)) \quad (6.10)$$

(см. рис. 24). В общем случае никаких выводов о дальнейшем поведении решения (6.8) из рассмотрения только самой вырожденной системы (5.2) сделать нельзя: из точки S при возрастании времени не выходит ни одной траектории вырожденной системы.

Однако если трактовать траектории вырожденной системы (5.2) как пределы траекторий системы (5.1) при $\varepsilon \rightarrow 0$, то, принимая во внимание изложенные в § 5 соображения, в ряде случаев можно доопределить решение (6.8) и при $t > t_1$.

Пусть при $t_0 \leq t < t_1$ траектория решения (6.8) принадлежит устойчивой области Γ_- поверхности Γ , а при $t = t_1$ эта траектория приходит в точку S на линии срыва Γ_0 . Так как определитель (6.9) в точке (6.10) обращается в нуль, то по крайней мере одно из собственных значений матрицы \mathfrak{A} (см. (6.2)) в этой точке равно нулю; будем считать, что в нуль обращается только одно собственное значение, а все остальные $k-1$ ее собственных значений

имеют отрицательные действительные части *). Предположим также, что в k -мерной плоскости, выделяемой в пространстве R^n уравнениями

$$y^1 = y^1(t_1), \dots, y^l = y^l(t_1), \quad (6.11)$$

существует траектория системы (6.4) (в которую вместо параметров y^1, \dots, y^l подставлены их значения (6.11)), примыкающая при $t \rightarrow -\infty$ к точке $(x^1(t_1), \dots, x^k(t_1))$, а при $t \rightarrow +\infty$ приближающаяся к некоторому устойчивому положению равновесия (x_*^1, \dots, x_*^k) .

Тогда будем считать, что фазовая точка вырожденной системы (5.2) совершает при $t = t_1$ *мгновенный скачок* из точки S (см. (6.10)) в точку

$$P(x_*^1, \dots, x_*^k, y^1(t_1), \dots, y^l(t_1)), \quad (6.12)$$

также лежащую на поверхности Γ (точнее, в устойчивой области Γ_- ; см. рис. 24). Дальнейшее движение фазовой точки проходит по траектории вырожденной системы (5.2), исходящей в момент $t = t_1$ из точки P (см. (6.12)). Если в процессе этого движения фазовая точка снова попадает на линию срыва Γ_0 , то происходит следующий мгновенный скачок, и т. д. Исходя из приведенной интерпретации, точку S называют *точкой срыва*, а точку P — *точкой падения*, следующей за этой точкой срыва.

Получающаяся вектор-функция $(x^1(t), \dots, x^k(t), y^1(t), \dots, y^l(t))$ является разрывной (в момент $t = t_1$, вообще говоря, все ее компоненты испытывают скачки) и удовлетворяет вырожденной системе (5.2) всюду вне точек разрыва. Такую функцию естественно назвать *разрывным решением* вырожденной системы. *Траектория разрывного решения* представляет собой непрерывную кривую в фазовом пространстве R^n и состоит из чередующихся участков двух типов:

а) участков, лежащих в устойчивой области Γ_- поверхности Γ и проходимых за конечное время;

б) участков между точкой срыва и следующей за ней точкой падения, лежащих в плоскостях, параллельных подпространству X^k , и проходимых мгновенно.

*) Кроме того, предполагаются выполненными еще некоторые условия невырожденности; они точно формулируются в гл. IV.

Если из чередующихся участков этих типов получается замкнутая траектория, то говорят, что вырожденная система имеет *разрывное периодическое решение*.

Особенно наглядно определение разрывного решения в случае, когда x и y — скалярные переменные, так что вырожденная система имеет вид (4.2). Принимая во внимание изложенные в § 4 соображения о характере траекторий системы (4.1), легко убедиться, что траектория разрывного решения вырожденной системы (4.2) состоит из проходимых за конечное время дуг устойчивых участков кривой Γ и проходимых мгновенно горизонтальных отрезков от точки срыва до точки падения (см. рис. 12). Изображенная на рис. 8, 9 замкнутая кривая \mathfrak{Z}_0 является траекторией разрывного периодического решения вырожденной системы (4.3).

§ 7. Асимптотическое разложение решений по параметру

Основы общей теории асимптотических методов и разнообразные примеры их использования в математических и прикладных вопросах изложены, например, в [10], [17], [24], [26], [27], [65]. Мы напомним здесь кратко лишь саму постановку задачи асимптотического разложения по параметру решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений и получения асимптотических приближений для решений с той или иной степенью точности.

Рассмотрим нормальную автономную систему (см. (1.1), (1.2))

$$\dot{x} = F(x, \varepsilon) \quad (7.1)$$

с малым параметром $\varepsilon > 0$ и пусть

$$x = \varphi(t, \varepsilon), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (7.2)$$

— ее решение, выделяемое определенным дополнительным условием при каждом значении параметра. Поскольку в общем случае невозможно найти явное выражение для решения (7.2) при фиксированном значении $\varepsilon > 0$ и тем более невозможно отыскать точную формулу для функции $\varphi(t, \varepsilon)$ как функции двух переменных, то возникает задача получения приближенных представлений для функции (7.2), т. е. получения *приближенных решений системы (7.1)*.

Если при малом, но фиксированном значении $\epsilon = \epsilon^*$ удается определить функцию $x = \tilde{\varphi}(t, \epsilon^*)$ такую, что на отрезке $t_0 \leq t \leq T$ выполняется оценка

$$\|\varphi(t, \epsilon^*) - \tilde{\varphi}(t, \epsilon^*)\| \leq \delta, \quad (7.3)$$

где δ — заданная величина (скажем, $\delta = 0,0001$), то функция $x = \tilde{\varphi}(t, \epsilon^*)$ называется *приближенным решением*, удовлетворяющим системе (7.1) при $\epsilon = \epsilon^*$ на отрезке $t_0 \leq t \leq T$ с заданной точностью. Такое определение приближенного решения связано в первую очередь с *численными методами*. Разработанные к настоящему моменту численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений в сочетании с возможностями современных вычислительных машин позволяют с высокой точностью находить решения практически любой системы вида (7.1) при произвольном фиксированном значении параметра.

Однако вычисление функций $x = \tilde{\varphi}(t, \epsilon^*)$ даже для достаточно густого, но все же конечного набора конкретных значений параметра, вообще говоря, не дает ответа на многие вопросы, касающиеся качественной структуры решений системы (7.1) при малых значениях ϵ . Поэтому весьма важно выяснить характер зависимости решения (7.2) от параметра ϵ при $\epsilon \rightarrow 0$, т. е. выявить в полной мере предельные свойства функции $\varphi(t, \epsilon)$ двух переменных при стремлении второго аргумента к нулю. Именно эту задачу имеют в виду, когда говорят об изучении решений системы (7.1) «при достаточно малых значениях параметра ϵ ».

Эффективным средством решения такого рода задач оказываются *асимптотические методы*, приводящие к построению приближенных решений в ином, чем указано выше, смысле — асимптотических приближений. Если в (7.3) отклонение приближенного решения от точного оценивается вполне определенной константой, то отклонение асимптотического приближения от точного решения характеризуется величиной того или иного порядка малости относительно ϵ при $\epsilon \rightarrow 0$.

Естественной идеей, восходящей к обычной формуле Тейлора, является попытка аппроксимировать функцию (7.2) при достаточно малых значениях параметра полиномом по ϵ или разложить эту функцию в степенной

ряд по ε :

$$\varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0(t) + \varepsilon\varphi_1(t) + \dots + \varepsilon^k\varphi_k(t) + \dots \quad (7.4)$$

Тогда частичная сумма ряда (7.4) будет служить приближенным выражением для функции $\varphi(t, \varepsilon)$, причем тем более точным, чем больше членов ряда взято и чем меньше значение ε .

Оказывается, что при определенных условиях (см. теоремы 1, 2, 3) эту идею действительно удастся реализовать — именно такой смысл и имеют равенства (1.8) — (1.10). Например, формула (1.8) означает, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(t, \varepsilon)$ существует

равномерно на отрезке $t_0 \leq t \leq T$ и равен функции $x = \varphi_0(t)$, которая определяется в результате интегрирования системы (7.1) при $\varepsilon = 0$. Иначе говоря, функция $x = \varphi_0(t)$ является *нулевым приближением* решения (7.2) при достаточно малых значениях параметра $\varepsilon > 0$.

Далее, равенство (1.9) нужно понимать следующим образом: существуют такое число $\varepsilon_0 > 0$ и такая константа $M > 0$, что для любого ε , $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, на всем отрезке $t_0 \leq t \leq T$ справедливо неравенство

$$\|\varphi(t, \varepsilon) - \Phi_{m-1}(t, \varepsilon)\| \leq M\varepsilon^m, \quad (7.5)$$

где $\Phi_{m-1}(t, \varepsilon) = \varphi_0(t) + \varepsilon\varphi_1(t) + \dots + \varepsilon^{m-1}\varphi_{m-1}(t)$. В таком случае говорят, что функция $x = \Phi_{m-1}(t, \varepsilon)$ является *асимптотическим приближением* решения (7.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ с точностью до величин порядка малости ε^m . Наконец, соотношение (1.10) показывает, что неравенство (7.5) выполняется при любом натуральном m (константа M зависит от m); сам ряд (1.10) при этом называют *асимптотическим разложением* решения (7.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Если условия теорем 1, 2, 3 не выполнены, то применять формулы (1.8) — (1.10), вообще говоря, нельзя. Так обстоит дело, например, в случае, когда рассматриваемая система (7.1) имеет вид (3.1), т. е. когда правая часть системы зависит от малого параметра ε *сингулярным* образом. Произвольное решение такой системы при малых значениях $\varepsilon > 0$ уже не может быть аппроксимировано частичными суммами ряда по целым положительным степеням параметра.

В подобных ситуациях пытаются вместо полинома по ε эффективно (т. е. без интегрирования системы (7.1) при $\varepsilon > 0$) построить функцию более общего вида, дающую

приближенное выражение для решения (7.2) с отбрасыванием величин того или иного порядка малости относительно ε при $\varepsilon \rightarrow 0$. Эта функция называется *асимптотическим приближением* решения (7.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ с указанной степенью точности. Вместо степенного ряда стремятся получить ряд по некоторым функциям ε , отрезки которого служат асимптотическими приближениями решения (7.2) все более и более высокого порядка. Такой ряд называют *асимптотическим разложением* решения (7.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Процедуру возникновения асимптотических приближений и асимптотического разложения решения (7.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ в общем случае можно пояснить следующим образом. Прежде всего поставим вопрос: имеет ли решение (7.2) определенный предел при $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. существует ли такая функция $x = \varphi_0(t)$, $t_0 \leq t \leq T$, что оно представимо в виде

$$\varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0(t) + \Delta_1 \varphi(t, \varepsilon), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (7.6)$$

где функция $\Delta_1 \varphi(t, \varepsilon)$ стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно на отрезке $t_0 \leq t \leq T$? Если представление (7.6) возможно, то пишут:

$$\varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0(t) + o(1), \quad t_0 \leq t \leq T; \quad (7.7)$$

функция $x = \varphi_0(t)$ называется *нулевым приближением* решения (7.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Затем естественно выяснить, с какой скоростью $\Delta_1 \varphi(t, \varepsilon)$ стремится к нулю, т. е. определить порядок величины функции $\Delta_1 \varphi(t, \varepsilon)$ по сравнению с ε при $\varepsilon \rightarrow 0$. Например, может оказаться, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ эта функция стремится к нулю как $\varepsilon^{2/3}$ равномерно на отрезке $t_0 \leq t \leq T$. Тогда представление (7.6) записывают в форме

$$\varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0(t) + O(\varepsilon^{2/3}), \quad t_0 \leq t \leq T.$$

Точный смысл этого равенства следующий (ср. с (7.5)): существуют такое число $\varepsilon_0 > 0$ и такая константа $M > 0$, что для любого ε , $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, на всем отрезке $t_0 \leq t \leq T$ справедливо неравенство

$$\|\varphi(t, \varepsilon) - \varphi_0(t)\| \leq M\varepsilon^{2/3}.$$

Если удастся выделить главный член функции $\Delta_1 \varphi(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. записать ее в виде

$$\Delta_1 \varphi(t, \varepsilon) = \varepsilon^{2/3} \varphi_1(t) + \Delta_2 \varphi(t, \varepsilon), \quad t_0 \leq t \leq T,$$

где функция $\Delta_2\varphi(t, \varepsilon)$ стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ уже быстрее, чем $\varepsilon^{2/3}$, то из (7.6) получаем:

$$\varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0(t) + \varepsilon^{2/3}\varphi_1(t) + \Delta_2\varphi(t, \varepsilon), \quad t_0 \leq t \leq T,$$

или, что то же самое,

$$\varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0(t) + \varepsilon^{2/3}\varphi_1(t) + o(\varepsilon^{2/3}), \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (7.8)$$

Точный смысл этого равенства следующий: существуют такое число $\varepsilon_0 > 0$ и такая функция $\omega(\varepsilon)$, стремящаяся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, что для любого ε , $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, на всем отрезке $t_0 \leq t \leq T$ справедливо неравенство

$$\|\varphi(t, \varepsilon) - \varphi_0(t) - \varepsilon^{2/3}\varphi_1(t)\| \leq \varepsilon^{2/3}\omega(\varepsilon).$$

Может оказаться, что функция $\Delta_2\varphi(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к нулю, скажем, как $\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$; тогда представление (7.8) удается уточнить:

$$\varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0(t) + \varepsilon^{2/3}\varphi_1(t) + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad t_0 \leq t \leq T.$$

Выделяя главный член функции $\Delta_2\varphi(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, найдем приближение более высокого порядка:

$$\begin{aligned} \varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0(t) + \varepsilon^{2/3}\varphi_1(t) + \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} \varphi_2(t) + \\ + o\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad t_0 \leq t \leq T; \end{aligned}$$

если затем уточнить порядок остаточного члена в этой формуле, то получится представление типа

$$\begin{aligned} \varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0(t) + \varepsilon^{2/3}\varphi_1(t) + \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} \varphi_2(t) + O(\varepsilon), \\ t_0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

и т. д. Неограниченно продолжая, если возможно, описанный процесс, придем к асимптотическому разложению решения (7.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$, например:

$$\begin{aligned} \varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0(t) + \varepsilon^{2/3}\varphi_1(t) + \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} \varphi_2(t) + \varepsilon\varphi_3(t) + \\ + \varepsilon^{4/3}\varphi_4(t) + \varepsilon^{5/3}\varphi_5(t) + \varepsilon^2 \ln \frac{1}{\varepsilon} \varphi_6(t) + \varepsilon^2\varphi_7(t) + \dots, \\ t_0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что в общем случае этот асимптотический ряд не обязан быть сходящимся (ср. с (1.10)).

Конечно, мы изложили сейчас лишь основные моменты простейшей схемы образования асимптотических приближений; в конкретных случаях возникают те или иные модификации и усложнения. Так, может оказаться, что представление (7.6) невозможно, но имеет место равенство

$$\varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0(t, \varepsilon) + \Delta_1 \varphi(t, \varepsilon), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (7.9)$$

где функция $\varphi_0(t, \varepsilon)$ эффективно вычисляется, а функция $\Delta_1 \varphi(t, \varepsilon)$ стремится к нулю вместе с ε равномерно на отрезке $t_0 \leq t \leq T$. В таком случае представляет интерес выделение главного члена функции $\Delta_1 \varphi(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Если, скажем,

$$\Delta_1 \varphi(t, \varepsilon) = \varepsilon^{2/3} \varphi_1(t, \varepsilon) + \Delta_2 \varphi(t, \varepsilon), \quad t_0 \leq t \leq T,$$

где $\Delta_2 \varphi(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к нулю уже быстрее, чем $\varepsilon^{2/3} \varphi_1(t, \varepsilon)$, то из (7.9) получаем

$$\varphi(t, \varepsilon) = \varphi_0(t, \varepsilon) + \varepsilon^{2/3} \varphi_1(t, \varepsilon) + \Delta_2 \varphi(t, \varepsilon), \quad t_0 \leq t \leq T,$$

и т. д. Отдельно требуется на каждом шаге проводить оценку порядка малости остаточного члена.

Весьма типичной является ситуация, когда для решения (7.2) на разных участках интересующего нас отрезка $t_0 \leq t \leq T$ справедливы асимптотические разложения различной структуры, и потому сразу на всем отрезке $t_0 \leq t \leq T$ асимптотическое разложение решения (7.2) получить не удастся. Тогда на каждом участке строится свое асимптотическое приближение решения (7.2), причем с таким расчетом, чтобы в точках стыка смежных участков эти приближения согласовывались и в совокупности давали асимптотическое приближение решения (7.2) с требуемой степенью точности.

Отметим, что для разных компонент рассматриваемого решения (7.2) символ $o(1)$ в формуле (7.7) может означать функции, стремящиеся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ с разной скоростью. Тогда разные компоненты решения (7.2) имеют асимптотические приближения различной структуры.

§ 8. Обзор основных результатов

Опишем кратко содержание последующих глав настоящей книги и укажем на некоторые другие результаты, относящиеся к сформулированным в §§ 4, 5 задачам. Предварительно отметим, что физические и математи-

ческие основы теории релаксационных колебаний, а также многочисленные конкретные примеры колебательных систем такого типа можно найти, в частности, в монографиях [3], [7], [25], [30], [55], [63].

Глава II посвящена подробному изучению системы второго порядка (4.1). Нашей целью является получение асимптотических формул, дающих приближение траекторий этой системы с произвольной степенью точности по ε при $\varepsilon \rightarrow 0$. Оказывается, что траекторию системы (4.1), выделяемую некоторым начальным условием, можно специальным образом разбить на несколько участков и на каждом участке построить свое асимптотическое представление с произвольной степенью точности; при этом в пограничных точках участков асимптотические приближения сшиваются. Существенно подчеркнуть, что асимптотические разложения траектории на одних ее участках осуществляются по целым неотрицательным степеням ε , а на других — по величинам $\varepsilon^{n/3} \ln^{\nu}(1/\varepsilon)$, где n и ν — неотрицательные целые числа. Коэффициенты всех этих разложений рекуррентно определяются без интегрирования системы (4.1), т. е. непосредственно по функциям $f(x, y)$ и $g(x, y)$.

В главе III выясняются условия существования у системы (4.1) устойчивого периодического решения, имеющего характер релаксационного колебания; эти условия формулируются в терминах функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$. Результаты главы II позволяют провести асимптотическое вычисление с любой степенью точности предельного цикла $\mathfrak{Z}_{\varepsilon}$ системы (4.1), отвечающего релаксационному колебанию. Существенный интерес представляет вычисление одной из важнейших характеристик релаксационного колебания — его периода. Оказывается, что для периода T_{ε} цикла $\mathfrak{Z}_{\varepsilon}$ справедливо асимптотическое разложение

$$T_{\varepsilon} = K_{0,0} + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} K_{n,\nu} \ln^{\nu} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right),$$

где $\pi(n)$ — целочисленная функция, определенная для целых неотрицательных значений аргумента:

$$\pi(n) = \begin{cases} k, & \text{если } n = 3k, \\ k+1, & \text{если } n = 3k+1, \\ k, & \text{если } n = 3k+2, \end{cases}$$

а $K_{\lambda, \nu}$ — коэффициенты, эффективно определяемые без интегрирования системы (4.1). В качестве примера рассматривается задача построения асимптотического приближения для периода релаксационного колебания в системе, описываемой уравнением Ван-дер-Поля (3.6), (3.8).

Результаты глав II, III получаются на основе развития идей Л. С. Понтрягина [44], [43] применительно к системам второго порядка и представляют собой завершение исследований [35], [50]; см. также [37], [52]. Подробное изложение этих результатов публикуется впервые; некоторые дальнейшие обобщения можно найти в [48], [51]. Из работ, посвященных асимптотической теории релаксационных колебаний в системах второго порядка, упомянем [9], [19], [22], [26], [28], [59], [61], [62]. Отметим, что асимптотическое вычисление предельного цикла уравнения Ван-дер-Поля было проведено А. А. Дородницыным [18] (см. также [7]), который, в частности, получил первые четыре члена разложения для периода релаксационного колебания.

Свойства решений многомерной системы (5.1) существенно зависят от того, каковы стационарные решения системы уравнений быстрых движений (5.6). Более простое исследование проводится в предположении, что система (5.6) при любом значении y своими стационарными решениями имеет лишь положения равновесия. Именно этот случай рассматривается в главе IV, где получены асимптотические формулы, дающие приближение траекторий системы (5.1) с точностью до величин порядка малости ϵ при $\epsilon \rightarrow 0$. Подчеркнем, что для определения коэффициентов построенных асимптотических представлений требуется интегрировать лишь вырожденную систему (5.2). Задача нахождения приближений траекторий системы (5.1) с произвольной степенью точности по ϵ до настоящего времени не решена.

Среди решений многомерной системы (5.1) возможны и периодические решения, имеющие характер релаксационного колебания. Глава V посвящена выяснению достаточных условий существования у системы (5.1) по крайней мере одной замкнутой траектории, отвечающей релаксационному колебанию; эти условия формулируются в терминах вырожденной системы (5.2). С использованием результатов главы IV выводится асимптотическая фор-

мула для периода релаксационного колебания с учетом величин порядка малости $\varepsilon^{2/3}$ и $\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$ и с пренебрежением величинами порядка малости ε . Асимптотическое разложение для периода релаксационного колебания в многомерном случае до сих пор не известно.

В главах IV, V воспроизводится с некоторыми дополнениями содержание основанных на идеях Л. С. Понтрягина [44] исследований [38], [43], [34]; см. также [37], [39], [40]. В монографической литературе материал этих исследований освещается впервые; их результаты были описаны в [36], [41], [42]. Отметим, что в главах IV, V существенно используются методы и результаты А. Н. Тихонова [56], [57] и А. Б. Васильевой [12], [13]; см. также [14]. Из работ, посвященных асимптотической теории релаксационных колебаний в многомерных системах, упомянем [29], [53].

Если предположение о том, что при каждом значении y система (5.6) имеет своими стационарными решениями только положения равновесия, не выполняется, то возникают многочисленные интересные и трудные задачи. Их рассмотрение осталось вне рамок настоящей книги, и мы ограничимся лишь тем, что перечислим несколько таких задач и укажем на некоторые результаты. Более подробную библиографию можно найти в [8].

Большой интерес представляет случай, когда каждое решение системы уравнений быстрых движений (5.6) при $t \rightarrow \infty$ стремится к экспоненциально устойчивому периодическому решению. Опишем в общих чертах движение фазовой точки системы (5.1) в этом случае.

Сделав замену $t = \varepsilon\theta$, представим систему (5.6) в виде

$$\frac{dx}{d\theta} = f(x, y)$$

(y — параметр) и обозначим ее периодическое решение $L(y)$ через $x = \varphi(\theta, y)$, а его период — через $T(y)$. Далее, введем в рассмотрение осредненную систему

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{g}(\bar{y}), \quad \bar{g}(\bar{y}) = \frac{1}{T(\bar{y})} \int_0^{T(\bar{y})} g(\varphi(\theta, \bar{y}), \bar{y}) d\theta.$$

Если начальная точка $Q_0(x_1, y_1)$ находится на конечном расстоянии от цикла $L(y_1)$, то фазовая точка системы (5.1)

быстро (за время порядка ε) приблизится к нему. Затем медленная переменная $y(t, \varepsilon)$ будет близка к осредненному решению $\bar{y}(t)$, а быстрая переменная $x(t, \varepsilon)$ будет оставаться вблизи циклов $L(\bar{y}(t))$, совершая при этом быстрые колебания вдоль них с периодом по t , близким к $\varepsilon T(\bar{y}(t))$. Здесь существенно разная ситуация возникает в зависимости от того, имеет осредненная система своим стационарным решением устойчивое положение равновесия или периодическое решение.

Точные формулировки результатов исследования движения фазовой точки системы (5.1) в рассматриваемом случае приведены в [44], [46], [47], [49]. Отметим, что исследование этой и аналогичных задач тесно связано с методами, развитыми Н. Н. Боголюбовым и Ю. А. Митропольским (см., например, [7], [27], [32], [33], [15]).

Изучались и различные другие ситуации, которые могут возникнуть в системе уравнений быстрых движений: система быстрых движений гамильтонова или имеет первые интегралы (см. [31], [4]); система быстрых движений имеет вырожденное положение равновесия или вырожденный предельный цикл (см. [6]); система быстрых движений двумерна и имеет неустойчивый предельный цикл, причем лежащая внутри цикла часть плоскости есть область притяжения устойчивого фокуса (см. [64]) и т. д. Однако во всех этих случаях общая картина поведения траекторий системы (5.1) в полной мере еще не выяснена.

Наконец, система (5.1) рассматривалась в предположении, что вырожденная система (5.2) имеет замкнутую траекторию L , целиком лежащую в устойчивой области Γ_- поверхности Γ . Оказалось, что тогда при определенных условиях система (5.1) имеет периодическое решение, траектория которого близка к кривой L (см. [60], [5]).

Системы второго порядка. Асимптотическое вычисление решений

Изучение целого ряда реальных объектов с одной степенью свободы приводит к нормальным автономным системам обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, содержащим малый параметр при одной из производных. Для таких систем удастся наиболее полно ответить на поставленные в главе I вопросы о зависимости решений от параметра.

В настоящей главе построено асимптотическое разложение фазовых траекторий системы второго порядка с малым параметром при производной. Полученные формулы позволяют приближенно вычислять любой конечный участок траектории с произвольной степенью точности.

§ 1. Основные предположения и определения

Будем изучать фазовые траектории системы

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \quad (1.1)$$

где x и y — скалярные функции независимой переменной t , а ε — малый положительный параметр. Правые части системы (1.1) будем считать определенными во всей фазовой плоскости (x, y) и достаточно гладкими, т. е. дифференцируемыми по совокупности переменных x и y столько раз, сколько это потребуется в ходе рассуждений.

Системе (1.1), которую мы будем называть *невырожденной*, поставим в соответствие *вырожденную* систему, получающуюся из (1.1), если положить параметр ε равным нулю:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ \dot{y} = g(x, y). \end{cases} \quad (1.2)$$

В дальнейшем существенную роль играет кривая Γ , выделяемая в плоскости (x, y) первым из уравнений системы (1.2):

$$f(x, y) = 0. \quad (1.3)$$

Сделаем несколько предположений о геометрических свойствах этой кривой, а также условимся о терминологии.

Будем считать, что кривая Γ (вообще говоря, не обязательно связанная) состоит только из *обыкновенных* точек, т. е. в каждой точке кривой (1.3) выполняется неравенство

$$[f'_x(x, y)]^2 + [f'_y(x, y)]^2 > 0. \quad (1.4)$$

Точки кривой Γ , для которых справедливо равенство

$$f'_x(x, y) = 0, \quad (1.5)$$

назовем *нерегулярными*, а остальные ее точки — *регулярными*. Мы будем предполагать, что нерегулярные точки

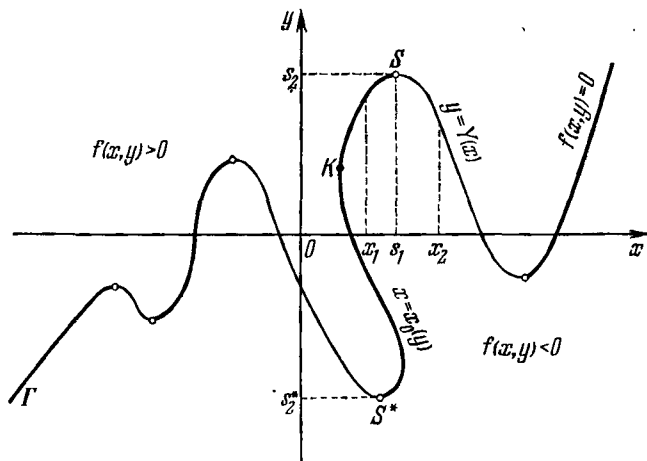


Рис. 25.

расположены на кривой Γ изолированно (хотя, возможно, в бесконечном числе, если кривая Γ неограничена) и что все они являются *невырожденными* в том смысле, что в каждой из них выполняется условие

$$f''_x(x, y) \neq 0. \quad (1.6)$$

Участки кривой Γ , состоящие только из регулярных точек, назовем *регулярными участками*. Например, на рис. 25 изображена кривая Γ , имеющая шесть нерегулярных точек; они разбивают Γ на семь регулярных участков.

Рассмотрим какой-нибудь регулярный участок кривой Γ между нерегулярными точками $S^*(s_1^*, s_2^*)$, $S(s_1, s_2)$. Поскольку вдоль него производная $f'_x(x, y)$ не обра-

щается в нуль, то (по теореме о неявной функции) соотношение (1.3) можно однозначно разрешить относительно x и записать уравнение этого участка в явном виде

$$x = x_0(y), \quad (1.7)$$

где аргумент y пробегает интервал между значениями s_2^* и s_2 (см. рис. 25; возможны случаи $s_2^* = -\infty$, $s_2 = \infty$). Тогда

$$f(x_0(y), y) \equiv 0 \quad (1.8)$$

на интервале изменения y между s_2^* и s_2 . Дифференцируя это тождество, найдем производную функции (1.7):

$$x'_0(y) = -\frac{f'_y(x_0(y), y)}{f'_x(x_0(y), y)}, \quad (1.9)$$

определяющую касательную к кривой Γ в точках регулярного участка. Заметим, что на регулярном участке могут быть точки (например, точка K на рис. 25), в которых касательная параллельна оси Oy ; в таких точках $f'_y(x, y) = 0$.

Рассмотрим какую-нибудь нерегулярную точку $S(s_1, s_2)$. В окрестности этой точки соотношение (1.3) нельзя однозначно разрешить относительно x , так как $f'_x(S) = 0$, $f'_y(S) \neq 0$ (см. (1.5), (1.6)). Иначе говоря, нерегулярная точка является точкой локального экстремума кривой Γ . Однако в силу условия (1.4) имеем $f'_y(S) \neq 0$ и потому производная $f'_y(x, y)$ не обращается в нуль в окрестности точки S . Следовательно, уравнение (1.3) кривой Γ в некоторой окрестности точки S можно записать в явном виде (см. рис. 25)

$$y = Y(x), \quad x_1 \leq x \leq x_2, \quad s_1 \in (x_1, x_2). \quad (1.10)$$

Тогда $Y(s_1) = s_2$ и

$$f(x, Y(x)) \equiv 0, \quad x_1 \leq x \leq x_2. \quad (1.11)$$

Дифференцируя дважды это тождество и учитывая соотношения (1.5), (1.6), получим

$$Y'(s_1) = 0, \quad Y''(s_1) = -\frac{f''_x(S)}{f'_y(S)} \neq 0. \quad (1.12)$$

Таким образом, функция (1.10) по формуле Тейлора

может быть представлена в виде

$$y = s_2 - \frac{f_x''(S)}{2f_y'(S)}(x-s_1)^2 + \frac{Y'''(s_1 + \vartheta(x-s_1))}{6}(x-s_1)^3, \quad (1.13)$$

где $\vartheta \in [0, 1]$ — константа, а $x_1 \leq x \leq x_2$. Отсюда видно, что условие (1.6) невырожденности нерегулярной точки равносильно предположению о том, что в малой окрестности этой точки кривая Γ ведет себя, грубо говоря, как парабола второй степени в окрестности своей вершины.

Регулярный участок (1.7) между нерегулярными точками S^* и S кривой Γ назовем *устойчивым участком*, если при всех значениях y между s_2^* и s_2 выполнено неравенство

$$f_x'(x_0(y), y) < 0. \quad (1.14)$$

Так как вдоль нерегулярного участка производная $f_x'(x, y)$ не обращается в нуль, то функция (1.7) является некрратным корнем уравнения (1.3), а потому функция $f(x, y)$ по разные стороны кривой Γ имеет противоположные знаки. Неравенство (1.14) означает, что функция $f(x, y)$ при переходе через график устойчивого участка кривой Γ в направлении возрастания координаты x меняет знак с плюса на минус. Регулярный участок (1.7), вдоль которого выполняется неравенство $f_x'(x_0(y), y) > 0$, назовем *неустойчивым участком*. На рис. 25 устойчивые участки кривой Γ выделены более жирно.

Непосредственный анализ поля фазовых скоростей невырожденной системы (1.1) показывает (ср. с гл. I, § 4), что если регулярный участок кривой Γ устойчив, то в его окрестности все векторы поля направлены к графику этого участка, а если неустойчив — то от него (см. рис. 7). Из предположения о невырожденности нерегулярных точек следует, что каждая такая точка является общей границей устойчивого и неустойчивого участков, которые примыкают к ней с разных сторон, подобно тому как две ветви параболы второй степени примыкают к ее вершине (см. рис. 11).

Впредь мы будем считать, что на устойчивых участках нет положений равновесия системы (1.1), а также, что ни одна из нерегулярных точек не является положением равновесия этой системы. Другими словами, предполагается, что в каждой точке любого устойчивого участка

и в каждой нерегулярной точке кривой Γ выполнено условие $g(x, y) \neq 0$.

Нерегулярную точку S кривой Γ назовем *точкой срыва*, если в точке S имеет место равенство

$$\text{sign} [f'_x(S) f'_y(S) g(S)] = 1. \quad (1.15)$$

Из этого соотношения и представления (1.13) следует,

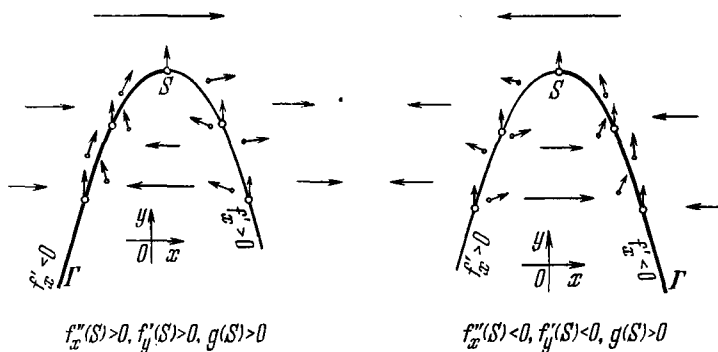


Рис. 26.

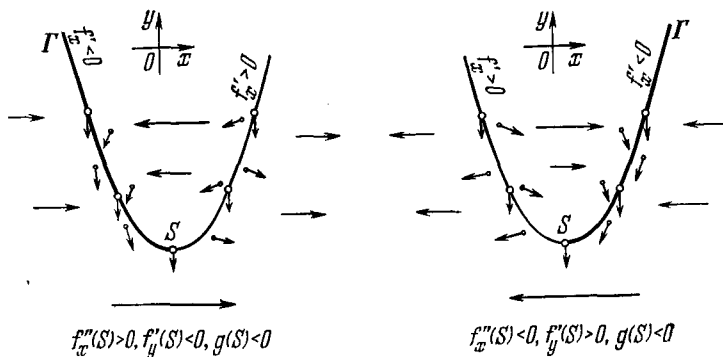


Рис. 27.

что если точка срыва S является точкой локального максимума кривой Γ , то $g(S) > 0$, а если точкой локального минимума, то $g(S) < 0$. Иначе говоря, вблизи точки срыва типа изображенных на рис. 26 векторы фазовой скорости невырожденной системы (1.1) направлены вверх, а вблизи точки срыва типа изображенных на рис. 27 —

вниз. Таким образом, нерегулярная точка является точкой срыва, если в окрестности этой точки векторы фазовой скорости системы (1.1) направлены в сторону выпуклости кривой Γ .

Отметим, что вдоль всего примыкающего к точке срыва S устойчивого участка функция $g(x, y)$ имеет тот же знак, что и в точке S . Если устойчивый участок с обоих концов ограничен нерегулярными точками (т. е. он не уходит в бесконечность), то одна из этих точек есть точка срыва, а другая не является точкой срыва.

Пусть (x^*, y^*) — некоторая точка фазовой плоскости системы (1.1). Мы скажем, что эта точка принадлежит области притяжения устойчивого участка (1.7) между нерегулярными точками S^* и S , если решение $x = x(\theta)$ уравнения

$$\frac{dx}{d\theta} = f(x, y^*) \quad (1.16)$$

с начальным условием $x(0) = x^*$ обладает свойством

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} x(\theta) = x_0(y^*). \quad (1.17)$$

Это значит, что область притяжения устойчивого участка (1.7) состоит из всех таких точек (x^*, y^*) , что y^* принадлежит интервалу оси ординат с концами в точках s_1^* и s_2^* , а при каждом фиксированном y^* в качестве x^* допускаются точки области притяжения асимптотически устойчивого положения равновесия $x = x_0(y^*)$ уравнения (1.16) (рис. 28; область притяжения заштрихована). Уравнение (1.16), в котором y^* рассматривается как параметр, называют *уравнением быстрых движений*, соответствующим системе (1.1); оно получается из первого уравнения системы (1.1) переходом к *быстрому времени* $\theta = t/\varepsilon$.

Если точка (x^*, y^*) принадлежит области притяжения устойчивого участка (1.7), то точку $P^*(x_0(y^*), y^*)$ пересечения прямой $y = y^*$ с графиком этого участка назовем *точкой падения* из точки (x^*, y^*) (см. рис. 28).

Наконец, будем предполагать, что среди нерегулярных точек кривой Γ никакие две не имеют одинаковых ординат. Пусть $\tilde{S}(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)$ — точка срыва, удовлетворяющая такому условию: она принадлежит границе области притяжения некоторого устойчивого участка (1.7), но отлична от его концевых точек S^* и S (см. рис. 28). Это озна-

чает, что \tilde{s}_2 принадлежит интервалу между точками s_2^* и s_2 , а неустойчивый ус, выходящий из полуустойчивого положения равновесия $x = \tilde{s}_1$ уравнения (1.16) при значении параметра $y^* = \tilde{s}_2$, обладает свойством (1.17). Тогда *точкой падения, следующей за точкой срыва \tilde{S}_1* назовем

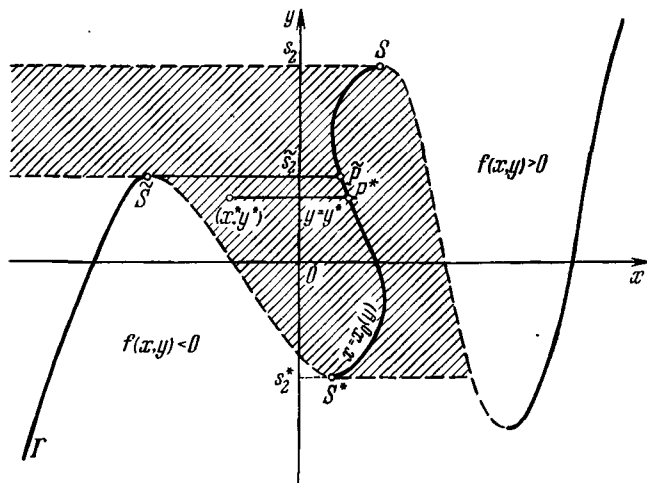


Рис. 28.

точку $\tilde{P}(x_0(\tilde{s}_2), \tilde{s}_2)$ пересечения прямой $y = \tilde{s}_2$ с графиком устойчивого участка (1.7). В случае, если точка срыва \tilde{S} не удовлетворяет сформулированному условию, точка падения, следующая за этой точкой срыва, не определяется.

§ 2. Нулевое приближение

Для системы (1.2) можно ввести понятие *разрывного решения* (см. гл. I, § 6); тогда под фазовыми траекториями этой системы естественно понимать траектории ее разрывных решений. Однако, как легко убедиться, фазовый портрет системы (1.2) допускает и непосредственное описание. Именно, *фазовой траекторией вырожденной системы (1.2) с начальной точкой Q* мы назовем непрерывную кривую \mathfrak{Z} в плоскости (x, y) , которая получается последовательно по такому правилу:

1. Если точка Q не лежит на кривой Γ и не принадлежит области притяжения какого-либо из устойчивых участков этой кривой, то траектория \mathfrak{Z} представляет собой параллельный оси Ox луч, выходящий из точки Q и имеющий направление вектора $(f(Q), 0)$. Фазовая точка системы (1.2) мгновенно уходит по этому лучу в бесконечность.

2. Если точка Q не лежит на кривой Γ и принадлежит области притяжения некоторого устойчивого участка этой кривой, то траектория \mathfrak{Z} своим первым звеном имеет параллельный оси Ox отрезок от точки Q до точки падения из точки Q на кривую Γ . Фазовая точка системы (1.2) проходит этот отрезок мгновенно.

3. Если точка Q принадлежит некоторому устойчивому участку кривой Γ и граница этого участка содержит точку срыва, то траектория \mathfrak{Z} своим первым звеном имеет дугу кривой Γ от точки Q до точки срыва. Фазовая точка системы (1.2) проходит эту дугу за вполне определенное конечное время. Такую дугу кривой Γ назовем *участком медленного движения* траектории \mathfrak{Z} .

4. Если точка Q принадлежит некоторому устойчивому участку кривой Γ и граница этого участка не содержит точки срыва, то траектория \mathfrak{Z} представляет собой дугу кривой Γ от точки Q до бесконечности.

5. Если точка Q является точкой срыва кривой Γ и следующая за этой точкой срыва точка падения существует, то траектория \mathfrak{Z} своим первым звеном имеет параллельный оси Ox отрезок от точки Q до точки падения. Фазовая точка системы (1.2) проходит этот отрезок мгновенно. Такой отрезок назовем *участком быстрого движения* траектории \mathfrak{Z} .

6. Если точка Q является точкой срыва кривой Γ и следующей за этой точкой срыва точки падения нет, то траектория \mathfrak{Z} представляет собой параллельный оси Ox луч, выходящий из точки Q и имеющий направление вектора $(f_x^*(Q), 0)$.

На рис. 29 изображены фазовые траектории системы (1.2), построенные по указанному правилу. Фазовые траектории вырожденной системы, начинающиеся в точках неустойчивых участков кривой Γ или в нерегулярных точках этой кривой, отличных от точек срыва, мы определять не будем. Подчеркнем, что фазовая траектория

системы (1.2) эффективно вычисляется, если только известны функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ и указана начальная точка.

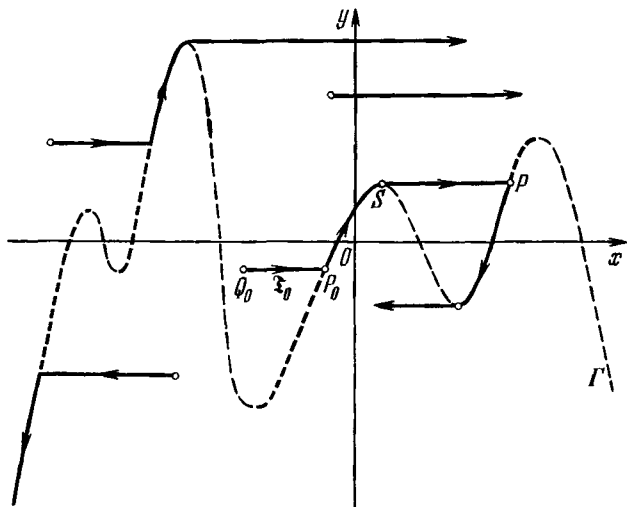


Рис. 29.

Пусть теперь $Q_0(x_0, y_0)$ — некоторая фиксированная точка фазовой плоскости (x, y) , не лежащая на неустойчивых участках кривой Γ и отличная от нерегулярных точек этой кривой. Обозначим через

$$x = x(t, \varepsilon), \quad y = y(t, \varepsilon) \quad (2.1)$$

решение невырожденной системы (1.1), удовлетворяющее начальному условию

$$x|_{t=t_0} = x_0, \quad y|_{t=t_0} = y_0, \quad (2.2)$$

и пусть \mathfrak{X}_ε — фазовая траектория в плоскости (x, y) , отвечающая решению (2.1). Последующие параграфы этой главы посвящены построению асимптотических приближений траектории \mathfrak{X}_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Построим фазовую траекторию \mathfrak{X}_0 вырожденной системы (1.2), начинающуюся в той же точке Q_0 (см. рис. 29). В предположениях, перечисленных в § 1, легко провести эвристический анализ (см. гл. I, § 4) движения фазовой точки невырожденной системы (1.1) в плоскости (x, y) .

Такой анализ показывает, что в произвольной ограниченной части фазовой плоскости при достаточно малых ε траектория \mathfrak{L}_ε проходит всюду вблизи траектории \mathfrak{L}_0 . Для доказательства этого факта достаточно указать такую окрестность траектории \mathfrak{L}_0 малой, но конечной (т. е. не зависящей от ε) ширины, что векторы фазовой скорости системы (1.1) при достаточно малых ε во всех

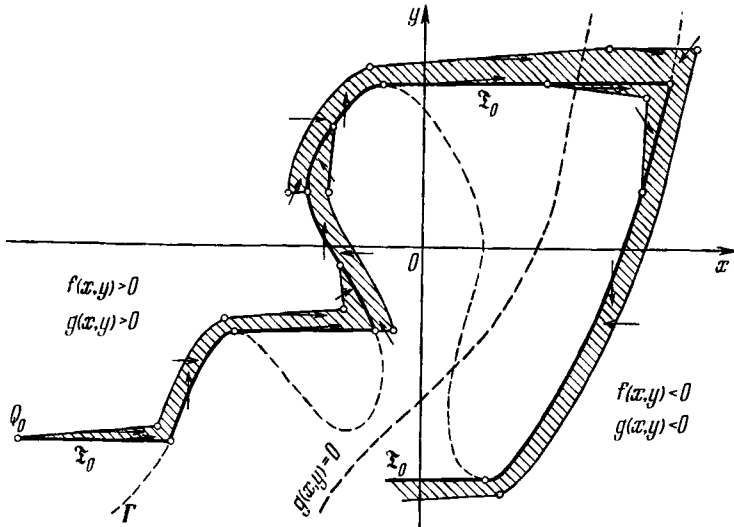


Рис. 30.

точках границы направлены внутрь окрестности. Способ построения искомой окрестности, очевидным образом использующий конкретные свойства вектора фазовой скорости невырожденной системы, ясен из примера, представленного на рис. 30.

Справедливо и более сильное утверждение: в произвольной ограниченной части фазовой плоскости кривая \mathfrak{L}_0 служит нулевым асимптотическим приближением траектории \mathfrak{L}_ε , т. е. $\mathfrak{L}_\varepsilon \rightarrow \mathfrak{L}_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно на любом отрезке траектории \mathfrak{L}_0 конечной длины. В этом можно убедиться, если, используя ряд простых оценок, провести несколько более тонкое построение окрестности траектории \mathfrak{L}_0 — так, чтобы окрестность стягивалась к кривой \mathfrak{L}_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$ (см. [19], [3]). Однако мы не будем приводить

здесь подробное доказательство, поскольку ниже, при вычислении асимптотических приближений траектории \mathfrak{L}_ε , сформулированный результат получится автоматически.

Из анализа структуры вектора фазовой скорости невырожденной системы естественно заключить (см. гл. I, § 4), что фазовая точка системы (1.1) проходит участки траектории \mathfrak{L}_ε , расположенные вдали от кривой Γ , существенно быстрее, чем участки траектории \mathfrak{L}_ε , расположенные вблизи кривой Γ . Поэтому траекторию \mathfrak{L}_ε мы разобьем на участки следующих четырех типов (см. рис. 30):

а) *участок медленного движения*, лежащий вблизи участка медленного движения траектории \mathfrak{L}_0 , вне конечных окрестностей точки падения и точки срыва;

б) *участок срыва*, лежащий в конечной окрестности точки срыва траектории \mathfrak{L}_0 ;

в) *участок быстрого движения*, лежащий вблизи участка быстрого движения траектории \mathfrak{L}_0 , вне конечных окрестностей точки срыва и точки падения;

г) *участок падения*, лежащий в конечной окрестности точки падения траектории \mathfrak{L}_0 .

Задача построения асимптотических приближений отрезка траектории \mathfrak{L}_ε любой конечной длины, очевидно, сводится к таким же задачам для каждого из указанных участков (отдельно нужно рассмотреть еще *начальный участок быстрого движения*, исходящий из начальной точки, и следующий за ним *начальный участок падения*). Эти задачи решаются в следующих параграфах. В результате мы получим формулы, позволяющие вычислять отрезок кривой \mathfrak{L}_ε произвольной конечной длины с точностью до величин наперед заданного порядка малости относительно ε . Уходящий в бесконечность участок траектории \mathfrak{L}_ε изучаться не будет.

§ 3. Асимптотические приближения траектории на участке медленного движения

Рассмотрим некоторый участок медленного движения $\bar{P}S$ траектории \mathfrak{L}_0 , лежащий на устойчивом участке (1.7) кривой Γ (рис. 31). Здесь $\bar{P}(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2)$ — точка падения траектории \mathfrak{L}_0 , а $S(s_1, s_2)$ — точка срыва, являющаяся граничной точкой устойчивого участка (1.7). Вторую грани-

ную точку этого участка обозначим $S^*(s_1^*, s_2^*)$ (случай $s_2^* = \pm \infty$ не исключается). Тогда, очевидно, выполнено соотношение

$$s_2^* \operatorname{sign} g(S) < \tilde{p}_2 \operatorname{sign} g(S) < s_2 \operatorname{sign} g(S).$$

На дуге $\tilde{P}S$ возьмем точку $R(r_1, r_2)$, отстоящую на малое конечное расстояние от точки срыва S , и точку

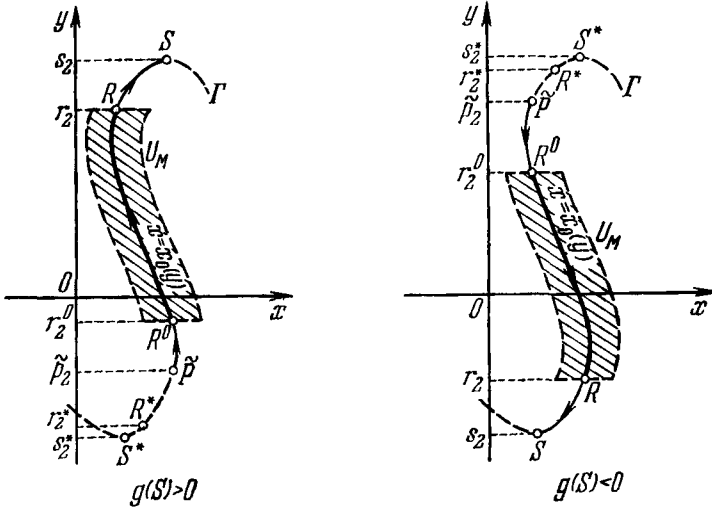


Рис. 31.

$R^0(r_1^0, r_2^0)$, отстоящую на малое конечное расстояние от точки падения \tilde{P} . Уравнение участка R^0R траектории \mathfrak{X}_0 можно записать в виде

$$x = x_0(y), \quad r_2^0 \operatorname{sign} g(S) \leq y \operatorname{sign} g(S) \leq r_2 \operatorname{sign} g(S). \quad (3.1)$$

Пусть, далее, $R^*(r_1^*, r_2^*)$ — точка участка S^*S , отстоящая на малое конечное расстояние от нерегулярной точки S^* . В силу устойчивости участка (1.7) вдоль дуги R^*R (и тем более — вдоль кривой (3.1)) справедлива оценка

$$f'_x(x_0(y), y) \leq -k < 0. \quad (3.2)$$

Так как на устойчивом участке (1.7) нет положений равновесия системы (1.1), то существует такая конечная окрестность U_M кривой (3.1):

$$r_2^0 \operatorname{sign} g(S) \leq y \operatorname{sign} g(S) \leq r_2 \operatorname{sign} g(S), \quad |x - x_0(y)| \leq \delta$$

(см. рис. 31), которая целиком лежит в области притяжения устойчивого участка (1.7) и в каждой точке которой имеет место неравенство *)

$$|g(x, y)| \geq k > 0. \quad (3.3)$$

Так как при достаточно малых ε траектория \mathfrak{T}_ε близка к траектории \mathfrak{T}_0 (см. § 2 и рис. 30), то траектория \mathfrak{T}_ε входит в область U_M через участок $y = r_2^0$ границы и покидает эту область через участок $y = r_1$ границы. Отрезок траектории \mathfrak{T}_ε , лежащий в области U_M , назовем *участком медленного движения*.

В силу неравенства (3.3) вдоль участка медленного движения траектории \mathfrak{T}_ε координата y с течением времени t меняется монотонно. Поэтому уравнение такого участка можно записать не в параметрической форме (2.1), а в виде

$$x = x_\varepsilon(y, \varepsilon), \quad r_2^0 \operatorname{sign} g(S) \leq y \operatorname{sign} g(S) \leq r_1 \operatorname{sign} g(S), \quad (3.4)$$

принимая за независимую переменную координату y . Ясно, что функция (3.4) является решением уравнения

$$\varepsilon \frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \equiv h(x, y) \quad (3.5)$$

с гладкой правой частью, которое эквивалентно системе (1.1). Используя уравнение (3.5), будем искать асимптотическое разложение участка медленного движения (3.4).

Построим формальный степенной ряд

$$x = x_0(y) + \varepsilon x_1(y) + \dots + \varepsilon^n x_n(y) + \dots \quad (3.6)$$

так, чтобы он формально удовлетворял уравнению (3.5) на интервале изменения y между s_2^1 и s_2 . Коэффициенты этого ряда определим следующим образом. Подставим ряд (3.6) в левую и правую части уравнения (3.5) и формально продифференцируем почленно левую часть, а правую часть разложим в ряд по степеням ε . Такое

*) Различные константы, точная величина которых не имеет значения, часто будут обозначаться одинаково.

разложение удобно проводить с помощью формулы

$$F\left(z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n z_n\right) = F(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{k=1}^n \frac{F^{(k)}(z_0)}{k!} \sum_{\substack{t_1 + \dots + t_k = n, \\ i_j \geq 1}} z_{i_1} \dots z_{i_k}, \quad (3.7)$$

которая легко проверяется. Затем приравняем выражения, стоящие слева и справа при одинаковых степенях ε .

В результате указанных операций придем к равенствам

$$\begin{aligned} h(x_0(y), y) &= 0, \\ x'_0(y) &= x_1(y) h'_x(x_0(y), y), \\ x'_{n-1}(y) &= x_n(y) h'_x(x_0(y), y) + \\ &+ \Phi_{n-1}(x_0(y), x_1(y), \dots, x_{n-1}(y)), \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Первое из равенств (3.8) тождественно выполняется, если в качестве $x_0(y)$ взять функцию (1.7) (см. (1.8) и (3.5)). Так как

$$h'_x(x_0(y), y) = \frac{f'_x(x_0(y), y)}{g(x_0(y), y)}, \quad (3.9)$$

и потому $h'_x(x_0(y), y) \neq 0$ в силу (3.2), то остальные равенства (3.8), представляющие собой линейные алгебраические уравнения, однозначно последовательно определяют коэффициенты $x_i(y)$, $i = 1, 2, \dots$:

$$x_1(y) = - \frac{f'_y(x_0(y), y) g(x_0(y), y)}{f'_x(x_0(y), y)} \quad (3.10)$$

(здесь использовано соотношение (1.9));

$$\begin{aligned} x_n(y) &= \frac{1}{f'_x(x_0(y), y)} \left\{ x'_{n-1}(y) g(x_0(y), y) - \right. \\ &- \sum_{v=2}^n \frac{f_x^{(v)}(x_0(y), y)}{v!} \sum_{\substack{t_1 + \dots + t_v = n, \\ i_j \geq 1}} x_{i_1}(y) \dots x_{i_v}(y) + \\ &+ \sum_{\substack{i+k=n-1, \\ i \geq 0, k \geq 1}} x'_i(y) \sum_{v=1}^k \frac{g_x^{(v)}(x_0(y), y)}{v!} \sum_{\substack{t_1 + \dots + t_v = k, \\ i_j \geq 1}} x_{i_1}(y) \dots x_{i_v}(y) \left. \right\}, \\ &n \geq 2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Из полученных формул непосредственно видно, что функции $x_i(y)$, $i=0, 1, 2, \dots$, определены и являются гладкими при изменении y на интервале между s_2^* и s_2 . Подчеркнем, что каждая из этих функций эффективно вычисляется только через значения правых частей системы (1.1) и нескольких их производных на участке S^*S кривой Γ . Конечно, все эти функции можно рассматривать и на любом отрезке изменения y , входящем в интервал между s_2^* и s_2 , например, на отрезке между r_2^0 и r_2 .

В § 4 мы убедимся, что *частичная сумма построенного ряда* (3.6)

$$X_n(y, \varepsilon) = x_0(y) + \varepsilon x_1(y) + \dots + \varepsilon^n x_n(y) \quad (3.12)$$

является при $\varepsilon \rightarrow 0$ *асимптотическим приближением участка медленного движения* (3.4) *траектории* \mathfrak{L}_ε :

$$\begin{aligned} x_{\mathfrak{L}}(y, \varepsilon) &= X_{N-1}(y, \varepsilon) + O(\varepsilon^N), \\ r_2^0 \operatorname{sign} g(S) &\leq y \operatorname{sign} g(S) \leq r_2 \operatorname{sign} g(S), \end{aligned} \quad (3.13)$$

где N — произвольное натуральное число. В частности, отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} x_{\mathfrak{L}}(y, \varepsilon) &= x_0(y) + O(\varepsilon), \\ r_2^0 \operatorname{sign} g(S) &\leq y \operatorname{sign} g(S) \leq r_2 \operatorname{sign} g(S), \end{aligned}$$

т. е. участок (3.1) траектории \mathfrak{L}_0 служит нулевым приближением рассматриваемого участка медленного движения траектории \mathfrak{L}_ε . Приближение более высокого порядка имеет вид (см. 3.10))

$$\begin{aligned} x_{\mathfrak{L}}(y, \varepsilon) &= x_0(y) + \varepsilon \frac{-f'_y(x_0(y), y) g(x_0(y), y)}{f_x^2(x_0(y), y)} + O(\varepsilon^2), \\ r_2^0 \operatorname{sign} g(S) &\leq y \operatorname{sign} g(S) \leq r_2 \operatorname{sign} g(S). \end{aligned} \quad (3.14)$$

§ 4. Доказательство асимптотических представлений участка медленного движения

Установим связь построенных в § 3 функций $X_n(y, \varepsilon)$ с траекториями системы (1.1), т. е. выясним, для отрезков каких траекторий этой системы справедливо асимптотическое представление типа (3.13). Затем будет доказана асимптотическая формула (3.13) для участка медленного движения (3.4) траектории \mathfrak{L}_ε .

Лемма 1. Если точки R^* и R на дуге S^*S фиксированы, то для любого $n=0, 1, 2, \dots$ найдется такая константа $M_n > 0$, что имеет место неравенство

$$\begin{aligned} |x_n(y)| &\leq M_n, \\ r_2^* \operatorname{sign} g(S) &\leq y \operatorname{sign} g(S) \leq r_2 \operatorname{sign} g(S). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Доказательство проводится по индукции. При этом используются формулы (3.10), (3.11), неравенство (3.2) и тот факт, что функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ и их производные ограничены вблизи участка (1.7), вне конечных окрестностей нерегулярных точек S^* и S .

Лемма 2. При достаточно малых ε существует такая константа $C_n > 0$, что производная в силу системы (1.1) положительна в каждой точке кривой

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1^\varepsilon(y, x) &\equiv x - X_n(y, \varepsilon) + C_n \varepsilon^{n+1} = 0, \\ r_2^* \operatorname{sign} g(S) &\leq y \operatorname{sign} g(S) \leq r_2 \operatorname{sign} g(S), \end{aligned} \quad (4.2)$$

и отрицательна в каждой точке кривой

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2^\varepsilon(y, x) &\equiv x - X_n(y, \varepsilon) - C_n \varepsilon^{n+1} = 0, \\ r_2^* \operatorname{sign} g(S) &\leq y \operatorname{sign} g(S) \leq r_2 \operatorname{sign} g(S). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Производная в силу системы (1.1) в произвольной точке кривой (4.2) равна

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathcal{K}_1}{dt} \right|_{(1.1)} &= \left. \frac{dx}{dt} \right|_{(1.1)} - \left. \frac{dX_n(y, \varepsilon)}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} \right|_{(1.1)} = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} g(X_n(y, \varepsilon) - C_n \varepsilon^{n+1}, y) \times \\ &\quad \times \left\{ h(X_n(y, \varepsilon) - C_n \varepsilon^{n+1}, y) - \varepsilon \frac{dX_n(y, \varepsilon)}{dy} \right\}. \end{aligned}$$

Найдем доминирующий член этого выражения при достаточно малых ε , считая, что $r_2^* \operatorname{sign} g(S) \leq y \operatorname{sign} g(S) \leq r_2 \operatorname{sign} g(S)$. Привлекая неравенство (4.1), получаем

$$\begin{aligned} g(X_n(y, \varepsilon) - C_n \varepsilon^{n+1}, y) &= g(x_0(y), y) + O(\varepsilon), \\ h(X_n(y, \varepsilon) - C_n \varepsilon^{n+1}, y) &= h(X_n(y, \varepsilon), y) - \\ &\quad - C_n \varepsilon^{n+1} h'_x(x_0(y), y) + O(\varepsilon^{n+2}), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где оценка остаточных членов при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерна на отрезке изменения y между r_2^* и r_2 . Далее, из самого процесса построения функций $x_i(y)$ (см. (3.8)) и

формулы (3.7) следует

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dX_n(y, \varepsilon)}{dy} &= \\ &= h(X_n(y, \varepsilon), y) + \varepsilon^{n+1} x_{n+1}(y) h'_x(x_0(y), y) + O(\varepsilon^{n+2}). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Равенства (4.4), (4.5) и формула (3.9) позволяют утверждать, что

$$\left. \frac{d\mathcal{K}_1}{dt} \right|_{(1.1)} = -\varepsilon^n \{C_n + x_{n+1}(y)\} f'_x(x_0(y), y) + O(\varepsilon^{n+1}).$$

При достаточно малых ε выписанный в правой части член является доминирующим. Если выбрать константу $C_n > 0$ достаточно большой, то в силу неравенств (4.1) и (3.2) этот член будет строго положительным на всем отрезке изменения y между r_2^* и r_2 . Следовательно, в каждой точке кривой (4.2) можно обеспечить неравенство

$$\left. \frac{d\mathcal{K}_1}{dt} \right|_{(1.1)} \geq k > 0.$$

Аналогично проверяется, что при достаточно малых ε в каждой точке кривой (4.3) можно обеспечить неравенство

$$\left. \frac{d\mathcal{K}_2}{dt} \right|_{(1.1)} \leq -k < 0,$$

выбирая константу $C_n > 0$ достаточно большой.

Пусть $R^0(r_1^0, r_2^0)$ — произвольная внутренняя точка дуги R^*R . Докажем следующее утверждение о возможности асимптотического приближения отрезков траекторий системы (1.1) частичными суммами ряда (3.6).

Теорема I. Пусть (1.7) — устойчивый участок кривой Γ , функция $X_n(y, \varepsilon)$, $n \geq 0$, определена формулой (3.12), а $x = x(y, \varepsilon)$ — решение уравнения (3.5) с начальным значением при $y = r_2^0$, удовлетворяющим для достаточно малых ε условию

$$|x(r_2^0, \varepsilon) - X_n(r_2^0, \varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1}, \quad C > 0. \quad (4.6)$$

Тогда при достаточно малых ε это решение определено на всем отрезке

$$r_2^0 \operatorname{sign} g(S) \leq y \operatorname{sign} g(S) \leq r_2 \operatorname{sign} g(S) \quad , \quad (4.7)$$

и представимо в виде

$$\begin{aligned} x(y, \varepsilon) &= X_n(y, \varepsilon) + \mathfrak{D}_n(y, \varepsilon), \\ r_2^0 \operatorname{sign} g(S) &\leq y \operatorname{sign} g(S) \leq r_2 \operatorname{sign} g(S), \end{aligned} \quad (4.8)$$

причем равномерно на отрезке (4.7)

$$|\partial \xi_n(y, \varepsilon)| < C_n \varepsilon^{n+1}, \quad C_n = \text{const} > 0. \quad (4.9)$$

Эта теорема непосредственно вытекает из леммы 2. В самом деле, рассмотрим полосу π между кривыми (4.2) и (4.3), причем пусть константа $C_n > 0$ столь велика, что утверждение леммы 2 выполнено (рис. 32). Если решение

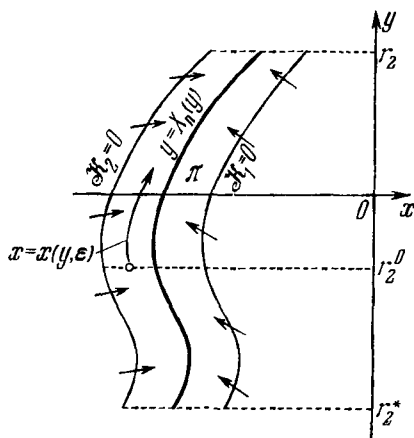


Рис. 32.

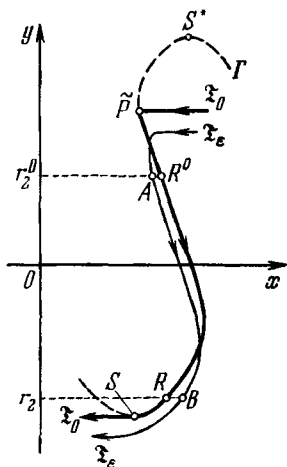


Рис. 33.

$x = x(y, \varepsilon)$ уравнения (3.5) удовлетворяет начальному условию (4.6), то (увеличив, если надо, константу C_n) можно считать, что начальная точка $(x(r_2^0, \varepsilon), r_2^0)$ соответствующей траектории системы (1.1) находится в полосе π . В силу леммы 2 любая траектория системы (1.1), исходящая из произвольной внутренней точки полосы π , не пересекает на кривую $\mathcal{K}_1(y, x) = 0$, ни кривую $\mathcal{K}_2(y, x) = 0$. Кроме того, в полосе π нет положений равновесия системы (1.1). Поэтому функция $x = x(y, \varepsilon)$ определена на всем отрезке (4.7), а ее график лежит внутри полосы π . Но тогда, очевидно, справедливо представление (4.8) и оценка (4.9).

Теорема I устанавливает, для отрезков каких траекторий системы (1.1) справедливо асимптотическое представление (3.13).

Возьмем теперь в качестве $R^0(r_1^0, r_2^0)$ точку дуги $\bar{P}S$, отстоящую на малое конечное расстояние от точки па-

дения \bar{P} , и пусть A — точка пересечения траектории \mathfrak{F}_ε , определенной в § 2, с прямой $y = r_2^0$, лежащая на границе области U_M (рис. 33; ср. с рис. 31). Эта точка — начальная точка участка медленного движения — является одновременно конечной для предшествующего участка падения. Участок падения траектории \mathfrak{F}_ε будет подробно рассмотрен в §§ 19—22. Там мы убедимся, что абсцисса точки A удовлетворяет неравенству (4.6). Другими словами, условие (4.6) для функции (3.4) действительно выполняется при любом целом $n \geq 0$, а потому теорема I применима для получения асимптотических приближений участка медленного движения траектории \mathfrak{F}_ε . Тем самым формула (3.13) доказана.

Очевидно, что формула (3.13) дает возможность приближенно вычислять участок медленного движения траектории \mathfrak{F}_ε с наперед заданной точностью — до величин порядка малости не ниже ε^a , $a > 0$, при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно на всем этом участке.

Теорема II. При достаточно малых ε для участка медленного движения (3.4) траектории \mathfrak{F}_ε справедливо асимптотическое представление

$$x_{\mathfrak{F}}(y, \varepsilon) = X_{]a]}(y, \varepsilon) + O(\varepsilon^a), \\ r_2^0 \operatorname{sign} g(S) \leq y \operatorname{sign} g(S) \leq r_2 \operatorname{sign} g(S),$$

где $a > 0$ — произвольное число, а символ $]a]$ означает наибольшее целое число, строго меньшее числа a^*). Для нахождения функции $X_{]a]}(y, \varepsilon)$ не требуется интегрировать невырожденную систему (1.1).

§ 5. Локальные координаты в окрестности точки срыва

Из формул (3.10), (3.11) видно, что функции $x_i(y)$, $i = 1, 2, \dots$, неограниченно возрастают (по абсолютной величине) при $y \rightarrow s_2$. Поэтому ряд (3.6) уже нельзя рассматривать в качестве асимптотического разложения траектории \mathfrak{F}_ε на всем отрезке изменения переменной y между точками r_2^0 и s_2 . Построение асимптотических приближений участка траектории \mathfrak{F}_ε , лежащего вблизи точки срыва $S(s_1, s_2)$, требует использования рядов иной структуры.

*) Символом $]a]$, как обычно, обозначается наибольшее целое число, не превосходящее числа a .

Для получения асимптотических представлений указанного участка удобно сначала в малой конечной окрестности точки срыва S ввести вместо x и y локальные координаты ξ и η так, чтобы точка срыва стала началом координат, а примыкающая к ней часть кривой Γ превратилась в дугу квадратной параболы. Переход к таким координатам осуществляется следующим образом.

В окрестности точки срыва $S(s_1, s_2)$ уравнение кривой Γ записывается в виде (1.13). Определим функцию

$$y = \varphi(x) \equiv$$

$$= x \sqrt{\left| \frac{f_x''(S)}{2f_y''(S)} \right| - \frac{xY'''(s_1 + \theta x)}{6} \operatorname{sign}[f_x''(S)f_y''(S)]}; \quad (5.1)$$

ясно, что $y = \varphi(x)$ есть действительнозначная в окрестности значения $x=0$ гладкая функция, причем

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = \sqrt{\left| \frac{f_x''(S)}{2f_y''(S)} \right|}. \quad (5.2)$$

Так как $\varphi'(0) > 0$ (см. (1.12)), то $\varphi'(x) > 0$ всюду на некотором отрезке $\tilde{\rho}_{-1} \leq x \leq \tilde{\rho}_{+1}$, где $\tilde{\rho}_{-1} < 0$, $\tilde{\rho}_{+1} > 0$. Поэтому функция $y = \varphi(x)$, $\tilde{\rho}_{-1} \leq x \leq \tilde{\rho}_{+1}$, имеет гладкую обратную функцию, которую мы обозначим $x = \psi(y)$, $-q_* \leq y \leq q^*$. Функцию $x = \psi(y)$ можно считать определенной и на меньшем отрезке — при $|y| \leq q$, где q — малое (во всяком случае, не большее единицы) положительное число, не зависящее от ε ; соответствующий отрезок $\rho_{-1} \leq x \leq \rho_{+1}$ определения функции $y = \varphi(x)$ находится непосредственно.

Рассмотрим малую конечную окрестность U_S точки срыва S :

$$s_1 + \rho_{-1} \leq x \leq s_1 + \rho_{+1}, \quad s_2 - q \leq y \leq s_2 + q;$$

будем предполагать, что в окрестности U_S функции $f_x''(x, y)$, $f_y''(x, y)$, $g(x, y)$ сохраняют знак (этого всегда можно добиться за счет уменьшения числа q). Введем теперь вместо координат x и y новые координаты ξ и η :

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x - s_1) \operatorname{sign} f_x''(S), & \begin{cases} x = s_1 + \psi(\xi \operatorname{sign} f_x''(S)), \\ y = s_2 + \eta \operatorname{sign} g(S). \end{cases} \\ \eta = (y - s_2) \operatorname{sign} g(S); \end{cases} \quad (5.3)$$

Формулы (5.3) устанавливают взаимно однозначное гладкое соответствие между областью U_S плоскости (x, y) и малой конечной окрестностью U_0 начала координат плоскости (ξ, η) :

$$|\xi| \leq q, \quad |\eta| \leq q$$

(рис. 34). Очевидно, что сама точка срыва S соответствует началу координат $\xi = 0, \eta = 0$. Легко проверить, используя

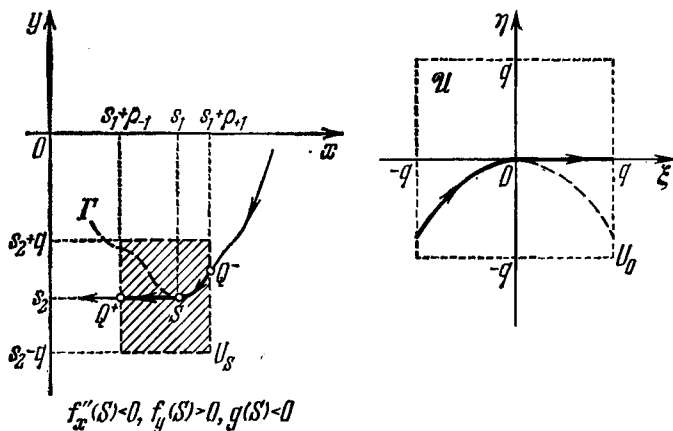


Рис. 34.

равенство (1.15), что участок кривой (1.13), отвечающий отрезку $s_1 + \rho_{-1} \leq x \leq s_1 + \rho_{+1}$ изменения x , в новых координатах превращается в дугу параболы

$$\eta = -\xi^2, \quad -q \leq \xi \leq q, \quad (5.4)$$

а тождество (1.11) принимает вид

$$f(s_1 + \psi(\xi \operatorname{sign} f_x''(S)), s_2 - \xi^2 \operatorname{sign} g(S)) \equiv 0, \quad |\xi| \leq q. \quad (5.5)$$

Исследуя каждый из возможных случаев, представленных на рис. 26, 27, убеждаемся, что примыкающая к точке срыва S часть устойчивого участка кривой Γ в новых координатах превращается в дугу параболы (5.4), соответствующую промежутку $-q \leq \xi < 0$ изменения ξ .

Переписывая невырожденную систему (1.1) в новых координатах, получим

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{\xi} = \frac{\xi^2 + \eta}{\alpha(\xi, \eta)}, \\ \dot{\eta} = \beta(\xi, \eta), \end{cases} \quad (5.6)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \alpha(\xi, \eta) &\equiv \frac{(\xi^2 + \eta) \psi'(\xi \operatorname{sign} f_x''(S)) \operatorname{sign} f_x''(S)}{f(s_1 + \psi(\xi \operatorname{sign} f_x''(S)), s_2 + \eta \operatorname{sign} g(S))}, \\ \beta(\xi, \eta) &\equiv |g(s_1 + \psi(\xi \operatorname{sign} f_x''(S)), s_2 + \eta \operatorname{sign} g(S))|. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Отметим, что функция $\alpha(\xi, \eta)$ определена всюду в области U_0 , в том числе и на кривой (5.4). В самом деле, в силу (5.5)

$$\begin{aligned} f(s_1 + \psi(\xi \operatorname{sign} f_x''(S)), s_2 + \eta \operatorname{sign} g(S)) &= \\ &= (\xi^2 + \eta) f_y'(s_1 + \psi(\xi \operatorname{sign} f_x''(S)), s_2 - \xi^2 \operatorname{sign} g(S) + \\ &\quad + \vartheta(\xi^2 + \eta) \operatorname{sign} g(S)) \operatorname{sign} g(S) \end{aligned}$$

(здесь константа $\vartheta \in [0, 1]$), а функция $f_y'(x, y)$ отлична от нуля в области U_S . Очевидно, что $\alpha(\xi, \eta)$ и $\beta(\xi, \eta)$ — гладкие функции своих аргументов. Наконец, легко убедиться (привлекая соотношение (1.15) и тот факт, что $g(x, y) \neq 0$ в области U_S) в справедливости неравенств

$$\alpha(\xi, \eta) \geq k > 0, \quad \beta(\xi, \eta) \geq k > 0 \quad (5.8)$$

в каждой точке области U_0 , так что, в частности, $\alpha(0, 0) > 0$, $\beta(0, 0) > 0$.

Для сокращения записи условимся в дальнейшем значении функций $\alpha(\xi, \eta)$, $\beta(\xi, \eta)$ и др. и их производных $\alpha'_\eta(\xi, \eta)$, $\alpha'_\xi(\xi, \eta)$, $\beta'_{\xi\eta}(\xi, \eta)$ и др. при $\xi = 0$, $\eta = 0$ обозначать α , β , α'_η , α'_ξ , $\beta'_{\xi\eta}$ и т. д.

Обозначим через $Q^-(q_1^-, q_2^-)$ точку с абсциссой

$$q_1^- = s_1 + \rho_{-\operatorname{sign} f_x''(S)} = s_1 + \psi(-q \operatorname{sign} f_x''(S))$$

и через $Q^+(q_1^+, q_2^+)$ — точку с абсциссой

$$q_1^+ = s_1 + \rho_{\operatorname{sign} f_x''(S)} = s_1 + \psi(q \operatorname{sign} f_x''(S))$$

(точка Q^- лежит на устойчивом участке кривой Γ , прилегающем к точке срыва S , а точка Q^+ — на горизонтальном отрезке, выходящем из точки срыва S ; ср. с рис. 34). Непосредственно проверяется, что уравнение участка Q^-Q^+ траектории \mathfrak{T}_0 , независимо от того, какой

из изображенных на рис. 26, 27 случаев имеет место, в координатах ξ, η записывается так:

$$\eta = \eta_0(\xi) \equiv \begin{cases} -\xi^2, & -q \leq \xi < 0, \\ 0, & 0 \leq \xi \leq q. \end{cases} \quad (5.9)$$

Так как при достаточно малых ε траектория \mathfrak{T}_ε близка к траектории \mathfrak{T}_0 (см. § 2 и рис. 30), то траектория \mathfrak{T}_ε входит в область U_S через участок

$$x = q_1^-, \quad q_2^- \operatorname{sign} g(S) \leq y \operatorname{sign} g(S) \leq s_2 \operatorname{sign} g(S)$$

границы, покидает эту область через участок

$$x = q_1^+, \quad s_2 \operatorname{sign} g(S) \leq y \operatorname{sign} g(S) \leq s_2 \operatorname{sign} g(S) + q$$

границы и расположена всюду выше участка Q^-Q^+ траектории \mathfrak{T}_0 , если $g(S) > 0$, и всюду ниже этого участка, если $g(S) < 0$. Отрезок траектории \mathfrak{T}_ε , лежащий в области U_S , назовем участком срыва. Согласно формулам (5.3) этому участку соответствует отрезок траектории

$$\xi = \xi(t, \varepsilon), \quad \eta = \eta(t, \varepsilon) \quad (5.10)$$

системы (5.6), лежащий в расположенной выше кривой (5.9) части \mathcal{U} области U_0 (см. рис. 34).

§ 6. Асимптотические приближения траектории в начале участка срыва

Поскольку в области \mathcal{U} выполнены неравенства $\xi^2 + \eta > 0$ и $\alpha(\xi, \eta) > 0$ (см. (5.8)), то вдоль участка срыва траектории \mathfrak{T}_ε координата ξ с течением времени t монотонно возрастает. Поэтому уравнение такого участка можно записать не в параметрической форме (5.10), а в виде

$$\eta = \eta_\varepsilon(\xi, \varepsilon), \quad -q \leq \xi \leq q, \quad (6.1)$$

принимая за независимую переменную координату ξ . Ясно, что функция (6.1) является решением уравнения

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \varepsilon \frac{\gamma(\xi, \eta)}{\xi^2 + \eta}, \quad (6.2)$$

где

$$\gamma(\xi, \eta) \equiv \alpha(\xi, \eta)\beta(\xi, \eta) \quad (6.3)$$

— определенная всюду в области U_0 гладкая функция; уравнение (6.2) эквивалентно системе (5.6). Из соотношений (5.8) следует, что в любой точке области U_0 (и, тем

более, области \mathcal{U}) справедливо неравенство

$$\gamma(\xi, \eta) \geq k > 0, \quad (6.4)$$

так что, в частности, $\gamma = \gamma(0, 0) > 0$.

Оказывается, что нельзя получить асимптотическое разложение при $\varepsilon \rightarrow 0$ участка срыва (6.1) в виде ряда по целым положительным степеням ε . Поэтому сначала, используя уравнение (6.2), мы будем искать асимптотическое разложение траектории \mathfrak{Z}_ε в начале участка срыва — на отрезке $-q \leq \xi \leq -\sigma_1$, где $\sigma_1 > 0$ — величина, малая вместе с ε , т. е. $\sigma_1 \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Иначе говоря, речь пойдет об асимптотических приближениях функции

$$\eta = \eta_\varepsilon(\xi, \varepsilon), \quad -q \leq \xi \leq -\sigma_1, \quad (6.5)$$

совпадающей с функцией (6.1) на общем отрезке их определения.

Построим формальный степенной ряд

$$\eta = \eta_0(\xi) + \varepsilon \eta_1(\xi) + \dots + \varepsilon^n \eta_n(\xi) + \dots \quad (6.6)$$

так, чтобы он формально удовлетворял уравнению (6.2) на промежутке $-q \leq \xi < 0$ изменения ξ . Коэффициенты этого ряда определим следующим образом. В качестве $\eta_0(\xi)$ возьмем функцию (5.9), рассматривая ее на промежутке $-q \leq \xi < 0$. Такой выбор вполне естествен, поскольку (5.9) есть уравнение участка траектории \mathfrak{Z}_0 в координатах ξ, η . Далее, подставим ряд (6.6) в левую и правую части уравнения (6.2) и формально продифференцируем почленно левую часть, а правую часть разложим в ряд по степеням ε . Это разложение удобно проводить с помощью формулы

$$\frac{1}{z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n z_n} = \frac{1}{z_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{z_0^{k+1}} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = n \\ i_j \geq 1}} z_{i_1} \dots z_{i_k}, \quad (6.7)$$

являющейся частным случаем соотношения (3.7). Затем приравняем выражения, стоящие слева и справа при одинаковых степенях ε .

В результате указанных операций приходим к равенствам

$$\begin{aligned}\eta'_0(\xi) &= \frac{\gamma(\xi, \eta_0(\xi))}{\eta_1(\xi)}, \\ \eta'_1(\xi) &= -\frac{\gamma(\xi, \eta_0(\xi))}{\eta_1^2(\xi)} \eta_2(\xi) + \gamma'_\eta(\xi, \eta_0(\xi)), \\ \eta'_{n-1}(\xi) &= -\frac{\gamma(\xi, \eta_0(\xi))}{\eta_1^2(\xi)} \eta_n(\xi) + \\ &\quad + \Phi_{n-1}(\eta_0(\xi), \eta_1(\xi), \dots, \eta_{n-1}(\xi)), \quad n \geq 2.\end{aligned}\tag{6.8}$$

Первое из равенств (6.8) в силу выбора функции $\eta_0(\xi)$ позволяет найти

$$\eta_1(\xi) = -\frac{\gamma(\xi, -\xi^2)}{2\xi}.\tag{6.9}$$

Так как

$$-\frac{\gamma(\xi, \eta_0(\xi))}{\eta_1^2(\xi)} = -\frac{4\xi^2}{\gamma(\xi, -\xi^2)} \neq 0,$$

то остальные равенства (6.8), представляющие собой линейные алгебраические уравнения, однозначно последовательно определяют коэффициенты $\eta_i(\xi)$, $i = 2, 3, \dots$:

$$\begin{aligned}\eta_2(\xi) &= -\frac{\gamma^2(\xi, -\xi^2) - \xi\gamma(\xi, -\xi^2)\gamma'_\xi(\xi, -\xi^2)}{8\xi^4}, \\ \eta_n(\xi) &= \frac{1}{2\xi} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n-1} \eta_{n-\nu}(\xi) \eta'_\nu(\xi) - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\gamma_\eta^{(\nu)}(\xi, -\xi^2)}{\nu!} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_\nu=n-1, \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1}(\xi) \dots \eta_{i_\nu}(\xi) \right\}, \quad n \geq 2.\end{aligned}\tag{6.10}$$

Из полученных формул непосредственно видно, что функции $\eta_i(\xi)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, определены и являются гладкими на полуинтервале $-q \leq \xi < 0$ изменения ξ . Подчеркнем, что каждая из этих функций эффективно вычисляется только через значения функции $\gamma(\xi, \eta)$ и нескольких ее производных на участке $-q \leq \xi < 0$ кривой (5.9).

В §§ 7, 16 мы убедимся, что *частичная сумма построенного ряда* (6.6)

$$H_n(\xi, \varepsilon) = \eta_0(\xi) + \varepsilon\eta_1(\xi) + \dots + \varepsilon^n\eta_n(\xi)\tag{6.11}$$

является при $\varepsilon \rightarrow 0$ *асимптотическим приближением*

участка (6.5) траектории \mathfrak{L}_ε :

$$\eta_\varepsilon(\xi, \varepsilon) = H_{N_1-1}(\xi, \varepsilon) + O(\varepsilon^{N_1-\lambda_1(3N_1-2)}), \quad -q \leq \xi \leq -\sigma_1, \quad (6.12)$$

где N_1 — произвольное натуральное число, а

$$\sigma_1 = \varepsilon^{\lambda_1}, \quad 0 < \lambda_1 < 1/3. \quad (6.13)$$

§ 7. Связь асимптотических приближений с истинными траекториями в начале участка срыва

Выясним, для отрезков каких траекторий системы (5.6) справедливо асимптотическое представление типа (6.12), (6.13).

Лемма 3. Для любого $n = 0, 1, 2, \dots$ найдется такая константа $M_n > 0$, что имеет место неравенство

$$|\xi^{3n-2} \eta_n(\xi)| \leq M_n, \quad -q \leq \xi < 0. \quad (7.1)$$

Если воспользоваться формулами (6.9), (6.10) и тем фактом, что функция $\gamma(\xi, \eta)$ и ее производные ограничены в области \mathcal{U} , то по индукции доказывается оценка

$$|\xi^{3n-2+m} \eta_n^{(m)}(\xi)| \leq M_{n,m}, \quad -q \leq \xi < 0,$$

где m — любое целое неотрицательное число. Неравенство (7.1) — частный случай этой оценки при $m = 0$.

Более подробные вычисления позволяют убедиться, что при любом натуральном n функция $\eta_n(\xi)$ имеет асимптотический ряд

$$\eta_n(\xi) = \frac{1}{\xi^{3n-2}} \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k^n \xi^k, \quad \xi \rightarrow -0, \quad (7.2)$$

причем можно получить рекуррентную формулу для последовательного отыскания коэффициентов η_k^n . Так как, в частности,

$$\eta_0^n = -\frac{\gamma}{2}, \quad \eta_0^n = -\frac{3n-4}{4} \sum_{\nu=1}^{n-1} \eta_0^\nu \eta_0^{n-\nu}, \quad n \geq 2, \quad (7.3)$$

то $\eta_0^n < 0$ при любом натуральном n (см. (6.4)), а потому

$$\begin{aligned} \eta_n(\xi) &\rightarrow +\infty && \text{при } \xi \rightarrow -0, \text{ если } n \text{ — нечетное;} \\ \eta_n(\xi) &\rightarrow -\infty && \text{при } \xi \rightarrow -0, \text{ если } n \text{ — четное.} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Лемма 4. При достаточно малых ε существует такая константа $C_n > 0$, что производная в силу уравнения (6.2) в каждой точке кривой

$$\mathcal{K}_1(\xi, \eta) \equiv \eta - H_n(\xi, \varepsilon) + C_n \frac{\varepsilon^{n+1}}{\xi^{3n+1}} = 0, \quad -q \leq \xi \leq -\sigma_1, \quad (7.5)$$

положительна при нечетном n и отрицательна при четном n , а в каждой точке кривой

$$\mathcal{K}_2(\xi, \eta) \equiv \eta - H_n(\xi, \varepsilon) - C_n \frac{\varepsilon^{n+1}}{\xi^{3n+1}} = 0, \quad -q \leq \xi \leq -\sigma_1, \quad (7.6)$$

отрицательна при нечетном n и положительна при четном n .

Производная в силу уравнения (6.2) в произвольной точке кривой (7.5) равна

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{K}_1}{d\xi} \Big|_{(6.2)} &= \frac{d\eta}{d\xi} \Big|_{(6.2)} - \frac{dH_n(\xi, \varepsilon)}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} C_n \frac{\varepsilon^{n+1}}{\xi^{3n+1}} = \\ &= \varepsilon \frac{\gamma(\xi, H_n(\xi, \varepsilon) - C_n \frac{\varepsilon^{n+1}}{\xi^{3n+1}})}{\xi^2 + H_n(\xi, \varepsilon) - C_n \frac{\varepsilon^{n+1}}{\xi^{3n+1}}} - \frac{dH_n(\xi, \varepsilon)}{d\xi} - \frac{(3n+1) C_n \varepsilon^{n+1}}{\xi^{3n+2}}. \end{aligned}$$

Найдем доминирующий член этого выражения при достаточно малых ε , считая, что $-q \leq \xi \leq -\sigma_1$, где $\sigma_1 = \varepsilon^{\lambda_1}$, $0 < \lambda_1 < 1/3$ (см. (6.13)). Привлекая соотношения (6.9) и (7.1), получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\gamma(\xi, H_n(\xi, \varepsilon) - C_n \frac{\varepsilon^{n+1}}{\xi^{3n+1}})}{\xi^2 + H_n(\xi, \varepsilon) - C_n \frac{\varepsilon^{n+1}}{\xi^{3n+1}}} &= \varepsilon \frac{\gamma(\xi, H_n(\xi, \varepsilon))}{\xi^2 + H_n(\xi, \varepsilon)} + \\ &+ \varepsilon^n \frac{4C_n}{\gamma(\xi, -\xi^2) \xi^{3n-1}} + O(\varepsilon^{n+1-\lambda_1(3n+2)}); \quad (7.7) \end{aligned}$$

оценка остаточного члена в этой формуле равномерна на отрезке $-q \leq \xi \leq -\sigma_1$. Далее, из самого процесса построения функций $\eta_r(\xi)$ (см. (6.8)) и формул (3.7), (6.7) следует

$$\begin{aligned} \frac{dH_n(\xi, \varepsilon)}{d\xi} &= \varepsilon \frac{\gamma(\xi, H_n(\xi, \varepsilon))}{\xi^2 + H_n(\xi, \varepsilon)} - \\ &- \varepsilon^n \frac{4\xi^2}{\gamma(\xi, -\xi^2)} \eta_{n+1}(\xi) + O(\varepsilon^{n+1-\lambda_1(3n+2)}); \quad (7.8) \end{aligned}$$

остаточный член в этой формуле в силу соотношений (7.1) и (6.13) на отрезке $-q \leq \xi \leq -\sigma_1$ строго более

высокого порядка малости при $\varepsilon \rightarrow 0$, чем второй выписанный член правой части.

Равенства (7.7) и (7.8) позволяют утверждать, что

$$\left. \frac{d\mathcal{K}_1}{d\xi} \right|_{(6.2)} = \varepsilon^n \frac{4}{\gamma(\xi, -\xi^2) \xi^{3n-1}} \{ \xi^{3n+1} \eta_{n+1}(\xi) + C_n \} + \\ + O(\varepsilon^{n+1-\lambda_1(3n+2)}).$$

Если $0 < \lambda_1 < 1/3$, то при достаточно малых ε выписанный в правой части член является доминирующим. В силу неравенства (7.1) при достаточно большой константе $C_n > 0$ он будет строго положительным при нечетном n и строго отрицательным при четном n на всем отрезке $-q \leq \xi \leq -\sigma_1 < 0$. Следовательно, в каждой точке кривой (7.5) можно обеспечить неравенство

$$\left. \frac{d\mathcal{K}_1}{d\xi} \right|_{(6.2)} \geq k > 0, \quad \text{если } n \text{ — нечетное число,}$$

или неравенство

$$\left. \frac{d\mathcal{K}_1}{d\xi} \right|_{(6.2)} \leq -k < 0, \quad \text{если } n \text{ — четное число.}$$

Аналогично проверяется, что при достаточно малых ε в каждой точке кривой (7.6) можно обеспечить неравенство

$$\left. \frac{d\mathcal{K}_2}{d\xi} \right|_{(6.2)} \leq -k < 0, \quad \text{если } n \text{ — нечетное число,}$$

или неравенство

$$\left. \frac{d\mathcal{K}_2}{d\xi} \right|_{(6.2)} \geq k > 0, \quad \text{если } n \text{ — четное число,}$$

выбирая константу $C_n > 0$ достаточно большой.

Докажем следующее утверждение о возможности асимптотического приближения отрезков траекторий системы (5.6) частичными суммами ряда (6.6).

Теорема III. Пусть λ_1 — произвольное число, подчиненное неравенству $0 < \lambda_1 < 1/3$, функция $H_n(\xi, \varepsilon)$, $n \geq 0$, определена формулой (6.11), а $\eta = \eta(\xi, \varepsilon)$ — решение уравнения (6.2) с начальным значением при $\xi = -q$, $q = \text{const} > 0$, удовлетворяющим для достаточно малых ε условию

$$|\eta(-q, \varepsilon) - H_n(-q, \varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1}, \quad C > 0. \quad (7.9)$$

Тогда при достаточно малых ε это решение определено на всем отрезке $-q \leq \xi \leq -\sigma_1$, $\sigma_1 = \varepsilon^{\lambda_1}$, и представимо

в виде

$$\eta(\xi, \varepsilon) = H_n(\xi, \varepsilon) + \mathfrak{H}_n(\xi, \varepsilon), \quad -q \leq \xi \leq -\sigma_1, \quad (7.10)$$

причем равномерно на отрезке $-q \leq \xi \leq -\sigma_1$

$$|\mathfrak{H}_n(\xi, \varepsilon)| < C_n \varepsilon^{n+1-\lambda_1(2n+1)}, \quad C_n = \text{const} > 0. \quad (7.11)$$

Теорема III непосредственно вытекает из леммы 4. Ясно, что при нечетном n кривая (7.6) проходит всюду выше кривой (7.5), а при четном n , наоборот, кривая (7.5) проходит всюду выше кривой (7.6). Рассмотрим полосу π между этими кривыми, причем пусть константа $C_n > 0$ столь велика, что утверждение леммы 4 выполнено. Если решение $\eta = \eta(\xi, \varepsilon)$ уравнения (6.2) удовлетворяет начальному условию (7.9), то (увеличив, если надо, константу C_n) можно считать, что начальная точка $(-q, \eta(-q, \varepsilon))$ находится в полосе π . Так как в силу леммы 4 любое решение уравнения (6.2), исходящее из произвольной точки полосы π , не пересекает ни кривую $\mathfrak{X}_1(\xi, \eta) = 0$, ни кривую $\mathfrak{X}_2(\xi, \eta) = 0$, то функция $\eta = \eta(\xi, \varepsilon)$ определена на всем отрезке $-q \leq \xi \leq -\sigma_1$, а ее график лежит внутри полосы π . Но тогда, очевидно, справедливо представление (7.10) и оценка (7.11).

Весьма важным фактом является наличие непосредственной связи между коэффициентами асимптотических рядов (3.6) и (6.6). Оказывается, что если ряд (6.6) переписать с помощью формул (5.3) в координатах x, y , то получающийся ряд

$$\begin{aligned} y = & s_2 + \eta_0(\varphi(x-s_1) \text{sign } f'_x(S)) \text{sign } g(S) + \\ & + \varepsilon \eta_1(\varphi(x-s_1) \text{sign } f''_x(S)) \text{sign } g(S) + \dots \\ & \dots + \varepsilon^n \eta_n(\varphi(x-s_1) \text{sign } f''_x(S)) \text{sign } g(S) + \dots \end{aligned} \quad (7.12)$$

будет формальным обращением ряда (3.6), причем n -й коэффициент ряда (7.12) выражается только через те коэффициенты ряда (3.6), номера которых не превосходят n . Для доказательства этого утверждения необходимо установить справедливость соответствующих соотношений между коэффициентами рядов (3.6) и (6.6):

$$\begin{aligned} x_0(s_2 + \eta_0(\xi) \text{sign } g(S)) & \equiv s_1 + \psi(\xi \text{sign } f'_x(S)), \\ \eta_1(\xi) x'_0(s_2 + \eta_0(\xi) \text{sign } g(S)) \text{sign } g(S) + \\ & + x_1(s_2 + \eta_0(\xi) \text{sign } g(S)) \equiv 0, \\ \dots \end{aligned}$$

что можно сделать, привлекая тождества (1.11), (5.5) и выражения для коэффициентов указанных рядов (см. (3.10), (3.11), (6.9), (6.10)).

Покажем теперь, что функция (6.5), описывающая траекторию \mathfrak{Z}_ε в начале участка срыва, удовлетворяет условию (7.9) при любом целом $n \geq 0$. Выберем число q в соответствии со сказанным в § 5 и тем самым определим точку $Q^-(q_1^-, q_2^-)$ на дуге \tilde{PS} траектории \mathfrak{Z}_0 (рис. 35; ср. с рис. 34). Пусть $B(q_1^-, r_2)$ — точка пересечения траектории \mathfrak{Z}_ε с прямой $x = q_1^-$, лежащая на границе области U_S , а $R(r_1, r_2)$ — точка на дуге \tilde{PS} , имеющая ту же ординату, что и точка B (так что $r_1 = x_0(r_2)$). Точка B — начальная точка участка срыва — является одновременно конечной для предшествующего участка медленного движения (см. рис. 33). Подчеркнем, что хотя величина r_2 зависит от ε , однако при достаточно малых ε точка R отстоит на конечное расстояние от точки срыва S , а потому для асимптотического вычисления участ-

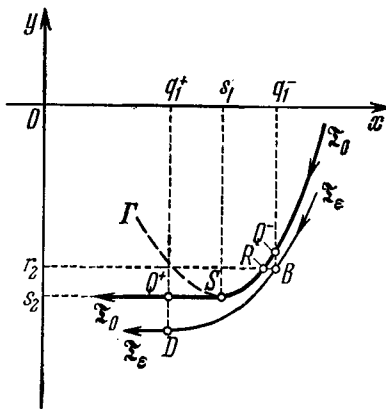


Рис. 35.

ка медленного движения AB траектории \mathfrak{Z}_ε можно использовать результаты, указанные в §§ 3, 4.

Необходимое для проверки условия (7.9) значение $\eta_{\mathfrak{z}}(-q, \varepsilon)$ вычислим следующим образом. Фиксируем произвольное целое число $n \geq 0$ и, привлекая уже доказанное асимптотическое представление (3.13) участка медленного движения AB , найдем абсциссу точки B :

$$q_1^- = x_{\mathfrak{z}}(r_2, \varepsilon) = X_n(r_2, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}).$$

Переходя к координатам ξ, η по формулам (5.3), получим соотношение

$$\begin{aligned} s_1 + \psi(-q \operatorname{sign} f_x''(S)) = \\ = X_n(s_2 + \eta_{\mathfrak{z}}(-q, \varepsilon) \operatorname{sign} g(S), \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \end{aligned} \quad (7.13)$$

из которого и нужно определить интересующее нас зна-

чение $\eta_{\varepsilon}(-q, \varepsilon)$ с требуемой точностью. Но в силу указанной выше связи между коэффициентами рядов (3.6) и (6.6) можно утверждать, что обращение равенства (7.13) приведет к соотношению

$$\eta_{\varepsilon}(-q, \varepsilon) = H_n(-q, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}).$$

Таким образом, условие (7.9) для функции (6.5) действительно выполняется при любом целом $n \geq 0$.

§ 8. Специальные переменные для участка срыва

Соотношения (7.4) показывают, что ряд (6.6) по целым положительным степеням параметра ε нельзя рассматривать в качестве асимптотического разложения траектории $\mathfrak{F}_{\varepsilon}$ на всем отрезке $-q \leq \xi \leq 0$ изменения переменной ξ . Например, функция $\eta_1(\xi)$ при $\xi \rightarrow -0$ неограниченно возрастает (см. (6.8)), а потому разность $\eta_{\varepsilon}(\xi, \varepsilon) - \eta_0(\xi)$, характеризующая отклонение траекторий $\mathfrak{F}_{\varepsilon}$ и \mathfrak{F}_0 , не будет уже величиной порядка ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно на отрезке $-q \leq \xi \leq 0$.

Однако порядок указанной разности все же можно определить — она оказывается величиной порядка $\varepsilon^{2/3}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно на некотором отрезке изменения ξ , включающем значение $\xi = 0$. Для того чтобы установить это и получить асимптотические представления траектории $\mathfrak{F}_{\varepsilon}$ на упомянутом отрезке изменения ξ , сделаем новое преобразование переменных.

От переменных ξ, η, t перейдем к переменным u, v, τ по формулам

$$\xi = \mu u, \quad \eta = \mu^2 v, \quad t = \mu^2 \tau, \quad (8.1)$$

где введено обозначение

$$\mu^3 = \gamma \varepsilon. \quad (8.2)$$

Ясно, что μ можно рассматривать как новый параметр, положительный (см. (6.4)) и малый вместе с ε , но более низкого порядка малости (точнее, порядка $\varepsilon^{1/3}$) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Время τ является быстрым: третье из соотношений (8.1) показывает, что конечному отрезку изменения t соответствует промежуток изменения τ порядка $1/\mu^2$. Первые два соотношения (8.1) устанавливают взаимно однозначное соответствие между малой конечной окрестностью U_0

начала координат плоскости (ξ, η) и бесконечно большой (при $\varepsilon \rightarrow 0$) областью U_0^* плоскости (u, v) . При этом начало координат плоскости (ξ, η) переходит в начало координат плоскости (u, v) , а кривой (5.9) соответствует кривая

$$v = \begin{cases} -u^2, & -q/\mu \leq u < 0, \\ 0, & 0 \leq u \leq q/\mu. \end{cases} \quad (8.3)$$

Перепишывая систему (5.6) в новых переменных, получим

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = \gamma \frac{u^2 + v}{\alpha(\mu u, \mu^2 v)}, \\ \frac{dv}{d\tau} = \beta(\mu u, \mu^2 v); \end{cases} \quad (8.4)$$

эта система уже не содержит малого параметра при производной. Очевидно, что правые части системы (8.4) определены и являются гладкими функциями всюду в области U_0^* . Согласно формулам (8.1) участку срыва (5.10) траектории \mathfrak{F}_ε соответствует отрезок траектории

$$u = u(\tau, \mu), \quad v = v(\tau, \mu) \quad (8.5)$$

системы (8.4), лежащий в расположенной выше кривой (8.3) части Π^* области U_0^* . Отметим, что уравнение (8.3) описывает в координатах u, v участок (5.9) траектории \mathfrak{F}_0 , однако кривая (8.3) уже не удовлетворяет системе, получающейся из (8.4) при $\mu = 0$.

§ 9. Одно уравнение типа Риккати

При построении нулевого приближения траекторий системы (8.4) возникает уравнение

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{u^2 + v}. \quad (9.1)$$

Если считать u функцией независимой переменной v , то уравнение (9.1) переписется в виде

$$\frac{du}{dv} = v + u^2. \quad (9.2)$$

Уравнение (9.2) — специальное уравнение Риккати; его решения можно выразить через специальные функции (см. [21]). Используя эти выражения, построим картину интегральных кривых уравнения (9.1).

Введем в уравнении (9.2) вместо u новую неизвестную функцию $e(v)$ по формуле

$$u(v) = -\frac{1}{e(v)} \cdot \frac{de(v)}{dv}. \quad (9.3)$$

Для $e(v)$ получается линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2e}{dv^2} + ve = 0, \quad (9.4)$$

которое называют *уравнением Эйри*. Это уравнение замёной переменных

$$w = \frac{e}{\sqrt{v}}, \quad z = \frac{2}{3} v^{3/2}$$

приводится к *уравнению Бесселя*

$$z^2 \frac{d^2w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + \left[z^2 - \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right] w = 0,$$

фундаментальную систему решений которого составляют бesselевы функции первого рода порядка $-1/3$ и $1/3$, т. е. функции $J_{-1/3}(z)$ и $J_{1/3}(z)$. Поэтому общее решение уравнения (9.4) таково:

$$e(v) = C_1 \sqrt{v} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} v^{3/2} \right) + C_2 \sqrt{v} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} v^{3/2} \right), \quad (9.5)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Возвращаясь к уравнению Риккати (9.2), выразим из соотношений (9.5) и (9.3) его общее решение через бesselевы функции:

$$u = -\sqrt{v} \frac{J_{-2/3} \left(\frac{2}{3} v^{3/2} \right) - c J_{2/3} \left(\frac{2}{3} v^{3/2} \right)}{c J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} v^{3/2} \right) + J_{1/3} \left(\frac{2}{3} v^{3/2} \right)}, \quad (9.6)$$

причем константа c пробегает все действительные значения (включая и ∞). Формулой (9.6) удобно пользоваться при $v \geq 0$, поскольку для неотрицательных значений аргумента она непосредственно определяет действительные значения функции $u = u(v, c)$. При отрицательных значениях аргумента, т. е. при $-v > 0$, предпочтительнее иное представление того же общего решения:

$$u = -\sqrt{-v} \frac{I_{-2/3} \left(\frac{2}{3} (-v)^{3/2} \right) - c I_{2/3} \left(\frac{2}{3} (-v)^{3/2} \right)}{c I_{-1/3} \left(\frac{2}{3} (-v)^{3/2} \right) - I_{1/3} \left(\frac{2}{3} (-v)^{3/2} \right)}, \quad (9.7)$$

где $I_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка ν ; оно непосредственно определяет действительные значения функции $u = u(v, c)$ при $v < 0$.

Выясним, как ведут себя кривые, являющиеся графиками функций семейства, заданного уравнением (9.6) или, что то же, уравнением (9.7). При любом c (включая $c = \infty$) соответствующая функция $u = u(v, c)$ этого семейства определена на всей оси v , за исключением точек, в которых обращается в нуль знаменатель в правой части формулы (9.6) или (9.7). При $0 \leq c < 1$ одна такая точка лежит на полуоси $v \leq 0$ и счетная последовательность таких точек, уходящая в бесконечность, — на полуоси $v > 0$; при остальных значениях c имеется только счетная последовательность таких точек, уходящая в бесконечность, на положительной полуоси*). При приближении к каждой такой точке слева функция $u(v, c)$ стремится к $+\infty$, а при приближении справа она стремится к $-\infty$. Для любой функции семейства $u = u(v, c)$, кроме функции $u = u(v, 1)$, справедливо асимптотическое представление

$$u(v, c) = \sqrt{-v} [1 + O((-v)^{-3/2})], \quad v \rightarrow -\infty, \quad c \neq 1,$$

тогда как для функции $u = u(v, 1)$ имеет место асимптотическое представление**)

$$u(v, 1) = -\sqrt{-v} [1 + O((-v)^{-3/2})], \quad v \rightarrow -\infty.$$

Другими словами, графики всех функций $u = u(v, c)$, $c \neq 1$, при $v \rightarrow -\infty$ неограниченно приближаются к верхней ветви параболы $\Pi(v, u) \equiv v + u^2 = 0$, являющейся изоклиной нуля для уравнения (9.2), а $u = u(v, 1)$ — единственная функция, график которой при $v \rightarrow -\infty$ неограниченно приближается к нижней ветви этой параболы. Отметим еще, что кривые семейства $u = u(v, c)$ имеют перегиб в точках своего пересечения с кривой $1 + 2vu + 2u^3 = 0$, состоящей из двух ветвей Γ_1 и Γ_2 .

*) Это следует из того факта (см., например, [66]), что функция $cI_{-1/3}(z) - I_{1/3}(z)$ имеет на полуоси $z \geq 0$ единственный нуль, если $0 \leq c < 1$, и не имеет там нулей при всех других действительных значениях c , а функция $cJ_{-1/3}(z) + J_{1/3}(z)$ имеет при любом действительном значении c счетное число нулей на полуоси $z > 0$ (все эти нули — простые).

***) Для доказательства нужно использовать известные асимптотические формулы при $z \rightarrow \infty$ для функций $I_\nu(z)$ и $I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)$.

Рис. 36 представляет картину интегральных кривых уравнения Риккати (9.2). Из сказанного выше следует, что уравнение (9.2) имеет решения лишь следующих трех типов:

1) континуум кривых, каждая из которых определена на (своем) полубесконечном влево интервале, неограниченно приближается при $v \rightarrow -\infty$ к кривой $u = \sqrt{-v}$ и

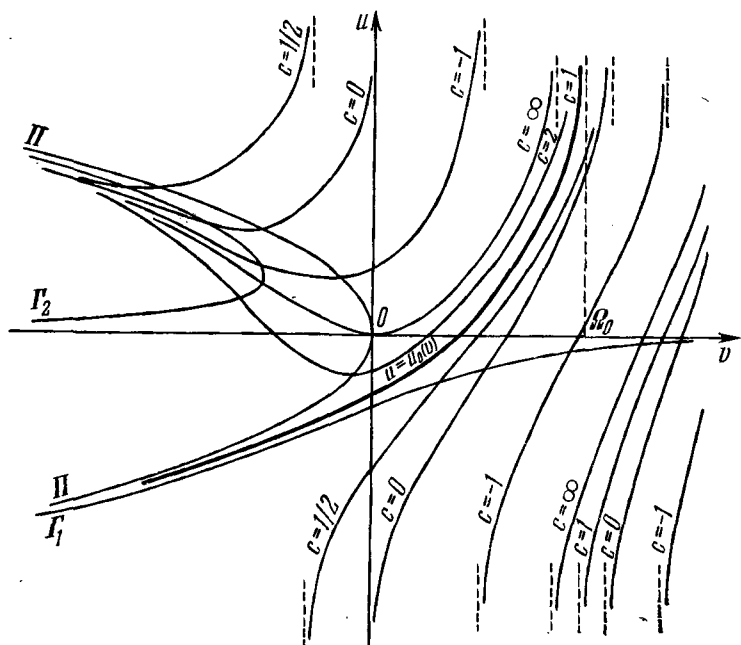


Рис. 36.

стремится к $+\infty$ при приближении к правому концу интервала определения;

2) континуум кривых, каждая из которых определена на (своем) конечном интервале, стремится к $-\infty$ при приближении к левому концу интервала определения и стремится к $+\infty$ при приближении к правому его концу;

3) единственную кривую, определенную на полубесконечном влево интервале, неограниченно приближающуюся при $v \rightarrow -\infty$ к кривой $u = -\sqrt{-v}$ и стремящуюся

к $+\infty$ при приближении к правому концу интервала определения.

Эта последняя кривая, как видно из рис. 36, отделяет область, целиком заполненную кривыми первого типа, от области, целиком заполненной кривыми второго типа. Такое решение называется *разделяющим решением* уравнения Риккати.

Разделяющее решение $v = u_0'(v)$ уравнения (9.2) определено на интервале $-\infty < v < \Omega_0$, где Ω_0 — наименьший положительный нуль знаменателя в формуле (9.6) при $c=1$. Это решение представляет собой монотонно возрастающую от $-\infty$ до $+\infty$ выпуклую вниз кривую. На участке $-\infty < v \leq 0$ она заключена между нижней ветвью параболы Π и кривой Γ_1 .

Если на рис. 36 все кривые зеркально отобразить относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов, то получится картина интегральных кривых урав-

нения (9.1). В частности, разделяющее решение $u = u_0(v)$ уравнения Риккати (9.2) при таком отображении переходит в решение

$$v = v_0(u) \quad (9.8)$$

уравнения (9.1). Именно эта функция (рис. 37) в дальнейшем будет играть особую роль при построении асимптотических приближений траекторий системы (8.4). Хотя функцию (9.8) не удастся явно записать через известные функции, ее свойства можно изучать, используя выражение для обратной к ней функции $u = u_0(v)$ и само уравнение (9.1).

Очевидно, что функция (9.8) определена на всей прямой $-\infty < u < \infty$ и представляет собой монотонно возрастающую выпуклую вверх кривую, причем

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} v_0(u) = \Omega_0 > 0. \quad (9.9)$$

Подчеркнем, что (9.8) — единственное решение урав-

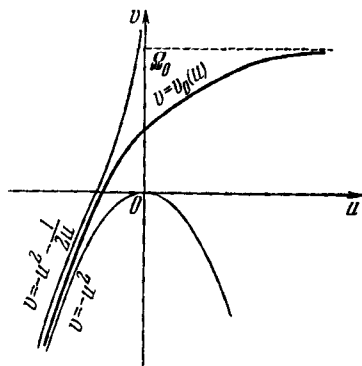


Рис. 37.

нения (9.1), неограниченно приближающееся при $u \rightarrow -\infty$ к левой ветви параболы $v = -u^2$. Более точно, справедливо неравенство

$$-u^2 < v_0(u) < -u^2 - \frac{1}{2u}, \quad -\infty < u < 0. \quad (9.10)$$

Нам потребуются еще асимптотические формулы для функции (9.8) при больших отрицательных и больших положительных значениях аргумента. Эти формулы легко получаются непосредственно из уравнения (9.1):

$$v_0(u) = -u^2 - \frac{1}{2u} - \frac{1}{8u^4} + O\left(\frac{1}{u^7}\right), \quad u \rightarrow -\infty; \quad (9.11)$$

$$v_0(u) = \Omega_0 - \frac{1}{u} + O\left(\frac{1}{u^3}\right), \quad u \rightarrow +\infty. \quad (9.12)$$

§ 10. Асимптотические приближения траектории в непосредственной близости от точки срыва

Поскольку в области \mathcal{U}^* выполнены неравенства $u^2 + v > 0$ и $\alpha(\mu u, \mu^2 v) > 0$, $\gamma > 0$ (см. (5.8), (6.4)), то вдоль участка (8.5) координата u с течением времени t монотонно возрастает. Следовательно, уравнение такого участка можно записать не в параметрической форме (8.5), а в виде

$$v = v_x(u, \mu), \quad -q/\mu \leq u \leq q/\mu, \quad (10.1)$$

принимая за независимую переменную координату u ; эта функция получается из (6.1) в результате замены (8.1), (8.2). Ясно, что функция (10.1) является решением уравнения

$$\frac{dv}{du} = \frac{\tilde{\gamma}(\mu u, \mu^2 v)}{u^2 + v}, \quad (10.2)$$

где

$$\tilde{\gamma}(\xi, \eta) = \frac{\gamma(\xi, \eta)}{\gamma(0, 0)} = \frac{1}{\gamma} \gamma(\xi, \eta) \quad (10.3)$$

— определенная всюду в области U_0 гладкая функция; уравнение (10.2) эквивалентно системе (8.4). Из соотношения (10.3) следует, что $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(0, 0) = 1$.

Оказывается, что нельзя получить асимптотическое разложение при $\mu \rightarrow 0$ (т. е. при $\varepsilon \rightarrow 0$) функции (10.1) в виде ряда по целым положительным степеням μ .

Поэтому сейчас, используя уравнение (10.2), мы будем искать асимптотическое разложение функции (10.1), но не на всем отрезке ее определения, а лишь на отрезке $-\omega_1 \leq u \leq \omega_2$, где $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$ — величины, бесконечно большие при бесконечно малом μ , т. е. $\omega_i \rightarrow +\infty$, $i = 1, 2$, при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Построим формальный степенной ряд

$$v = v_0(u) + \mu v_1(u) + \dots + \mu^n v_n(u) + \dots \quad (10.4)$$

так, чтобы он формально удовлетворял уравнению (10.2) на всей оси $-\infty < u < \infty$. Подставим ряд (10.4) в уравнение (10.2) и его правую часть формально разложим в ряд по степеням μ . Такое разложение легко получить с помощью формул (3.7) и (6.6):

$$\frac{\tilde{\gamma}\left(\mu u, \mu^2 \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k v_k\right)}{u^2 + v_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k v_k} = \frac{1}{u^2 + v_0} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{M}_k \mu^k, \quad (10.5)$$

где коэффициент при μ^k , $k \geq 1$, равен *)

$$\mathfrak{M}_k = \frac{\mathfrak{L}_k}{u^2 + v_0} + \sum_{l=1}^k \mathfrak{L}_{k-l} \sum_{\nu=1}^l \frac{(-1)^\nu}{(u^2 + v_0)^{\nu+1}} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_\nu = l \\ i_j \geq 1}} v_{i_1} \dots v_{i_\nu}, \quad (10.6)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_m &= \frac{\tilde{\gamma}_\xi^{(m)}}{m!} u^m + \\ &+ \sum_{n=2}^m \frac{u^{m-n}}{(m-n)!} \sum_{\nu=1}^n \frac{\tilde{\gamma}_{\xi\eta}^{(m-n)(\nu)}}{\nu!} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_\nu = n \\ i_j \geq 2}} v_{i_1-2} \dots v_{i_\nu-2}. \end{aligned}$$

Затем приравняем выражения, стоящие слева и справа при одинаковых степенях μ .

В результате придем к равенствам

$$\begin{aligned} \frac{dv_0(u)}{du} &= \frac{1}{u^2 + v_0(u)}, \\ \frac{dv_1}{du} &= \mathfrak{M}_1, \dots, \quad \frac{dv_n}{du} = \mathfrak{M}_n, \dots \end{aligned} \quad (10.7)$$

*) Сумму, в которой верхний предел суммирования меньше нижнего, будем всегда считать равной нулю. Если условие, стоящее при знаке суммы, не выполняется для некоторого слагаемого, то это слагаемое считается равным нулю.

Из соотношений (10.6) видно, что коэффициент \mathfrak{M}_k разложения (10.5) выражается только через функции $v_0(u)$, $v_1(u)$, ..., $v_{k-1}(u)$, $v_k(u)$, причем функция $v_k(u)$ встречается в выражении для этого коэффициента лишь один раз — в слагаемом, отвечающем значениям $l=k$ и $\nu=1$. Поэтому, если ввести обозначение

$$\Phi_k(u) = \mathfrak{M}_k + \frac{v_k(u)}{[u^2 + v_0(u)]^2}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (10.8)$$

равенства (10.7), начиная со второго, можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dv_1(u)}{du} + \frac{v_1(u)}{[u^2 + v_0(u)]^2} &= \Phi_1(u) \equiv \frac{\tilde{\gamma}_1' u}{u^2 + v_0(u)}, \\ \frac{dv_n(u)}{du} + \frac{v_n(u)}{[u^2 + v_0(u)]^2} &= \Phi_n(u), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Первое из равенств (10.7) означает, что функция $v_0(u)$ есть решение уравнения (9.1). Обратим внимание на то, что мы пришли к уравнению (9.1) без какого-либо дополнительного условия, которое фиксировало бы частное решение. Поэтому определение функции $v_0(u)$ на основании первого равенства (10.7) является нетривиальным.

В качестве $v_0(u)$ возьмем решение (9.8) уравнения (9.1). Такой выбор можно пояснить следующими наводящими соображениями. Если желать, чтобы частичные суммы ряда (10.4) представляли собой асимптотические приближения при $\mu \rightarrow 0$ функции (10.1), то коэффициент $v_0(u)$ должен рассматриваться как нулевое приближение. Из результатов § 6 видно, что на отрезке $-q/\mu \leq u \leq -\sigma_1/\mu$ нулевым приближением траектории \mathfrak{E}_ε служит кривая $v = -u^2$. Поскольку эта функция среди решений уравнения (9.1) не содержится, то ее в качестве $v_0(u)$ принять нельзя. Однако естественно в качестве $v_0(u)$ взять такое решение уравнения (9.1), которое бы мало отличалось от указанного нулевого приближения на отрезке $-q/\mu \leq u \leq -\sigma_1/\mu$ для достаточно малых μ . Так как при $\mu \rightarrow 0$ отрезок $-q/\mu \leq u \leq -\sigma_1/\mu$ стягивается в $-\infty$ (см. (6.13), (8.2)), то логично остановить выбор на решении, неограниченно приближающемся при $u \rightarrow -\infty$ к кривой $v = -u^2$. А, как показано в § 9, у уравнения (9.1) имеется единственное решение, обладающее этим свойством, — функция (9.8). Конечно, приведенные рассуждения лишь эвристические — необходимость выбора в качестве $v_0(u)$

функции (9.8) в полной мере обосновывается только строгим доказательством (см. § 11) факта асимптотической близости частичных сумм ряда (10.4) к функции (10.1).

Обратимся теперь к равенствам (10.9). Так как функция $\Phi_n(u)$, $n \geq 1$, выражается только через функции $v_0(u)$, $v_1(u)$, ..., $v_{n-1}(u)$ и не зависит от функции $v_n(u)$, то эти равенства представляют собой линейные неоднородные дифференциальные уравнения, из которых можно последовательно находить коэффициенты $v_i(u)$, $i = 1, 2, \dots$. Однако и здесь ни для одного из этих уравнений не указано никакого дополнительного условия, которое выделяло бы определенное решение. Выберем функции $v_i(u)$, $i = 1, 2, \dots$, следующим образом (мы опускаем эвристические соображения, поясняющие разумность именно такого выбора). В качестве $v_1(u)$ возьмем частное решение первого из уравнений (10.9):

$$v_1(u) = \mathcal{M}(u) \int_{-\infty}^u \frac{\tilde{\gamma}'_{\xi} \theta d\theta}{\mathcal{M}(\theta) [\theta^2 + v_0(\theta)]}, \quad (10.10)$$

где

$$\mathcal{M}(u) = \exp \int_u^{\infty} \frac{d\theta}{[\theta^2 + v_0(\theta)]^2}. \quad (10.11)$$

Если функции $v_1(u)$, ..., $v_{n-1}(u)$ уже определены, так что функция $\Phi_n(u)$ (см. (10.8)) известна, то в качестве $v_n(u)$ выберем частное решение n -го уравнения (10.9):

$$v_n(u) = \mathcal{M}(u) \int_{-\infty}^u \frac{\Phi_n(\theta)}{\mathcal{M}(\theta)} d\theta, \quad n \geq 1. \quad (10.12)$$

В дальнейшем мы покажем, что формула (10.12) имеет смысл при любом $n \geq 1$, а потому функции $v_i(u)$, $i = 0, 1, 2, \dots$, определены и являются гладкими на всей прямой изменения u . Будет также установлено, что каждая из этих функций эффективно вычисляется только через значения функции $\gamma(\xi, \eta)$ и нескольких ее производных в начале координат (что касается функции $v_0(u)$, то она вообще не зависит от конкретного вида уравнения (10.2)).

В §§ 11, 16 мы убедимся, что частичная сумма построенного ряда (10.4)

$$V_n(u, \mu) = v_0(u) + \mu v_1(u) + \dots + \mu^n v_n(u) \quad (10.13)$$

является при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотическим приближением того участка решения (10.1) уравнения (10.2), который отвечает отрезку

$$-\omega_1 \leq u \leq \omega_2, \quad \omega_1 = \sigma_1/\mu, \quad \omega_2 = \sigma_2/\mu, \quad (10.14)$$

где $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ — такие величины, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $\sigma_i \rightarrow 0$ и одновременно $\omega_i \rightarrow +\infty$, $i = 1, 2$. Точно сформулировать результат удобнее, вернувшись от переменных u, v к координатам ξ, η (см. 8.1)). При этом уравнение (10.2) перейдет в уравнение (6.2), а решение (10.1), рассматриваемое на отрезке (10.14), будет описываться функцией

$$\eta = \tilde{\eta}_x(\xi, \mu) \equiv \mu^2 v_x(\xi/\mu, \mu), \quad -\sigma_1 \leq \xi \leq \sigma_2. \quad (10.15)$$

Ясно, что функция (10.15) совпадает с функцией (6.1) на общем отрезке их определения и представляет собой уравнение участка траектории \mathfrak{F}_ε в непосредственной близости от точки срыва. Мы докажем, что справедливы следующие асимптотические представления участка (10.15) траектории \mathfrak{F}_ε :

$$\tilde{\eta}_x(\xi, \mu) = \begin{cases} -\xi^2 + O(\varepsilon^{1-\lambda_1}), \\ \mu^2 v_0\left(\frac{\xi}{\mu}\right) + O(\varepsilon), & -\sigma_1 \leq \xi \leq 0; \\ \mu^2 V_{N_2}\left(\frac{\xi}{\mu}, \mu\right) + O(\varepsilon^{1+\lambda_1 N_2}), \end{cases} \quad (10.16)$$

$$\tilde{\eta}_x(\xi, \mu) = \begin{cases} O(\varepsilon^{2/3}), \\ \mu^2 v_0\left(\frac{\xi}{\mu}\right) + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), & 0 \leq \xi \leq \sigma_2; \\ \mu^2 V_{N_3}\left(\frac{\xi}{\mu}, \mu\right) + O(\varepsilon^{1+\lambda_2 N_3}), \end{cases} \quad (10.17)$$

здесь N_2 и N_3 — произвольные натуральные числа, причем $N_2 \geq N_3$, а

$$\sigma_1 = \varepsilon^{\lambda_1}, \quad 0 < \lambda_1 < 1/3; \quad \sigma_2 = \varepsilon^{\lambda_2}, \quad 0 < \lambda_2 < 1/3. \quad (10.18)$$

§ 11. Связь асимптотических приближений с истинными траекториями

в непосредственной близости от точки срыва

Выясним, для отрезков каких траекторий системы (5.6) справедливы асимптотические представления типа (10.16) — (10.18).

Лемма 5. Для любого $n=1, 2, \dots$ функция $v_n(u)$ определена при всех действительных значениях u и имеют место асимптотические формулы

$$v_n(u) = - \sum_{\nu=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^\nu \tilde{\gamma}_{\xi}^{(n-2\nu)}(\eta)}{\nu! (n-2\nu)! 2} u^{n-1} + O(|u|^{n-4})$$

при $u \rightarrow -\infty$; (11.1)

$$\left. \begin{aligned} v_1(u) &= \tilde{\gamma}_{\xi}' \ln u + O(1) && \text{при } u \rightarrow +\infty, \\ v_2(u) &= \frac{\tilde{\gamma}_{\xi}^{(1)}}{2} u + O(1) && \text{при } u \rightarrow +\infty, \\ v_3(u) &= \frac{\tilde{\gamma}_{\xi}^{(3)}}{12} u^2 + O(\ln u) && \text{при } u \rightarrow +\infty, \\ v_n(u) &= \frac{\tilde{\gamma}_{\xi}^{(n)}}{n! (n-1)} u^{n-1} + O(u^{n-3}), && n \geq 4, \\ &&& \text{при } u \rightarrow +\infty. \end{aligned} \right\} (11.2)$$

Убедимся прежде всего, что участвующие в формулах (10.11), (10.12) несобственные интегралы сходятся. Сходимость несобственного интеграла в формуле (10.11) немедленно вытекает из соотношения (9.9). Следовательно, введенная в (10.11) функция $\mathcal{M}(u)$ определена и бесконечно дифференцируема на всей оси u , принимает лишь положительные значения и является монотонно убывающей. Используя асимптотические представления (9.11) и (9.12), легко проверить, что

$$\mathcal{M}(u) = \Re e^{-\frac{4}{3}u^2} u^2 \left[1 + O\left(\frac{1}{|u|^3}\right) \right] \quad \text{при } u \rightarrow -\infty, \quad (11.3)$$

где \Re — некоторая константа *), и

$$\mathcal{M}(u) = 1 + O\left(\frac{1}{u^3}\right) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty. \quad (11.4)$$

*) Можно показать, что

$$\Re = \exp \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{[u^2 + v_0(u)]^2} - 4u^2 \Delta_0^-(u) + \frac{2}{u} \Delta^-(u) \right\} du,$$

где введены обозначения функций

$$\Delta^-(u) = \begin{cases} 1 & \text{при } u \leq -1, \\ 0 & \text{при } u > -1; \end{cases} \quad \Delta_0^-(u) = \begin{cases} 1 & \text{при } u \leq 0, \\ 0 & \text{при } u > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь введенную в (10.10) функцию $v_1(u)$. Из представления (9.11) следует, что для правой части первого из уравнений (10.9) справедлива асимптотическая формула

$$\Phi_1(u) = -2\tilde{\gamma}_{\xi}^{\sim} u^2 + O\left(\frac{1}{|u|}\right) \quad \text{при } u \rightarrow -\infty.$$

Так как функция $1/\mathcal{M}(u)$ при $u \rightarrow -\infty$ экспоненциально убывает (см. (11.3)), то сходимость несобственного интеграла в формуле (10.10) очевидна. Таким образом, функция $v_1(u)$ определена и бесконечно дифференцируема на всей оси u . Для отыскания асимптотики функции $v_1(u)$ при $u \rightarrow -\infty$ можно применить, например, правило Лопиталя, учитывая представление (11.3); в результате мы приходим к формуле (11.1) при $n=1$. Асимптотика функции $v_1(u)$ при $u \rightarrow +\infty$, указанная в (11.2), находится интегрированием асимптотического представления

$$\frac{\Phi_1(u)}{\mathcal{M}(u)} = \frac{\tilde{\gamma}_{\xi}^{\sim}}{u} + O\left(\frac{1}{u^3}\right) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty,$$

получаемого для подынтегральной функции в (10.10) с помощью формул (11.4) и (9.12).

Далее доказательство леммы проводится по индукции. Допустим, что для функций $v_1(u), \dots, v_{n-1}(u)$ утверждение леммы верно. Тогда, привлекая формулы (10.8) и (10.6), найдем асимптотические представления для правой части n -го уравнения (10.9):

$$\Phi_n(u) = - \sum_{\nu=0}^{[n/2]} \frac{2(-1)^{\nu} \tilde{\gamma}_{\xi}^{\sim(n-2\nu)} \eta^{\nu}}{\nu! (n-2\nu)!} u^{n+1} + O(|u|^{n-2})$$

при $u \rightarrow -\infty$; (11.5)

$$\Phi_n(u) = \frac{\tilde{\gamma}_{\xi}^{\sim(n)}}{n!} u^{n-2} + O(u^{n-4}) \quad \text{при } u \rightarrow +\infty. \quad (11.6)$$

Так как функция $1/\mathcal{M}(u)$ при $u \rightarrow -\infty$ экспоненциально убывает, то сходимость несобственного интеграла в формуле (10.12) очевидна. Учитывая соотношения (11.3) и (11.4), нетрудно убедиться в справедливости асимптотических формул (11.1) и (11.2).

Лемма 6. Пусть $F_0(u)$ — определенная и гладкая на всей прямой функция, принимающая положительные значения, причем $F_0(u) = 1$ при $u \leq -1$ и $F_0(u) = \ln u$

при $u \geq \varepsilon$;

$$F_1(u) = \begin{cases} |x| & \text{при } |x| > \frac{1}{2}, \\ x^2 + \frac{1}{4} & \text{при } |x| < \frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$F_n(u) = 1 + |u|^n, \quad n \geq 2. \quad (11.7)$$

При достаточно малых ε существует такая константа $C_n > 0$, что производная в силу уравнения (10.2) положительна в каждой точке кривой

$$\mathcal{K}_1^\varepsilon(u, v) \equiv v - V_n(u, \mu) + C_n \mu^{n+1} F_n(u) = 0, \quad -\omega_1 \leq u \leq \omega_2, \quad (11.8)$$

и отрицательна в каждой точке кривой

$$\mathcal{K}_2^\varepsilon(u, v) \equiv v - V_n(u, \mu) - C_n \mu^{n+1} F_n(u) = 0, \quad -\omega_1 \leq u \leq \omega_2. \quad (11.9)$$

Производная в силу уравнения (10.2) в произвольной точке кривой (11.8) равна

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathcal{K}_1}{du} \right|_{(10.2)} &= \left. \frac{dv}{du} \right|_{(10.2)} - \frac{dV_n(u, \mu)}{du} + \frac{d}{du} C_n \mu^{n+1} F_n(u) = \\ &= \frac{\tilde{\gamma}(\mu u, \mu^2 V_n(u, \mu) - C_n \mu^{n+3} F_n(u))}{u^2 + V_n(u, \mu) - C_n \mu^{n+1} F_n(u)} - \\ &\quad - \frac{dV_n(u, \mu)}{du} + C_n \mu^{n+1} F_n'(u). \end{aligned}$$

Найдем знак этого выражения при достаточно малых ε , считая, что $-\omega_1 \leq u \leq \omega_2$ (см. (10.14), (10.18)).

По формуле Тейлора получаем

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\gamma}(\mu u, \mu^2 V_n(u, \mu) - C_n \mu^{n+3} F_n(u))}{u^2 + V_n(u, \mu) - C_n \mu^{n+1} F_n(u)} &= \frac{1}{u^2 + v_0(u)} + \\ &+ \mathfrak{M}_1^* \mu + \dots + \mathfrak{M}_n^* \mu^n + \mathfrak{M}_{n+1}^* \mu^{n+1} + \mathfrak{M}_{n+2}^* \mu^{n+2}. \quad (11.10) \end{aligned}$$

Воспользуемся формулами (10.5) и (10.6), выбрав в них величины v_k , $k \geq 0$, следующим образом:

$$\begin{aligned} v_0 &= v_0(u); & v_i &= v_i(u), \quad i = 1, \dots, n; \\ v_{n+1} &= -C_n F_n(u); & v_j &= 0, \quad j \geq n+2. \end{aligned}$$

Ясно, что выбор величин v_{n+1} , v_{n+2} , ... никак не отражается на коэффициентах \mathfrak{M}_1^* , ..., \mathfrak{M}_n^* разложения (10.5), а потому

$$\mathfrak{M}_k^* = \mathfrak{M}_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (11.11)$$

(в случае $n=0$ эти равенства, естественно, не присутствуют). Далее, так как величина v_{n+1} входит в выражение для коэффициента \mathfrak{M}_{n+1} лишь один раз, то, привлекая формулу (10.8) при $k=n+1$ и подставляя туда вместо v_{n+1} функцию $-C_n F_n(u)$, можем записать

$$\mathfrak{M}_{n+1}^* = \Phi_{n+1}(u) + \frac{C_n F_n(u)}{[u^2 + v_0(u)]^2}. \quad (11.12)$$

Наконец, поскольку функция $F_n(u)$ и при $u \rightarrow -\infty$, и при $u \rightarrow +\infty$ имеет такой же порядок роста, как и функция $|v_{n+1}(u)|$ (см. (11.1), (11.2)), а $v_j=0$, $j \geq n+2$, то коэффициент \mathfrak{M}_{n+2}^* остаточного члена формулы (11.10) в силу (10.8) имеет ту же асимптотику при $u \rightarrow -\infty$ и при $u \rightarrow +\infty$, что и функция $\Phi_{n+2}(u)$. Поэтому на основании асимптотических представлений (11.5) и (11.6)

$$\left| \frac{\mathfrak{M}_{n+2}^*}{u^{n+3}} \right| \leq M_{n+2}, \quad -\infty < u \leq -1; \quad (11.13)$$

$$\left| \frac{\mathfrak{M}_{n+2}^*}{u^n} \right| \leq M_{n+2}, \quad 1 \leq u < \infty. \quad (11.14)$$

Соотношения (11.10)–(11.12) и (10.8) позволяют утверждать, что

$$\frac{d\mathfrak{K}_1}{du} \Big|_{(10.2)} = \mu^{n+1} \left\{ \Phi_{n+1}(u) + \frac{C_n F_n(u)}{[u^2 + v_0(u)]^2} + C_n F_n'(u) + \mu \mathfrak{M}_{n+2}^* \right\}. \quad (11.15)$$

Для определения знака этой производной рассмотрим отдельно строго отрицательные, строго положительные и лежащие вблизи нуля значения u . Будем считать, что $n \geq 2$ (см. (11.7)); в случаях $n=1$ и $n=0$ рассуждения изменяются несущественно.

На отрезке $-\omega_1 \leq u \leq -\sqrt[n]{n/3}$, учитывая соотношения (11.13) и (10.14), можно переписать равенство (11.15) в виде

$$\frac{d\mathfrak{K}_1}{du} \Big|_{(10.2)} = \mu^{n+1} |u|^{n+2} \left\{ C_n \left(\frac{1}{u^2 [u^2 + v_0(u)]^2} - \frac{n}{|u|^3} \right) + \frac{\Phi_{n+1}(u)}{|u|^{n+2}} + \frac{C_n}{|u|^{n+2} [u^2 + v_0(u)]^2} + O(\sigma_1) \right\},$$

где символ $O(\sigma_1)$ означает член, имеющий порядок малости не ниже ε^{λ_1} , $0 < \lambda_1 < 1/3$, при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно на указанном отрезке. С помощью асимптотического пред-

ставления (11.5) и справедливого при всех $u \leq -\sqrt[3]{n/3}$ неравенства (см. (9.10))

$$\frac{1}{u^2 [u^2 + v_0(u)]^2} - \frac{n}{|u|^3} > 1,$$

убеждаемся, что, если выбрать константу $C_n > 0$ достаточно большой, выражение в фигурных скобках будет строго положительным на всем отрезке $-\omega_1 \leq u \leq -\sqrt[3]{n/3}$.

На отрезке $1 \leq u \leq \omega_2$, учитывая соотношения (11.14) и (10.14), можно переписать равенство (11.15) в виде

$$\left. \frac{d\mathcal{K}_1}{du} \right|_{(10.2)} = \mu^{n+1} u^{n-1} \left\{ nC_n + \frac{\Phi_{n+1}(u)}{u^{n-1}} + \right. \\ \left. + \frac{C_n}{u^{n-1} [u^2 + v_0(u)]^2} + \frac{C_n u}{[u^2 + v_0(u)]^2} + O(\sigma_2) \right\},$$

где символ $O(\sigma_2)$ означает член, имеющий порядок малости не ниже ε^{λ_2} , $0 < \lambda_2 < 1/3$, при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно на указанном отрезке. С помощью асимптотического представления (11.6) убеждаемся, что, если выбрать константу $C_n > 0$ достаточно большой, выражение в фигурных скобках будет строго положительным на всем отрезке $1 \leq u \leq \omega_2$.

Наконец, очевидно, что, если выбрать константу $C_n > 0$ достаточно большой, выражение в фигурных скобках в формуле (11.15) будет строго положительным на всем отрезке $-\sqrt[3]{n/3} \leq u \leq 1$. Следовательно, в каждой точке кривой (11.8) можно обеспечить неравенство

$$\left. \frac{d\mathcal{K}_1}{du} \right|_{(10.2)} \geq k > 0.$$

Аналогично проверяется утверждение леммы относительно знака производной в силу уравнения (10.2) в каждой точке кривой (11.9).

Следующая лемма решает вопрос о возможности асимптотического приближения отрезков решений уравнения (10.2) частичными суммами ряда (10.4).

Лемма 7. Пусть $v = v(u, \mu)$ — решение уравнения (10.2) с начальным значением при $u = -\omega_1$, удовлетворяющим для достаточно малых ε условию

$$|v(-\omega_1, \mu) - V_k(-\omega_1, \mu)| < C \mu^{k+1} \omega_1^k, \quad C > 0. \quad (11.16)$$

Тогда при достаточно малых ε и при любом целом $k^* \leq k$

существует такая константа $C_k > 0$, что справедливы оценки

$$\begin{aligned} |v(u, \mu) - V_k(u, \mu)| &< C_k \mu^{k+1} F_k(u), \quad -\omega_1 \leq u \leq 0; \\ |v(u, \mu) - V_{k^*}(u, \mu)| &< C_k \mu^{k^*+1} F_{k^*}(u), \quad 0 \leq u \leq \omega_2. \end{aligned} \quad (11.17)$$

Лемма 7 непосредственно вытекает из леммы 6. В самом деле, рассмотрим отвечающую отрезку $-\omega_1 \leq u \leq 0$ часть полосы π между кривыми (11.8) и (11.9) при $n=k$, причем пусть константа $C_k > 0$ столь велика, что утверждение леммы 6 выполнено. Если решение $v = v(u, \mu)$ уравнения (10.2) удовлетворяет начальному условию (11.16), то (увеличив, если надо, константу C_k) можно считать, что начальная точка $(-\omega_1, v(-\omega_1, \mu))$ находится в полосе π . В силу леммы 6 любое решение уравнения (10.2), начинающееся в произвольной точке полосы π , не пересекает ни кривую $\mathcal{K}_1(u, v) = 0$, ни кривую $\mathcal{K}_2(u, v) = 0$, а потому график функции $v = v(u, \mu)$ лежит внутри полосы π при изменении u на отрезке $-\omega_1 \leq u \leq 0$. Отсюда следует первая из оценок (11.17). Далее, рассмотрим отвечающую отрезку $0 \leq u \leq \omega_2$ часть полосы π^* между кривыми (11.8) и (11.9) при $n=k^*$. Так как $k^* \leq k$, то ясно, что константу $C_k > 0$ можно взять столь большой, чтобы точка $(0, v(0, \mu))$ находилась в полосе π^* и было выполнено утверждение леммы 6. Но тогда, очевидно, справедлива вторая из оценок (11.17).

Возвращаясь к координатам ξ, η по формулам (8.1), переформулируем лемму 7 как утверждение о возможности построения асимптотических приближений типа (10.16) — (10.18) для отрезков траекторий системы (5.6).

Теорема IV. Пусть λ_1 и λ_2 — произвольные числа, подчиненные неравенствам $0 < \lambda_1 < 1/3$, $0 < \lambda_2 < 1/3$, функция $V_n(u, \mu)$, $n \geq 0$, определена формулой (10.13), а $\eta = \tilde{\eta}(\xi, \mu)$ — решение уравнения (6.2) с начальным значением при $\xi = -\sigma_1$, $\sigma_1 = \varepsilon^{\lambda_1}$, удовлетворяющим для достаточно малых ε условию

$$\left| \tilde{\eta}(-\sigma_1, \mu) - \mu^2 V_n\left(-\frac{\sigma_1}{\mu}, \mu\right) \right| < C \varepsilon \sigma_1^n, \quad C > 0. \quad (11.18)$$

Тогда при достаточно малых ε это решение определено на всем отрезке $-\sigma_1 \leq \xi \leq \sigma_2$, $\sigma_2 = \varepsilon^{\lambda_2}$, и представимо

в виде

$$\bar{\eta}(\xi, \mu) = \begin{cases} \mu^2 V_n \left(\frac{\xi}{\mu}, \mu \right) + \mathfrak{N}_n(\xi, \varepsilon), & -\sigma_1 \leq \xi \leq 0, \\ \mu^2 V_{n^*} \left(\frac{\xi}{\mu}, \mu \right) + \mathfrak{N}_{n^*}(\xi, \varepsilon), & 0 \leq \xi \leq \sigma_2, \end{cases}$$

где n^* — произвольное целое число, подчиненное условию $0 \leq n^* \leq n$, причем равномерно на отрезке $-\sigma_1 \leq \xi \leq 0$

$$|\mathfrak{N}_n(\xi, \varepsilon)| < C_n \varepsilon^{1+n\lambda_1}, \quad C_n = \text{const} > 0,$$

и равномерно на отрезке $0 \leq \xi \leq \sigma_2$

$$|\mathfrak{N}_{n^*}(\xi, \varepsilon)| < \begin{cases} C_{n^*} \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} & \text{при } n^* = 0, \\ C_{n^*} \varepsilon^{1+n^*\lambda_2} & \text{при } n^* \geq 1, \end{cases} \quad C_{n^*} = \text{const} > 0.$$

§ 12. Асимптотические ряды

для коэффициентов разложения вблизи точки срыва

Нам потребуются некоторые более глубокие свойства коэффициентов $v_n(u)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, разложения (10.4) и, в частности, представления этих функций в виде асимптотических рядов при $u \rightarrow -\infty$ и при $u \rightarrow +\infty$. Такие ряды получаются методами, обычно применяемыми для отыскания асимптотических разложений решений дифференциальных уравнений (см., например, [10], [17], [65]). Не воспроизводя здесь во всех деталях довольно громоздкие вычисления, мы сформулируем окончательные результаты и наметим пути их доказательства.

Займемся сначала функцией $v_0(u)$, введенной в § 9. Подчеркнем, что эта функция не зависит от конкретного вида системы (8.4), или, что то же самое, уравнения (10.2).

При неположительных значениях аргумента определим функцию $z_0(u)$ соотношением

$$v_0(u) = -u^2 + z_0(u), \quad -\infty < u \leq 0. \quad (12.1)$$

Из (9.1) получается уравнение

$$\frac{dz}{du} = 2u + \frac{1}{z},$$

которому удовлетворяет функция $z_0(u)$, причем $z_0(u)$ — его единственное решение, стремящееся к нулю при $u \rightarrow -\infty$. С помощью этого уравнения нетрудно убе-

даться, что для функции $z_0(u)$ справедливо следующее разложение в асимптотический ряд *):

$$z_0(u)^- = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k^0}{u^{3k+1}}; \quad (12.2)$$

коэффициенты a_k^0 этого ряда можно последовательно вычислять по рекуррентной формуле

$$a_0^0 = -\frac{1}{2}, \quad a_k^0 = -\frac{3k-1}{4} \sum_{\nu=0}^{k-1} a_{\nu}^0 a_{k-1-\nu}^0, \quad k \geq 1. \quad (12.3)$$

В частности, легко проверить, что (ср. с (9.11))

$$z_0(u)^- = -\frac{1}{2u} - \frac{1}{8u^4} - \frac{5}{32u^7} - \frac{11}{32u^{10}} - \frac{539}{512u^{13}} - \dots \quad (12.4)$$

Асимптотическое разложение функции $v_0(u)$ при $u \rightarrow +\infty$ находится непосредственно из уравнения (9.1). Как и любое ограниченное на всей положительной полуоси решение этого уравнения, функция $v_0(u)$ имеет асимптотический ряд вида **)

$$v_0(u)^+ = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{k,0}^0}{u^k} + b_{0,0}^0. \quad (12.5)$$

Коэффициенты $b_{k,0}^0$, $k \neq 0$, ряда (12.5) можно последовательно вычислять по рекуррентной формуле

$$b_{1,0}^0 = -1, \quad (12.6)$$

$$b_{k,0}^0 = -\frac{k-2}{k} (b_{0,0}^0 b_{k-2,0}^0 + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{k-3} b_{\nu,0}^0 b_{k-2-\nu,0}^0), \quad k \geq 2.$$

Что касается константы $b_{0,0}^0$, то она должна быть найдена, исходя из специфики определения решения $v_0(u)$, выделяющей эту функцию из множества всех ограничен-

*) Асимптотическое разложение функции $F(x)$, $-\infty < x < \infty$, при $x \rightarrow -\infty$ условимся обозначать через $F(x)^-$, а при $x \rightarrow +\infty$ — через $F(x)^+$.

***) Ряды (суммы), в которых суммирование ведется по всем значениям индекса, за исключением значения, следующего за начальным будем обозначать символом \sum^* , например,

$$\sum_{k=m}^{\infty} c_k \equiv \sum_{\substack{k=m, \\ k \neq m+1}}^{\infty} c_k = c_m + c_{m+2} + c_{m+3} + \dots$$

ных при $u \rightarrow +\infty$ решений уравнения (9.1), а именно (см. (9.9)):

$$b_{0,0}^0 = \Omega_0. \quad (12.7)$$

В частности, легко проверить, что (ср. с (9.12))

$$v_0(u)^+ = \Omega_0 - \frac{1}{u} + \frac{\Omega_0}{3u^3} - \frac{1}{4u^4} - \frac{\Omega_0^2}{5u^5} + \frac{7\Omega_0}{18u^6} + \frac{4\Omega_0^3 - 5}{28u^7} + \dots \quad (12.8)$$

Обратимся теперь к функциям $v_n(u)$, $n = 1, 2, \dots$, введенным в § 10. Оказывается, что функция $v_n(u)$ имеет при $u \rightarrow -\infty$ следующий асимптотический ряд*):

$$v_n(u)^- = u^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k^n}{u^{3k}}, \quad n \geq 1, \quad (12.9)$$

причем можно получить рекуррентную формулу, позволяющую последовательно вычислять коэффициенты a_k^n этого ряда. В частности, легко проверить, что (ср. с (11.1))

$$\begin{aligned} v_1(u)^- &= -\frac{\tilde{\gamma}'_{\xi}}{2} - \frac{\tilde{\gamma}'_{\xi}}{8u^3} + \dots, \\ v_2(u)^- &= \frac{2\tilde{\gamma}'_{\eta} - \tilde{\gamma}_{\xi}^{(2)}}{4} u + \frac{\tilde{\gamma}'_{\eta}}{4u^2} + \dots, \\ v_3(u)^- &= \frac{6\tilde{\gamma}''_{\xi\eta} - \tilde{\gamma}_{\xi}^{(3)}}{12} u^2 + \\ &+ \frac{\tilde{\gamma}_{\xi}^{(3)} + 6\tilde{\gamma}''_{\eta\xi} + 6\tilde{\gamma}'_{\xi}\tilde{\gamma}'_{\eta} + 3\tilde{\gamma}_{\xi}\tilde{\gamma}_{\xi}^{(2)}}{48u} + \dots \end{aligned} \quad (12.10)$$

Весьма важным фактом является наличие непосредственной связи между коэффициентами асимптотических рядов (12.2), (12.9) и (7.2):

$$a_k^n = \frac{1}{\gamma_{k+1}^n} \eta_n^{k+1}, \quad n \geq 0, \quad k \geq 0. \quad (12.11)$$

Схематически эта связь представлена на рис. 38: в строках таблицы расположены коэффициенты разложений функций $\gamma^{-i}\eta_i(\xi)$, $i = 1, 2, \dots$, по степеням ξ при $\xi \rightarrow -0$, а столбцы таблицы содержат коэффициенты разложений функций $z_0(u)$, $v_m(u)$, $m = 1, 2, \dots$, по тем же степеням u при $u \rightarrow -\infty$ (в скобках указаны соответствующие степени).

*) При $n=0$ формула (12.9) дает асимптотическое разложение (12.2) функции $z_0(u)$ при $u \rightarrow -\infty$.

Для доказательства формулы (12.9) достаточно более подробно провести вычисления, с помощью которых была

	$z_0(u)$	$v_1(u)$	$v_2(u)$...	$v_m(u)$...
$\frac{1}{\gamma} \eta_1(\xi)$	$\frac{\eta_0^1}{\gamma} = a_0^0$ (-1)	$\frac{\eta_1^1}{\gamma} = a_0^1$ (0)	$\frac{\eta_2^1}{\gamma} = a_0^2$ (1)	...	$\frac{\eta_m^1}{\gamma} = a_0^m$ (m-1)	...
$\frac{1}{\gamma^2} \eta_2(\xi)$	$\frac{\eta_0^2}{\gamma^2} = a_1^0$ (-4)	$\frac{\eta_1^2}{\gamma^2} = a_1^1$ (-3)	$\frac{\eta_2^2}{\gamma^2} = a_1^2$ (-2)	...	$\frac{\eta_m^2}{\gamma^2} = a_1^m$ (m-4)	...
$\frac{1}{\gamma^3} \eta_3(\xi)$	$\frac{\eta_0^3}{\gamma^3} = a_2^0$ (-7)	$\frac{\eta_1^3}{\gamma^3} = a_2^1$ (-6)	$\frac{\eta_2^3}{\gamma^3} = a_2^2$ (-5)	...	$\frac{\eta_m^3}{\gamma^3} = a_2^m$ (m-7)	...
...
$\frac{1}{\gamma^l} \eta_l(\xi)$	$\frac{\eta_0^l}{\gamma^l} = a_{l-1}^0$ (-3l+2)	$\frac{\eta_1^l}{\gamma^l} = a_{l-1}^1$ (-3l+3)	$\frac{\eta_2^l}{\gamma^l} = a_{l-1}^2$ (-3l+4)	...	$\frac{\eta_m^l}{\gamma^l} = a_{l-1}^m$ (-3l+2+m)	...
...

Рис. 38.

установлена лемма 5. Прежде всего убедимся, что введенная в (10.11) функция $\mathcal{M}(u)$ имеет асимптотический ряд (ср. с (11.3))

$$\mathcal{M}(u)^- = \Re e^{-\frac{4}{3}u^3} u^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k^-}{u^{3k}}.$$

Допустив справедливость разложения вида (12.9) для функций $v_1(u), \dots, v_{n-1}(u)$, легко проверить, что

$$\sum_{\substack{i_1 + \dots + i_n = l, \\ i_j \geq 2}} v_{i_1-2} \dots v_{i_n-2} = u^{l-3v} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k^l \cdot v}{u^{3k}}, \quad (12.12)$$

где под v_0 следует понимать функцию $z_0(u)$ с асимптотическим рядом (12.2). Теперь, исходя из самого определения (10.12) функции $v_n(u)$ и используя формулы (10.8),

(10.6) и (12.12), после элементарных выкладок найдем асимптотический ряд для функции $\Phi_n(u)$ при $u \rightarrow -\infty$, а затем получим и разложение (12.9).

Равенство (12.11) при $n=0$ и любом $k \geq 0$ непосредственно вытекает из сравнения формул (7.3) и (12.3). Для доказательства этого равенства в случае произвольного $n \geq 1$ необходимо воспользоваться общими рекуррентными формулами, т.е. подсчитать коэффициент η_n^{k+1} при степени ξ^{n-3k-1} в разложении функции $\eta_{k+1}(\xi)$ при $\xi \rightarrow -0$, исходя из формулы (6.10), и коэффициент a_k^n

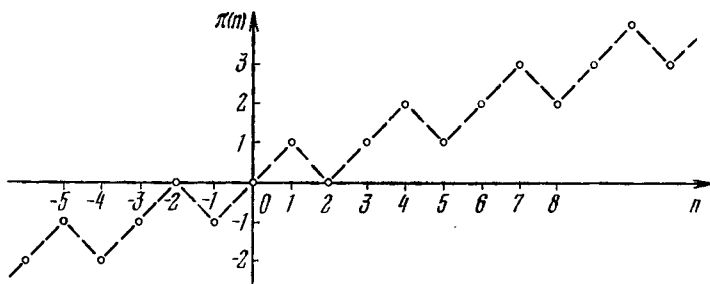


Рис. 39.

при степени u^{-3k} в разложении функции $v_n(u)$ при $u \rightarrow -\infty$, исходя из формул (10.12), (10.11), (10.8), (10.6).

Асимптотическое разложение функции $v_n(u)$ при $u \rightarrow +\infty$ имеет уже не степенную, а более сложную структуру—оно содержит члены вида $u^k \ln^v u$. Оказывается, что для функции $v_n(u)$ справедливо следующее разложение в асимптотический ряд*):

$$v_n(u)^+ = \sum_{\nu=0}^n \sum_{k=3\nu+1-n}^{\infty} \frac{b_{k,\nu}^n \ln^\nu u}{u^k} + b_{0,\pi(n)}^n \ln^{\pi(n)} u, \quad n \geq 0, \quad (12.13)$$

где

$$\pi(n) = \left[\frac{n}{3} \right] + \begin{cases} 0, & \text{если } n \not\equiv 1 \pmod{3}, \\ 1, & \text{если } n \equiv 1 \pmod{3}, \end{cases} \quad (12.14)$$

—целочисленная функция целочисленного аргумента (ее график представлен на рис. 39). Для коэффициентов раз-

* При $n=0$ формула (12.13) совпадает с асимптотическим разложением (12.5) функции $v_0(u)$ при $u \rightarrow +\infty$.

ложения (12.13) можно получить рекуррентную формулу весьма громоздкого вида. Существенно, однако, подчеркнуть, что эта формула позволяет последовательно вычислять коэффициенты $b_{k, \nu}^n$, если известна величина $b_{0, 0}^n$. Что касается константы

$$b_{0, 0}^n = \Omega_n, \quad (12.15)$$

то она характеризует то специфическое свойство решения $v_n(u)$, которое выделяет эту функцию из множества всех решений n -го уравнения (10.9) (ср. с (12.7)). В частности, легко проверить, что (ср. с (11.2))

$$\begin{aligned} v_1(u)^+ &= \tilde{\gamma}'_{\xi} \ln u + \Omega_1 + \frac{\Omega_0 \tilde{\gamma}'_{\xi}}{2u^2} + \frac{\tilde{\gamma}'_{\xi} \ln u}{3u^3} + \frac{3\Omega_1 - 2\tilde{\gamma}'_{\xi}}{9u^3} + \dots, \\ v_2(u)^+ &= \frac{\tilde{\gamma}_{\xi}^{(2)}}{2} u + \Omega_2 + \frac{\Omega_0 (\tilde{\gamma}_{\xi}^{(2)} - 2\tilde{\gamma}'_{\eta})}{2u} + \\ &+ \frac{\tilde{\gamma}_{\xi}^{(2)} \ln u}{2u^2} + \frac{2\Omega_1 \tilde{\gamma}'_{\xi} + 2\tilde{\gamma}'_{\eta} + \tilde{\gamma}_{\xi}^{(2)}}{4u^2} + \dots, \\ v_3(u)^+ &= \frac{\tilde{\gamma}_{\xi}^{(3)}}{12} u^2 + \frac{\Omega_0 (6\tilde{\gamma}_{\xi}'' - \tilde{\gamma}_{\xi}^{(3)})}{6} \ln u + \Omega_3 + \\ &+ \frac{\tilde{\gamma}'_{\xi} (\tilde{\gamma}_{\xi}^{(2)} - 2\tilde{\gamma}'_{\eta}) \ln u}{2u} + \dots \end{aligned} \quad (12.16)$$

Для доказательства формулы (12.13) достаточно более подробно провести вычисления, с помощью которых была установлена лемма 5. Прежде всего убедимся, что функция $\mathcal{M}(u)$ имеет асимптотический ряд (ср. с (11.4))

$$\mathcal{M}(u)^+ = 1 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{m_k^+}{u^k}.$$

Допустив справедливость разложения вида (12.13) для функций $v_1(u)$, ..., $v_{n-1}(u)$, можно после элементарных выкладок найти асимптотический ряд при $u \rightarrow +\infty$ для выражения

$$\sum_{\substack{i_1 + \dots + i_{\nu} = l, \\ i_j \geq 0}} v_{i_1}(u) \dots v_{i_{\nu}}(u),$$

а затем, используя формулы (10.8) и (10.6), получить разложение

$$\Phi_n(u)^+ = \sum_{\nu=0}^n \sum_{k=3\nu+2-n}^{\infty} \frac{\tilde{b}_{k, \nu}^n \ln^{\nu} u}{u^k}.$$

Формула (12.13) теперь следует непосредственно из определения (10.12) функции $v_n(u)$.

Обратим внимание еще на одно важное обстоятельство. Очевидно, что функции $v_n(u)$, $n \geq 1$, зависят от конкретного вида системы (8.4) или, что то же самое, уравнения (10.2). Однако характер этой зависимости легко усматривается, если проанализировать структуру формул (10.6). Именно, каждая функция $v_n(u)$, $n \geq 1$, является линейной комбинацией некоторого числа универсальных функций (не зависящих от конкретного вида уравнения (10.2)) с коэффициентами, выражающимися через значения функции $\tilde{\gamma}(\xi, \eta)$ и нескольких ее производных в начале координат. Например, можно проверить, что

$$\begin{aligned} v_1(u) &= \tilde{\gamma}'_{\xi} v_1(u), \\ v_1(u) &= \mathcal{M}(u) \int_{-\infty}^u \theta \frac{dv_0}{d\theta} \frac{d\theta}{\mathcal{M}(\theta)}; \\ v_2(u) &= \frac{\tilde{\gamma}_{\xi}^{(2)}}{2} v_{2,1}(u) + \tilde{\gamma}'_{\eta} v_{2,2}(u) + \tilde{\gamma}_{\xi}^{\prime 2} v_{2,3}(u), \end{aligned} \quad (12.17)$$

где

$$\begin{aligned} v_{2,1}(u) &= \mathcal{M}(u) \int_{-\infty}^u \theta^2 \frac{dv_0}{d\theta} \frac{d\theta}{\mathcal{M}(\theta)}, \\ v_{2,2}(u) &= \mathcal{M}(u) \int_{-\infty}^u v_0(\theta) \frac{dv_0}{d\theta} \frac{d\theta}{\mathcal{M}(\theta)}, \\ v_{2,3}(u) &= \mathcal{M}(u) \int_{-\infty}^u v_1(\theta) \left(\frac{dv_0}{d\theta} \right)^2 \left[v_1(\theta) \frac{dv_0}{d\theta} - \theta \right] \frac{d\theta}{\mathcal{M}(\theta)}. \end{aligned}$$

Таким образом, для определения коэффициентов ряда (10.4) нужно знать лишь значения функции $\tilde{\gamma}(\xi, \eta)$ и ее производных в начале координат и не требуется интегрировать невырожденную систему (8.4). Аналогичное утверждение справедливо относительно констант (12.15).

§ 13. Регуляризация несобственных интегралов

В дальнейшем нам придется рассматривать интегралы с переменным пределом интегрирования, принадлежащим некоторому промежутку (отрезку или полуоси) с сингу-

лярным концом, так что подынтегральная функция на всем этом промежутке в обычном смысле не интегрируется. Для получения асимптотики таких интегралов при приближении переменного предела интегрирования к сингулярному концу промежутка необходимо ввести обобщенные интегралы специального вида, т. е. определить некую регуляризацию несобственных интегралов. Используемый ниже метод регуляризации, основанный на идее вычитания неинтегрируемых особенностей подынтегральной функции, восходит к Адамару (см. [1]).

Пусть $h(x) \in C^\infty [0, p]$, где $p > 0$ — фиксированное число, и $h(0) \neq 0$, а n — некоторое натуральное число. Найдем асимптотическое разложение при $x \rightarrow +0$ функции

$$H(x) = \int_x^p \frac{h(\xi)}{\xi^n} d\xi, \quad (13.1)$$

определенной, очевидно, при всех $0 < x \leq p$. Вычитая из функции $h(\xi)$ первые n членов ее разложения в ряд Тейлора в нуле, можно переписать функцию (13.1) в виде

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_x^p \frac{1}{\xi^n} \left[h(\xi) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} \xi^k \right] d\xi + \\ &+ \int_x^p \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} \frac{d\xi}{\xi^{n-k}} = \int_0^p \frac{1}{\xi^n} \left[h(\xi) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} \xi^k \right] d\xi - \\ &- \int_0^x \frac{1}{\xi^n} \left[h(\xi) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} \xi^k \right] d\xi - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{h^{(k)}(0)}{k!(n-k-1)p^{n-k-1}} + \\ &+ \frac{h^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \ln p + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{h^{(k)}(0)}{k!(n-k-1)x^{n-k-1}} - \frac{h^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \ln x. \end{aligned}$$

Первый из получившихся интегралов существует, а асимптотическое разложение второго при $x \rightarrow +0$ легко находится. Поэтому функция (13.1) при $x \rightarrow +0$ имеет

следующий асимптотический ряд:

$$H(x) = - \sum_{\substack{k=1-n, \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{h^{(n+k-1)}(0)}{(n+k-1)! k} x^k - \frac{h^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \ln x + \\ + \int_0^p \frac{h(\xi)}{\xi^n} d\xi, \quad x \rightarrow +0, \quad (13.2)$$

где

$$\int_0^p \frac{h(x)}{x^n} dx = \int_0^p \left[\frac{h(x)}{x^n} - \frac{h(0)}{x^n} - \frac{h'(0)}{1! x^{n-1}} - \dots - \frac{h^{(n-1)}(0)}{(n-1)! x} \right] dx - \\ - \frac{h(0)}{(n-1)! p^{n-1}} - \frac{h'(0)}{1! (n-2)! p^{n-2}} - \dots - \frac{h^{(n-2)}(0)}{(n-2)! p} + \frac{h^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \ln p \quad (13.3)$$

— вполне определенная константа.

Соотношение (13.3) представляет собой определение специального *обобщенного интеграла* по отрезку $0 \leq x \leq p$ от функции вида $x^{-n}h(x)$, не интегрируемой в обычном смысле на этом отрезке.

Укажем некоторые свойства обобщенного интеграла (13.3). Очевидно, что он является линейным функционалом:

$$\int_0^p \left[\alpha_1 \frac{h_1(x)}{x^n} + \alpha_2 \frac{h_2(x)}{x^m} \right] dx = \alpha_1 \int_0^p \frac{h_1(x)}{x^n} dx + \alpha_2 \int_0^p \frac{h_2(x)}{x^m} dx. \quad (13.4)$$

Непосредственно проверяется равенство

$$\int_0^p \frac{h(x)}{x^n} dx + \int_0^{p^*} \frac{h(x)}{x^n} dx = \int_0^{p^*} \frac{h(x)}{x^n} dx, \quad p > 0, \quad p^* > 0. \quad (13.5)$$

Если рассмотреть обобщенный в смысле (13.3) интеграл с переменным верхним пределом, то из самого определения следует аналог формулы Ньютона—Лейбница:

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{h(\xi)}{\xi^n} d\xi = \frac{h(x)}{x^n}, \quad 0 < x \leq p. \quad (13.6)$$

Формула (13.6) позволяет с помощью обобщенного инте-

грала записывать решение некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярной правой частью. Например, решением уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h(x)}{x^n}, \quad h(x) \in C^\infty [0, p], \quad h(0) \neq 0, \quad (13.7)$$

является функция

$$y = C + \int_0^x \frac{h(\xi)}{\xi^n} d\xi, \quad 0 < x \leq p, \quad (13.8)$$

где C — произвольная постоянная. Отметим, что функция (13.8) не определена при $x=0$ и неограниченно возрастает по абсолютной величине при $x \rightarrow +0$; ее асимптотика при $x \rightarrow +0$ определяется с помощью формулы (13.3).

Понятие обобщенного интеграла распространяется на функции более общего вида. Пусть $f(x) \in C^\infty [0, p]$, $g(x) \in C^\infty [0, p]$, причем $f(0) \neq 0$, а $g(x) \equiv x^n g_1(x)$, где $g_1(x) \neq 0$ на отрезке $0 \leq x \leq p$. Тогда естественно ввести следующее определение:

$$\int_0^p \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int_0^p \frac{h(x)}{x^n} dx, \quad \text{где } h(x) \equiv \frac{f(x)}{g_1(x)}. \quad (13.9)$$

Правило преобразования обобщенного интеграла (13.3) при бесконечно дифференцируемой замене переменной интегрирования

$$x = \varphi(y); \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(q) = p; \quad \varphi'(y) > 0 \quad \text{для } 0 \leq y \leq q, \quad (13.10)$$

дается формулой

$$\begin{aligned} \int_0^p \frac{h(x)}{x^n} dx &= \int_0^q \frac{h(\varphi(y)) \varphi'(y)}{\varphi^n(y)} dy + \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{h^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} \Phi_k(\varphi'(0), \dots, \varphi^{(k)}(0)). \end{aligned} \quad (13.11)$$

Интеграл в правой части формулы (13.11) понимается в смысле (13.9), а $\Phi_k(z_1, \dots, z_k)$, $k=1, \dots, n$, — некоторые универсальные функции, вид которых не зависит

ни от функции $h(x)$, ни от чисел n и p , ни от замены (13.10):

$$\begin{aligned}\Phi_1(z_1) &= \ln |z_1|, \\ \Phi_2(z_1, z_2) &= \frac{z_2}{2z_1^2}, \\ \Phi_3(z_1, z_2, z_3) &= \frac{4z_1z_3 - 9z_2^2}{24z_1^4}, \\ &\dots \dots \dots\end{aligned}\tag{13.12}$$

Наметим доказательство формулы (13.11). Используя определение (13.3), сделаем замену (13.10) в соответствующем обычном интеграле:

$$\begin{aligned}\int_0^p \frac{h(x)}{x^n} dx &= \\ &= \int_0^q \frac{1}{\varphi^n(y)} \left[h(\varphi(y)) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} \varphi^k(y) \right] \varphi'(y) dy - \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{h^{(k)}(0)}{k! (n-k-1) p^{n-k-1}} + \frac{h^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \ln p.\end{aligned}$$

С другой стороны, в соответствии с (13.9), имеем:

$$\begin{aligned}\int_0^q \frac{h(\varphi(y)) \varphi'(y)}{\varphi^n(y)} dy &= \int_0^q \frac{\tilde{h}(y)}{y^n} dy = \\ &= \int_0^q \frac{1}{y^n} \left[\tilde{h}(y) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\tilde{h}^{(k)}(0)}{k!} y^k \right] dy - \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\tilde{h}^{(k)}(0)}{k! (n-k-1) q^{n-k-1}} + \frac{\tilde{h}^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \ln q,\end{aligned}$$

где

$$\tilde{h}(y) = \frac{y^n h(\varphi(y)) \varphi'(y)}{\varphi^n(y)}.\tag{13.13}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 \int_0^p \frac{h(x)}{x^n} dx &= \int_0^q \frac{\tilde{h}(y)}{y^n} dy + \\
 &+ \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^q \left[\frac{1}{y^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\tilde{h}^{(k)}(0)}{k!} y^k - \frac{\varphi'(y)}{\varphi^n(y)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} \varphi^k(y) \right] dy + \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!(n-k-1)} \left[\frac{\tilde{h}^{(k)}(0)}{q^{n-k-1}} - \frac{h^{(k)}(0)}{p^{n-k-1}} \right] - \\
 &\quad - \frac{1}{(n-1)!} [\tilde{h}^{(n-1)}(0) \ln q - h^{(n-1)}(0) \ln p] = \\
 &\quad = \int_0^q \frac{h(\varphi(y)) \varphi'(y)}{\varphi^n(y)} dy + \\
 &\quad + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!(n-k-1)} \left[\frac{\tilde{h}^{(k)}(0)}{\delta^{n-k-1}} - \frac{h^{(k)}(0)}{\varphi^{n-k-1}(\delta)} \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{(n-1)!} [\tilde{h}^{(n-1)}(0) \ln \delta - h^{(n-1)}(0) \ln \varphi(\delta)] \right\}.
 \end{aligned}$$

Далее следует воспользоваться соотношениями

$$\begin{aligned}
 \tilde{h}(0) &= \frac{h(0)}{[\varphi'(0)]^{n-1}}, \\
 \tilde{h}'(0) &= \frac{h'(0)}{[\varphi'(0)]^{n-2}} - (n-2) \frac{\varphi''(0)}{2[\varphi'(0)]^n} h(0), \\
 &\dots \dots \dots \\
 \tilde{h}^{(n-1)}(0) &= h^{(n-1)}(0),
 \end{aligned}$$

получающимися последовательным дифференцированием равенства (13.13). С их помощью нетрудно убедиться, что предел, к которому мы пришли выше, существует и равен внеинтегральному члену формулы (13.11). Как общее соотношение, связывающее $\tilde{h}^{(k)}(0)$ с $h(0)$, $h'(0)$, \dots , $h^{(k)}(0)$, так и выражения для функций $\Phi_k(z_1, \dots, z_k)$, $k=1, \dots, n$, могут быть получены с помощью формулы для k -й производной сложной функции (см., например, [16]).

Если $h(x) \in C^\infty [-p, 0]$, где $p > 0$, и $h(0) \neq 0$, то аналогично (13.3) определяется

$$\oint_{-p}^0 \frac{h(x)}{x^n} dx = \int_{-p}^0 \left[\frac{h(x)}{x^n} - \frac{h(0)}{x^n} - \frac{h'(0)}{1! x^{n-1}} - \dots - \frac{h^{(n-1)}(0)}{(n-1)! x} \right] dx + \\ + \frac{(-1)^{n-1} h(0)}{(n-1)! p^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-2} h'(0)}{1! (n-2)! p^{n-2}} + \dots + \frac{(-1)^{n-2} h^{(n-2)}(0)}{(n-2)! p} - \\ - \frac{h^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \ln p; \quad (13.14)$$

используя этот обобщенный интеграл, не представляет труда выписать для функции

$$H_1(x) = \int_{-p}^x \frac{h(\xi)}{\xi^n} d\xi$$

асимптотическое разложение при $x \rightarrow -0$ (подобное разложению (13.2)). Очевидным образом вводятся также обобщенные интегралы

$$\oint_{\alpha}^{\beta} \frac{h(x)}{(x-\alpha)^n} dx, \quad \oint_{\alpha}^{\beta} \frac{h(x)}{(x-\beta)^n} dx,$$

если $h(x) \in C^\infty [\alpha, \beta]$ и $h(\alpha) \neq 0$ или $h(\beta) \neq 0$ соответственно. Это в свою очередь позволяет производить в обобщенном интеграле (13.3) (или (13.14)) бесконечно дифференцируемую замену переменной интегрирования более общего вида, чем (13.10). Так, правило преобразования интеграла (13.3) при замене

$$x = \varphi(y); \quad \varphi(\alpha) = 0, \quad \varphi(\beta) = p; \quad \varphi'(y) \neq 0 \quad (13.15)$$

дается формулой

$$\oint_0^p \frac{h(x)}{x^n} dx = \oint_{\alpha}^{\beta} \frac{h(\varphi(y)) \varphi'(y)}{\varphi^n(y)} dy + \\ + \sum_{k=1}^n \frac{h^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} \Phi_k(\varphi'(\alpha), \dots, \varphi^{(k)}(\alpha)), \quad (13.16)$$

где $\Phi_k(z_1, \dots, z_k)$, $k = 1, \dots, n$, — те же функции, что и в формуле (13.11) (см. (13.12)).

Использованный прием определения обобщенного интеграла путем вычитания неинтегрируемых особенностей подынтегральной функции вполне применим и для более широкого класса функций, обладающих особенностями не степенного типа, а более сложного. Например, если $h(x) \in C^\infty [0, p]$, где $p > 0$, и $h(0) \neq 0$, а n и m — натуральные числа, то по определению

$$\begin{aligned} \oint_0^p \frac{\ln^m(x)}{x^n} h(x) dx = & \\ = \int_0^p \frac{\ln^m(x)}{x^n} \left[h(x) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{h^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu \right] dx - & \\ - \sum_{\nu=0}^{n-2} \sum_{k=0}^m \frac{m! h^{(\nu)}(0) \ln^k p}{\nu! k! (n-\nu-1)! m-k+1 p^{n-\nu-1}} + \frac{h^{(n-1)}(0) \ln^{m+1} p}{(n-1)! (m+1)}. \end{aligned} \quad (13.17)$$

Свойства этого обобщенного интеграла аналогичны свойствам интеграла (13.3)

Наконец, можно естественным образом ввести понятие обобщенного контурного интеграла

$$\oint_{\Gamma} f(x, y) dx + g(x, y) dy$$

в случае, когда функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ бесконечно дифференцируемы вдоль кривой Γ всюду, кроме конечного числа точек, в которых эти функции имеют степенные или степенно-логарифмические особенности.

До сих пор речь шла об обобщенных интегралах по конечному отрезку интегрирования с одним сингулярным концом. Покажем, как та же идея вычитания неинтегрируемых особенностей подынтегральной функции позволяет в ряде случаев определять обобщенные интегралы и на полуоси (сингулярность — в бесконечности).

Пусть функция $h(x) \in C [0, \infty)$ при больших положительных значениях аргумента раскладывается в асимптотический ряд

$$\begin{aligned} h(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 + \frac{a_{-1}}{x} + \frac{a_{-2}}{x^2} + \dots = \\ = \sum_{k=-n}^{\infty} \frac{a_{-k}}{x^k}, \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (13.18)$$

Найдем асимптотическое разложение при $x \rightarrow +\infty$ функции

$$\tilde{H}(x) = \int_0^x h(\xi) d\xi, \quad (13.19)$$

определенной, очевидно, при всех $0 \leq x < \infty$. Полагая

$$\Delta^+(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{при } 1 \leq x < \infty, \end{cases}$$

перепишем функцию (13.19) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x) &= \int_0^x \left[h(\xi) - \sum_{k=-n}^0 \frac{a_{-k}}{\xi^k} - \frac{a_{-1}\Delta^+(\xi)}{\xi} \right] d\xi + \\ &\quad + \int_0^x \left[\sum_{k=-n}^0 \frac{a_{-k}}{\xi^k} + \frac{a_{-1}\Delta^+(\xi)}{\xi} \right] d\xi = \\ &= \int_0^\infty \left[h(\xi) - \sum_{k=0}^n a_k \xi^k - \frac{a_{-1}\Delta^+(\xi)}{\xi} \right] d\xi - \\ &\quad - \int_x^\infty \left[h(\xi) - \sum_{k=0}^n a_k \xi^k - \frac{a_{-1}\Delta^+(\xi)}{\xi} \right] d\xi + \\ &\quad + \sum_{k=0}^n \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} + a_{-1} \ln x. \end{aligned}$$

Первый из получившихся интегралов существует, а асимптотическое разложение второго при $x \rightarrow +\infty$ легко находится. Поэтому функция (13.19) при $x \rightarrow +\infty$ имеет следующий асимптотический ряд:

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} + a_{-1} \ln x + \\ &\quad + \oint_0^\infty h(\xi) d\xi - \sum_{k=2}^\infty \frac{a_{-k}}{(k-1)x^{k-1}}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (13.20) \end{aligned}$$

где

$$\oint_0^{\infty} h(x) dx = \int_0^{\infty} \left[h(x) - a_n x^n - \dots - a_1 x - a_0 - \frac{a_{-1} \Delta^+(x)}{x} \right] dx \quad (13.21)$$

— вполне определенная константа.

Соотношение (13.21) представляет собой определение обобщенного интеграла по полуоси $0 \leq x < \infty$ от функции со степенным асимптотическим разложением (13.18) при $x \rightarrow +\infty$. Если речь идет о полуоси $-\infty < x \leq 0$, то роль функции $\Delta^+(x)$ играет функция

$$\Delta^-(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -\infty < x \leq -1, \\ 0 & \text{при } -1 < x \leq 0. \end{cases}$$

Аналогично (13.21) вводится обобщенный интеграл по полуоси $0 \leq x < \infty$ от функции, асимптотическое разложение которой при $x \rightarrow +\infty$ имеет степенно-логарифмический характер (например, (12.13)).

§ 14. Асимптотические приближения траектории в конце участка срыва

Как было доказано (см. (11.1), (11.2)), функции $v_i(u)$ неограниченно возрастают (по абсолютной величине) и при $u \rightarrow -\infty$ (для $i=2, 3, \dots$), и при $u \rightarrow +\infty$ (для $i=1, 2, \dots$). Именно этот факт не позволяет использовать ряд (10.4) для получения асимптотических представлений траектории \mathfrak{X}_ε на всем участке срыва, т. е. при изменении переменной ξ на отрезке $-q \leq \xi \leq q$. Чтобы завершить построение асимптотических приближений участка срыва, нам придется теперь привлечь уже не степенное, а более сложное разложение — по величинам $\mu^n \ln^v(1/\mu)$.

В § 6 указывалось, что уравнение участка срыва траектории \mathfrak{X}_ε можно записать в виде (6.1), причем эта функция является решением уравнения (6.2). Условимся вместо ε использовать параметр μ (см. (8.2)). Тогда функцию (6.1) естественно обозначить через

$$\eta = \eta_{\mathfrak{X}}(\xi, \mu) \equiv \eta_{\mathfrak{X}}(\xi, \mu^3/\gamma), \quad -q \leq \xi \leq q, \quad (14.1)$$

а уравнение, которому функция (14.1) удовлетворяет,

переписывается так (ср. с (10.3)):

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \mu^3 \frac{\tilde{\gamma}(\xi, \eta)}{\xi^2 + \eta}. \quad (14.2)$$

Используя уравнение (14.2), будем искать асимптотическое разложение траектории \mathfrak{X}_ε в конце участка срыва — на отрезке $\sigma_2 \leq \xi \leq q$, где $\sigma_2 > 0$ — величина, малая вместе с ε , т. е. $\sigma_2 \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Иначе говоря, речь пойдет об асимптотических приближениях функции

$$\eta = \eta_x^*(\xi, \mu), \quad \sigma_2 \leq \xi \leq q, \quad (14.3)$$

совпадающей с функцией (14.1) (и, следовательно, с (6.1)) на общем отрезке их определения.

Построим формальный ряд

$$\eta = \sum_{n=2}^{\infty} \mu^n \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} \zeta_{n,\nu}(\xi) \ln^\nu \frac{1}{\mu} \quad (14.4)$$

так, чтобы он формально удовлетворял уравнению (14.2) на промежутке $0 < \xi \leq q$ изменения ξ . В § 16 выяснятся соображения, по которым необходимо брать ряд именно указанного вида, — такую структуру имеют асимптотические приближения значения $\eta_x^*(\sigma_2, \mu)$ траектории \mathfrak{X}_ε в точке $\xi = \sigma_2$, вычисленные по формулам § 10.

Коэффициенты этого ряда определим следующим образом. Подставим ряд (14.4) в уравнение (14.2) и его правую часть формально разложим в ряд по величинам $\mu^n \ln^\nu(1/\mu)$. Такое разложение удобно проводить с помощью формулы

$$\frac{\tilde{\gamma}\left(\xi, \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n z_n\right)}{\xi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n z_n} = \frac{\tilde{\gamma}(\xi, 0)}{\xi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \sum_{k=1}^n \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m \tilde{\gamma}_n^{(k-m)}(\xi, 0)}{(k-m)! \xi^{2m+2}} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = n \\ i_j \geq 1}} z_{i_1} \dots z_{i_k}, \quad (14.5)$$

вытекающей из соотношений (3.7) и (6.7). Положив для краткости

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_n(\xi) = \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} \zeta_{n,\nu}(\xi) \ln^\nu \frac{1}{\mu}, \quad n \geq 2, \quad (14.6)$$

и применив формулу (14.5), приравняем выражения, получающиеся в левой и правой частях уравнения (14.2) при одинаковых степенях μ :

$$\omega'_2(\xi) = 0, \quad \omega'_3(\xi) = \frac{\tilde{\gamma}(\xi, 0)}{\xi^2}, \quad \omega'_4(\xi) = 0, \quad (14.7)$$

$$\begin{aligned} \omega'_n(\xi) &= \\ &= \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]} \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m \tilde{\gamma}_\eta^{(k-m)}(\xi, 0)}{(k-m)! \xi^{2m+2}} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = n-3, \\ i_j \geq 2}} \omega_{i_1} \dots \omega_{i_k}, \quad n \geq 5. \end{aligned}$$

Поскольку для функции (12.14) справедливо равенство

$$\max_{\substack{i_1 + \dots + i_k = n-3, \\ i_j \geq 2, n \geq 5}} \{\pi(i_1 - 2) + \dots + \pi(i_k - 2)\} = \pi(n-2) - 1, \quad (14.8)$$

нетрудно убедиться, что (см. (14.6))

$$\sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = n-3, \\ i_j \geq 2}} \omega_{i_1} \dots \omega_{i_k} = \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)-1} W_{n, k}^\nu(\xi) \ln^\nu \frac{1}{\mu}, \quad n \geq 5, \quad (14.9)$$

причем при любом $n \geq 5$ функции $W_{n, k}^\nu(\xi)$ выражаются только через коэффициенты $\zeta_{m, \nu}(\xi)$, $m \leq n-3$. Из соотношения (14.9) ясно, что правая часть n -го равенства (14.7) при $n \geq 5$ является многочленом от $\ln(1/\mu)$ степени $\pi(n-2) - 1$ с коэффициентами, не зависящими от функций $\zeta_{n, \nu}(\xi)$, $\nu = 0, 1, \dots, \pi(n-2)$. Теперь приравняем выражения, стоящие слева и справа в каждом из соотношений (14.7) при одинаковых степенях $\ln(1/\mu)$.

В результате указанных операций мы придем к равенствам

$$\begin{aligned} \zeta'_{2,0}(\xi) &= 0; \quad \zeta'_{3,1}(\xi) = 0, \quad \zeta'_{3,0}(\xi) = \frac{\tilde{\gamma}(\xi, 0)}{\xi^2}; \\ \zeta'_{4,0}(\xi) &= 0; \quad \zeta'_{n, \pi(n-2)}(\xi) = 0, \quad n \geq 5, \\ \zeta'_{n, \nu}(\xi) &= \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]} \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m \tilde{\gamma}_\eta^{(k-m)}(\xi, 0)}{(k-m)! \xi^{2m+2}} W_{n, k}^\nu(\xi), \\ n \geq 5, \quad \nu &= 0, 1, \dots, \pi(n-2) - 1. \end{aligned} \quad (14.10)$$

Эти равенства представляют собой дифференциальные уравнения с разделенными переменными, но, как правило, с сингулярной при $\xi = 0$ правой частью (уравнения типа, например, (13.7)). Отметим, что ни для одного из уравнений (14.10) не указано никакого дополнительного условия, которое выделяло бы определенное решение. Поэтому из уравнений (14.10) можно последовательно находить коэффициенты $\zeta_{n, \nu}(\xi)$, причем каждый из них определяется с точностью до произвольной аддитивной константы (ср. с (13.8)). Выберем в качестве $\zeta_{n, \nu}(\xi)$ такие функции:

$$\begin{aligned} \zeta_{2, 0}(\xi) &= b_{0, 0}^2; \\ \zeta_{3, 1}(\xi) &= b_{0, 1}^1, \quad \zeta_{3, 0}(\xi) = b_{0, 0}^1 + \int_0^\xi \frac{\tilde{\gamma}(\theta, 0)}{\theta^2} d\theta; \\ \zeta_{4, 0}(\xi) &= b_{0, 0}^2; \\ \zeta_{n, \pi(n-2)}(\xi) &= b_{0, \pi(n-2)}^{n-2}, \quad n \geq 5, \\ \zeta_{n, \nu}(\xi) &= b_{0, \nu}^{n-2} + \int_0^\xi \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-3}{2} \right]} \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m \tilde{\gamma}_\eta^{(k-m)}(\theta, 0)}{(k-m)! \theta^{2m+2}} W_{n, k}^{\nu}(\theta) d\theta, \\ n &\geq 5, \nu = 0, 1, \dots, \pi(n-2) - 1; \end{aligned} \quad (14.11)$$

входящие сюда константы $b_{0, \nu}^n$ участвуют в асимптотических разложениях (12.5), (12.13), а функции $W_{n, k}^{\nu}(\xi)$ последовательно определяются соотношением (14.9). Причины, по которым необходимо выбирать коэффициенты $\zeta_{n, \nu}(\xi)$ именно указанным способом, выяснятся в § 16.

Используя результаты § 13, легко проверить, что функции $\zeta_{n, \nu}(\xi)$ определены и являются гладкими на полуинтервале $0 < \xi \leq q$ изменения ξ . Подчеркнем, что каждая из этих функций эффективно вычисляется только через значения функции $\gamma(\xi, \eta)$ и нескольких ее производных на участке $0 < \xi \leq q$ кривой (5.9).

В §§ 15, 16 мы убедимся, что *частичная сумма построенного ряда* (14.4)

$$Z_n(\xi, \mu) = \sum_{k=2}^n \mu^k \sum_{\nu=0}^{\pi(k-2)} \zeta_{k, \nu}(\xi) \ln^\nu \frac{1}{\mu} \quad (14.12)$$

является при $\nu \rightarrow 0$ асимптотическим приближением

участка (14.3) траектории \mathfrak{L}_ε :

$$\eta_{\mathfrak{L}}^*(\xi, \mu) = \begin{cases} O(\varepsilon^{2/3}), \\ Z_2(\xi, \mu) + O(\varepsilon^{1-\lambda_2}), \\ Z_3(\xi, \mu) + O\left(\varepsilon^{\min\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}-3\lambda_2\right)}\right), \\ Z_{N_4+3}(\xi, \mu) + O\left(\varepsilon^{\frac{N_4+4}{3}-\lambda_2(N_4+2)}\right), \end{cases} \quad \sigma_2 \leq \xi \leq q, \quad (14.13)$$

где N_4 — произвольное натуральное число, а

$$\sigma_2 = \varepsilon^{\lambda_2}, \quad 0 < \lambda_2 < 1/3. \quad (14.14)$$

§ 15. Связь асимптотических приближений с истинными траекториями в конце участка срыва

Лемма 8. Для любого $n=2, 3, \dots$ и любого $v=0, 1, \dots, \pi(n-2)$ найдется такая константа $M_{n,v} > 0$, что имеют место неравенства

$$|\zeta_{n, \pi(n-2)}(\xi)| \leq M_{n, \pi(n-2)}, \quad 0 < \xi \leq q, \\ |\xi^{n-2-v} \zeta_{n,v}(\xi)| \leq M_{n,v}, \quad (15.1)$$

$$v=0, 1, \dots, \pi(n-2)-1, \quad 0 < \xi \leq q;$$

$$|\xi^{n-1-v} \zeta'_{n,v}(\xi)| \leq M_{n,v}, \quad (15.2)$$

$$v=0, 1, \dots, \pi(n-2)-1, \quad 0 < \xi \leq q.$$

Если воспользоваться формулами (14.9)–(14.11), свойствами обобщенного интеграла (см. § 13) и тем фактом, что функция $\gamma(\xi, \eta)$ и ее производные ограничены в области \mathcal{U} , то по индукции доказывается оценка (15.2), а затем и неравенства (15.1). Отметим, что все функции $\zeta_{n, \pi(n-2)}(\xi)$, $n \geq 2$, являются константами.

Более подробные вычисления позволяют убедиться, что функция $\zeta_{n,v}(\xi)$ при любом натуральном $n \geq 2$ и любом $v=0, 1, \dots, \pi(n-2)$ имеет асимптотический ряд

$$\zeta_{n,v}(\xi) = \sum_{\kappa=0}^{\pi(n-2)-v-1} \sum_{k=2-n+\kappa+v}^{\infty} \zeta_{k,\kappa}^{n,v} \xi^k \ln^\kappa \xi + \\ + \zeta_{0, \pi(n-2)-v}^{n,v} \ln^{\pi(n-2)-v} \xi, \quad \xi \rightarrow +0, \quad (15.3)$$

причем можно получить рекуррентную формулу весьма громоздкого вида для последовательного отыскания коэффициентов $\zeta_{k, \nu}^n$. Так как, в частности,

$$\zeta_{0,0}^{2,0} = b_{0,0}^0, \quad \zeta_{-1,0}^{3,0} = -1, \quad (15.4)$$

$$\zeta_{2-n,0}^{n,0} = -\frac{n-4}{n-2} \left(\zeta_{0,0}^{2,0} \zeta_{4-n,0}^{n-2,0} + \frac{1}{2} \sum_{\chi=1} \zeta_{-\chi,0}^{\chi+2,0} \zeta_{\chi+4-n,0}^{n-\chi-2,0} \right), \quad n \geq 4,$$

то ясно, что функции $\zeta_{n,0}(\xi)$, $n \geq 5$, при $\xi \rightarrow +0$ стремятся либо к $+\infty$, либо к $-\infty$, в зависимости от

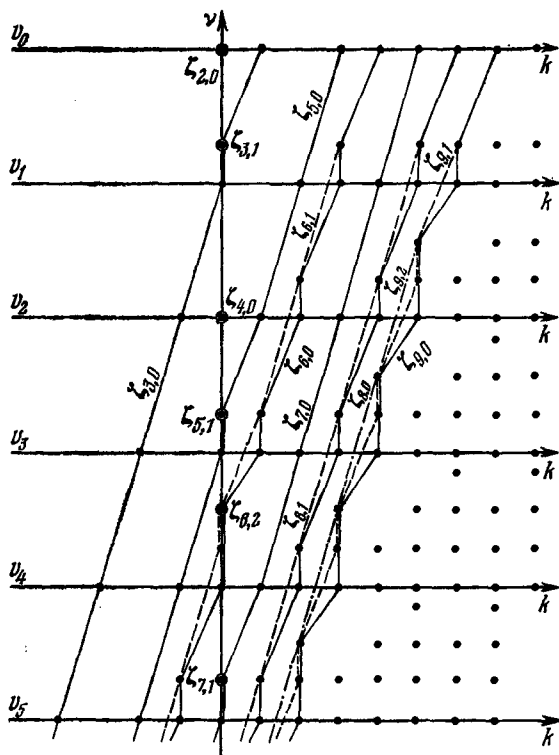


Рис. 40.

значения n . В общем случае функции $\zeta_{n,\nu}(\xi)$, $n \geq 5$, $\nu \neq \pi(n-2)$, при $\xi \rightarrow +0$ также стремятся либо к $+\infty$, либо к $-\infty$, в зависимости от значений n и ν .

Весьма важным фактом является наличие непосредственной связи между коэффициентами асимптотических рядов (15.3) и (12.13):

$$\begin{aligned} \zeta_{k, \kappa}^{n, \nu} &= C_{\nu+\kappa}^{\nu} b_{-k, \nu+\kappa}^{n+k-2}, \\ n &= 3, 5, 6, \dots, \nu = 0, 1, \dots, \pi(n-2)-1, \\ \kappa &= 0, 1, \dots, \pi(n-2)-1-\nu, k \geq 2-n+\nu+\kappa; \\ \zeta_{0, \pi(n-2)-\nu}^{n, \nu} &= C_{\pi(n-2)}^{\nu} b_{0, \pi(n-2)}^{n-2}, \\ n &\geq 2, \quad \nu = 0, 1, \dots, \pi(n-2). \end{aligned} \quad (15.5)$$

Схематически эта связь представлена на рис. 40. Точками изображены коэффициенты $b_{k, \nu}^n$ при членах вида $u^{-k} \ln^{\nu} u$, присутствующих в асимптотических разложениях при $u \rightarrow +\infty$ функций $v_0(u)$, $v_1(u)$, $v_2(u)$, ... Ломаные (кружочки) проведены через те из этих коэффициентов, которые входят в асимптотическое разложение при $\xi \rightarrow +0$ соответствующей функции $\zeta_{m, \kappa}(\xi)$, причем входят как коэффициенты при членах вида $\xi^k \ln^{\nu} \xi$ (биномиальные коэффициенты, фигурирующие в формулах (15.5), в схеме не учтены). Для доказательства равенств (15.5) необходимо воспользоваться общими рекуррентными формулами (ср., например, (15.4) и (12.6)).

Лемма 9. Пусть

$$\begin{aligned} F_n(\xi, \mu, \sigma_2) &= \\ &= \frac{\mu^{n+1}}{\sigma_2^{n-1}} + \mu^{n+1} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-1)-1} \int_{\sigma_2}^{\xi} \frac{d\theta}{\theta^{n-\nu}} \ln^{\nu} \frac{1}{\mu}, \quad n = 2, 4, 5, \dots; \\ F_3(\xi, \mu, \sigma_2) &= \mu^4 + \frac{\mu^5}{\sigma_2^3} + \mu^5 \int_{\sigma_2}^{\xi} \frac{d\theta}{\theta^4}. \end{aligned}$$

При достаточно малых ε существует такая константа $C_n > 0$, что производная в силу уравнения (14.2) положительна в каждой точке кривой

$$\mathcal{X}_1(\xi, \eta) \equiv \eta - Z_n(\xi, \mu) + C_n F_n(\xi, \mu, \sigma_2) = 0, \quad \sigma_2 \leq \xi \leq q, \quad (15.6)$$

и отрицательна в каждой точке кривой

$$\mathcal{X}_2(\xi, \eta) \equiv \eta - Z_n(\xi, \mu) - C_n F_n(\xi, \mu, \sigma_2) = 0, \quad \sigma_2 \leq \xi \leq q. \quad (15.7)$$

Доказательство леммы проведем в предположении, что $n \neq 3$; в случае $n = 3$ рассуждения изменяются несущест-

венно. Производная в силу уравнения (14.2) в произвольной точке кривой (15.6) при $n \neq 3$ равна

$$\frac{d\mathcal{K}_1}{d\xi} \Big|_{(14.2)} = \mu^3 \frac{\tilde{\gamma}(\xi, Z_n(\xi, \mu) - C_n F_n(\xi, \mu, \sigma_2))}{\xi^2 + Z_n(\xi, \mu) - C_n F_n(\xi, \mu, \sigma_2)} - \frac{dZ_n(\xi, \mu)}{d\xi} + C_n \mu^{n+1} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-1)-1} \frac{1}{\xi^{n-\nu}} \ln^\nu \frac{1}{\mu}.$$

Найдем доминирующий член этого выражения при достаточно малых ε , считая, что $\sigma_2 \leq \xi \leq q$, где $\sigma_2 = \varepsilon^{\lambda_2}$, $0 < \lambda_2 < 1/3$ (см. (14.14)).

Привлекая соотношения (15.1) и очевидное для достаточно малых ε неравенство

$$0 < F_n(\xi, \mu, \sigma_2) < 2 \frac{\mu^{n+1}}{\sigma_2^{n-1}}, \quad \sigma_2 \leq \xi \leq q, \quad n \geq 2, \quad n \neq 3,$$

получаем

$$\begin{aligned} \mu^3 \frac{\tilde{\gamma}(\xi, Z_n(\xi, \mu) - C_n F_n(\xi, \mu, \sigma_2))}{\xi^2 + Z_n(\xi, \mu) - C_n F_n(\xi, \mu, \sigma_2)} = \\ = \mu^3 \frac{\tilde{\gamma}(\xi, Z_n(\xi, \mu))}{\xi^2 + Z_n(\xi, \mu)} + O(\mu^{n+4-3\lambda_2(n+3)}); \end{aligned} \quad (15.8)$$

оценка остаточного члена в этой формуле равномерна на отрезке $\sigma_2 \leq \xi \leq q$. Далее из самого процесса построения функций $\zeta_{n,\nu}(\xi)$ (см. (14.6), (14.7)) и формулы (14.5) следует

$$\begin{aligned} \frac{dZ_n(\xi, \mu)}{d\xi} = \mu^3 \frac{\tilde{\gamma}(\xi, Z_n(\xi, \mu))}{\xi^2 + Z_n(\xi, \mu)} - \\ - \frac{d}{d\xi} \mu^{n+1} \omega_{n+1} + O(\mu^{n+2-3\lambda_2(n+1)}). \end{aligned} \quad (15.9)$$

Для оценки остаточного члена в формуле (15.9) используется неравенство

$$\left| \frac{d}{d\xi} \mu^n \omega_n \right| \leq K \frac{\mu^n}{\sigma_2^{n-1}},$$

$$K = \text{const}, \quad \sigma_2 \leq \xi \leq q, \quad n = 2, 4, 5, \dots,$$

справедливость которого при достаточно малых ε устанавливается с помощью соотношений (15.2); легко убедиться, что этот остаточный член на отрезке $\sigma_2 \leq \xi \leq q$ строго более высокого порядка малости при $\varepsilon \rightarrow 0$, чем второй выписанный член правой части.

Равенства (15.8), (15.9) и тот факт, что $\zeta'_{n+1, \pi(n-1)}(\xi) \equiv 0$ (см. (14.10)), позволяют утверждать, что

$$\frac{d\mathcal{K}_1}{d\xi} \Big|_{(14.2)} = \mu^{n+1} \sum_{v=0}^{\pi(n-1)-1} \frac{1}{\xi^{n-v}} [\xi^{n-v} \zeta'_{n+1, v}(\xi) + C_n] \ln^v \frac{1}{\mu} + \\ + O(\mu^{n+2-3\lambda_2(n+1)}), \quad n \neq 3.$$

Если $0 < \lambda_2 < 1/3$, то при достаточно малых ε выписанный в правой части член является доминирующим. В силу неравенства (15.2) при достаточно большой константе $C_n > 0$ он будет строго положительным на всем отрезке $\sigma_2 \leq \xi \leq q$. Следовательно, утверждение леммы для кривой (15.6) доказано. Для кривой (15.7) рассуждения проводятся аналогично.

Из леммы 9 непосредственно вытекает следующее утверждение о возможности асимптотического приближения отрезков траекторий системы (5.6) частичными суммами ряда (14.4).

Теорема V. Пусть λ_2 — произвольное число, подчиненное неравенству $0 < \lambda_2 < 1/3$, функция $Z_n(\xi, \mu)$, $n \geq 2$, определена формулой (14.12), а $\eta = \eta^*(\xi, \mu)$ — решение уравнения (14.2) с начальным значением при $\xi = \sigma_2$, $\sigma_2 = \varepsilon^{\lambda_2}$, удовлетворяющим для достаточно малых ε условию

$$|\eta^*(\sigma_2, \mu) - Z_n(\sigma_2, \mu)| < C \frac{\mu^{n+1}}{\sigma_2^{n-1}}, \quad n \neq 3, \quad C > 0, \quad (15.10)$$

или (при $n=3$)

$$|\eta^*(\sigma_2, \mu) - Z_3(\sigma_2, \mu)| < C \left(\mu^4 + \frac{\mu^5}{\sigma_2^3} \right), \quad C > 0.$$

Тогда при достаточно малых ε это решение определено на всем отрезке $\sigma_2 \leq \xi \leq q$, $q = \text{const} > 0$, и представимо в виде

$$\eta^*(\xi, \mu) = Z_n(\xi, \mu) + \mathfrak{R}_n(\xi, \varepsilon), \quad \sigma_2 \leq \xi \leq q,$$

причем равномерно на отрезке $\sigma_2 \leq \xi \leq q$

$$|\mathfrak{R}_n(\xi, \varepsilon)| < \begin{cases} C_n \varepsilon^{\frac{n+1}{3} - \lambda_2(n-1)} & \text{при } n \neq 3, \\ C_3 \varepsilon^{\min\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3} - 3\lambda_2\right)} & \text{при } n = 3, \end{cases} \quad C_n = \text{const} > 0.$$

§ 16. Доказательство асимптотических представлений участка срыва

В теоремах III—V указаны асимптотические представления участков траекторий системы (5.6), соответствующих различным частям отрезка $-q \leq \xi \leq q$ изменения переменной ξ , в предположении, что начальная точка каждого из этих участков удовлетворяет определенному условию. Сейчас мы покажем, что полученные результаты можно согласовать между собой так, чтобы построить асимптотическое приближение участка срыва траектории \mathfrak{F}_ε с наперед заданной точностью—до величин порядка малости не ниже ε^a , $a > 0$, при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно на всем этом участке.

Допустим сначала, что характеризующее желаемую точность число $a > 4/3$.

Начнем с построения асимптотического приближения функции (10.15) на отрезке $-\sigma_1 \leq \xi \leq 0$; эта функция описывает траекторию \mathfrak{F}_ε в левосторонней малой вместе с ε окрестности точки срыва. Из соотношений (10.16), (10.18) видно, что равномерно на отрезке $-\sigma_1 \leq \xi \leq 0$ будет обеспечена желаемая точность, если числа λ_1 и натуральное N_2 выбрать так, чтобы удовлетворялись неравенства

$$0 < \lambda_1 < 1/3, \quad 1 + \lambda_1 N_2 \geq a. \quad (16.1)$$

Далее для построения асимптотического приближения функции (6.5), описывающей траекторию \mathfrak{F}_ε в начале участка срыва, воспользуемся соотношениями (6.12), (6.13). Ясно, что равномерно на отрезке $-q \leq \xi \leq -\sigma_1$ будет обеспечена желаемая точность, если натуральное число N_1 выбрать так, чтобы удовлетворялось неравенство

$$N_1 - \lambda_1 (3N_1 - 2) \geq 1 + \lambda_1 N_2. \quad (16.2)$$

В силу теоремы III искомое асимптотическое представление функции (6.5) возможно, если для нее в точке $\xi = -q$, $q = \text{const}$, выполнено условие (7.9) при $n = N_1 - 1$. Однако, как было выяснено в § 7, для функции (6.5) условие (7.9) действительно выполняется при любом целом $n \geq 0$.

В силу теоремы IV искомое асимптотическое представление функции (10.15) на отрезке $-\sigma_1 \leq \xi \leq 0$ возможно, если для нее в точке $\xi = -\sigma_1$ выполнено условие (11.18)

при $n = N_2$. Так как для функций (6.5) и (10.15), описывающих последовательные участки траектории \mathfrak{F}_ε , имеет место равенство $\tilde{\eta}_\varepsilon(-\sigma_1, \mu) = \eta_\varepsilon(-\sigma_1, \varepsilon)$, то необходимое для проверки условия (11.18) значение $\tilde{\eta}_\varepsilon(-\sigma_1, \mu)$ можно вычислить, используя уже доказанное асимптотическое представление (6.12) функции (6.5). Привлекая разложение (7.2) и учитывая неравенство (16.2), получим

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_\varepsilon(-\sigma_1, \mu) &= \eta_\varepsilon(-\sigma_1, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{N_1-1} \varepsilon^m \eta_m(-\sigma_1) + O(\varepsilon \sigma_1^{N_2}) = \\ &= -\sigma_1^2 + \sum_{m=1}^{N_1-1} \sum_{k=0}^{N_2+3m-2-\frac{m-1}{\lambda_1}} \eta_k^m \frac{\varepsilon^m}{\sigma_1^{3m-k-2}} + O(\varepsilon \sigma_1^{N_2}). \end{aligned} \quad (16.3)$$

Для фигурирующей в условии (11.18) величины $\mu^2 V_{N_2}(-\sigma_1/\mu, \mu)$ с помощью разложений (12.2), (12.9) находим

$$\begin{aligned} \mu^2 V_{N_2}\left(-\frac{\sigma_1}{\mu}, \mu\right) &= -\sigma_1^2 + \mu^2 z_0\left(-\frac{\sigma_1}{\mu}\right) + \sum_{k=1}^{N_2} \mu^{k+2} v_k\left(-\frac{\sigma_1}{\mu}\right) = \\ &= -\sigma_1^2 + \sum_{k=0}^{N_2} \sum_{m=1}^{\left[\frac{1+\lambda_1 N_2 - \lambda_1 k - 2\lambda_1}{1-3\lambda_1}\right]} \gamma^m \alpha_{m-1}^k \frac{\varepsilon^m}{\sigma_1^{3m-k-2}} + O(\varepsilon \sigma_1^{N_2}). \end{aligned} \quad (16.4)$$

Поменяв в формуле (16.4) порядок суммирования и сравнивая ее с формулой (16.3) с учетом соотношения (12.11), убеждаемся, что условие (11.18) действительно выполняется.

Перейдем к построению асимптотического приближения функции (14.3), описывающей траекторию \mathfrak{F}_ε в конце участка срыва. Из соотношений (14.13), (14.14) очевидно, что равномерно на отрезке $\sigma_2 \leq \xi \leq q$ будет обеспечена желаемая точность, если числа λ_2 и натуральное N_4 выбрать так, чтобы удовлетворились неравенства

$$0 < \lambda_2 < \frac{1}{3}, \quad \frac{N_4+4}{3} - \lambda_2(N_4+2) \geq a. \quad (16.5)$$

Наконец, проведем построение асимптотического приближения функции (10.15) на отрезке $0 \leq \xi \leq \sigma_2$; эта функция описывает траекторию \mathfrak{F}_ε в правосторонней малой вместе с ε окрестности точки срыва. Соотношения

(10.17), (10.18) показывают, что равномерно на отрезке $0 \leq \xi \leq \sigma_2$ будет обеспечена желаемая точность, если натуральное число N_3 выбрать так, чтобы удовлетворялось неравенство

$$1 + \lambda_2 N_3 \geq \frac{N_4 + 4}{3} - \lambda_2 (N_4 + 2). \quad (16.6)$$

В силу теоремы IV искомое асимптотическое представление функции (10.15) на отрезке $0 \leq \xi \leq \sigma_2$ возможно, если числа N_2 и N_3 дополнительно удовлетворяют неравенству

$$N_2 \geq N_3. \quad (16.7)$$

В силу теоремы V искомое асимптотическое представление функции (14.3) возможно, если для нее в точке $\xi = \sigma_2$ выполнено условие (15.10) при $n = N_4 + 3$. Так как для функций (10.15) и (14.3), описывающих последовательные участки траектории \mathfrak{F}_e , имеет место равенство $\eta_{\mathfrak{F}}^*(\sigma_2, \mu) = \tilde{\eta}_{\mathfrak{F}}(\sigma_2, \mu)$, то необходимое для проверки условия (15.10) значение $\eta_{\mathfrak{F}}^*(\sigma_2, \mu)$ можно вычислить, используя уже доказанное асимптотическое представление (10.17) функции (10.15). Привлекая разложение (12.13) и учитывая неравенство (16.6), получим

$$\begin{aligned} \eta_{\mathfrak{F}}^*(\sigma_2, \mu) &= \tilde{\eta}_{\mathfrak{F}}(\sigma_2, \mu) = \sum_{m=0}^{N_3} \mu^{m+2} v_m \left(\frac{\sigma_2}{\mu} \right) + O \left(\frac{\mu^{N_4+4}}{\sigma_2^{N_4+2}} \right) = \\ &= \sum_{m=0}^{N_3} \sum_{v=0}^m \sum_{k=3v+3}^{N_4+3} b_{k-m-2, v}^m \frac{\mu^k}{\sigma_2^{k-m-2}} \ln^v \frac{\sigma_2}{\mu} + \\ &+ \sum_{k=2}^{N_3+2} b_{0, \pi(k-2)}^{k-2} \mu^k \ln^{\pi(k-2)} \frac{\sigma_2}{\mu} + O \left(\frac{\mu^{N_4+4}}{\sigma_2^{N_4+2}} \right) = \\ &= \sum_{k=2}^{N_4+3} \mu^k \left\{ \sum_{\kappa=0}^{\pi(k-2)-1} \left[\sum_{v=\kappa}^{\pi(k-2)-1} \sum_{m=v}^{N_3} C_{\sqrt{v}}^{\kappa, m} b_{k-m-2, v}^m \frac{\ln^{v-\kappa} \sigma_2}{\sigma_2^{k-m-2}} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. C_{\pi(k-2)}^{\kappa} b_{0, \pi(k-2)}^{k-2} \ln^{\pi(k-2)-\kappa} \sigma_2 \right] \ln^{\kappa} \frac{1}{\mu} + b_{0, \pi(k-2)}^{k-2} \ln^{\pi(k-2)} \frac{1}{\mu} \right\} + \\ &+ O \left(\frac{\mu^{N_4+4}}{\sigma_2^{N_4+2}} \right). \quad (16.8) \end{aligned}$$

Для фигурирующей в условии (15.10) величины $Z_{N_4+3}(\sigma_2, \mu)$

с помощью разложения (15.3) находим:

$$\begin{aligned}
 Z_{N_4+3}(\sigma_2, \mu) &= \sum_{k=2}^{N_4+3} \mu^k \sum_{\kappa=0}^{\pi(k-2)} \zeta_{k,\kappa}(\sigma_2) \ln^\kappa \frac{1}{\mu} = \\
 &= \sum_{k=2}^{N_4+3} \mu^k \sum_{\kappa=0}^{\pi(k-2)} \ln^\kappa \frac{1}{\mu} \left[\sum_{\nu=0}^{\pi(k-2)-\kappa-1} \sum_{m=2-k+\nu+\kappa}^{N_3+2-k} \zeta_{m,\nu}^{k,\kappa} \sigma_2^m \ln^\nu \sigma_2 + \right. \\
 &\quad \left. + \zeta_{0,\pi(k-2)-\kappa}^{k,\kappa} \ln^{\pi(k-2)-\kappa} \sigma_2 \right] + O\left(\frac{\mu^{N_4+4}}{\sigma_2^{N_4+2}}\right). \quad (16.9)
 \end{aligned}$$

Сравнивая формулы (16.8) и (16.9) с учетом соотношений (15.5) и (14.11), убеждаемся, что условие (15.10) действительно выполняется.

Непосредственно видно, что при любом $a > 4/3$ числа $\lambda_1, \lambda_2, N_j, j=1, \dots, 4$, можно выбрать в соответствии с неравенствами (16.1), (16.2), (16.5)—(16.7) и, таким образом, получить асимптотическое приближение участка срыва (6.1) траектории \mathfrak{F}_ε с наперед заданной точностью. Например, взяв

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1/7, \quad N_1 = 3, \quad N_2 = N_3 = 7, \quad N_4 = 5,$$

мы приходим к формуле, дающей асимптотическое приближение участка срыва с точностью до малых порядка не ниже ε^2 . Более того, для такого выбора имеется довольно много возможностей, что позволяет в каждом конкретном случае подыскивать наиболее удобную формулу.

С помощью младших приближений, указанных в соотношениях (6.12), (10.16), (10.17), (14.13), удается построить и такие асимптотические представления участка срыва (6.1), в которых характеризующее желаемую точность число $a \leq 4/3$. Простейшая из этих формул имеет вид

$$\eta_{\mathfrak{F}}(\xi, \varepsilon) = \begin{cases} -\xi^2 + O(\varepsilon^{2/3}), & -q \leq \xi \leq 0, \\ O(\varepsilon^{2/3}), & 0 \leq \xi \leq q. \end{cases} \quad (16.10)$$

Отсюда вытекает, что кривая (5.9)—участок траектории \mathfrak{F}_0 —служит нулевым приближением рассматриваемого участка срыва траектории \mathfrak{F}_ε . Большую точность

доставляет формула (см. (14.11) и (12.7))

$$\eta_{\xi}(\xi, \varepsilon) = \begin{cases} -\xi^2 + \varepsilon \eta_1(\xi) + O(\varepsilon^a), & -q \leq \xi \leq -\varepsilon^{1/4}, \\ -\xi^2 + \mu^2 z_0\left(\frac{\xi}{\mu}\right) + O(\varepsilon^a), & -\varepsilon^{1/4} \leq \xi \leq 0, \\ \mu^2 v_0\left(\frac{\xi}{\mu}\right) + O(\varepsilon^a), & 0 \leq \xi \leq \varepsilon^{1-a}, \\ \Omega_0 \mu^2 + O(\varepsilon^a), & \varepsilon^{1-a} \leq \xi \leq q, \end{cases} \quad (16.11)$$

где a — произвольное число, подчиненное условию $2/3 < a < 1$. Она, в частности, показывает, что в непосредственной близости от точки срыва траектории $\mathfrak{L}_{\varepsilon}$ отклоняется от траектории \mathfrak{L}_0 на величину более низкого порядка малости, чем ε . Например, при $\xi = 0$ из (16.11) получаем

$$\eta_{\xi}(0, \varepsilon) = v_0(0) \gamma^{2/3} \varepsilon^{2/3} + O(\varepsilon^a), \quad 2/3 < a < 1.$$

Приведем также следующую формулу:

$$\eta_{\xi}(\xi, \varepsilon) = \begin{cases} \eta_0(\xi) + \varepsilon \eta_1(\xi) + O(\varepsilon^{4/3}), & -q \leq \xi \leq -\varepsilon^{1/9}, \\ \mu^2 v_0\left(\frac{\xi}{\mu}\right) + \mu^3 v_1\left(\frac{\xi}{\mu}\right) + \mu^4 v_2\left(\frac{\xi}{\mu}\right) + \\ + \mu^5 v_3\left(\frac{\xi}{\mu}\right) + O(\varepsilon^{4/3}), & -\varepsilon^{1/9} \leq \xi \leq \varepsilon^{1/9}, \\ \zeta_{2,0}(\xi) \mu^2 + \zeta_{3,1}(\xi) \mu^3 \ln \frac{1}{\mu} + \\ + \zeta_{3,0}(\xi) \mu^3 + O(\varepsilon^{4/3}), & \varepsilon^{1/9} \leq \xi \leq q; \end{cases} \quad (16.12)$$

ее легко конкретизировать, используя выражения для входящих сюда коэффициентов (см. (5.9), (6.9), (12.17), (14.11)). Отметим, что доказательство формулы (16.12) можно провести и без привлечения общих соотношений (12.11), (15.5) — достаточно сослаться на равенства (6.9), (6.10), (12.1), (12.4), (12.8), (12.10), (12.16), (14.11).

Теорема VI. При достаточно малых ε для участка срыва траектории $\mathfrak{L}_{\varepsilon}$, лежащего в окрестности точки срыва S , справедливо асимптотическое представление с равномерной точностью до малых порядка не ниже ε^a , где $a > 0$ — произвольное число. При $0 < a \leq 2/3$ достаточно взять нулевое приближение (16.10); при $2/3 < a \leq 4/3$ можно использовать формулы (16.11) или (16.12); при

$\alpha > 4/3$. искомое асимптотическое представление описывается соотношениями (6.12), (6.13), (10.16)—(10.18), (14.13), (14.14), в которых числа $\lambda_1, \lambda_2, N_1, N_2, N_3, N_4$ необходимо подобрать в соответствии с неравенствами (16.1), (16.2), (16.5)—(16.7). Затем следует сделать преобразование координат (5.3). Для нахождения коэффициентов указанного асимптотического представления не требуется интегрировать невырожденную систему (1.1).

§ 17. Асимптотические приближения траектории на участке быстрого движения

Рассмотрим участок быстрого движения SP траектории \mathfrak{F}_0 ; здесь $S(s_1, s_2)$ —точка срыва, а $P(p_1, p_2)$ —следующая за ней точка падения, лежащая на некотором устойчивом участке $x = \hat{x}_0(y)$ кривой Γ (рис. 41; аналогичная картина имеет место и при других типах точки срыва S , изображенных на рис. 26, 27). Тогда, очевидно, выполнены соотношения

$$p_2 = s_2, \quad s_1 \operatorname{sign} f_x''(S) < p_1 \operatorname{sign} f_x''(S).$$

На горизонтальном отрезке SP возьмем точку $Q^+(q_1^+, q_2^+)$ в соответствии со сказанным в § 5 и точку $P^0(p_1^0, p_2^0)$, отстоящую на малое конечное расстояние от точки падения P . Уравнение участка Q^+P^0 траектории \mathfrak{F}_0 можно записать в виде

$$y = s_2, \quad q_1 \operatorname{sign} f_x''(S) \leq x \operatorname{sign} f_x''(S) \leq p_1^0 \operatorname{sign} f_x''(S). \quad (17.1)$$

Так как отрезок (17.1) не пересекается с кривой Γ , то существует такая конечная окрестность U_B этого отрезка:

$q_1^+ \operatorname{sign} f_x''(S) \leq x \operatorname{sign} f_x''(S) \leq p_1^0 \operatorname{sign} f_x''(S), |y - s_2| \leq \delta |x - s_1|$
(см. рис. 41), которая целиком лежит в области притяжения устойчивого участка $x = \hat{x}_0(y)$ и в каждой точке которой имеет место неравенство

$$|f(x, y)| \geq k > 0. \quad (17.2)$$

Так как при достаточно малых ε траектория \mathfrak{F}_ε близка к траектории \mathfrak{F}_0 (см. § 2 и рис. 30), то траектория \mathfrak{F}_ε входит в область U_B через участок $x = q_1 = s_1 + \rho \operatorname{sign} f_x''(S)$ границы и покидает эту область через участок $x = p_1^0$

границы. Отрезок траектории \mathfrak{L}_ε , лежащий в области U_B , назовем *участком быстрого движения*.

Пусть $D(q_1^+, d)$ — точка пересечения траектории \mathfrak{L}_ε с прямой $x = q_1^+$, лежащая на границе области U_B (см. рис. 35; ср. с рис. 41). Так как эта точка — начальная точка

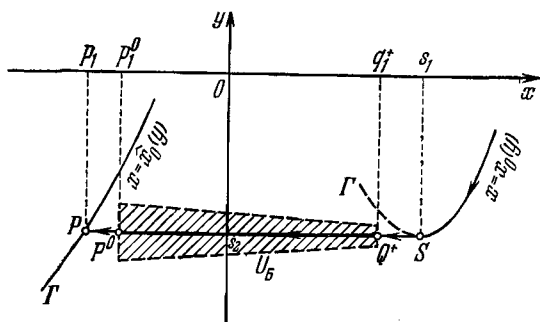


Рис. 41.

участка быстрого движения — является одновременно конечной для предшествующего участка срыва, то согласно (14.3), (8.2) и (5.3) имеем

$$d = s_2 + \eta_\varepsilon^* (q, \gamma^{1/3} \varepsilon^{1/3}) \operatorname{sign} g(S).$$

Выписывая формальное значение ряда (14.4) при $\xi = q$ и возвращаясь от параметра μ к параметру ε , придем к разложению

$$\begin{aligned} d &= s_2 + \\ &+ \operatorname{sign} g(S) \sum_{n=2}^{\infty} \gamma^{n/3} \varepsilon^{n/3} \sum_{\kappa=0}^{\pi(n-2)} \zeta_{n,\kappa}(q) \left(\frac{1}{3}\right)^\kappa \left[\ln \frac{1}{\varepsilon} - \ln \gamma\right]^\kappa = \\ &= s_2 + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} d_{n,\nu} \ln^\nu \frac{1}{3}, \quad (17.3) \end{aligned}$$

коэффициенты которого вычисляются по формуле

$$d_{n,\nu} = \operatorname{sign} g(S) \sum_{\kappa=\nu}^{\pi(n-2)} \frac{(-1)^{\kappa-\nu} C_\kappa^\nu}{3^\kappa} \gamma^{n/3} \ln^{\kappa-\nu} \gamma \zeta_{n,\kappa}(q). \quad (17.4)$$

В силу неравенства (17.2) вдоль участка быстрого движения траектории \mathfrak{L}_ε координата x с течением времени t меняется монотонно. Поэтому уравнение такого

участка можно записать в виде

$$y = y_x(x, \varepsilon), \quad (17.5)$$

$$q_1^+ \operatorname{sign} f_x''(S) \leq x \operatorname{sign} f_x''(S) \leq p_1^0 \operatorname{sign} f_x''(S),$$

принимая за независимую переменную координату x . Ясно, что функция (17.5) является решением эквивалентного системе (1.1) уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \varepsilon \frac{g(x, y)}{f(x, y)} \equiv \varepsilon \dot{h}(x, y) \quad (17.6)$$

с гладкой правой частью и удовлетворяет условию

$$y(q_1^+, \varepsilon) = d. \quad (17.7)$$

Используя уравнение (17.6) и условие (17.7), мы будем искать асимптотическое разложение участка быстрого движения (17.5).

Построим формальный ряд

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} y_{n,\nu}(x) \ln^{\nu} \frac{1}{\varepsilon} \quad (17.8)$$

так, чтобы он формально удовлетворял уравнению (17.6) на интервале изменения x между s_1 и p_1 и условию (17.7). Подставив ряд (17.8) в уравнение (17.6) и формально разложив его правую часть в ряд по величинам $\varepsilon^{n/3} \ln^{\nu}(1/\varepsilon)$, приравняем выражения, стоящие слева и справа при одинаковых степенях ε , а затем — при одинаковых степенях $\ln(1/\varepsilon)$ (ср. с § 14). В результате придем к равенствам

$$\begin{aligned} y'_{0,0}(x) &= 0; & y'_{2,0}(x) &= 0; \\ y'_{3,1}(x) &= 0, & y'_{3,0}(x) &= \dot{h}(x, y_{0,0}(x)); & y'_{4,0}(x) &= 0; \\ y'_{n,\pi(n-2)}(x) &= 0, & n &\geq 5, \end{aligned}$$

$$y'_{n,\nu}(x) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-3}{2} \right]} \frac{\dot{h}_y^{(k)}(x, y_{0,0}(x))}{k!} W_{n,k}^{\nu}(x), \quad (17.9)$$

$$n \geq 5, \quad \nu = 0, 1, \dots, \pi(n-2) - 1,$$

где $W_{n,k}^{\nu}(x)$ — функции, вводимые с помощью соотношений

(см. (14.8))

$$\sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = \\ = n-3, \\ i_j \geq 2}} \left[\sum_{v_1=0}^{\pi(i_1-2)} y_{i_1, v_1}(x) \ln^{v_1} \frac{1}{\varepsilon} \cdots \sum_{v_k=0}^{\pi(i_k-2)} y_{i_k, v_k}(x) \ln^{v_k} \frac{1}{\varepsilon} \right] =$$

$$= \sum_{v=0}^{\pi(n-2)-1} W_{n, k}^v(x) \ln^v \frac{1}{\varepsilon}, \quad n \geq 5. \quad (17.10)$$

Из соотношений (17.10) ясно, что при любом $n \geq 5$ функции $W_{n, k}^v(x)$ выражаются только через коэффициенты $y_{m, v}(x)$, $m \leq n-3$. Поэтому равенства (17.9) представляют собой дифференциальные уравнения с разделенными переменными. Подставив ряд (17.8) в соотношение (17.7), (17.3) и приравняв выражения при одинаковых величинах $\varepsilon^{n/2} \ln^v(1/\varepsilon)$, придем к равенствам

$$\begin{aligned} y_{0,0}(q_1^+) &= s_2, \\ y_{n, v}(q_1^+) &= d_{n, v}, \quad n \geq 2, \quad v = 0, 1, \dots, \pi(n-2). \end{aligned} \quad (17.11)$$

Уравнения (17.9) вместе с соответствующими начальными условиями (17.11) однозначно последовательно определяют коэффициенты $y_{n, v}(x)$:

$$\begin{aligned} y_{0,0}(x) &= s_2; \\ y_{2,0}(x) &= d_{2,0}; \\ y_{3,1}(x) &= d_{3,1}, \quad y_{3,0}(x) = d_{3,0} + \int_{q_1^+}^x \tilde{h}(z, s_2) dz; \\ y_{4,0}(x) &= d_{4,0}; \\ y_{n, \pi(n-2)}(x) &= d_{n, \pi(n-2)}, \quad n \geq 5, \\ y_{n, v}(x) &= d_{n, v} + \int_{q_1^+}^x \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-3}{2} \right]} \frac{\tilde{h}_y^{(k)}(z, s_2)}{k!} W_{n, k}^v(z) dz, \\ n \geq 5, \quad v &= 0, 1, \dots, \pi(n-2)-1. \end{aligned}$$

Из полученных формул непосредственно видно, что функции $y_{n, v}(x)$ определены и являются гладкими при изменении x на интервале между s_1 и p_1 . Подчеркнем,

что каждая из этих функций эффективно вычисляется только через значения правых частей системы (1.1) и нескольких их производных на участке SP траектории \mathfrak{T}_0 . Конечно, все эти функции можно рассматривать и на отрезке изменения x между q_1^+ и p_1^0 .

В § 18 мы убедимся, что *частичная сумма построенного ряда (17.8)*

$$Y_n(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n *_{k/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(k-2)} y_{k, \nu}(x) \ln^\nu \frac{1}{\varepsilon} \quad (17.13)$$

является при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотическим приближением участка быстрого движения (17.5) траектории \mathfrak{T}_ε :

$$y_{\mathfrak{z}}(x, \varepsilon) = \begin{cases} s_2 + O(\varepsilon^{2/3}), \\ Y_{N+1}(x, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{N+2}{3}} \ln^{\pi(N)} \frac{1}{\varepsilon}\right), \end{cases} \quad (17.14)$$

$$q_1^+ \operatorname{sign} f_x''(S) \leq x \operatorname{sign} f_x''(S) \leq p_1^0 \operatorname{sign} f_x''(S),$$

где N — произвольное натуральное число. В частности, отсюда видно, что участок (17.1) траектории \mathfrak{T}_0 служит нулевым приближением рассматриваемого участка быстрого движения траектории \mathfrak{T}_ε . Используя соотношения (17.12), (17.4) и (14.11), можно указать и приближения более высокого порядка, например:

$$y_{\mathfrak{z}}(x, \varepsilon) = s_2 +$$

$$+ b_{0,0}^0 \gamma^{2/3} \operatorname{sign} g(S) \varepsilon^{2/3} + \frac{1}{3} b_{0,1}^1 \gamma \operatorname{sign} g(S) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} +$$

$$+ \left(-\frac{1}{3} b_{0,1}^1 \gamma \ln \gamma + b_{0,0}^1 \gamma \right) \operatorname{sign} g(S) \varepsilon +$$

$$+ \left[\operatorname{sign} g(S) \int_0^q \frac{\gamma(\theta, 0)}{\theta^2} d\theta + \int_{q_1^+}^x \frac{g(z, s_2)}{f(z, s_2)} dz \right] \varepsilon + O(\varepsilon^{4/3}), \quad (17.15)$$

$$q_1^+ \operatorname{sign} f_x''(S) \leq x \operatorname{sign} f_x''(S) \leq p_1^0 \operatorname{sign} f_x''(S).$$

Так как $b_{0,0}^0 > 0$ (см. (12.7), (9.9)), то из формулы (17.15) легко заключить, что *участок быстрого движения (17.5) траектории \mathfrak{T}_ε не пересекает отрезка Q^+P^0 траектории \mathfrak{T}_0 и расположен всюду выше этого отрезка, если $g(S) > 0$, и всюду ниже него, если $g(S) < 0$ (ср. с § 5).*

§ 18. Доказательство асимптотических представлений участка быстрого движения

Установим справедливость асимптотической формулы (17.14) для участка быстрого движения (17.5) траектории \mathfrak{L}_g .

Лемма 10. Если точки Q^+ и P^0 на отрезке SP фиксированы, то для любого $n=2, 3, \dots$ и любого $\nu=0, 1, \dots, \pi(n-2)$ найдется такая константа $M_{n,\nu} > 0$, что имеют место неравенства

$$\begin{aligned} |y_{n,\nu}(x)| &\leq M_{n,\nu}, & |y'_{n,\nu}(x)| &\leq M_{n,\nu}, \\ q_1^+ \operatorname{sign} f_x''(S) &\leq x \operatorname{sign} f_x''(S) \leq p_1^0 \operatorname{sign} f_x''(S). \end{aligned} \quad (18.1)$$

Доказательство проводится по индукции с помощью формул (17.12), (17.9), неравенства (17.2) и того факта, что функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ и их производные ограничены в области U_B . Отметим, что все функции $y_{n,\pi(n-2)}(x)$, $n \geq 2$, являются константами.

Лемма 11. Пусть

$$F_n(x, \varepsilon) = \int_{s_1}^x f(z, s_2) dz \varepsilon^{\frac{n+1}{3}} \ln^{\pi(n-1)} \frac{1}{\varepsilon}, \quad n \geq 1.$$

При достаточно малых ε существует такая константа $C_n > 0$, что производная в силу системы (1.1) положительна в каждой точке кривой

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_1^\varepsilon(x, y) &\equiv y - Y_n(x, \varepsilon) + C_n F_n(x, \varepsilon) = 0, \\ q_1^+ \operatorname{sign} f_x''(S) &\leq x \operatorname{sign} f_x''(S) \leq p_1^0 \operatorname{sign} f_x''(S), \end{aligned}$$

и отрицательна в каждой точке кривой

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_2^\varepsilon(x, y) &\equiv y - Y_n(x, \varepsilon) - C_n F_n(x, \varepsilon) = 0, \\ q_1^+ \operatorname{sign} f_x''(S) &\leq x \operatorname{sign} f_x''(S) \leq p_1^0 \operatorname{sign} f_x''(S). \end{aligned}$$

Допустим, что $n \geq 4$; в остальных случаях рассуждения изменяются несущественно. Производная в силу системы (1.1) в произвольной точке кривой $\mathfrak{K}_1^\varepsilon(x, y) = 0$

равна

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{X}_1}{dt} \Big|_{(1.1)} &= \\ &= \frac{dy}{dt} \Big|_{(1.1)} - \frac{dY_n(x, \varepsilon)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Big|_{(1.1)} + C_n \frac{dF_n(x, \varepsilon)}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Big|_{(1.1)} = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} f(x, Y_n(x, \varepsilon) - C_n F_n(x, \varepsilon)) \left\{ \varepsilon \dot{h}(x, Y_n(x, \varepsilon) - \right. \\ &\quad \left. - C_n F_n(x, \varepsilon)) - \frac{dY_n(x, \varepsilon)}{dx} + C_n f(x, s_2) \varepsilon^{\frac{n+1}{3}} \ln^{\pi(n-1)} \frac{1}{\varepsilon} \right\}. \end{aligned}$$

Привлекая неравенства (18.1), получаем

$$\begin{aligned} f(x, Y_n(x, \varepsilon) - C_n F_n(x, \varepsilon)) &= f(x, s_2) + O(\varepsilon^{2/3}), \\ \dot{h}(x, Y_n(x, \varepsilon) - C_n F_n(x, \varepsilon)) &= \\ &= \dot{h}(x, Y_n(x, \varepsilon)) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{3}} \ln^{\pi(n-1)} \frac{1}{\varepsilon}\right), \end{aligned}$$

а из самого процесса построения функций $y_{n, \nu}(x)$ (см. (17.9)) следует

$$\frac{dY_n(x, \varepsilon)}{dx} = \varepsilon \dot{h}(x, Y_n(x, \varepsilon)) + O\left(\varepsilon^{\frac{n+1}{3}} \ln^{\pi(n-1)-1} \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad n \geq 4.$$

Таким образом, можно утверждать, что

$$\frac{d\mathcal{X}_1}{dt} \Big|_{(1.1)} = C_n f^2(x, s_2) \varepsilon^{\frac{n-2}{3}} \ln^{\pi(n-1)} \frac{1}{\varepsilon} + O\left(\varepsilon^{\frac{n-2}{3}} \ln^{\pi(n-1)-1} \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad n \geq 4,$$

и, следовательно, рассматриваемая производная строго положительна при достаточно малых ε . Заметим еще, что функции $F_n(x, \varepsilon)$, $n = 0, 2, 3, \dots$, строго положительны на всем отрезке изменения x между q_1^+ и p_1^0 .

Возьмем теперь на участке быстрого движения SP траектории \mathfrak{X}_0 точки Q^+ и P^0 в соответствии со сказанным в § 17. Из леммы 11 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема VII. Пусть $S(s_1, s_2)$ — точка срыва кривой Γ , функция $Y_n(x, \varepsilon)$, $n \geq 1$, определена формулой (17.13), а $y = y(x, \varepsilon)$ — решение уравнения (17.6) с начальным значением при $x = s_1 + \rho_{\text{sign}} I_x^*(S) = q_1^+$, удовлетворяющим для

достаточно малых ε условию

$$|y(q_1^+, \varepsilon) - Y_n(q_1^+, \varepsilon)| < C\varepsilon^{\frac{n+1}{3}} \ln^{\pi(n-1)} \frac{1}{\varepsilon}, \quad C > 0. \quad (18.2)$$

Тогда при достаточно малых ε это решение определено на всем отрезке

$$q_1^+ \operatorname{sign} f_x''(S) \leq x \operatorname{sign} f_x''(S) \leq p_1^0 \operatorname{sign} f_x''(S) \quad (18.3)$$

и представимо в виде

$$y(x, \varepsilon) = Y_n(x, \varepsilon) + \mathfrak{R}_n(x, \varepsilon), \\ q_1^+ \operatorname{sign} f_x''(S) \leq x \operatorname{sign} f_x''(S) \leq p_1^0 \operatorname{sign} f_x''(S),$$

причем равномерно на отрезке (18.3)

$$|\mathfrak{R}_n(x, \varepsilon)| < C_n \varepsilon^{\frac{n+1}{3}} \ln^{\pi(n-1)} \frac{1}{\varepsilon}, \quad C_n = \operatorname{const} > 0.$$

Функция (17.5), описывающая участок быстрого движения траектории \mathfrak{E}_ε , при любом целом $n \geq 1$ удовлетворяет условию (18.2), что ясно из выбора начальных условий (17.11). Поэтому теорема VII применима для получения асимптотических приближений участка быстрого движения траектории \mathfrak{E}_ε . Тем самым формула (17.14) доказана.

Очевидно, что формула (17.14) дает возможность приближенно вычислять участок быстрого движения траектории \mathfrak{E}_ε с произвольной степенью точности. Однако соответствующий результат удобнее сформулировать, если вместо функций (17.13) рассмотреть частичные суммы построенного ряда (17.8) несколько иного вида:

$$\tilde{Y}_n(x, \varepsilon) = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{k/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(k-2)} y_{k,\nu}(x) \ln^\nu \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=1}^{\pi(n-2)} y_{n,\nu}(x) \ln^\nu \frac{1}{\varepsilon}.$$

Оказывается, что справедливо следующее асимптотическое представление участка быстрого движения (17.5) траектории \mathfrak{E}_ε :

$$y_{\mathfrak{E}}(x, \varepsilon) = \tilde{Y}_{N+1}(x, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{N+1}{3}}\right), \\ q_1^+ \operatorname{sign} f_x''(S) \leq x \operatorname{sign} f_x''(S) \leq p_1^0 \operatorname{sign} f_x''(S),$$

где N — произвольное натуральное число. Доказательство

этого утверждения получается с помощью рассуждений, совершенно аналогичных проведенным выше.

Теорема VIII. При достаточно малых ε для участка быстрого движения (17.5) траектории \mathfrak{Z}_ε справедливо асимптотическое представление

$$y_x(x, \varepsilon) = \tilde{Y}_{[3a+1]}(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^a), \\ q_1^+ \operatorname{sign} f_x''(S) \leq x \operatorname{sign} f_x''(S) \leq p_1^0 \operatorname{sign} f_x''(S),$$

где $a \geq 2/3$ — произвольное число; при $0 < a < 2/3$ можно использовать нулевое приближение. Для нахождения функции $\tilde{Y}_{[3a+1]}(x, \varepsilon)$ не требуется интегрировать невырожденную систему (1.1).

§ 19. Специальные переменные для участка падения

Из формул (17.12) видно, что функции $y_{n,\nu}(x)$, $n=3,5,6, \dots, \nu=0, 1, \dots, \pi(n-2)-1$, неограниченно возрастают (по абсолютной величине) при $x \rightarrow p_1$. Поэтому ряд (17.8) уже нельзя рассматривать в качестве асимптотического разложения траектории \mathfrak{Z}_ε на всем отрезке изменения переменной x между точками q_1^+ и p_1 . Для построения асимптотических приближений участка траектории \mathfrak{Z}_ε , лежащего вблизи точки падения $P(p_1, p_2)$, потребуется использовать новые специальные переменные.

Пусть следующий за участком быстрого движения SP участок медленного движения траектории \mathfrak{Z}_0 лежит на устойчивом участке $x = \hat{x}_0(y)$ кривой Γ (рис. 42, 43; аналогичная картина имеет место и при других типах точки срыва S , изображенных на рис. 26, 27). Обозначим через $\hat{S}(\hat{s}_1, \hat{s}_2)$ точку срыва, граничную для участка $x = \hat{x}_0(y)$, а через $\hat{S}^*(\hat{s}_1^*, \hat{s}_2^*)$ — вторую граничную точку этого участка (ср. с § 3). Тогда, очевидно, выполнены соотношения

$$p_2 = s_2, \quad \hat{s}_2^* \operatorname{sign} g(P) < p_2 \operatorname{sign} g(P) < \hat{s}_2 \operatorname{sign} g(P), \\ \operatorname{sign} g(P) = \operatorname{sign} g(\hat{S}).$$

Рассмотрим малую конечную окрестность U_P точки падения P :

$$p_1 - \delta_1 \leq x \leq p_1 + \delta_1, \quad p_2 - \delta_2 \leq y \leq p_2 + \delta_2,$$

которая целиком лежит в области притяжения устойчивого

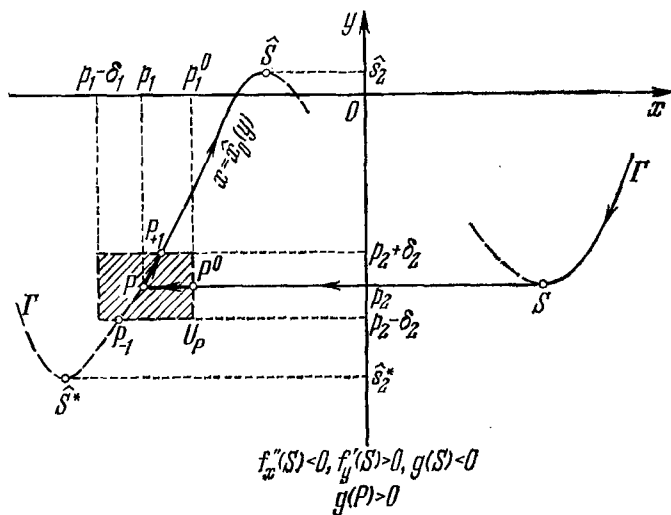


Рис. 42.

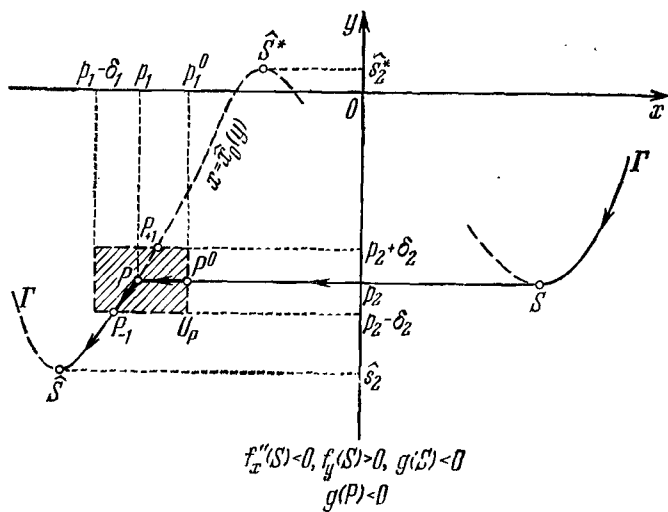


Рис. 43.

участка $x = \hat{x}_0(y)$ и в каждой точке которой имеет место неравенство

$$|g(x, y)| \geq k > 0. \quad (19.1)$$

Далее, в силу устойчивости участка $x = \hat{x}_0(y)$ вдоль его любого отрезка выполнено условие $f'_x(\hat{x}_0(y), y) \leq -k < 0$; поэтому можно предполагать, что в области U_p справедлива оценка

$$\left[\frac{f'_x(x, y)}{g(x, y)} - \frac{f(x, y) g'_x(x, y)}{g^2(x, y)} \right] \text{sign } g(P) \leq -k < 0. \quad (19.2)$$

Наконец, будем считать, что кривая $x = \hat{x}_0(y)$ пересекается именно с горизонтальными участками $y = p_2 - \delta_2$ и $y = p_2 + \delta_2$ границы области U_p в точках P_{-1} и P_{+1} соответственно (см. рис. 42, 43). Все эти требования можно удовлетворить за счет уменьшения чисел δ_1 и δ_2 .

В качестве точки $P^0(p_1^0, p_2^0)$, о которой говорилось в § 17, возьмем точку пересечения отрезка SP с границей области U_p . Расположенный в этой области участок $P^0PP_{\text{sign } g(P)}$ траектории \mathfrak{L}_0 состоит из горизонтального отрезка P^0P , имеющего уравнение

$$y = s_2, \quad p_1^0 \text{sign } f''_x(S) \leq x \text{sign } f''_x(S) \leq p_1 \text{sign } f''_x(S), \quad (19.3)$$

и дуги $PP_{\text{sign } g(P)}$ кривой Γ , имеющей уравнение

$$x = \hat{x}_0(y), \quad p_2 \text{sign } g(P) \leq y \text{sign } g(P) \leq p_2 \text{sign } g(P) + \delta_2. \quad (19.4)$$

Так как при достаточно малых ε траектория \mathfrak{L}_ε близка к траектории \mathfrak{L}_0 (см. § 2 и рис. 30), то траектория \mathfrak{L}_ε входит в область U_p через участок $x = p_1^0$ границы и покидает эту область через участок $y = p_2 + \delta_2 \text{sign } g(P)$ границы. Отрезок траектории \mathfrak{L}_ε , лежащий в области U_p , назовем *участком падения*.

Пусть $E(p_1^0, e)$ — точка пересечения траектории \mathfrak{L}_ε с прямой $x = p_1^0$, лежащая на границе области U_p (рис. 44, 45; ср. с рис. 42, 43). Так как эта точка — начальная точка участка падения — является одновременно конечной для предшествующего участка быстрого движения, то согласно (17.5) имеем

$$e = y_x(p_1^0, \varepsilon).$$

В силу неравенства (19.1) вдоль участка падения траектории \mathfrak{L}_ε координата y с течением времени t меняется

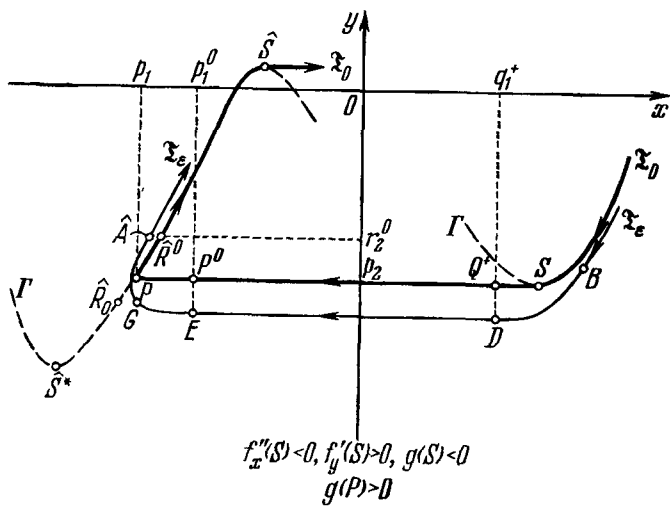


Рис. 44.

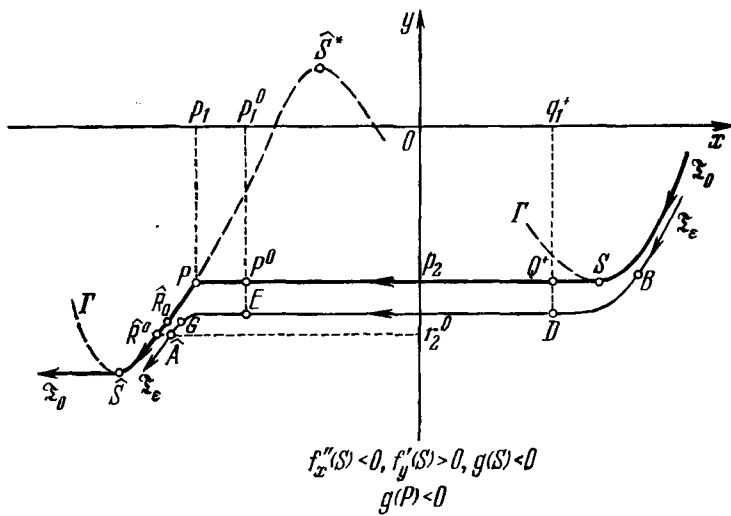


Рис. 45.

монотонно. Поэтому уравнение такого участка можно записать в виде

$$x = \hat{x}_\varepsilon(y, \varepsilon), \quad (19.5)$$

$$e \operatorname{sign} g(P) \leq y \operatorname{sign} g(P) \leq p_2 \operatorname{sign} g(P) + \delta_2,$$

принимая за независимую переменную координату y . Ясно, что функция (19.5) является решением эквивалентного системе (1.1) уравнения (ср. с (3.5))

$$\varepsilon \frac{dx}{dy} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \equiv h(x, y) \quad (19.6)$$

с гладкой правой частью и удовлетворяет условию

$$x(e, \varepsilon) = p_1^0. \quad (19.7)$$

Оказывается, что асимптотические приближения кривой (19.5) в некоторой малой вместе с ε окрестности начального значения $y=e$ и вне этой окрестности имеют существенно различную структуру. Построение асимптотического разложения участка падения траектории $\hat{\mathfrak{X}}_\varepsilon$ вне упомянутой окрестности мы проведем, используя уравнение (19.6), а для получения асимптотических представлений кривой (19.5) в непосредственной близости значения $y=e$ сделаем новое преобразование переменных.

От исходных переменных x, y, t перейдем к переменным z, ω, θ по формулам

$$x = p_1 + sz, \quad y = e + \varepsilon b \ln \omega, \quad t = \varepsilon \theta; \quad (19.8)$$

$$s = -\operatorname{sign} f'_x(S) = -\operatorname{sign} f'(P^0), \quad b = -\frac{1}{h'_x(P)} = -\frac{g(P)}{f'_x(P)}.$$

Время θ является быстрым (см. § 1), а первые два соотношения (19.8) устанавливают взаимно однозначное соответствие между областью U_P плоскости (x, y) и некоторой областью U_P^* плоскости (z, ω) , причем начальной точке E участка падения отвечает точка $z_0 = (p_1^0 - p_1) s > 0$, $\omega_0 = 1$. Переписывая систему (1.1) в новых переменных, получим

$$\begin{cases} \frac{dz}{d\theta} = \varepsilon f(p_1 + sz, e + \varepsilon b \ln \omega), \\ \frac{d\omega}{d\theta} = \frac{\omega}{b} g(p_1 + sz, e + \varepsilon b \ln \omega); \end{cases} \quad (19.9)$$

эта система уже не содержит малого параметра при производной.

Согласно формулам (19.8) участку падения траектории Σ_ε соответствует участок траектории системы (19.9), лежащий в области U_P^* и начинающийся в точке (z_0, ω_0) . Из второго уравнения (19.9) видно, что вдоль этого участка координата ω с течением времени θ монотонно возрастает. Следовательно, уравнение такого участка можно записать в виде

$$z = z_x(\omega, \varepsilon), \quad 1 \leq \omega \leq \exp \frac{\delta_2 - (e - p_2) \operatorname{sign} g(P)}{\varepsilon |b|}, \quad (19.10)$$

принимая за независимую переменную координату ω . Если теперь, считая ω параметром, вернуться к координатам x, y , то кривая (19.5) переписется в параметрической форме

$$x = x_x(\omega, \varepsilon) \equiv p_1 + s z_x(\omega, \varepsilon), \quad y = y_x(\omega, \varepsilon) \equiv e + \varepsilon b \ln \omega, \quad (19.11)$$

причем ω изменяется на отрезке, указанном в (19.10).

§ 20. Асимптотические приближения траектории на участке падения

Прежде всего найдем асимптотические представления функций $x_x(\omega, \varepsilon)$ и $y_x(\omega, \varepsilon)$ как функций переменной (параметра) ω . Для этого необходимо построить асимптотические приближения функции $z_x(\omega, \varepsilon)$ на некотором отрезке изменения ω .

Ясно, что функция (19.10) является решением эквивалентного системе (19.9) уравнения (ср. с (19.6))

$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{sb}{\omega} h(p_1 + sz, e + \varepsilon b \ln \omega) \quad (20.1)$$

с гладкой правой частью и удовлетворяет условию (см. (19.7))

$$z(1, \varepsilon) = (p_1^0 - p_1) s. \quad (20.2)$$

Используя уравнение (20.1) и условие (20.2), будем искать асимптотические представления функции (19.10), но не на всем отрезке ее определения, а лишь на отрезке $1 \leq \omega \leq 1/\varepsilon^a$, где $a > 0$ — действительное число. При этом нам потребуется также разложение, представляющее

собой формальное значение ряда (17.8) при $x = p_1^0$:

$$e = p_2 + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} e_{n,\nu} \ln^{\nu} \frac{1}{\varepsilon}, \quad e_{n,\nu} = y_{n,\nu}(p_1^0). \quad (20.3)$$

Построим формальный ряд

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} z_{n,\nu}(\omega) \ln^{\nu} \frac{1}{\varepsilon} \quad (20.4)$$

так, чтобы он формально удовлетворял уравнению (20.1) на полуинтервале $1 \leq \omega < \infty$ изменения ω и условию (20.2). Коэффициенты этого ряда определим следующим образом. Подставим ряды (20.4), (20.3) в уравнение (20.1) и его правую часть формально разложим в ряд по величинам $\varepsilon^{n/3} \ln^{\nu} (1/\varepsilon)$. Такое разложение удобно проводить с помощью формулы (ср. с (3.7))

$$\begin{aligned} F\left(x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n x_n, y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k y_k\right) &= F(x_0, y_0) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{\alpha+\beta=k, \\ \alpha \geq 0, \beta \geq 0}} \frac{F_x^{(\alpha)} F_y^{(\beta)}(x_0, y_0)}{\alpha! \beta!} \times \\ &\times \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_{\alpha} + \\ + j_1 + \dots + j_{\beta} = n, \\ i_{\nu} \geq 1, j_{\nu} \geq 1}} x_{i_1} \dots x_{i_{\alpha}} y_{j_1} \dots y_{j_{\beta}}, \end{aligned} \quad (20.5)$$

которая проверяется непосредственно. Положив для краткости

$$\begin{aligned} z_1 &= 0, \quad z_n(\omega) = \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} z_{n,\nu}(\omega) \ln^{\nu} \frac{1}{\varepsilon}, \quad n \geq 2; \\ e_1 &= 0, \quad e_n = \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} e_{n,\nu} \ln^{\nu} \frac{1}{\varepsilon}, \quad n \geq 2, \end{aligned} \quad (20.6)$$

и применив формулу (20.5), приравняем выражения, получающиеся в левой и правой частях уравнения (20.1)

при одинаковых степенях ε :

$$\begin{aligned}
 z'_{0,0}(\omega) &= \frac{sb}{w} h(p_1 + sz_{0,0}(\omega), p_2), \\
 z'_n(\omega) &= \\
 &= \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-3m}{2} \rfloor} \sum_{\substack{\alpha+\beta=k \\ \alpha \geq 0, \beta \geq 0}} \frac{h_x^{(\alpha)} h_y^{(\beta+m)}(p_1 + sz_{0,0}(\omega), p_2)}{\alpha! \beta! m!} \times \\
 &\times \frac{s^{2+1} b^{m+1} \ln^m \omega}{w} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_\alpha+ \\ +i_1+\dots+i_\beta=n-3m, \\ i_\nu \geq 2, j_\nu \geq 2}} z_{i_1} \dots z_{i_\alpha} e_{j_1} \dots e_{j_\beta} + \\
 &+ \begin{cases} 0, & \text{если } n \not\equiv 0 \pmod{3}, \\ \frac{h_y^{(n/3)}(p_1 + sz_{0,0}(\omega), p_2)}{(n/3)!} \frac{sb^{\frac{n}{3}+1} \ln^{\frac{n}{3}} \omega}{w}, & n \geq 2, \\ \text{если } n \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{20.7}$$

Поскольку для функции (12.14) справедливы равенства $\pi(n-3m) = \pi(n) - m$ и (ср. с (14.8))

$$\max_{\substack{i_1+\dots+i_k=m, \\ i_\nu \geq 2, m \geq 2}} \{ \pi(i_1-2) + \dots + \pi(i_k-2) \} = \pi(m-2), \tag{20.8}$$

нетрудно убедиться, что (см. (20.6))

$$\begin{aligned}
 &\sum_{\substack{i_1+\dots+i_\alpha+ \\ +i_1+\dots+i_\beta=n-3m, \\ \alpha+\beta=k, \\ i_\nu \geq 2, i_\nu \geq 2, n-3m \geq 2}} z_{i_1} \dots z_{i_\alpha} e_{j_1} \dots e_{j_\beta} = \\
 &= \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)-m} W_{n,m,k}^{\alpha,\beta,\nu}(\omega) \ln^\nu \frac{1}{\varepsilon}. \tag{20.9}
 \end{aligned}$$

Из соотношения (20.9) ясно, что правая часть n -го равенства (20.7) при $n \geq 2$ является многочленом от $\ln(1/\varepsilon)$ степени $\pi(n-2)$ с коэффициентами, зависящими от функций $z_{k,\nu}(\omega)$, $k=0, 1, \dots, n$. Теперь приравняем выражения, стоящие слева и справа в каждом из соотношений (20.7) при одинаковых степенях $\ln(1/\varepsilon)$. Кроме того, подставим ряд (20.4) в соотношение (20.2) и приравняем выражения, находящиеся слева и справа при одинаковых величинах $\varepsilon^{n/3} \ln^\nu(1/\varepsilon)$.

Отметим, что функция $z_n(\omega)$ входит в правую часть n -го равенства (20.7) лишь один раз — в слагаемое, отвечающее значениям $m=0$, $k=1$, $\alpha=1$, $\beta=0$. Отсюда в свою очередь вытекает, что при любом $n \geq 2$ каждая из функций $z_{n,\nu}(\omega)$, $\nu=0, 1, \dots, \pi(n-2)$, встречается в упомянутом многочлене от $\ln(1/\epsilon)$ только однажды — в коэффициенте при $\ln^\nu(1/\epsilon)$. Следовательно, в результате указанных выше операций мы приходим к равенствам (ср. с § 10)

$$z'_{0,0}(\omega) = \frac{sb}{\omega} h(p_1 + sz_{0,0}(\omega), p_2), \quad z_{0,0}(1) = (p_1^0 - p_1)s;$$

$$z'_{2,0}(\omega) - z_{2,0}(\omega) \frac{bh'_x(p_1 + sz_{0,0}(\omega), p_2)}{\omega} = \Phi_{2,0}(\omega) \equiv$$

$$\equiv \frac{e_{2,0} sb h'_y(p_1 + sz_{0,0}(\omega), p_2)}{\omega}, \quad z_{2,0}(1) = 0; \quad (20.10)$$

$$z'_{n,\nu}(\omega) - z_{n,\nu}(\omega) \frac{bh'_x(p_1 + sz_{0,0}(\omega), p_2)}{\omega} = \Phi_{n,\nu}(\omega),$$

$$z_{n,\nu}(1) = 0, \quad n \geq 2, \quad \nu = 0, 1, \dots, \pi(n-2).$$

Правая часть $\Phi_{n,\nu}(\omega)$ соответствующего равенства (20.10) при $n \geq 2$ выражается только через функции $z_{0,0}(\omega)$, $z_{2,0}(\omega)$, \dots , $z_{n-2,\nu}(\omega)$ и не содержит функции $z_{n-1,\kappa}(\omega)$, $z_{n,\kappa}(\omega)$. Легко также убедиться, что каждая из функций $\Phi_{n,\nu}(\omega)$, $n \geq 2$, зависит от констант $e_{2,0}, \dots, e_{n,\nu}$, но величины $e_{k,\kappa}$ при $k > n$ в выражение для этой функции не входят.

Первая пара равенств (20.10) представляет собой дифференциальное уравнение с разделенными переменными и начальное условие для него. Решая эту задачу, найдем функцию

$$\omega = \omega(z) \equiv$$

$$\equiv \exp \left\{ \frac{f'_x(P)}{g(P)} \operatorname{sign} f'_x(S) \int_{(p_1^0 - p_1)s}^z \frac{g(p_1 + sx, p_2)}{f(p_1 + sx, p_2)} dx \right\}. \quad (20.11)$$

Непосредственно проверяется, что функция (20.11) определена на полуинтервале $0 < z \leq (p_1^0 - p_1)s$, принимает значения $\omega \geq 1$ и неограниченно возрастает при $z \rightarrow 0$, а ее график — монотонно убывающая выпуклая вниз (см. (19.2)) кривая. Функция

$$z = z_{0,0}(\omega) \quad (20.12)$$

— начальный коэффициент ряда (20.4) — является обратной к функции (20.11). Ясно, что функция (20.12) определена на полуинтервале $1 \leq \omega < \infty$, монотонно убывает и асимптотически приближается при $\omega \rightarrow \infty$ к оси ω (рис. 46).

Остальные пары равенств (20.10) описывают начальные задачи для линейных дифференциальных уравнений и

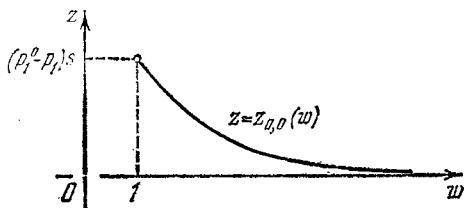


Рис. 46.

потому однозначно последовательно определяют коэффициенты $z_{n,\nu}(\omega)$ ряда (20.4):

$$z_{2,0}(\omega) = e_{2,0} s b_0 \mathcal{N}^0(\omega) \int_1^\omega \frac{h'_y(p_1 + s z_{0,0}(x), p_2)}{x \mathcal{N}^0(x)} dx,$$

$$z_{n,\nu}(\omega) = \mathcal{N}^\nu(\omega) \int_1^\omega \frac{\Phi_{n,\nu}(x)}{\mathcal{N}^\nu(x)} dx, \quad (20.13)$$

$$n \geq 2, \quad \nu = 0, 1, \dots, \pi(n-2);$$

здесь использовано обозначение для функции

$$\mathcal{N}^\nu(\omega) = \exp \int_1^\omega \frac{b h'_x(p_1 + s z_{0,0}(x), p_2)}{x} dx. \quad (20.14)$$

Из полученных формул непосредственно видно, что функции $z_{n,\nu}(\omega)$ определены и являются гладкими на полуинтервале $1 \leq \omega < \infty$ изменения ω . Подчеркнем, что каждая из этих функций эффективно вычисляется только через значения правых частей системы (1.1) и нескольких их производных на отрезке P^0P траектории \mathfrak{Z}_0 и через конечное число начальных коэффициентов разложения (20.3). Последнее особенно существенно, поскольку ни точное значение величины e , ни ее разложение (20.3) нам не известны, и мы можем использовать лишь частичные

суммы ряда (20.3)

$$E_n(\varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^{k/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(k-2)} e_{k,\nu} \ln^\nu \frac{1}{\varepsilon}, \quad (20.15)$$

которые служат асимптотическими приближениями этой величины.

В § 21 мы убедимся, что частичная сумма построенного ряда (20.4)

$$Z_n(\omega, \varepsilon) = \sum_{k=0}^n \varepsilon^{k/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(k-2)} z_{k,\nu}(\omega) \ln^\nu \frac{1}{\varepsilon} \quad (20.16)$$

является при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотическим приближением того участка решения (19.10) задачи (20.1), (20.2), который отвечает отрезку $1 \leq \omega \leq 1/\varepsilon^a$, где $a > 0$ — произвольное число. Функции (19.11), рассматриваемые на указанном отрезке изменения параметра ω , представляют уравнение траектории \mathfrak{L}_ε в начале участка падения. Мы докажем, что справедливы следующие асимптотические представления траектории \mathfrak{L}_ε в начале участка падения:

$$\begin{cases} \begin{cases} x_{\mathfrak{L}}(\omega, \varepsilon) = p_1 + sz_{0,0}(\omega) + O(\varepsilon^{2/3}), \\ y_{\mathfrak{L}}(\omega, \varepsilon) = p_2 + O(\varepsilon^{2/3}), \end{cases} & 1 \leq \omega \leq 1/\varepsilon^{2/3}; \\ \begin{cases} x_{\mathfrak{L}}(\omega, \varepsilon) = p_1 + sz_{0,0}(\omega) + sz_{2,0}(\omega) \varepsilon^{2/3} + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \\ y_{\mathfrak{L}}(\omega, \varepsilon) = p_2 + e_{2,0} \varepsilon^{2/3} + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \end{cases} & 1 \leq \omega \leq 1/\varepsilon; \end{cases} \quad (20.17)$$

$$\begin{cases} x_{\mathfrak{L}}(\omega, \varepsilon) = p_1 + sZ_{N+2}(\omega, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{N+3}{3}} \ln^{\pi(N+1)} \frac{1}{\varepsilon}\right), \\ y_{\mathfrak{L}}(\omega, \varepsilon) = E_{N+2}(\varepsilon) + \varepsilon b \ln \omega + O\left(\varepsilon^{\frac{N+3}{3}} \ln^{\pi(N+1)} \frac{1}{\varepsilon}\right), \end{cases} \quad 1 \leq \omega \leq 1/\varepsilon^{\frac{N+3}{3}},$$

где N — произвольное натуральное число. В частности, отсюда видно, что участок (19.3) траектории \mathfrak{L}_0 служит

нулевым приближением траектории \mathfrak{X}_ε в начале участка падения. Приведем также пример приближения более высокого порядка

$$\left\{ \begin{array}{l} x_x(\omega, \varepsilon) = \rho_1 + sz_{0,0}(\omega) + sz_{2,0}(\omega) \varepsilon^{2/3} + \\ \quad + sz_{3,1}(\omega) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + sz_{3,0}(\omega) \varepsilon + O(\varepsilon^{4/3}), \\ y_x(\omega, \varepsilon) = \rho_2 + e_{2,0} \varepsilon^{2/3} + e_{3,1} \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + e_{3,0} \varepsilon + \\ \quad + \varepsilon b \ln \omega + O(\varepsilon^{4/3}), \\ 1 \leq \omega \leq 1/\varepsilon^{4/3}. \end{array} \right. \quad (20.18)$$

Рассмотрим на траектории \mathfrak{X}_ε точку $G(x, y)$, координаты которой определяются по формулам (19.11) при значении параметра $\omega = \varepsilon^{-(N+3)/3}$, и пусть \hat{R}_0 — точка на дуге $\hat{S}^* \hat{S}$ кривой Γ , имеющая ту же ординату, что и точка G (см. рис. 44, 45). Точка G является конечной для изученного только что отрезка EG траектории \mathfrak{X}_ε в начале участка падения. Нам, очевидно, остается провести вычисление траектории \mathfrak{X}_ε в конце участка падения, т. е. построить асимптотические представления функции (19.5) на отрезке

$$y \operatorname{sign} g(P) \leq y \operatorname{sign} g(P) \leq \rho_2 \operatorname{sign} g(P) + \delta_2.$$

Для этого используем уравнение (19.6) и уравнение $x = \hat{x}_0(y)$ устойчивого участка $\hat{S}^* \hat{S}$ кривой Γ .

Построим формальный степенной ряд

$$x = \hat{x}_0(y) + \varepsilon \hat{x}_1(y) + \dots + \varepsilon^n \hat{x}_n(y) + \dots \quad (20.19)$$

так, чтобы он формально удовлетворял уравнению (19.6) на интервале изменения y между \hat{s}_2^* и \hat{s}_2 . Коэффициенты этого ряда отыскиваются так же, как и в § 3; нужно лишь учесть, что сейчас мы должны исходить из функции $\hat{x}_0(y)$. Подчеркнем, что каждая из функций $\hat{x}_n(y)$ определена и является гладкой при изменении y на интервале между \hat{s}_2^* и \hat{s}_2 и эффективно вычисляется только через значения правых частей системы (1.1) и нескольких их производных на участке $\hat{S}^* \hat{S}$ кривой Γ .

В § 21 мы убедимся, что *частичная сумма построенного ряда* (20.19)

$$\hat{X}_n(y, \varepsilon) = \hat{x}_0(y) + \varepsilon \hat{x}_1(y) + \dots + \varepsilon^n \hat{x}_n(y) \quad (20.20)$$

является при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотическим приближением траектории \mathfrak{X}_ε в конце участка падения:

$$\hat{x}_x(y, \varepsilon) = \left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_0(y) + O(\varepsilon^{2/3}), \rho_2 \operatorname{sign} g(P) + O(\varepsilon^{2/3}) \leq \\ \leq y \operatorname{sign} g(P) \leq \rho_2 \operatorname{sign} g(P) + \delta_2; \\ \hat{x}_0(y) + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), E_2(\varepsilon) \operatorname{sign} g(P) + \\ + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right) \leq y \operatorname{sign} g(P) \leq \\ \leq \rho_2 \operatorname{sign} g(P) + \delta_2; \\ \hat{X} \left] \frac{N+3}{3} \right] (y, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{N+3}{3}} \ln^{\pi(N+1)} \frac{1}{\varepsilon}\right), \\ \left(E_{N+2}(\varepsilon) + \frac{N+3}{3} b \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) \operatorname{sign} g(P) + \\ + O\left(\varepsilon^{\frac{N+3}{3}} \ln^{\pi(N+1)} \frac{1}{\varepsilon}\right) \leq y \operatorname{sign} g(P) \leq \\ \leq \rho_2 \operatorname{sign} g(P) + \delta_2, \end{array} \right. \quad (20.21)$$

где N — произвольное натуральное число. В частности, отсюда видно, что участок (19.4) траектории \mathfrak{X}_0 служит нулевым приближением траектории \mathfrak{X}_ε в конце участка падения. В качестве приближения более высокого порядка приведем формулу (ср. с (3.14))

$$\begin{aligned} \hat{x}_x(y, \varepsilon) = \\ = \hat{x}_0(y) + \varepsilon \frac{-f'_y(\hat{x}_0(y), y) g(\hat{x}_0(y), y)}{f_x^2(\hat{x}_0(y), y)} + O(\varepsilon^{4/3}), \end{aligned} \quad (20.22)$$

$$\begin{aligned} & \left[\rho_2 + e_{2,0} \varepsilon^{2/3} + \right. \\ & \left. + \left(e_{3,1} + \frac{4}{3} b \right) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + e_{3,0} \varepsilon \right] \operatorname{sign} g(P) + O(\varepsilon^{4/3}) \leq \\ & \leq y \operatorname{sign} g(P) \leq \rho_2 \operatorname{sign} g(P) + \delta_2. \end{aligned}$$

§ 21. Доказательство асимптотических представлений участка падения

Лемма 12. Для функций $z_{n, \nu}(\omega)$, определенных равенствами (20.12), (20.13), справедливы следующие асимптотические представления:

$$z_{0, 0}(\omega) = \frac{1}{\omega} \exp \left\{ \frac{sf'_x(P)}{g(P)} \int_0^{(p_1^0 - p_1)s} \frac{g(p_1 + sx, p_2)}{f(p_1 + sx, p_2)} dx \right\} + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \\ \text{при } \omega \rightarrow \infty; \quad (21.1)$$

$$z_{n, \nu}(\omega) = O(\ln^{\pi(n-2)-\nu} \omega) \text{ при } \omega \rightarrow \infty, \\ n \geq 2, \quad \nu = 0, 1, \dots, \pi(n-2). \quad (21.2)$$

Соотношение (21.1) легко установить, если сначала, используя результаты § 13, выписать асимптотику функции (20.11) при $z \rightarrow 0$:

$$w = \exp \left\{ -\ln z + \frac{sf'_x(P)}{g(P)} \int_0^{(p_1^0 - p_1)s} \frac{g(p_1 + sx, p_2)}{f(p_1 + sx, p_2)} dx + O(z) \right\}, \quad z \rightarrow 0.$$

Доказательство соотношений (21.2) проводится по индукции. Прежде всего проверим, что введенная равенством (20.14) функция $\mathcal{N}^\circ(\omega)$ имеет асимптотическое представление

$$\mathcal{N}^\circ(\omega)^+ = \frac{1}{\omega} \exp \int_1^\infty \frac{bh'_x(p_1 + sz_{0, 0}(x), p_2)}{x} dx + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right). \quad (21.3)$$

Асимптотика функции $z_{2, 0}(\omega)$ при $\omega \rightarrow \infty$ получается непосредственно из первого равенства (20.13) с учетом формулы (21.3). Если, далее, предположить, что утверждение леммы выполнено для функций $z_{k, \nu}(\omega)$, $k < n$, то, привлекая равенства (20.7) и (20.9), найдем

$$\Phi_{n, \nu}(\omega)^+ = O\left(\frac{1}{\omega} \ln^{\pi(n-2)-\nu} \omega\right). \quad (21.4)$$

Соотношения (20.13), (21.3) и (21.4) в свою очередь приводят к представлению (21.2).

Более подробные вычисления позволяют убедиться, что функция $z_{0,0}(\omega)$ и функция $z_{n,\nu}(\omega)$ при любом натуральном $n \geq 2$ и любом $\nu = 0, 1, \dots, \pi(n-2)$, имеют асимптотические ряды

$$z_{0,0}(\omega)^+ = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_{k,0}^{0,0}}{\omega^k}; \tag{21.5}$$

$$z_{n,\nu}(\omega)^+ = \sum_{\kappa=0}^{\pi(n-2)-\nu} z_{0,\kappa}^{n,\nu} \ln^{\kappa} \omega + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\kappa=0}^{\pi(n-2)-\nu+1} \frac{z_{k,\kappa}^{n,\nu} \ln^{\kappa} \omega}{\omega^k},$$

причем можно получить формулы весьма громоздкого вида для последовательного отыскания коэффициентов $z_{k,\kappa}^{n,\nu}$. В частности, легко проверить, что

$$z_{2,0}(\omega)^+ = e_{2,0} sb h'_y(P) + O\left(\frac{1}{\omega} \ln \omega\right),$$

$$z_{3,1}(\omega)^+ = e_{3,1} sb h'_y(P) + O\left(\frac{1}{\omega} \ln \omega\right), \tag{21.6}$$

$$z_{3,0}(\omega)^+ = sb^2 h'_y(P) \ln \omega + (e_{3,0} sb - sb^2) h'_y(P) + O\left(\frac{1}{\omega} \ln^2 \omega\right).$$

Относительно функций $\hat{x}_i(y)$ справедливо утверждение, аналогичное лемме 1. Отметим также, что значение каждой из функций $\hat{x}_i(y)$ и ее производных при $y = \rho_2$ эффективно вычисляются через значения частных производных функции $f(x, y)$ в точке падения P . Это в свою очередь позволяет найти формулы для последовательного отыскания коэффициентов $\hat{x}_{n,\nu}^x$ разложения, представляющего собой формальное значение ряда (20.19) при $y = e + \varepsilon b \ln \omega$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \hat{x}_i(e + \varepsilon b \ln \omega) =$$

$$= p_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} \sum_{\kappa=0}^{\pi(n-2)-\nu} \hat{x}_{n,\nu}^x \ln^{\kappa} \omega \ln^{\nu} \frac{1}{\varepsilon}. \tag{21.7}$$

Разложение (21.7) легко получается с помощью равенств (20.3), (3.7), (20.8).

Весьма важным фактом является наличие непосредственной связи между коэффициентами рядов (21.5) и (21.7):

$$sz_{0, \kappa}^{n, \nu} = \hat{x}_{n, \nu}^{\kappa},$$

$$n \geq 2, \quad \nu = 0, 1, \dots, \pi(n-2), \quad \kappa = 0, 1, \dots, \pi(n-2) - \nu. \quad (21.8)$$

Для доказательства равенств (21.8) необходимо воспользоваться общими формулами для соответствующих коэффициентов разложений (21.5) и (21.7).

Лемма 13. Пусть

$$F_n(\omega, \varepsilon) = \varepsilon^{\frac{n+1}{3}} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-1)} (1 + \ln^{\pi(n-1)-\nu} \omega) \ln^{\nu} \frac{1}{\varepsilon}, \quad n \geq 1.$$

При достаточно малых ε существует такая константа $C_n > 0$, что производная в силу уравнения (20.1) положительна в каждой точке кривой

$$\mathcal{K}_1^{\circ}(\omega, z) \equiv z - Z_n(\omega, \varepsilon) + C_n F_n(\omega, \varepsilon) = 0, \quad 1 \leq \omega \leq 1/\varepsilon^a, \quad (21.9)$$

и отрицательна в каждой точке кривой

$$\mathcal{K}_2^{\circ}(\omega, z) \equiv z - Z_n(\omega, \varepsilon) - C_n F_n(\omega, \varepsilon) = 0, \quad 1 \leq \omega \leq 1/\varepsilon^a; \quad (21.10)$$

здесь $a > 0$ — произвольное число.

Допустим, что $n \geq 4$, и вычислим производную в силу уравнения (20.1) в произвольной точке кривой $\mathcal{K}_1^{\circ}(\omega, z) = 0$:

$$\left. \frac{d\mathcal{K}_1}{d\omega} \right|_{(20.1)} = \frac{sb}{\omega} h(p_1 + sZ_n(\omega, \varepsilon) - sC_n F_n(\omega, \varepsilon), e + \varepsilon b \ln \omega) - \frac{dZ_n(\omega, \varepsilon)}{d\omega} + C_n \frac{dF_n(\omega, \varepsilon)}{d\omega}.$$

Из самого процесса построения функций $z_{n, \nu}(\omega)$ (см. (20.7), (20.10)) следует, что

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\mathcal{K}_1}{d\omega} \right|_{(20.1)} &= \frac{1}{\omega} \varepsilon^{\frac{n+1}{3}} \left\{ [-bh'_x(p_1 + sz_{0,0}(\omega), p_2) C_n + \right. \\ &\quad \left. + \omega \Phi_{n+1, \pi(n-1)}(\omega)] \ln^{\pi(n-1)} \frac{1}{\varepsilon} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\nu=0}^{\pi(n-1)-1} [-bh'_x(p_1 + sz_{0,0}(\omega), p_2) C_n (1 + \ln^{\pi(n-1)-\nu} \omega) + \right. \\ &\quad \left. + \omega \Phi_{n+1, \nu}(\omega) + (\pi(n-1) - \nu) C_n \ln^{\pi(n-1)-\nu-1} \omega] \ln^{\nu} \frac{1}{\varepsilon} \right\} + \\ &\quad + O\left(\varepsilon^{\frac{n+2}{3}} \ln^{\pi(n)} \frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (21.11) \end{aligned}$$

В силу свойств функции (20.12) и условия (19.2) на всем полуинтервале $\omega \geq 1$ выполнено неравенство

$$bh'_x(p_1 + sz_{0,0}(\omega), p_2) \leq -k < 0.$$

Далее, каждая из функций $\Phi_{n+1, \nu}(\omega)$ ограничена на любом конечном отрезке из этого полуинтервала, а при $\omega \rightarrow \infty$ имеет асимптотику, указанную в (21.4). Отсюда нетрудно заключить, что все выражения в квадратных скобках в равенстве (21.11) будут строго положительны на отрезке $1 \leq \omega \leq 1/\varepsilon^a$, где $a > 0$, если выбрать константу $C_n > 0$ достаточно большой.

Поскольку начальная точка решения (19.10) уравнения (20.1) находится в полосе между кривыми (21.9) и (21.10) (см. (20.2), (20.10)), то лемма 13 решает вопрос о возможности асимптотического приближения частичными суммами ряда (20.4) участка этого решения, отвечающего отрезку $1 \leq \omega \leq 1/\varepsilon^a$, $a > 0$, изменения ω . Возвратимся теперь к координатам x, y , считая ω параметром, и одновременно используем асимптотические приближения (20.15) величины ε . В результате можно получить следующее утверждение об асимптотических представлениях траекторий системы (1.1) в начале участка падения.

Теорема IX. Пусть $P(p_1, p_2)$ — внутренняя точка устойчивого участка $\hat{S}^ \hat{S}$ кривой Γ , функция $Z_n(\omega, \varepsilon)$, $n \geq 1$, определена формулой (20.16), величина $E_n(\varepsilon)$, $n \geq 1$, определена формулой (20.15), а*

$$x = \mathbf{x}(\omega, \varepsilon) \equiv p_1 + sz(\omega, \varepsilon), \quad y = \mathbf{y}(\omega, \varepsilon) \equiv y^0 + \varepsilon b \ln \omega$$

— записанное в параметрической форме решение уравнения (19.6) с начальной точкой при $\omega = 1$, удовлетворяющей для достаточно малых ε условиям

$$|z(1, \varepsilon) - (p_1^0 - p_1)s| < C\varepsilon^{\frac{n+1}{3}} \ln^{\pi(n-1)} \frac{1}{\varepsilon}, \quad C > 0. \quad (21.12)$$

$$|y^0 - E_n(\varepsilon)| < C\varepsilon^{\frac{n+1}{3}} \ln^{\pi(n-1)} \frac{1}{\varepsilon},$$

Тогда при достаточно малых ε это решение определено на всем отрезке $1 \leq \omega \leq 1/\varepsilon^{\frac{n+1}{3}}$ изменения параметра ω и представимо в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\omega, \varepsilon) &= p_1 + sZ_n(\omega, \varepsilon) + \mathfrak{R}_n^1(\omega, \varepsilon), \\ \mathbf{y}(\omega, \varepsilon) &= E_n(\varepsilon) + \varepsilon b \ln \omega + \mathfrak{R}_n^2(\varepsilon), \end{aligned} \quad 1 \leq \omega \leq 1/\varepsilon^{\frac{n+1}{3}},$$

причем равномерно на отрезке $1 \leq \omega \leq 1/\varepsilon^{\frac{n+1}{3}}$

$$|\mathfrak{N}_n^1(\omega, \varepsilon)| < C_n \varepsilon^{\frac{n+1}{3}} \ln^{\pi(n-1)} \frac{1}{\varepsilon},$$

$$|\mathfrak{N}_n^2(\varepsilon)| < C_n \varepsilon^{\frac{n+1}{3}} \ln^{\pi(n-1)} \frac{1}{\varepsilon}, \quad C_n = \text{const} > 0.$$

В силу представления (17.14) и выбора начальных условий в (20.10) функции (19.11), описывающие траекторию \mathfrak{X}_ε в начале участка падения, при любом целом $n \geq 1$ удовлетворяют условиям (21.12). Поэтому теорема IX применима для получения асимптотических приближений траектории \mathfrak{X}_ε в начале участка падения. Тем самым формулы (20.17) доказаны.

Далее нам потребуется одно обобщение леммы 2. Обозначим через $\hat{R}_0(\hat{r}_{01}, \hat{r}_{02})$ и $\hat{R}^0(\hat{r}_1^0, \hat{r}_2^0)$ произвольные внутренние точки дуги $\hat{S}^*\hat{S}$, отстоящие на конечное расстояние как от концов этой дуги, так и друг от друга, причем $\hat{r}_{02} \text{sign } g(\hat{S}) < \hat{r}_2^0 \text{sign } g(\hat{S})$.

Лемма 14. Пусть

$$F(y, \varepsilon) = \frac{\hat{r}_2^0 - y}{\hat{r}_2^0 - \hat{r}_{02}} \varepsilon^\alpha \ln^\beta \frac{1}{\varepsilon} + \frac{y - \hat{r}_{02}}{\hat{r}_2^0 - \hat{r}_{02}} \varepsilon,$$

$$0 < \alpha \leq 1, \quad \beta \geq 0. \quad (21.13)$$

При достаточно малых ε существует такая константа $C_n > 0$, что производная в силу системы (1.1) положительна в каждой точке кривой

$$\mathfrak{K}_1(y, x) \equiv x - \hat{X}_n(y, \varepsilon) + C_n \varepsilon^n F(y, \varepsilon) = 0,$$

$$\hat{r}_{02} \text{sign } g(\hat{S}) \leq y \text{sign } g(\hat{S}) \leq \hat{r}_2^0 \text{sign } g(\hat{S}),$$

и отрицательна в каждой точке кривой

$$\mathfrak{K}_2(y, x) \equiv x - \hat{X}_n(y, \varepsilon) - C_n \varepsilon^n F(y, \varepsilon) = 0,$$

$$\hat{r}_{02} \text{sign } g(\hat{S}) \leq y \text{sign } g(\hat{S}) \leq \hat{r}_2^0 \text{sign } g(\hat{S}).$$

Нетрудно найти производную в силу системы (1.1) в произвольной точке кривой $\mathfrak{K}_1(y, x) = 0$:

$$\left. \frac{d\mathfrak{K}_1}{dt} \right|_{(1.1)} = \frac{1}{\varepsilon} g(\hat{X}_n(y, \varepsilon) - C_n \varepsilon^n F(y, \varepsilon), y) \left\{ h(\hat{X}_n(y, \varepsilon) - \right.$$

$$\left. - C_n \varepsilon^n F(y, \varepsilon), y) - \varepsilon \frac{d\hat{X}_n(y, \varepsilon)}{dy} + C_n \varepsilon^{n+1} \frac{dF(y, \varepsilon)}{dy} \right\}.$$

В предположении $n \geq 1$ (при $n=0$ рассуждения изменяются несущественно) получаем (ср. с § 4)

$$g(\hat{X}_n(y, \varepsilon) - C_n \varepsilon^n F(y, \varepsilon), y) = g(\hat{x}_0(y), y) + O(\varepsilon),$$

$$h(\hat{X}_n(y, \varepsilon) - C_n \varepsilon^n F(y, \varepsilon), y) = h(\hat{X}_n(y, \varepsilon), y) -$$

$$- C_n \varepsilon^n F(y, \varepsilon) h'_x(\hat{x}_0(y), y) + O\left(\varepsilon^{n+1+\alpha} \ln^\beta \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Эти равенства и формула, аналогичная (4.5), позволяют утверждать, что

$$\left. \frac{d\mathcal{H}_1}{dt} \right|_{(1.1)} =$$

$$= -\varepsilon^{n-1} \{C_n F(y, \varepsilon) + \varepsilon \hat{x}_{n+1}(y)\} f'_x(\hat{x}_0(y), y) +$$

$$+ O\left(\varepsilon^{n+\alpha} \ln^\beta \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Привлекая неравенство (19.2) и определение (21.13), убеждаемся, что рассматриваемая производная будет строго положительной при достаточно малых ε , если выбрать константу $C_n > 0$ достаточно большой.

Из леммы 14 непосредственно следует аналогичное теореме I утверждение о возможности асимптотического приближения отрезков траекторий системы (1.1) частичными суммами ряда (20.19).

Теорема X. Пусть $x = \hat{x}_0(y)$ — устойчивый участок кривой Γ , функция $\hat{X}_n(y, \varepsilon)$, $n \geq 0$, определена формулой (20.20), а $x = \hat{x}(y, \varepsilon)$ — решение уравнения (19.6) с начальным значением при $y = \hat{r}_{02}$, удовлетворяющим для достаточно малых ε условию

$$|\hat{x}(\hat{r}_{02}, \varepsilon) - \hat{X}_n(\hat{r}_{02}, \varepsilon)| < C \varepsilon^{n+\alpha} \ln^\beta \frac{1}{\varepsilon}, \quad (21.14)$$

$$C > 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad \beta \geq 0.$$

Тогда при достаточно малых ε это решение определено на всем отрезке

$$\hat{r}_{02} \operatorname{sign} g(\hat{S}) \leq y \operatorname{sign} g(\hat{S}) \leq \hat{r}_{02}^* \operatorname{sign} g(\hat{S}) \quad (21.15)$$

и представимо в виде

$$\hat{x}(y, \varepsilon) = \hat{X}_n(y, \varepsilon) + \mathfrak{R}_n(y, \varepsilon),$$

$$\hat{r}_{02} \operatorname{sign} g(\hat{S}) \leq y \operatorname{sign} g(\hat{S}) \leq \hat{r}_{02}^* \operatorname{sign} g(\hat{S}),$$

причем равномерно на отрезке (21.15)

$$|\mathfrak{H}_n(\mathbf{y}, \varepsilon)| < C_n \varepsilon^{n+\alpha} \ln^{\beta} \frac{1}{\varepsilon}, \quad C_n = \text{const} > 0. \quad (21.16)$$

Возьмем теперь в качестве \hat{R}_0 точку, которая была определена в § 20, а в качестве \hat{R}^0 — точку $P_{\text{sign } g(P)}$ (см. § 19); в этом случае

$$\hat{r}_{02} = \mathbf{y}, \quad \hat{r}_2^0 = p_2 + \delta_2 \text{sign } g(P)$$

(см. рис. 42—45). Покажем, что функция (19.5), описывающая траекторию \mathfrak{X}_ε в конце участка падения, удовлетворяет условию (21.14). Фиксируем произвольное натуральное число N и, привлекая последнюю пару формул (20.17) (для первых двух пар формул (20.17) рассуждения аналогичны), найдем координаты точки G :

$$\begin{aligned} x &= p_1 + s Z_{N+2} \left(1/\varepsilon^{\frac{N+3}{3}}, \varepsilon \right) + O \left(\varepsilon^{\frac{N+3}{3}} \ln^{\pi(N+1)} \frac{1}{\varepsilon} \right), \\ y &= E_{N+2}(\varepsilon) + \frac{N+3}{3} b \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + O \left(\varepsilon^{\frac{N+3}{3}} \ln^{\pi(N+1)} \frac{1}{\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

Поэтому, используя разложения (21.5), можем записать:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{\mathfrak{X}}(\mathbf{y}, \varepsilon) &= x = \\ &= p_1 + s \sum_{n=0}^{N+2} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} z_{n,\nu} \left(\varepsilon^{-\frac{N+3}{3}} \right) \ln^\nu \frac{1}{\varepsilon} + \\ &+ O \left(\varepsilon^{\frac{N+3}{3}} \ln^{\pi(N+1)} \frac{1}{\varepsilon} \right) = p_1 + \sum_{n=2}^{N+2} \varepsilon^{n/3} \times \\ &\times \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} \sum_{\kappa=0}^{\nu} s z_{n,\nu-\kappa}^{\kappa} \left(\frac{N+3}{3} \right)^\kappa \ln^\nu \frac{1}{\varepsilon} + O \left(\varepsilon^{\frac{N+3}{3}} \ln^{\pi(N+1)} \frac{1}{\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

С другой стороны, учитывая разложение (21.7), получаем

$$\begin{aligned} \hat{X} \left] \frac{N+3}{3} \right] (\mathbf{y}, \varepsilon) &= \sum_{i=0}^{\left] \frac{N+3}{3} \right]} \varepsilon^i \hat{x}_i \left(E_{N+2}(\varepsilon) + \frac{N+3}{3} b \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) + \\ &+ O \left(\varepsilon^{\frac{N+3}{3}} \ln^{\pi(N+1)} \frac{1}{\varepsilon} \right) = \\ &= p_1 + \sum_{n=2}^{N+2} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} \sum_{\kappa=0}^{\nu} \hat{x}_{n,\nu-\kappa}^{\kappa} \left(\frac{N+3}{3} \right)^\kappa \ln^\nu \frac{1}{\varepsilon} + \\ &+ O \left(\varepsilon^{\frac{N+3}{3}} \ln^{\pi(N+1)} \frac{1}{\varepsilon} \right). \end{aligned}$$

Если воспользоваться соотношениями (21.8), то нетрудно убедиться, что условие (21.14) для функции (19.5) действительно выполняется при $n = \lfloor (N + 3)/3 \rfloor$ и соответствующих α, β .

Следовательно, теорема X применима для получения асимптотических приближений траектории \mathfrak{Z}_ε в конце участка падения. Тем самым формулы (20.21) доказаны. Подчеркнем, что хотя величина y зависит от ε , однако при достаточно малых ε расстояние между точками \hat{R}_0 и $P_{\text{sign } g(P)}$ конечно.

Очевидно, что формулы (20.17), (20.21) дают возможность приближенно вычислять участок падения траектории \mathfrak{Z}_ε с точностью до величин порядка малости не ниже ε^a , $a > 0$. Например, если $a > 4/3$, то следует использовать последнюю пару формул (20.17), выбрав натуральное число N из условия $N > 3a - 3$, и последнюю формулу (20.21).

Теорема XI. При достаточно малых ε для участка падения траектории \mathfrak{Z}_ε , лежащего в окрестности точки падения P , справедливо асимптотическое представление с равномерной точностью до малых порядка не ниже ε^a , где $a > 0$ — произвольное число. Искомое асимптотическое представление описывается соотношениями (20.17) и (20.21) при соответствующем выборе числа N , причем для нахождения коэффициентов этого представления не требуется интегрировать невырожденную систему (1.1).

Пусть \hat{A} — точка пересечения траектории \mathfrak{Z}_ε с прямой $y = \hat{r}_2^0 = p_2 + \delta_2 \text{sign } g(P)$, лежащая на границе области U_P (см. рис. 44, 45). Более внимательный анализ теоремы X и леммы 14 позволяет получить для остаточного члена вместо оценки (21.16) неравенство

$$|\mathfrak{R}_n(y, \varepsilon)| < C_n \varepsilon^n F(y, \varepsilon),$$

справедливое на отрезке (21.15). Отсюда, учитывая определение (21.13), немедленно следует, что

$$|\mathfrak{R}_n(\hat{r}_2^0, \varepsilon)| < C_n \varepsilon^{n+1}.$$

Это в свою очередь означает, что абсцисса точки \hat{A} удовлетворяет условию типа (4.6). Поскольку точка \hat{A} —

конечная точка участка падения — является одновременно начальной для последующего участка медленного движения, то для асимптотического вычисления этого участка медленного движения применимы результаты §§ 3, 4.

§ 22. Асимптотические приближения траектории на начальных участках быстрого движения и падения

В §§ 17—21 при изучении участков быстрого движения и падения предполагалось, что эти участки следуют за участком срыва. Сейчас мы кратко остановимся на задаче асимптотического вычисления начального участка быстрого движения и начального участка падения траектории \mathfrak{L}_ε (см. § 2).

Пусть начальная точка $Q_0(x_0, y_0)$ траектории \mathfrak{L}_ε не принадлежит кривой Γ ; будем для простоты считать, что

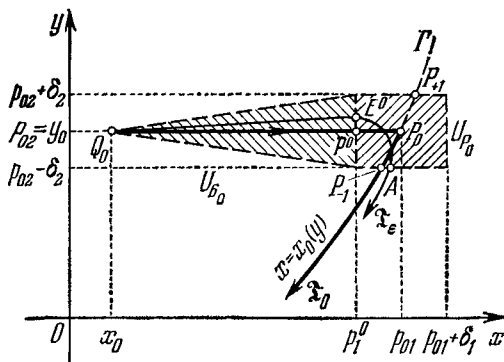


Рис. 47.

координаты этой точки не зависят от ε . Обозначим через $P_0(p_{01}, p_{02})$ точку падения из точки Q_0 , лежащую на некотором устойчивом участке $x = x_0(y)$ кривой Γ (рис. 47; аналогичная картина имеет место и при иных расположениях векторов $f(Q_0)$ и $g(P_0)$). На горизонтальном отрезке Q_0P_0 возьмем точку $P^0(p_1^0, p_2^0)$, отстоящую на малое конечное расстояние от точки падения P_0 , а на участке $x = x_0(y)$ возьмем точки P_{+1} и P_{-1} , лежащие по разные стороны от точки падения P_0 и отстоящие от нее на малое конечное расстояние.

Очевидно, что участок $Q_0 P_0 P_{\text{sign } g(P_0)}$ траектории \mathfrak{T}_0 состоит из горизонтального отрезка $Q_0 P_0$, имеющего уравнение

$$y = y_0, \quad x_0 \text{ sign } f(Q_0) \leq x \text{ sign } f(Q_0) \leq p_{01} \text{ sign } f(Q_0),$$

и дуги $P_0 P_{\text{sign } g(P_0)}$ кривой Γ , имеющей уравнение

$$x = x_0(y), \quad y_0 \text{ sign } g(P_0) \leq y \text{ sign } g(P_0) \leq y_0 \text{ sign } g(P_0) + \delta_2.$$

Аналогично тому, как это делалось в §§ 17, 19, построим конечные окрестности U_{B_0} и U_{P_0} , примыкающие друг к другу по отрезку прямой $x = p_1^0$. Отрезок траектории \mathfrak{T}_ε , лежащий в области U_{B_0} , назовем *начальным участком быстрого движения*, а отрезок траектории \mathfrak{T}_ε , лежащий в области U_{P_0} , назовем *начальным участком падения*.

Уравнение начального участка быстрого движения можно записать в виде

$$y = y_x^0(x, \varepsilon), \quad (22.1)$$

$$x_0 \text{ sign } f(Q_0) \leq x \text{ sign } f(Q_0) \leq p_1^0 \text{ sign } f(Q_0),$$

причем функция (22.1) является решением уравнения (17.6) и удовлетворяет условию

$$y(x_0, \varepsilon) = y_0. \quad (22.2)$$

Асимптотическое разложение функции (22.1) будем искать в виде формального степенного ряда

$$y = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots + \varepsilon^n y_n(x) + \dots \quad (22.3)$$

(в отличие от ряда (17.8)). Подставив ряд (22.3) в уравнение (17.6) и в условие (22.2), после необходимых вычислений найдем коэффициенты $y_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \dots$:

$$y_0(x) = y_0, \quad y_1(x) = \int_{x_0}^x \tilde{h}(z, y_0) dz,$$

$$y_n(x) = \int_{x_0}^x \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\tilde{h}_y^{(v)}(z, y_0)}{v!} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_v = n-1, \\ i_j \geq 1}} y_{i_1}(z) \dots y_{i_v}(z) dz, \quad n \geq 2.$$

Оказывается (доказательство аналогично рассуждениям, проведенным в § 18), что *частичная сумма построенного ряда (22.3)*

$$Y_n^0(x, \varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \dots + \varepsilon^n y_n(x)$$

является при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотическим приближением начального участка быстрого движения (22.1) траектории \mathfrak{T}_ε :

$$y_x^0(x, \varepsilon) = Y_{N-1}^0(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^N), \\ x_0 \operatorname{sign} f(Q_0) \leq x \operatorname{sign} f(Q_0) \leq p_1^0 \operatorname{sign} f(Q_0),$$

где N — произвольное натуральное число. В качестве примера приведем формулу

$$y_x^0(x, \varepsilon) = y_0 + \varepsilon \int_{x_0}^x \frac{g(z, y_0)}{f(z, y_0)} dz + O(\varepsilon^2), \\ x_0 \operatorname{sign} f(Q_0) \leq x \operatorname{sign} f(Q_0) \leq p_1^0 \operatorname{sign} f(Q_0).$$

Перейдем к вычислению начального участка падения. Пусть $E^0(p_1^0, e^0)$ — точка пересечения траектории \mathfrak{T}_ε с прямой $x = p_1^0$ (см. рис. 47), так что $e^0 = y_x^0(p_1^0, \varepsilon)$. Нам потребуются формальное значение ряда (22.3) при $x = p_1^0$ и частичные суммы этого ряда:

$$e^0 = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e_n \varepsilon^n, \quad e_n = y_n(p_1^0); \quad E_n^0(\varepsilon) = y_0 + \sum_{k=1}^n e_k \varepsilon^k. \quad (22.4)$$

Уравнение начального участка падения можно записать в виде

$$x = x_x^0(y, \varepsilon), \\ e^0 \operatorname{sign} g(P_0) \leq y \operatorname{sign} g(P_0) \leq y_0 \operatorname{sign} g(P_0) + \delta_2, \quad (22.5)$$

причем функция (22.5) является решением уравнения (19.6) и удовлетворяет условию $x(e^0, \varepsilon) = p_1^0$. Замена переменных (ср. с (19.8))

$$x = p_{01} + sz, \quad y = e^0 + \varepsilon b \ln w; \\ s = -\operatorname{sign} f(P^0), \quad b = -\frac{g(P_0)}{f'_x(P_0)}$$

приводит к уравнению и начальному условию

$$\frac{dz}{dw} = \frac{sb}{w} h(p_{01} + sz, e^0 + \varepsilon b \ln w), \quad z(1, \varepsilon) = (p_1^0 - p_{01}) s. \quad (22.6)$$

Решению $z = z_x^0(w, \varepsilon)$ задачи (22.6) отвечает параметрическая форма записи кривой (22.5):

$$x = x_x^0(w, \varepsilon) \equiv p_{01} + sz_x^0(w, \varepsilon), \\ y = y_x^0(w, \varepsilon) \equiv e^0 + \varepsilon b \ln w. \quad (22.7)$$

Асимптотическое разложение функции $z = z_x^0(\omega, \varepsilon)$ будем искать в виде формального степенного ряда

$$z = z_0(\omega) + \varepsilon z_1(\omega) + \dots + \varepsilon^n z_n(\omega) + \dots \quad (22.8)$$

(в отличие от ряда (20.4)). Подставив ряды (22.8), (22.4) в соотношения (22.6) и воспользовавшись формулой (20.5), после необходимых вычислений получим равенства

$$\begin{aligned} z_0'(\omega) &= \frac{sh}{\omega} h(p_{01} + sz_0(\omega), y_0), \quad z_0(1) = (p_1^0 - p_{01})s; \\ z_n'(\omega) - z_n(\omega) \frac{bh_x'(p_{01} + sz_0(\omega), y_0)}{\omega} &= \Phi_n(\omega), \\ z_n(1) &= 0, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (22.9)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_n(\omega) &= -z_n(\omega) \frac{bh_x'(p_{01} + sz_0(\omega), y_0)}{\omega} + \\ &+ \frac{h_y^{(n)}(p_{01} + sz_0(\omega), y_0) sb^{n+1} \ln^n \omega}{n! \omega} + \\ &+ \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-m} \sum_{\substack{\alpha+\beta=k, \\ \alpha \geq 0, \beta \geq 0}} \frac{h_x^{(\alpha)} y^{(\beta+m)}(p_{01} + sz_0(\omega), y_0)}{\alpha! \beta! m!} \frac{s^{\alpha+1} b^{m+1} \ln^m \omega}{\omega} \times \\ &\times \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_\alpha + \\ + i_1 + \dots + i_\beta = n-m, \\ i_\nu \geq 1, i_\nu \geq 1}} z_{i_1}(\omega) \dots z_{i_\alpha}(\omega) e_{i_1} \dots e_{i_\beta}. \end{aligned}$$

Легко убедиться, что выражение $\Phi_n(\omega)$ при каждом $n \geq 1$ зависит только от функций $z_0(\omega)$, $z_1(\omega)$, ..., $z_{n-1}(\omega)$ (и только от констант y_0 , e_1 , ..., e_n).

Первая пара равенств (22.9) определяет функцию

$$\omega = \omega(z) \equiv \exp \left\{ \frac{f_x'(P_0)}{g(P_0)} \operatorname{sign} f(P_0) \int_{(p_1^0 - p_{01})s}^z \frac{g(p_{01} + sx, y_0)}{f(p_{01} + sx, y_0)} dx \right\}$$

(ср. с (20.11)), обратная к которой является начальным коэффициентом $z_0(\omega)$ ряда (22.8). Из остальных пар равенств (22.9) находим коэффициенты $z_i(\omega)$, $i = 1, 2, \dots$.

$$z_n(\omega) = \mathcal{N}^n(\omega) \int_1^\omega \frac{\Phi_n(x)}{\mathcal{N}^n(x)} dx,$$

$$\mathcal{N}^n(\omega) = \exp \int_1^\omega \frac{bh_x'(p_{01} + sz_0(x), y_0)}{x} dx, \quad n \geq 1.$$

Оказывается (доказательство аналогично рассуждениям, проведенным в § 21), что если

$$Z_n^0(\omega, \varepsilon) = z_0(\omega) + \varepsilon z_1(\omega) + \dots + \varepsilon^n z_n(\omega)$$

— частичная сумма построенного ряда (22.8), то справедливы следующие асимптотические представления кривой (22.7) на указанных отрезках изменения ω :

$$\begin{cases} x_{\frac{1}{2}}^0(\omega, \varepsilon) = p_{01} + s z_0(\omega) + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \\ y_{\frac{1}{2}}^0(\omega, \varepsilon) = y_0 + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \end{cases} \quad 1 \leq \omega \leq 1/\varepsilon,$$

$$\begin{cases} x_{\frac{1}{2}}^0(\omega, \varepsilon) = p_{01} + s Z_N^0(\omega, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{N+1} \ln^{N+1} \frac{1}{\varepsilon}\right), \\ y_{\frac{1}{2}}^0(\omega, \varepsilon) = E_N^0(\varepsilon) + \varepsilon b \ln \omega + O(\varepsilon^{N+1}), \end{cases} \quad 1 \leq \omega \leq 1/\varepsilon^{N+1},$$

где N — произвольное натуральное число. В качестве примера приведем представление

$$\begin{cases} x_{\frac{1}{2}}^0(\omega, \varepsilon) = p_{01} + s z_0(\omega) + s z_1(\omega) \varepsilon + O\left(\varepsilon^2 \ln^2 \frac{1}{\varepsilon}\right), \\ y_{\frac{1}{2}}^0(\omega, \varepsilon) = y_0 + \varepsilon \left[\int_{x_0}^{p_1^0} \frac{g(x, y_0)}{f(x, y_0)} dx - \frac{g(P_0)}{f_x'(P_0)} \ln \omega \right] + O(\varepsilon^2). \end{cases} \quad 1 \leq \omega \leq 1/\varepsilon^2.$$

С помощью этой формулы и соответствующих результатов §§ 17, 20 можно объяснить одно существенное различие между поведением траектории \mathfrak{X}_ε на участках быстрого движения и падения, следующих за участком срыва, и на начальных участках быстрого движения и падения. В ситуации, когда

$$\text{sign}[g(S)g(P)] = -1, \quad \text{sign}[g(S)f(P^0)f'_y(P)] = +1$$

(один из таких случаев изображен на рис. 44), траектория \mathfrak{X}_ε на участках быстрого движения и падения не пересекает траекторию \mathfrak{X}_0 . В аналогичной ситуации, когда

$$\text{sign}[g(Q_0)g(P_0)] = -1, \quad \text{sign}[g(Q_0)f(P^0)f'_y(P_0)] = +1$$

(один из таких случаев изображен на рис. 47), траекто-

рия \mathfrak{X}_ε на начальных участках быстрого движения и падения пересекает (дважды) траекторию \mathfrak{X}_ε .

Рассмотрим теперь для уравнения (19.6) (см. также (3.5)) формальный степенной ряд (3.6) (ср. с (20.19)). Вычисление коэффициентов этого ряда описано в § 3; начальным коэффициентом служит функция, входящая в уравнение $x = x_0(y)$ устойчивого участка кривой Γ (см. рис. 47).

Оказывается (доказательство аналогично рассуждениям, проведенным в § 21), что если (3.12)—частичная сумма построенного ряда (3.6), то справедливы следующие асимптотические приближения функции (22.5) на указанных отрезках изменения аргумента:

$$x_{\mathfrak{X}}^0(y, \varepsilon) = \begin{cases} x_0(y) + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \\ y_0 \operatorname{sign} g(P_0) + O\left(\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right) \leq y \operatorname{sign} g(P_0) \leq \\ \leq y_0 \operatorname{sign} g(P_0) + \delta_2; \\ X_N(y, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{N+1} \ln^{N+1} \frac{1}{\varepsilon}\right), \\ \left(E_N^0(\varepsilon) + (N+1)b\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}\right) \operatorname{sign} g(P_0) + \\ + O(\varepsilon^{N+1}) \leq y \operatorname{sign} g(P_0) \leq y_0 \operatorname{sign} g(P_0) + \delta_2, \end{cases}$$

где N —произвольное натуральное число. В качестве примера приведем приближение

$$x_{\mathfrak{X}}^0(y, \varepsilon) = x_0(y) + \varepsilon \frac{-f'_y(x_0(y), y) g(x_0(y), y)}{f'_x{}^2(x_0(y), y)} + O\left(\varepsilon^2 \ln^2 \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

$$\left[y_0 - \frac{2g(P_0)}{f'_x(P_0)} \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon \int_{x_0}^{p_1^0} \frac{g(x, y_0)}{f(x, y_0)} dx \right] \operatorname{sign} g(P_0) + O(\varepsilon^2) \leq \\ \leq y \operatorname{sign} g(P_0) \leq y_0 \operatorname{sign} g(P_0) + \delta_2.$$

Обозначим точку $P_{\operatorname{sign} g(P_0)}$ через $R^0(r_1^0, r_2^0)$ и пусть A —точка пересечения траектории \mathfrak{X}_ε с прямой $y = r_2^0 = y_0 + \delta_2 \operatorname{sign} g(P_0)$, лежащая на границе области U_{P_0} (см. рис. 47). Существенным обстоятельством является тот факт, что абсцисса точки A удовлетворяет условию (4.6). Поэтому для асимптотического вычисления участка медленного движения траектории \mathfrak{X}_ε , следующего за начальным участком падения, применимы результаты §§ 3, 4.

Системы второго порядка. Периодические решения, близкие к разрывным

Среди фазовых траекторий вырожденной системы могут быть и замкнутые, соответствующие разрывным периодическим решениям. Оказывается, что при достаточно малом значении параметра вблизи каждой такой траектории лежит устойчивый предельный цикл невырожденной системы; отвечающее ему периодическое решение имеет характер релаксационного колебания.

В настоящей главе мы проведем асимптотическое вычисление с произвольной степенью точности траектории периодического решения, близкого к разрывному, системы второго порядка с малым параметром при производной. Будет получено асимптотическое разложение для периода релаксационного колебания.

§ 1. Существование и единственность периодического решения, близкого к разрывному

Продолжим изучение фазовых траекторий невырожденной системы

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \quad (1.1)$$

где x и y — скалярные функции независимой переменной t , а ε — малый положительный параметр; все предположения, сделанные в главе II, § 1, сохраняются*). Простейшие примеры показывают (см. гл. I, § 4), что соответствующая вырожденная система

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (1.2)$$

среди своих фазовых траекторий может иметь и *замкнутые траектории*. Подчеркнем, что наличие (или отсутствие) у системы (1.2) таких траекторий устанавливается (ср. с гл. II, § 2) непосредственно с помощью функций $f(x, y)$, $g(x, y)$, и для этого не требуется решать систему (1.2).

*) В дальнейшем при ссылках на формулы предыдущих глав римская цифра означает номер главы.

В дальнейшем мы будем предполагать, что система (1.2) имеет замкнутую фазовую траекторию \mathfrak{Z}_0 . Из рассмотрений главы II, § 2 следует, что траектория \mathfrak{Z}_0 представляет собой непрерывную замкнутую кривую в плоскости (x, y) , состоящую из конечного числа чередующихся между собой участков медленного и быстрого движения (рис. 48).

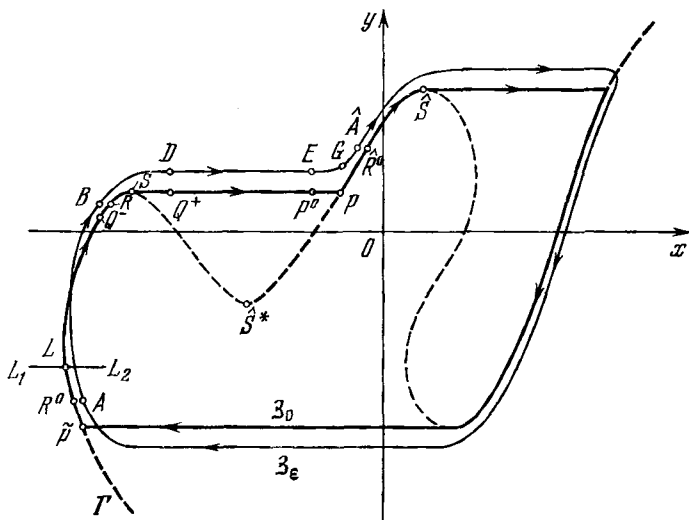


Рис. 48.

Решение $x=x(t)$, $y=y(t)$ системы (1.2), фазовой траекторией которого служит кривая \mathfrak{Z}_0 , является *разрывным периодическим решением* (см. гл. I, § 6). При этом координата y решения с течением времени t меняется непрерывно, а координата x испытывает разрывы (первого рода) при всех тех значениях t , при которых фазовая точка системы (1.2) попадает в точки срыва траектории \mathfrak{Z}_0 . Что касается участков этого решения между соседними точками разрыва, то они получаются следующим образом.

Пусть в момент разрыва $t=t^*$ фазовая точка системы (1.2) оказывается в точке падения $\tilde{P}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$, лежащей на устойчивом участке $x=x_0(y)$ кривой Γ (см. рис. 48). Подставим функцию $x=x_0(y)$ во второе из

уравнений (1.2):

$$\dot{y} = g(x_0(y), y). \quad (1.3)$$

Условие $y(t^*) = \tilde{p}_2$ однозначно выделяет решение $y = y^*(t)$ уравнения (1.3), определенное при $t^* \leq t \leq t^{**}$, где t^{**} следующий за t^* момент разрыва, т. е. момент попадания фазовой точки системы (1.2) в точку срыва $S(s_1, s_2)$, граничную для участка $x = x_0(y)$. Затем уравнение этого участка позволяет получить и функцию $x = x^*(t) \equiv x_0(y^*(t))$, $t^* \leq t \leq t^{**}$.

Так как участки быстрого движения траектории \mathcal{Z}_0 проходятся мгновенно, то период T_0 соответствующего разрывного периодического решения вырожденной системы (1.2) равен сумме времен, затрачиваемых фазовой точкой системы (1.2) на прохождение всех участков медленного движения траектории \mathcal{Z}_0 . Из уравнения (1.3) легко найти это время для участка $\tilde{P}S$ (см. рис. 48):

$$T_{\tilde{P}S} = \int_{\tilde{p}_2}^{s_2} \frac{dy}{g(x_0(y), y)} = \int_{\tilde{P}S} \frac{dy}{g(x, y)}; \quad (1.4)$$

для остальных участков медленного движения оно определяется аналогично. В итоге можем записать:

$$T_0 = \oint_{\mathcal{Z}_0} \frac{dy}{g(x, y)}, \quad (1.5)$$

где интеграл берется в направлении движения по траектории \mathcal{Z}_0 . Подчеркнем, что период T_0 разрывного периодического решения эффективно вычисляется только через значения функции $g(x, y)$ на контуре \mathcal{Z}_0 .

Легко убедиться, что при достаточно малых ϵ вблизи траектории \mathcal{Z}_0 лежит хотя бы одна замкнутая траектория невырожденной системы (1.1). Для доказательства этого факта достаточно построить (ср. с гл. II, § 2 и рис. 30) такую кольцеобразную окрестность замкнутой кривой \mathcal{Z}_0 малой, но конечной ширины, что векторы фазовой скорости системы (1.1) при достаточно малых ϵ во всех точках границы направлены внутрь окрестности. Однако справедливо и более сильное утверждение (см [3], [19]).

Теорема XII. Пусть выполнены предположения, сформулированные в главе II, § 1, и пусть вырожденная си-

стема (1.2) имеет замкнутую фазовую траекторию \mathfrak{Z}_0 . Тогда при любом достаточно малом ε невырожденная система (1.1) имеет единственный и устойчивый предельный цикл \mathfrak{Z}_ε , для которого кривая \mathfrak{Z}_0 служит нулевым асимптотическим приближением, т. е. $\mathfrak{Z}_\varepsilon \rightarrow \mathfrak{Z}_0$ равномерно при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В самом деле, рассмотрим участок медленного движения $\bar{P}S$ замкнутой траектории \mathfrak{Z}_0 (см. рис. 48) и возьмем на нем точку L , отстоящую на конечное расстояние как от точки падения \bar{P} , так и от точки срыва S . Пусть L_1L_2 — параллельный оси Ox отрезок с серединой в точке L и длины $3M_1\varepsilon$, где M_1 — константа, участвующая в оценке (II.4.1) при $n=1$. Используя построенные в главе II асимптотические приближения, нетрудно проверить, что траектория системы (1.1), начинающаяся в произвольной точке отрезка L_1L_2 , за время, близкое к T_0 (см. (1.5)), снова пересекает отрезок L_1L_2 . Следовательно, переход по траекториям системы (1.1) порождает непрерывное отображение отрезка L_1L_2 в себя. Поскольку у такого отображения всегда есть неподвижная точка, невырожденная система (1.1) имеет по крайней мере одну замкнутую траекторию, нулевым асимптотическим приближением которой является кривая \mathfrak{Z}_0 .

Обозначим через \mathfrak{Z}_ε любую из замкнутых траекторий системы (1.1), обладающих свойством: $\mathfrak{Z}_\varepsilon \rightarrow \mathfrak{Z}_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Можно показать, что при достаточно малых ε справедливо неравенство

$$\oint_{\mathfrak{Z}_\varepsilon} \left[\frac{1}{\varepsilon} f'_x(x, y) + g'_y(x, y) \right] dt < 0. \quad (1.6)$$

Для доказательства следует найти доминирующий член указанного в (1.6) интеграла при достаточно малых ε , взяв построенные в главе II асимптотические приближения участков траектории \mathfrak{Z}_ε с точностью до $O(\varepsilon \ln(1/\varepsilon))$; этот член оказывается отрицательным. Мы не будем приводить здесь соответствующие выкладки, так как они аналогичны вычислениям, проводимым ниже в §§ 3—6. Из неравенства (1.6) на основании признака орбитальной устойчивости Пуанкаре (см., например, [30], [3], [55]) заключаем, что замкнутая траектория \mathfrak{Z}_ε является устойчивым предельным циклом системы (1.1).

Отсюда в свою очередь вытекает, что система (1.1) имеет единственную замкнутую траекторию, нулевым

асимптотическим приближением которой служит кривая \mathfrak{R}_0 . Действительно, если бы таких траекторий существовало несколько, то по меньшей мере одна из них должна быть неустойчивой, а это противоречит неравенству (1.6).

Итак, при любом достаточно малом ε система (1.1) имеет единственное периодическое решение, равномерно стремящееся к разрывному периодическому решению системы (1.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Последующие параграфы этой главы посвящены построению асимптотических приближений цикла \mathfrak{R}_ε и его периода при $\varepsilon \rightarrow 0$.

§ 2. Асимптотические приближения траектории периодического решения

Предельный цикл \mathfrak{R}_ε представляет собой замкнутую кривую в плоскости (x, y) , состоящую из конечного числа чередующихся между собой участков медленного движения, срыва, быстрого движения и падения. Для асимптотического вычисления участков траектории \mathfrak{R}_ε можно использовать формулы, полученные в главе II, причем в качестве нулевого приближения в этих формулах следует брать соответствующие участки траектории \mathfrak{R}_0 .

Рассмотрим на траектории \mathfrak{R}_0 последовательные участки медленного движения $\hat{P}S$, быстрого движения SP и медленного движения $P\hat{S}$ (см. рис. 48). На этих участках возьмем точки R^0, Q^-, R, Q^+, P^0 и \hat{R}^0 , а на близком к отрезку $R^0SP\hat{R}^0$ участке траектории \mathfrak{R}_ε — точки A, B, D, E и \hat{A} ; правила выбора всех указанных точек описаны в главе II (ср. с рис. 33, 35, 44, 45). Задача асимптотического вычисления цикла \mathfrak{R}_ε , очевидно, сводится к задаче асимптотического вычисления его отрезка $ABDE\hat{A}$.

Уравнение участка медленного движения AB цикла \mathfrak{R}_ε можно записать в виде

$$x = x_3(y, \varepsilon), \quad r_0^2 \operatorname{sign} g(S) \leq y \operatorname{sign} g(S) \leq r_2 \operatorname{sign} g(S); \quad (2.1)$$

асимптотические приближения этой функции построены в главе II, § 3.

Уравнение участка срыва BD цикла \mathfrak{R}_ε можно записать (в соответствующих локальных координатах, введенных в окрестности точки срыва S) в виде

$$\eta = \eta_3(\xi, \varepsilon), \quad -q \leq \xi \leq q; \quad (2.2)$$

асимптотические приближения этой функции построены в главе II, § 16, а переход к координатам x, y осуществляется по формулам главы II, § 5.

Уравнение участка быстрого движения DE цикла \mathfrak{J}_ε можно записать в виде

$$y = y_3(x, \varepsilon), \quad (2.3)$$

$$q_1^+ \operatorname{sign} f_x''(S) \leq x \operatorname{sign} f_x''(S) \leq p_1^0 \operatorname{sign} f_x''(S);$$

асимптотические приближения этой функции построены в главе II, § 17.

Уравнение участка падения $E\hat{A}$ цикла \mathfrak{J}_ε можно записать в виде

$$x = \hat{x}_3(y, \varepsilon), \quad (2.4)$$

$$e \operatorname{sign} g(P) \leq y \operatorname{sign} g(P) \leq \hat{r}_2^0 \operatorname{sign} g(P);$$

асимптотические приближения этой функции построены в главе II, § 20.

Следовательно, приведенные в главе II асимптотические формулы дают возможность провести вычисление близкого к разрывному периодического решения системы (1.1) с произвольной степенью точности и, в частности, определить амплитуду соответствующего релаксационного колебания. Эти же формулы позволяют построить асимптотическое разложение для периода T_ε релаксационного колебания, имеющего траекторию \mathfrak{J}_ε . Предварительно отдельно вычислим время, затрачиваемое фазовой точкой системы (1.1) на прохождение участка медленного движения AB (*время медленного движения*), участка срыва BD (*время срыва*), участка быстрого движения DE (*время быстрого движения*) и участка падения $E\hat{A}$ (*время падения*) траектории \mathfrak{J}_ε .

§ 3. Вычисление времени медленного движения

Рассмотрим участок медленного движения AB траектории \mathfrak{J}_ε , который расположен вблизи отрезка R^0R устойчивого участка $x = x_0(y)$ кривой Γ (см. рис. 48); уравнение участка AB имеет вид (2.1). Время движения фазовой точки системы (1.1) вдоль участка AB будем вычислять

по формуле

$$T_{AB} = \int_{AB} \frac{dy}{g(x, y)} = \int_{r_2^0}^{r_2^1} \frac{dy}{g(x_3(y, \varepsilon), y)}.$$

Подставим сюда вместо функции (2.1) ее асимптотическое приближение (см. (II.3.13)) и разложим подынтегральное выражение по степеням ε (см. (II.3.7), (II.6.7)). Тогда после несложных преобразований и элементарной оценки остаточного члена получим

$$T_{AB} = \int_{r_2^0}^{r_2^1} \frac{dy}{g(x_0(y), y)} + \\ + \sum_{n=1}^{N-1} \varepsilon^n \int_{r_2^0}^{r_2^1} \tilde{g}_n(y, x_0(y), x_1(y), \dots, x_n(y)) dy + O(\varepsilon^N), \quad (3.1)$$

где функция $\tilde{g}_n(y, x_0(y), x_1(y), \dots, x_n(y))$ определяются как коэффициенты указанного разложения.

Ясно, что первый член формулы (3.1) представляет собой время движения фазовой точки вырожденной системы (1.2) вдоль отрезка R^0R ее траектории \mathfrak{Z}_0 (ср. с (1.4)):

$$\int_{r_2^0}^{r_2^1} \frac{dy}{g(x_0(y), y)} = \int_{R^0R} \frac{dy}{g(x, y)} = T_{R^0R}. \quad (3.2)$$

В главе II, § 3 мы видели, что каждая из функций $x_i(y)$, $i=1, 2, \dots$, выражается только через значения правых частей системы (1.1) и нескольких их производных на дуге $x = x_0(y)$ кривой Γ . Поэтому подынтегральную функцию второго члена формулы (3.1) можно представить в виде

$$\tilde{g}_n(y, x_0(y), x_1(y), \dots, x_n(y)) \equiv g_n[f(x_0(y), y), g(x_0(y), y)],$$

причем выражения $g_n[f(x, y), g(x, y)]$ эффективно вычисляются при любом натуральном n и содержат только функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ и их производные.

Таким образом, справедливо следующее асимптотическое представление для времени медленного движения

по участку AB :

$$T_{AB} = T_{R^0 R} + \sum_{n=1}^{N-1} \varepsilon^n \int_{R^0 R} g_n [f(x, y), g(x, y)] dy + O(\varepsilon^N), \quad (3.3)$$

где N — произвольное натуральное число. В частности, если воспользоваться формулой (II.3.14), то легко убедиться, что

$$T_{AB} = T_{R^0 R} + \varepsilon \int_{R^0 R} \frac{f'_y(x, y) g'_x(x, y)}{f'^2_x(x, y) g(x, y)} dy + O(\varepsilon^2).$$

Отсюда, принимая во внимание выполняющееся вдоль кривой $f(x, y) = 0$ соотношение

$$f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy = 0,$$

находим первое приближение времени медленного движения по участку AB :

$$T_{AB} = T_{R^0 R} + \varepsilon \int_{R^0 R} \frac{-g'_x(x, y)}{f'_x(x, y) g(x, y)} dx + O(\varepsilon^2). \quad (3.4)$$

§ 4. Вычисление времени срыва

Рассмотрим участок срыва BD траектории \mathcal{R}_ε , который проходит вблизи отрезка $Q-SQ^+$ траектории \mathcal{R}_0 (см. рис. 48). В окрестности точки срыва S вместо координат x, y введем локальные координаты ξ, η (см. гл. II, § 5). В этих координатах система (1.1) запишется в виде (II.5.6), а уравнение участка BD — в виде (2.2). Ясно, что время срыва T_{BD} равно времени движения фазовой точки системы (II.5.6) вдоль участка (2.2), которое будем вычислять по формуле (см. первое из уравнений (II.5.6))

$$T_{-q, q} = \varepsilon \int_{-q}^q \frac{\gamma(\xi, \eta_3(\xi, \varepsilon))}{\xi^2 + \eta_3(\xi, \varepsilon)} \delta(\xi, \eta_3(\xi, \varepsilon)) d\xi. \quad (4.1)$$

Здесь использованы обозначения (II.6.3) и

$$\delta(\xi, \eta) \equiv \frac{1}{\beta(\xi, \eta)}; \quad (4.2)$$

функция $\delta(\xi, \eta)$ определена и строго положительна всюду в области U_0 (см. гл. II, § 5), так что, в частности, $\delta = \delta(0, 0) > 0$.

Так как асимптотические представления функции $\eta = \eta_3(\xi, \varepsilon)$ различны на разных частях участка срыва, мы разобьем интеграл в формуле (4.1) на четыре интеграла — по отрезкам $-q \leq \xi \leq -\sigma_1$, $-\sigma_1 \leq \xi \leq 0$, $0 \leq \xi \leq \sigma_2$, $\sigma_2 \leq \xi \leq q$ соответственно. При этом величины σ_1 и σ_2 определяются согласно правилу, описанному в главе II, § 16, где следует положить $a = N$.

Вычислим сначала время $T_{-q, -\sigma_1}$ движения фазовой точки системы (II.5.6) по отрезку участка (2.2), который отвечает изменению ξ в пределах $-q \leq \xi \leq -\sigma_1$. Учтывая уравнение (II.6.2) и привлекая асимптотическое приближение функции (2.2) в начале участка срыва (см. (II.6.12)), после интегрирования по частям и оценки остаточного члена получим

$$\begin{aligned}
 T_{-q, -\sigma_1} = & - \int_{-q}^{-\sigma_1} 2\xi \delta(\xi, -\xi^2) d\xi - \\
 & - \sum_{n=1}^{N_1-1} \varepsilon^n \int_{-q}^{-\sigma_1} \sum_{k=1}^n \frac{\delta_{\xi}^{(k-1)} \eta(\xi, -\xi^2)}{k!} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = n, \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1}(\xi) \dots \eta_{i_k}(\xi) d\xi + \\
 & + \sum_{n=1}^{N_1-1} \varepsilon^n \sum_{k=1}^n \frac{\delta_{\xi}^{(k-1)} \eta(\xi, -\xi^2)}{k!} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = n, \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1}(\xi) \dots \eta_{i_k}(\xi) \Big|_{-q}^{-\sigma_1} + \\
 & + O(\varepsilon^N). \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

Исходя из асимптотических разложений (II.7.2) для функций $\eta_i(\xi)$, 1, 2, ..., легко проверить, что

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta_{\xi}^{(k-1)} \eta(\xi, -\xi^2)}{k!} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = n, \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1}(\xi) \dots \eta_{i_k}(\xi) = \\
 = \frac{1}{\xi^{3n-2k}} \sum_{v=0}^{\infty} \eta_v^{n,k} \xi^v, \quad \xi \rightarrow -0.
 \end{aligned}$$

С помощью этих разложений можно регуляризовать (см. (II.13.14)) интегралы, входящие во второй член

формулы (4.3):

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N_1-1} \varepsilon^n \int_{-q}^{-\sigma_1} \sum_{k=1}^n \frac{\delta_{\xi}^{(k-1)}(\xi, -\xi^2)}{k!} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=n, \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1}(\xi) \dots \eta_{i_k}(\xi) d\xi = \\ & = \sum_{n=1}^{N-1} \varepsilon^n \sum_{k=1}^n \int_{-q}^0 \frac{\delta_{\xi}^{(k-1)}(\xi, -\xi^2)}{k!} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=n, \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1}(\xi) \dots \eta_{i_k}(\xi) d\xi + \\ & \quad + \mathfrak{C}_1(-\sigma_1) + O(\varepsilon^N). \quad (4.4) \end{aligned}$$

Выражение $\mathfrak{C}_1(-\sigma_1)$ получается, если, следуя главе II, § 13, подробно выписать соответствующие асимптотические разложения интегралов (ср. с (II.13.1)–(II.13.3)). Мы не будем приводить это выражение полностью, а отметим только, что оно представляет собой сумму возникающих при регуляризации явно зависящих от σ_1 членов вида

$$c\varepsilon^n \ln \sigma_1, \quad 1 \leq n \leq N;$$

$$c\varepsilon^n \sigma_1^{\nu}, \quad 1 \leq n \leq N_1-1, \quad -3n-3 \leq \nu \leq \left\lfloor \frac{N-n}{\lambda_1} \right\rfloor, \quad \nu \neq 0;$$

остальные возникающие при регуляризации слагаемые попадут в остаточный член.

Третий член формулы (4.3) перепишем так:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N_1-1} \varepsilon^n \sum_{k=1}^n \frac{\delta_{\eta}^{(k-1)}(\xi, -\xi^2)}{k!} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=n, \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1}(\xi) \dots \eta_{i_k}(\xi) \Bigg|_{-q}^{-\sigma_1} = \\ & = \mathfrak{C}_2(-\sigma_1) - \mathfrak{C}_2(-q), \quad (4.5) \end{aligned}$$

где выражения $\mathfrak{C}_2(-\sigma_1)$ и $\mathfrak{C}_2(-q)$ определяются очевидным образом.

Вычислим, далее, время $T_{-\sigma_1, 0}$ движения фазовой точки системы (II.5.6) по отрезку участка (2.2), который отвечает изменению ξ в пределах $-\sigma_1 \leq \xi < 0$. Учитывая уравнение (II.10.2) и привлекая асимптотическое приближение функции (2.2) в левосторонней малой вместе с ε окрестности точки срыва (см. (II.10.16)), (II.12.1)), после

элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned}
 T_{-\sigma_1, 0} = & - \int_{-\sigma_1}^0 2\xi \delta(\xi, -\xi^2) d\xi - \\
 & - \sum_{n=2}^{N_2+2} \mu^n \int_{-\sigma_1}^0 \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{\delta_{\xi}^{(k-1)}(\xi, -\xi^2)}{k!} \times \\
 & \times \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=n, \\ i_j \geq 2}} v_{i_1-2}\left(\frac{\xi}{\mu}\right) \dots v_{i_k-2}\left(\frac{\xi}{\mu}\right) d\xi + \\
 & + \sum_{n=2}^{N_2+2} \mu^n \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{\delta_{\eta}^{(k-1)}(\xi, -\xi^2)}{k!} \times \\
 & \times \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=n, \\ i_j \geq 2}} v_{i_1-2}\left(\frac{\xi}{\mu}\right) \dots v_{i_k-2}\left(\frac{\xi}{\mu}\right) \Big|_{-\sigma_1}^0 + O(\varepsilon^N),
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

причем здесь символ $v_0(u)$, встречающийся при $i_j=2$, означает функцию $z_0(u)$ (ср. с гл. II, § 12).

Раскладывая функцию $\delta_{\xi}^{(k-1)}(\xi, -\xi^2)$ в ряд Тейлора в точке $\xi=0$ и полагая затем $\xi=\mu u$ (напомним, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $\omega_1 \rightarrow \infty$, однако $\mu\omega_1 = \sigma_1 \rightarrow 0$), мы придем к разложению

$$\frac{1}{k!} \delta_{\xi}^{(k-1)}(\mu u, -\mu^2 u^2) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mu^{\nu} \delta_{\nu}^k u^{\nu}, \quad \mu u \rightarrow 0, \tag{4.7}$$

коэффициенты δ_{ν}^k которого эффективно вычисляются. Если выполнить замену переменной интегрирования $\xi=\mu u$, то, используя разложение (4.7), второй член формулы (4.6) запишем в форме

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=3}^{N_2+3} \mu^n \sum_{m=2}^{n-1} \sum_{k=1}^{[m/2]} \delta_{n-m-1}^k \times \\
 & \times \int_{-\omega_1}^0 u^{n-m-1} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=m, \\ i_j \geq 2}} v_{i_1-2}(u) \dots v_{i_k-2}(u) du + O(\varepsilon^N).
 \end{aligned}$$

Входящие сюда интегралы можно регуляризовать (ср. с (II.13.21)), найдя предварительно с помощью соотношения (II.12.12) асимптотическое разложение подынтегральной функции при $u \rightarrow -\infty$. В результате второй

член формулы (4.6) преобразуется так:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{N_2+2} \mu^n \int_{-\sigma_1}^0 \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{\delta_{\xi}^{(k-1)}(\xi, -\xi^2)}{k!} \times \\ & \quad \times \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=n, \\ i_j \geq 2}} v_{i_1-2} \left(\frac{\xi}{\mu} \right) \dots v_{i_k-2} \left(\frac{\xi}{\mu} \right) d\xi = \\ & = \sum_{n=3}^{3N-1} \mu^n \sum_{m=2}^{n-1} \sum_{k=1}^{[m/2]} \delta_{n-m-1}^k \times \\ & \times \int_{-\infty}^0 u^{n-m-1} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=m, \\ i_j \geq 2}} v_{i_1-2}(u) \dots v_{i_k-2}(u) du + \\ & \quad + \sum_{n=1} \mathcal{A}_n \mu^{3n} \ln \frac{1}{\mu} + \mathfrak{S}_3(-\sigma_1) + O(\varepsilon^N). \quad (4.8) \end{aligned}$$

Выражение $\mathfrak{S}_3(-\sigma_1)$ получается, если, следуя главе II, § 13, подробно выписать соответствующие асимптотические разложения интегралов (ср. с (II.13.20)). Отметим, что оно представляет собой сумму возникающих при регуляризации явно зависящих от σ_1 членов вида $c\mu^n \ln \sigma_1$ и $c\mu^n \sigma_1^\nu$, имеющих порядок малости ниже $O(\varepsilon^N)$. Возникающие при регуляризации члены, не зависящие от σ_1 , появляются, очевидно, только из слагаемых вида c/u , входящих в асимптотические разложения подынтегральных функций. Эти члены выписаны в формуле (4.8) отдельно; нетрудно убедиться, что их коэффициенты эффективно определяются:

$$\mathcal{A}_n = - \sum_{m=2}^{3n-1} \sum_{k=1}^K \delta_{3n-m-1}^k a_{n-k}^{m,k}, \quad K = \min \left\{ \left[\frac{m}{2} \right], n \right\}.$$

Третий член формулы (4.6) с помощью естественных обозначений представим следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{N_2+2} \mu^n \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{\delta_{\eta}^{(k-1)}(\xi, -\xi^2)}{k!} \times \\ & \quad \times \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=n, \\ i_j \geq 2}} v_{i_1-2} \left(\frac{\xi}{\mu} \right) \dots v_{i_k-2} \left(\frac{\xi}{\mu} \right) \Big|_{-\sigma_1}^0 = \\ & = \mathfrak{S}_4(0) - \mathfrak{S}_4(-\sigma_1). \quad (4.9) \end{aligned}$$

Для получения асимптотической формулы для времени $T_{-q, 0}$ движения по первой половине участка срыва остается объединить результаты (4.3) и (4.6), учитывая соотношения (4.4), (4.5), (4.8), (4.9). Существенно, что при этом все члены, явно зависящие от σ_1 , исчезнут, так как справедливы равенства

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_2(-\sigma_1) - \mathfrak{S}_4(-\sigma_1) &= O(\varepsilon^N), \\ \mathfrak{S}_1(-\sigma_1) + \mathfrak{S}_3(-\sigma_1) &= O(\varepsilon^N).\end{aligned}\quad (4.10)$$

Докажем, например, первое из равенств (4.10). Используя разложение (II.7.2), можем написать:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_2(-\sigma_1) &= \sum_{n=1}^{N_1-1} \varepsilon^n \sum_{k=1}^n \frac{\delta_{\eta}^{(k-1)}(-\sigma_1, -\sigma_1^2)}{k!} \times \\ &\quad \times \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = n, \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1}(-\sigma_1) \dots \eta_{i_k}(-\sigma_1) = \\ &= \sum_{n=1}^{N_1-1} \varepsilon^n \sum_k^n \frac{\delta_{\eta}^{(k-1)}(-\sigma_1, -\sigma_1^2)}{k!} \times \\ &\quad \times \sum_{v=0}^{N+3n-2k} (-1)^{v-3n} \sigma_1^{v+2k-3n} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = v, \\ i_1 + \dots + i_k = n}} \eta_{i_1}^j \dots \eta_{i_k}^j + O(\varepsilon^N).\end{aligned}$$

С другой стороны, привлекая асимптотическое разложение (II.12.9), получаем

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_4(-\sigma_1) &= \sum_{n=2}^{N_1+2} \mu^n \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{\delta_{\eta}^{(k-1)}(-\sigma_1, -\sigma_1^2)}{k!} \times \\ &\quad \times \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = n, \\ i_j \geq 2}} \mathcal{V}_{i_1-2} \left(-\frac{\sigma_1}{\mu}\right) \dots \mathcal{V}_{i_k-2} \left(-\frac{\sigma_1}{\mu}\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{N_1-1} \varepsilon^n \sum_{k=1}^n \frac{\delta_{\eta}^{(k-1)}(-\sigma_1, -\sigma_1^2)}{k!} \times \\ &\quad \times \sum_{v=0}^{N+3n-2k} (-1)^{v-3n} \sigma_1^{v+2k-3n} \gamma^n \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = \\ = n-k, \\ i_1 + \dots + i_k = v}} a_{i_1}^j \dots a_{i_k}^j + O(\varepsilon^N).\end{aligned}$$

Отсюда видно, что достаточно установить равенство

$$\gamma^n \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = n-k, \\ j_1 + \dots + j_k = v}} \alpha'_{i_1} \dots \alpha'_{i_k} = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = v, \\ j_1 + \dots + j_k = n}} \eta'_{i_1} \dots \eta'_{i_k}$$

при всех возможных значениях индексов. Но это равенство, очевидно, является прямым следствием формулы (II.12.11).

Таким образом, имеет место следующее асимптотическое представление времени движения вдоль первой половины участка срыва BD :

$$T_{-q, 0} = - \int_{-q}^0 2\xi \delta(\xi, -\xi^2) d\xi + \sum_{n=3}^{3N-1} A_n^{(1)} \varepsilon^{n/3} + \\ + \sum_{n=1}^N A_n^{(2)} \varepsilon^n \ln \frac{1}{\varepsilon} - \mathfrak{S}_2(-q) + \mathfrak{S}_4(0) + O(\varepsilon^N). \quad (4.11)$$

В частности, если воспользоваться формулами (II.16.12) и (II.6.9), то нетрудно проверить, что

$$T_{-q, 0} = \\ = - \int_{-q}^0 2\xi \delta(\xi, -\xi^2) d\xi + \gamma^{2/3} \delta z_0(0) \varepsilon^{2/3} - \frac{1}{6} \gamma \delta'_\xi \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \\ + \left\{ \frac{1}{6} \gamma \delta'_\xi \ln \gamma + \oint_{-q}^0 \frac{\gamma(\xi, -\xi^2) \delta'_\xi(\xi, -\xi^2)}{2\xi} d\xi - \gamma \delta'_\xi \oint_{-\infty}^0 z_0(u) du \right\} \varepsilon + \\ + \frac{\alpha(-q, -q^2)}{-2q} \varepsilon + \alpha v_1(0) \varepsilon + O(\varepsilon^{4/3}). \quad (4.12)$$

Вычислим теперь время T_{0, σ_2} движения фазовой точки системы (II.5.6) по отрезку участка (2.2), который отвечает изменению ξ в пределах $0 \leq \xi \leq \sigma_2$. Учитывая уравнение (II.10.2) и привлекая асимптотическое приближение функции (2.2) в правосторонней малой вместе с ε окрестности точки срыва (см. (II.10.17)), после несложных преобразований и оценки остаточного члена

получим (ср. с (4.6))

$$\begin{aligned}
 T_{0, \sigma_2} = & - \sum_{n=2}^{N_s+2} \int_0^{\sigma_2} \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{\delta_{\eta}^{(k-1)}(\xi, 0)}{k!} \times \\
 & \times \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = n, \\ i_j \geq 2}} v_{i_1-2} \left(\frac{\xi}{\mu} \right) \dots v_{i_k-2} \left(\frac{\xi}{\mu} \right) d\xi + \\
 & + \sum_{n=2}^{N_s+2} \mu^n \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{\delta_{\eta}^{(k-1)}(\xi, 0)}{k!} \times \\
 & \times \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = n, \\ i_j \geq 2}} v_{i_1-2} \left(\frac{\xi}{\mu} \right) \dots v_{i_k-2} \left(\frac{\xi}{\mu} \right) \Big|_0^{\sigma_2} + O(\varepsilon^N); \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

здесь символ $v_0(u)$ означает функцию, введенную в главе II, § 9.

Используя разложение (ср. с (4.7))

$$\frac{1}{k!} \delta_{\eta}^{(k-1)}(\mu u, 0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mu^{\nu} \tilde{\delta}_{\nu}^k u^{\nu}, \quad \mu u \rightarrow 0,$$

коэффициенты $\tilde{\delta}_{\nu}^k$ которого эффективно вычисляются, и выполнив замену переменной интегрирования $\xi = \mu u$, запишем первый член формулы (4.13) в форме

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=3}^{N_s+3} \mu^n \sum_{m=2}^{n-1} \sum_{k=1}^{[m/2]} \tilde{\delta}_{n-m-1}^k \times \\
 & \times \int_0^{\omega_2} u^{n-m-1} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = m, \\ i_j \geq 2}} v_{i_1-2}(u) \dots v_{i_k-2}(u) du + O(\varepsilon^N).
 \end{aligned}$$

Исходя из формулы (II.12.13), найдем асимптотическое разложение подынтегральной функции при $u \rightarrow +\infty$, после чего можно регуляризовать указанные интегралы.

В результате первый член формулы (4.13) преобразуется так:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{N_2+2} \mu^n \int_0^{\sigma_2} \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{\delta_{\xi}^{(k-1)}(\xi, 0)}{k!} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=n, \\ i_j \geq 2}} v_{i_1-2}\left(\frac{\xi}{\mu}\right) \dots v_{i_k-2}\left(\frac{\xi}{\mu}\right) d\xi = \\ & = \sum_{n=3}^{3N-1} \mu^n \sum_{m=2}^{n-1} \sum_{k=1}^{[m/2]} \bar{\delta}_{n-m-1}^k \times \\ & \times \int_0^{\infty} u^{n-m-1} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=m, \\ i_j \geq 2}} v_{i_1-2}(u) \dots v_{i_k-2}(u) du + \\ & + \sum_{n=3}^{3N} \mu^n \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} \mathcal{A}_{n,\nu}^* \ln^{\nu} \frac{1}{\mu} + \mathfrak{S}_5(\sigma_2) + O(\varepsilon^N). \quad (4.14) \end{aligned}$$

Выражение $\mathfrak{S}_5(\sigma_2)$ представляет собой сумму возникающих при регуляризации явно зависящих от σ_2 членов вида $c\mu^n \sigma_2^m \ln^{\nu}(1/\mu) \ln^{\alpha} \sigma_2$, имеющих порядок малости ниже $O(\varepsilon^N)$. Возникающие при регуляризации члены, не зависящие от σ_2 , появляются, очевидно, только из слагаемых вида $c u^{-1} \ln^{\nu} u$, входящих в асимптотические разложения подинтегральных функций. Эти члены выписаны в формуле (4.14) отдельно; их коэффициенты $\mathcal{A}_{n,\nu}^*$ эффективно определяются, если подробно выписать соответствующие асимптотические разложения (см. гл. II, § 13).

Рассмотрим второй член формулы (4.13). Сделав замену переменной $\xi = \mu u$ и воспользовавшись разложением в ряд

$$\text{Тейлора } \frac{1}{k!} \delta_{\eta}^{(k-1)}(\mu u, 0) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \mu^{\nu} \bar{\delta}_{\nu}^k u^{\nu}, \quad \mu u \rightarrow 0, \text{ получим}$$

$$\sum_{n=2}^{N_2+2} \mu^n \sum_{m=2}^n \sum_{k=1}^{[m/2]} \bar{\delta}_{n-m}^k u^{n-m} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=m, \\ i_j \geq 2}} v_{i_1-2}(u) \dots v_{i_k-2}(u) + O(\varepsilon^N).$$

Непосредственный анализ этого выражения с привлечением формулы (II.12.13) позволяет установить его асимптотическое разложение при $u \rightarrow +\infty$ и, в частности, выделить в асимптотическом разложении слагаемые вида $c \ln^{\nu} u$. Ясно, что только из таких слагаемых после подстановки $u = \omega_2 = \sigma_2/\mu$ возникнут члены, не зависящие от σ_2 .

В результате необходимых вычислений убеждаемся, что второй член формулы (4.13) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{N_4+2} \mu^n \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{\delta_{\eta}^{(k-1)}(\xi, 0)}{k!} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=n, \\ i_j \geq 2}} v_{i_1-2}\left(\frac{\xi}{\mu}\right) \dots v_{i_k-2}\left(\frac{\xi}{\mu}\right) \Big|_0^{\sigma_2} = \\ & = \sum_{n=2}^{3N} \mu^n \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} \mathcal{A}_{n,\nu}^{**} \ln^{\nu} \frac{1}{\mu} + \mathfrak{E}_6(\sigma_2) - \mathfrak{E}_7(0) + O(\varepsilon^N); \quad (4.15) \end{aligned}$$

здесь коэффициенты $\mathcal{A}_{n,\nu}^{**}$ эффективно определяются, а смысл выражений $\mathfrak{E}_6(\sigma_2)$ и $\mathfrak{E}_7(0)$ непосредственно ясен.

Вычислим, наконец, время $T_{\sigma_2, q}$ движения фазовой точки системы (II.5.6) по отрезку участка (2.2), который отвечает изменению ξ в пределах $\sigma_2 \leq \xi \leq q$. Учитывая соотношение (4.2) и привлекая асимптотическое приближение функции (2.2) в конце участка срыва (см. (II.14.13)), можем записать:

$$\begin{aligned} T_{\sigma_2, q} &= \varepsilon \int_{\sigma_2}^q \frac{\alpha(\xi, \eta_3(\xi, \varepsilon))}{\xi^2 + \eta_3(\xi, \varepsilon)} d\xi = \\ &= \frac{1}{\gamma} \mu^3 \int_{\sigma_2}^q \frac{\alpha\left(\xi, \sum_{n=2}^{N_4+2} \mu^n \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} \zeta_{n,\nu}(\xi) \ln^{\nu}(1/\mu)\right)}{\xi^2 + \sum_{n=2}^{N_4+2} \mu^n \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} \zeta_{n,\nu}(\xi) \ln^{\nu}(1/\mu)} d\xi + O(\varepsilon^N). \end{aligned}$$

Разложение подынтегральной функции в этой формуле по величинам $\mu^n \ln^{\nu}(1/\mu)$ осуществляется в точности так же, как и аналогичное преобразование в главе II, § 14. Если затем, используя асимптотические разложения (II.15.3) для функций $\zeta_{n,\nu}(\xi)$, регуляризовать (см. (II.13.17)) получившиеся интегралы, то после простых преобразований найдем (см. (II.14.9))

$$\begin{aligned} T_{\sigma_2, q} &= \mu^3 \int_0^q \frac{\alpha(\xi, 0)}{\gamma \xi^2} d\xi + \sum_{n=5}^{3N} \mu^n \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)-1} \ln^{\nu} \frac{1}{\mu} \times \\ & \times \sum_{k=1}^{\left[\frac{n-3}{2}\right]} \sum_{m=0}^k \int_0^q \frac{(-1)^m \alpha_{\eta}^{(k-m)}(\xi, 0)}{(k-m)! \gamma \xi^{2m+2}} W_{n,k}^{\nu}(\xi) d\xi + \mathfrak{E}_8(\sigma_2) + O(\varepsilon^N). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Выражение $\mathfrak{E}_8(\sigma_2)$ представляет собой сумму возникающих при регуляризации явно зависящих от σ_2 членов вида $c\mu^n\sigma_2^m \ln^\nu(1/\mu) \ln^\alpha\sigma_2$, имеющих порядок малости ниже $O(\varepsilon^N)$.

Для получения асимптотической формулы для времени $T_{0,q}$ движения по второй половине участка срыва остается объединить результаты (4.13) и (4.16), учитывая соотношения (4.14), (4.15). Существенно, что при этом все члены, явно зависящие от σ_2 , исчезнут, так как справедливо равенство (ср. с (4.10))

$$\mathfrak{E}_8(\sigma_2) + \mathfrak{E}_6(\sigma_2) - \mathfrak{E}_5(\sigma_2) = O(\varepsilon^N). \quad (4.17)$$

Проверку равенства (4.17) можно провести прямыми элементарными, но весьма громоздкими вычислениями, если, следуя главе II, § 13, подробно выписать соответствующие асимптотические разложения и использовать формулы (II.15.5).

Таким образом, имеет место следующее асимптотическое представление времени движения вдоль второй половины участка срыва BD :

$$T_{0,q} = \sum_{n=2}^{3N} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} A_{n,\nu}^* \ln^\nu \frac{1}{\varepsilon} - \mathfrak{E}_7(0) + O(\varepsilon^N). \quad (4.18)$$

В частности, если воспользоваться формулами (II.16.12), то нетрудно проверить, что

$$T_{0,q} = \gamma^{2/3} \delta(\Omega_0 - v_0(0)) \varepsilon^{2/3} + \frac{1}{3} \alpha'_\xi \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \\ + \left\{ \alpha \Omega_1 - \frac{1}{3} \alpha'_\xi \ln \gamma - \gamma \delta'_\xi - \gamma \delta''_\xi \int_0^\infty v_0(u) du + \int_0^q \frac{\alpha(\xi, 0)}{\xi^2} d\xi \right\} \varepsilon - \\ - \alpha v_1(0) \varepsilon + O(\varepsilon^{4/3}). \quad (4.19)$$

Лемма 15. Для времени движения фазовой точки невырожденной системы (1.1) вдоль участка срыва BD траектории \mathfrak{Z}_ε , лежащего вблизи отрезка $Q-SQ^+$ траектории \mathfrak{Z}_0 , справедливо асимптотическое представление

$$T_{BD} = T_{Q-S} + \sum_{n=2}^{N+1} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} A_{n,\nu} \ln^\nu \frac{1}{\varepsilon} + O\left(\varepsilon^{\frac{N+2}{3}} \ln^{\pi(N)} \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (4.20)$$

где N — произвольное натуральное число. Для нахождения коэффициентов $A_{n,\nu}$ не требуется интегрировать систему (1.1).

Так как время срыва $T_{BD} = T_{-q,q} = T_{-q,0} + T_{0,q}$ (см. (4.1)), то утверждение леммы немедленно следует из формул (4.11) и (4.18). В самом деле, из соотношений (II.5.3), (II.5.7) вытекает, что

$$-\int_{-q}^0 2\xi\delta(\xi, -\xi^2) d\xi = \int_{q_2^-}^{s_2} \frac{dy}{g(x_0(y), y)} = \int_{Q^-S} \frac{dy}{g(x, y)} = T_{Q-S},$$

где T_{Q-S} — время движения фазовой точки вырожденной системы (1.2) вдоль участка Q^-S ее траектории \mathfrak{Z}_0 . Далее, очевидно, что $\mathfrak{S}_4(0) = \mathfrak{S}_7(0)$ (см. (4.9) и (4.15)). Наконец, из формулы (4.5) ясно, что $\mathfrak{S}_2(-q)$ представляет собой полином по ε .

Коэффициенты $A_{n,\nu}$ представления (4.20) вычисляются непосредственно через значения правых частей системы (1.1) и нескольких их производных на отрезке Q^-SQ^+ траектории \mathfrak{Z}_0 . В этом нетрудно убедиться, если проанализировать определения коэффициентов в формулах (4.4), (4.8), (4.14), (4.15), (4.16).

В главе II, § 6 мы видели, что каждая из функций $\eta_i(\xi)$, $i=1, 2, \dots$, выражается только через значения функции $\gamma(\xi, \eta)$ и нескольких ее производных на участке $-q \leq \xi < 0$ кривой $\eta = -\xi^2$. Поэтому обобщенный интеграл (см. (4.4))

$$\int_{-q}^0 \frac{\delta \xi^{(k-1)}(\xi, -\xi^2)}{k!} \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_k = n \\ i_j \geq 1}} \eta_{i_1}(\xi) \dots \eta_{i_k}(\xi) d\xi$$

представляет собой обобщенный криволинейный интеграл по указанному участку. Если выполнить замену переменных (II.5.3), то придем (ср. с (II.13.15), (II.13.16)) к обобщенному криволинейному интегралу по отрезку Q^-S кривой Γ от функции, выражающейся только через функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ и их производные; появляющиеся внеинтегральные члены выражаются только через значения этих функций и их производных в точке срыва S . Аналогичное утверждение имеет место и относительно обобщенных интегралов, фигурирующих в формуле (4.16).

Далее, обобщенный интеграл (см. (4.8))

$$\int_{-\infty}^0 u^{n-m-1} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_k=m, \\ i_j \geq 2}} v_{i_1-2}(u) \dots v_{i_k-2}(u) du$$

является линейной комбинацией универсальных констант (обобщенных интегралов от универсальных функций) с коэффициентами, выражающимися через значения правых частей системы (1.1) и их производных в точке срыва S (ср. с (II.12.17)). Аналогичное утверждение имеет место и относительно обобщенных интегралов, фигурирующих в формуле (4.14).

Наконец, константа δ_{n-m-1}^k (см. (4.8)) выражается через значение соответствующей производной функции $g(x, y)$ в точке срыва S (см. (4.7)), а константа A_n (см. (4.8)) выражается через значения правых частей системы (1.1) и их производных в точке срыва S и универсальные константы (коэффициенты асимптотических разложений универсальных функций). Аналогичные утверждения справедливы и относительно констант, фигурирующих в формулах (4.14), (4.15).

В качестве примера представления (4.20) укажем следующую формулу (см. (4.12), (4.19)):

$$T_{BD} = T_{Q-S} + A_{2,0} \varepsilon^{2/3} + A_{3,1} \varepsilon \ln \frac{1}{3} + A_{3,0} \varepsilon + O(\varepsilon^{4/3}),$$

$$A_{2,0} = \gamma^{2/3} \delta \Omega_0, \quad A_{3,1} = \frac{1}{6} (\gamma \delta \xi + 2\gamma \xi \delta),$$

(4.21)

$$A_{3,0} = \gamma \xi \delta \Omega_1 - \frac{1}{6} (\gamma \delta \xi + 2\gamma \xi \delta) \ln \gamma - \gamma \delta \xi I_0 +$$

$$+ \int_{-q}^0 \gamma \frac{(\xi, -\xi^2) \delta \xi (\xi, -\xi^2)}{2\xi} d\xi + \int_0^q \frac{\alpha(\xi, 0)}{\xi^2} d\xi + \frac{\alpha(-q, -q^2)}{-2q}.$$

Входящие сюда величины с помощью формул, приведенных в гл. II, §§ 5, 12, 13, могут быть выражены непосредственно через правые части системы (1.1) и, следо-

вательно, определяются без интегрирования этой системы:

$$\begin{aligned}
 \varphi'(0) &= \sqrt{\left| \frac{f_x''(S)}{2f_y'(S)} \right|}, \\
 \varphi''(0) &= \frac{f_x^{(3)}(S) f_y'(S) - 3f_{xy}''(S) f_x''(S)}{6f_y'^2(S)} \sqrt{\left| \frac{2f_y'(S)}{f_x''(S)} \right|} \operatorname{sign} g(S); \\
 \alpha &= \sqrt{\frac{2}{|f_x''(S) f_y'(S)|}}, \quad \beta = |g(S)|, \\
 \gamma &= |g(S)| \sqrt{\frac{2}{|f_x''(S) f_y'(S)|}}, \quad \delta = \frac{1}{|g(S)|}; \\
 \alpha'_\xi &= -\frac{2f_x^{(3)}(S)}{3f_x''^2(S)}, \quad \beta'_\xi = g'_x(S) \sqrt{\left| \frac{2f_y'(S)}{f_x''(S)} \right|} \operatorname{sign} f_y'(S), \\
 \gamma'_\xi &= \frac{6f_x''(S) g'_x(S) - 2f_x^{(3)}(S) g(S)}{3f_x''^2(S)} \operatorname{sign} g(S), \\
 \delta'_\xi &= -\frac{g'_x(S)}{g^2(S)} \sqrt{\left| \frac{2f_y'(S)}{f_x''(S)} \right|} \operatorname{sign} f_y'(S); \\
 \int_{-q}^0 \frac{\gamma(\xi, -\xi^2) \delta'_\xi(\xi, -\xi^2)}{2\xi} d\xi &= \\
 &= \int_{q-S}^0 \frac{-g'_x(x, y)}{f'_x(x, y) g(x, y)} dx + \frac{g'_x(S)}{f_x''(S) g(S)} \ln \varphi'(0), \\
 \int_0^q \frac{\alpha(\xi, 0)}{\xi^2} d\xi &= \int_{SQ+} \frac{dx}{f(x, y)} + \alpha \frac{\varphi''(0)}{2\varphi'^2(0)} \operatorname{sign} f_x''(S) + \alpha'_\xi \ln \varphi'(0); \\
 \Omega_0 &= \lim_{u \rightarrow \infty} v_0(u), \quad \Omega_1 = \lim_{u \rightarrow \infty} [v_1(u) - \ln u]; \\
 I_0 &= 1 + \int_{-\infty}^0 z_0(u) du + \int_0^{\infty} v_0(u) du; \\
 \frac{\alpha(-q, -q^2)}{-2q} &= \frac{1}{f'_x(Q^-)}.
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

§ 5. Вычисление времени быстрого движения

Рассмотрим участок быстрого движения DE траектории \mathfrak{Z}_ε , который расположен вблизи отрезка Q^+P^0 траектории \mathfrak{Z}_0 (см. рис. 48); уравнение участка DE имеет вид (2.3). Время движения фазовой точки системы (1.1) вдоль участка DE будем вычислять по формуле

$$T_{DE} = \varepsilon \int_{DE} \frac{dx}{f(x, y)} = \varepsilon \int_{q_1^+}^{p_1^0} \frac{dx}{f(x, y_3(x, \varepsilon))}.$$

Подставим сюда вместо функции (2.3) ее асимптотическое приближение (см. (II.17.14)) и разложим подынтегральное выражение по величинам $\varepsilon^{n/3} \ln^\nu(1/\varepsilon)$. Тогда после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} T_{DE} = & \varepsilon \int_{q_1^+}^{p_1^0} \frac{dx}{\tilde{f}(x, s_2)} + \sum_{n=5}^{N+4} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)-1} \ln^\nu \frac{1}{\varepsilon} \times \\ & \times \int_{q_1^+}^{p_1^0} \tilde{f}_{n, \nu}(x, y_{0,0}(x), y_{2,0}(x), \dots, y_{n-5, \kappa}(x)) dx + \\ & + O\left(\varepsilon^{\frac{N+5}{3}} \ln^{\pi(N)} \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (5.1) \end{aligned}$$

где функции $\tilde{f}_{n, \nu}(x, y_{0,0}(x), y_{2,0}(x), \dots, y_{n-5, \kappa}(x))$ определяются как коэффициенты указанного разложения.

В главе II, § 17 мы видели, что каждая из функций $y_{n, \nu}(x)$ выражается только через значения правых частей системы (1.1) и нескольких их производных на участке SP траектории \mathfrak{Z}_0 . Поэтому подынтегральную функцию второго члена формулы (5.1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{n, \nu}(x, y_{0,0}(x), y_{2,0}(x), \dots, y_{n-5, \kappa}(x)) = \\ = f_{n, \nu}[f(x, s_2), g(x, s_2)], \end{aligned}$$

причем выражения $f_{n, \nu}[f(x, y), g(x, y)]$ эффективно вычисляются при любом натуральном $n \geq 5$ и любом натуральном ν , $0 \leq \nu \leq \pi(n-2)-1$, и содержат только функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ и их производные.

вательно, определяются без интегрирования этой системы:

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \sqrt{\left| \frac{f_x''(S)}{2f_y'(S)} \right|}, \\ \varphi''(0) &= \frac{f_x^{(3)}(S) f_y'(S) - 3f_{xy}''(S) f_x''(S)}{6f_y'^3(S)} \sqrt{\left| \frac{2f_y'(S)}{f_x''(S)} \right|} \operatorname{sign} g(S); \\ \alpha &= \sqrt{\frac{2}{|f_x''(S) f_y'(S)|}}, \quad \beta = |g(S)|, \\ \gamma &= |g(S)| \sqrt{\frac{2}{|f_x''(S) f_y'(S)|}}, \quad \delta = \frac{1}{|g(S)|}; \\ \alpha_\xi &= -\frac{2f_x^{(3)}(S)}{3f_x''^2(S)}, \quad \beta_\xi = g'_x(S) \sqrt{\left| \frac{2f_y'(S)}{f_x''(S)} \right|} \operatorname{sign} f_y'(S), \\ \gamma_\xi &= \frac{6f_x''(S) g'_x(S) - 2f_x^{(3)}(S) g(S)}{3f_x''^2(S)} \operatorname{sign} g(S), \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\delta_\xi = -\frac{g'_x(S)}{g^2(S)} \sqrt{\left| \frac{2f_y'(S)}{f_x''(S)} \right|} \operatorname{sign} f_y'(S);$$

$$\oint_{-q}^0 \frac{\gamma(\xi, -\xi^2) \delta_\xi(\xi, -\xi^2)}{2\xi} d\xi =$$

$$= \oint_{Q-S} \frac{-g'_x(x, y)}{f_x'(x, y) g(x, y)} dx + \frac{g'_x(S)}{f_x''(S) g(S)} \ln \varphi'(0),$$

$$\oint_0^q \frac{\alpha(\xi, 0)}{\xi^2} d\xi = \oint_{SQ+} \frac{dx}{f(x, y)} + \alpha \frac{\varphi''(0)}{2\varphi'^2(0)} \operatorname{sign} f_x''(S) + \alpha_\xi \ln \varphi'(0);$$

$$\Omega_0 = \lim_{u \rightarrow \infty} v_0(u), \quad \Omega_1 = \lim_{u \rightarrow \infty} [\vartheta_1(u) - \ln u];$$

$$I_0 = 1 + \int_{-\infty}^0 z_0(u) du + \int_0^{\infty} v_0(u) du;$$

$$\frac{\alpha(-q, -q^2)}{-2q} = \frac{1}{f_x'(Q^-)}.$$

§ 5. Вычисление времени быстрого движения

Рассмотрим участок быстрого движения DE траектории \mathfrak{B}_ε , который расположен вблизи отрезка Q^+P^0 траектории \mathfrak{B}_0 (см. рис. 48); уравнение участка DE имеет вид (2.3). Время движения фазовой точки системы (1.1) вдоль участка DE будем вычислять по формуле

$$T_{DE} = \varepsilon \int_{DE} \frac{dx}{f(x, y)} = \varepsilon \int_{q_1^+}^{p_1^0} \frac{dx}{f(x, y_3(x, \varepsilon))}.$$

Подставим сюда вместо функции (2.3) ее асимптотическое приближение (см. (II.17.14)) и разложим подынтегральное выражение по величинам $\varepsilon^{n/3} \ln^\nu(1/\varepsilon)$. Тогда после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} T_{DE} = & \varepsilon \int_{q_1^+}^{p_1^0} \frac{dx}{f(x, s_2)} + \sum_{n=5}^{N+4} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)-1} \ln^\nu \frac{1}{\varepsilon} \times \\ & \times \int_{q_1^+}^{p_1^0} \tilde{f}_{n, \nu}(x, y_{0,0}(x), y_{2,0}(x), \dots, y_{n-5, \kappa}(x)) dx + \\ & + O\left(\varepsilon^{\frac{N+5}{3}} \ln^\pi(N) \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (5.1) \end{aligned}$$

где функции $\tilde{f}_{n, \nu}(x, y_{0,0}(x), y_{2,0}(x), \dots, y_{n-5, \kappa}(x))$ определяются как коэффициенты указанного разложения.

В главе II, § 17 мы видели, что каждая из функций $y_{n, \nu}(x)$ выражается только через значения правых частей системы (1.1) и нескольких их производных на участке SP траектории \mathfrak{B}_0 . Поэтому подынтегральную функцию второго члена формулы (5.1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{n, \nu}(x, y_{0,0}(x), y_{2,0}(x), \dots, y_{n-5, \kappa}(x)) = \\ = f_{n, \nu}[f(x, s_2), g(x, s_2)], \end{aligned}$$

причем выражения $f_{n, \nu}[f(x, y), g(x, y)]$ эффективно вычисляются при любом натуральном $n \geq 5$ и любом натуральном ν , $0 \leq \nu \leq \pi(n-2)-1$, и содержат только функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ и их производные.

Таким образом, справедливо следующее асимптотическое представление для времени быстрого движения по участку DE :

$$T_{DE} = \varepsilon \int_{Q^+P^0} \frac{dx}{f(x, y)} + \sum_{n=5}^{N+4} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)-1} \ln^\nu \frac{1}{\varepsilon} \times \\ \times \int_{Q^+P^0} f_{n, \nu} [f(x, y), g(x, y)] dx + O\left(\varepsilon^{\frac{N+5}{3}} \ln^{\pi(N)} \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (5.2)$$

где N — произвольное натуральное число. В частности, очевидно, что

$$T_{DE} = \varepsilon \int_{Q^+P^0} \frac{dx}{f(x, y)} + O(\varepsilon^{5/3}). \quad (5.3)$$

§ 6. Вычисление времени падения

Рассмотрим участок падения $E\hat{A}$ траектории \mathfrak{Z}_ε , который проходит вблизи отрезка $P^0P\hat{R}^0$ траектории \mathfrak{Z}_0 (см. рис. 48); уравнение участка $E\hat{A}$ имеет вид (2.4). Время падения будем вычислять по формуле

$$T_{E\hat{A}} = \int_{E\hat{A}} \frac{dy}{g(x, y)}. \quad (6.1)$$

Так как асимптотические представления кривой (2.4) различны на разных частях участка падения, мы разобьем интеграл в формуле (6.1) на два интеграла — по дугам EG и $G\hat{A}$ соответственно. Напомним, что выбор точки $G(x, y)$ на отрезке $E\hat{A}$ траектории \mathfrak{Z}_ε зависит от желаемой точности асимптотического представления участка падения (см. гл. II, § 20).

Вычислим сначала время движения фазовой точки системы (1.1) вдоль дуги EG . Если воспользоваться параметрической формой (II.19.11) уравнения этой дуги, то можно записать:

$$T_{EG} = \int_{EG} \frac{dy}{g(x, y)} = \varepsilon \int_1^\omega \frac{b dw}{\omega g(\rho_1 + sz_{\mathfrak{Z}_0}(\omega, \varepsilon), e + \varepsilon b \ln \omega)};$$

здесь ω — значение параметра ω , соответствующее точке G . Привлекая асимптотическое представление кривой (2.4)

в начале участка падения (см. (II.20.17)) и раскладывая подынтегральное выражение по величинам $\varepsilon^{n/3} \ln^v(1/\varepsilon)$ (см. (II.20.5)), после несложных преобразований и элементарной оценки остаточного члена получим

$$T_{EG} = \varepsilon \int_1^{\omega} \frac{b \, d\omega}{\omega g(p_1 + sz_{0,0}(\omega), p_2)} + \sum_{n=5}^{N+5} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)-1} \ln^{\nu} \frac{1}{\varepsilon} \times \\ \times \int_1^{\omega} g_{n,\nu}^*(p_1 + sz_{0,0}(\omega), z_{2,0}(\omega), \dots, z_{n-5,\kappa}(\omega)) \, d\omega + \\ + O\left(\varepsilon^{\frac{N+6}{3}} \ln^{\pi(N+1)} \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (6.2)$$

где функции $g_{n,\nu}^*(p_1 + sz_{0,0}(\omega), z_{2,0}(\omega), \dots, z_{n-5,\kappa}(\omega))$ определяются как коэффициенты указанного разложения, а $\omega = \varepsilon^{-(N+3)/3}$.

Исходя из асимптотического представления (II.21.1) для функции $z_{0,0}(\omega)$, легко проверить, что

$$\frac{b}{\omega g(p_1 + sz_{0,0}(\omega), p_2)} = \frac{b}{g(P)\omega} + O\left(\frac{1}{\omega^2}\right), \quad \omega \rightarrow +\infty.$$

Поэтому можно регуляризовать (ср. с (II.13.18)—(II.13.21)) интеграл, входящий в первый член формулы (6.2); с учетом значения $\omega = \varepsilon^{-(N+3)/3}$ и соотношений (II.19.8) находим

$$\varepsilon \int_1^{\omega} \frac{b \, d\omega}{\omega g(p_1 + sz_{0,0}(\omega), p_2)} = \\ = \varepsilon \int_1^{\infty} \frac{b \, d\omega}{\omega g(p_1 + sz_{0,0}(\omega), p_2)} - \frac{1}{f'_x(P)} \varepsilon \ln \omega + O\left(\varepsilon^{\frac{N+6}{3}}\right). \quad (6.3)$$

Аналогично преобразуется второй член формулы (6.2). Если провести вычисления, аналогичные приведенным в главе II, § 20, и воспользоваться разложениями (II.21.5), то нетрудно убедиться в справедливости асимптотического представления (ср. с (II.21.4))

$$g_{n,\nu}^*(p_1 + sz_{0,0}(\omega), z_{2,0}(\omega), \dots, z_{n-5,\kappa}(\omega))^+ = \\ = \sum_{\alpha=0}^{\pi(n-2)-\nu-1} g_{\alpha}^{n,\nu} \frac{\ln^{\alpha} \omega}{\omega} + O\left(\frac{\ln^{\pi(n-2)-\nu} \omega}{\omega^2}\right).$$

С помощью этих соотношений можно регуляризовать интегралы, входящие во второй член формулы (6.2):

$$\begin{aligned} & \sum_{n=5}^{N+5} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)-1} \ln^{\nu} \frac{1}{\varepsilon} \times \\ & \quad \times \int_1^{\omega} g_{n, \nu}^*(\rho_1 + s z_{0,0}(\omega), z_{2,0}(\omega), \dots, z_{n-5, \kappa}(\omega)) d\omega = \\ & = \sum_{n=5}^{N+5} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)-1} \ln^{\nu} \frac{1}{\varepsilon} \times \\ & \quad \times \int_1^{\infty} g_{n, \nu}^*(\rho_1 + s z_{0,0}(\omega), z_{2,0}(\omega), \dots, z_{n-5, \kappa}(\omega)) d\omega + \\ & \quad + \mathfrak{E}_0(\omega) + O\left(\varepsilon^{\frac{N+8}{3}} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (6.4) \end{aligned}$$

Выражение $\mathfrak{E}_0(\omega)$ получается, если подробно выписать соответствующие асимптотические разложения интегралов, и представляет собой сумму возникающих при регуляризации членов, явно зависящих от ω :

$$\mathfrak{E}_0(\omega) = \sum_{n=5}^{N+5} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)-1} \sum_{\beta=1}^{\pi(n-2)-\nu} \frac{g_{\beta-1}^{n, \nu}}{\beta} \ln^{\nu} \frac{1}{\varepsilon} \ln^{\beta} \omega.$$

Вычислим теперь время движения фазовой точки системы (1.1) вдоль дуги $G\hat{A}$. Если воспользоваться уравнением этой дуги в форме (2.4) (ср. с (II.19.5)), то

$$T_{G\hat{A}} = \iint_{G\hat{A}} \frac{dy}{g(x, y)} = \int_y^{\hat{r}_{21}^{0\eta}} \frac{dy}{g(\hat{x}_2(y, \varepsilon), y)},$$

где $y = e + \varepsilon b \ln \omega$ — ордината точки G (см. гл. II, § 20). Привлекая асимптотическое представление кривой (2.4) в конце участка падения (см. (II.20.21)), после очевидных

преобразований получим (ср. с § 3)

$$T_{G\hat{A}} = \int_y^{\hat{\gamma}_2^0} \frac{dy}{g(\hat{x}_0(y), y)} + \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N+3}{3} \rfloor} \varepsilon^n \times \\ \times \int_y^{\hat{\gamma}_2^0} \tilde{g}_n(y, \hat{x}_0(y), \hat{x}_1(y), \dots, \hat{x}_n(y)) dy + O\left(\varepsilon^{\frac{N+3}{3}} \Gamma \pi^{(N+1)} \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Так как функции $x_i(y)$, $i=0, 1, \dots$, определены на всем промежутке изменения переменной y между \hat{s}_2^* и \hat{s}_2 (см. гл. II, §§ 3, 19), то эту формулу естественно переписать в виде

$$T_{G\hat{A}} = \\ = \int_{p_2}^{\hat{\gamma}_2^0} \frac{dy}{g(\hat{x}_0(y), y)} + \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N+3}{3} \rfloor} \varepsilon^n \int_{p_2}^{\hat{\gamma}_2^0} \tilde{g}_n(y, \hat{x}_0(y), \dots, \hat{x}_n(y)) dy - \\ - \int_{p_2}^y \frac{dy}{g(\hat{x}_0(y), y)} - \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N+3}{3} \rfloor} \varepsilon^n \int_{p_2}^y \tilde{g}_n(y, \hat{x}_0(y), \dots, \hat{x}_n(y)) dy + \\ + O\left(\varepsilon^{\frac{N+3}{3}} \Gamma \pi^{(N+1)} \frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (6.5)$$

Повторяя рассуждения § 3, легко проверить, что первые два члена формулы (6.5) преобразуются так:

$$\int_{p_2}^{\hat{\gamma}_2^0} \frac{dy}{g(\hat{x}_0(y), y)} + \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N+3}{3} \rfloor} \varepsilon^n \int_{p_2}^{\hat{\gamma}_2^0} \tilde{g}_n(y, \hat{x}_0(y), \dots, \hat{x}_n(y)) dy = \\ = T_{P\hat{R}^0} + \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N+3}{3} \rfloor} \varepsilon^n \int_{P\hat{R}^0} g_n[f(x, y), g(x, y)] dy; \quad (6.6)$$

здесь $T_{P\hat{R}^0}$ — время движения фазовой точки вырожденной системы (1.2) вдоль участка $P\hat{R}^0$ ее траектории \mathfrak{Z}_0 (ср. с (3.2)).

Рассмотрим третий член формулы (6.5). Учитывая, что (см. (II.20.21), (II.20.17), (II.20.15))

$$y = e + \varepsilon b \ln \omega = E_{N+2}(\varepsilon) + \varepsilon b \ln \omega + O\left(\varepsilon^{\frac{N+3}{3}} \ln^{\pi(N+1)} \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

и вводя функцию

$$G_0(y) \equiv \frac{1}{g(\hat{x}_0(y), y)},$$

с помощью формулы Тейлора находим:

$$\begin{aligned} \int_{p_2}^y \frac{dy}{g(\hat{x}_0(y), y)} &= \\ &= \sum_{k=1}^{\left[\frac{N+3}{2}\right]} \frac{[E_{N+2}(\varepsilon) + \varepsilon b \ln \omega - p_2]^k}{k!} G_0^{(k-1)}(p_2) + \\ &\quad + O\left(\varepsilon^{\frac{N+3}{3}} \ln^{\pi(N+1)} \frac{1}{\varepsilon}\right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\left[\frac{N+3}{2}\right]} \frac{[E_{N+2}(\varepsilon) - p_2]^k}{k!} G_0^{(k-1)}(p_2) + \mathfrak{S}^*(\omega) + \\ &\quad + O\left(\varepsilon^{\frac{N+3}{3}} \ln^{\pi(N+1)} \frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (6.7) \end{aligned}$$

Здесь полностью выписан лишь первый член, получающийся по формуле бинома Ньютона; очевидно, что он содержит слагаемые, не зависящие от величины ω . Можно непосредственно проверить (см. (II.20.8)), что

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\left[\frac{N+3}{2}\right]} \frac{[E_{N+2}(\varepsilon) - p_2]^k}{k!} G_0^{(k-1)}(p_2) = \\ &= \sum_{n=2}^{N+2} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} \mathfrak{B}_{n,\nu}^* \ln^{\nu} \frac{1}{\varepsilon} + O\left(\varepsilon^{\frac{N+3}{3}} \ln^{\pi(N+1)} \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (6.8) \end{aligned}$$

причем коэффициенты $\mathfrak{B}_{n,\nu}^*$ эффективно определяются. Выражение $\mathfrak{S}^*(\omega)$ представляет собой сумму возникающих

при применении формулы бинома Ньютона явно зависящих от ω членов, имеющих порядок малости ниже порядка остаточного члена.

Совершенно аналогично преобразуется и четвертый член формулы (6.5). Положим

$$G_n(y) = \tilde{g}_n(y, \hat{x}_0(y), \hat{x}_1(y), \dots, \hat{x}_n(y));$$

тогда, как нетрудно убедиться,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\left] \frac{N+3}{3} \right]} \varepsilon^n \int_{p_2}^y \tilde{g}_n(y, \hat{x}_0(y), \hat{x}_1(y), \dots, \hat{x}_n(y)) dy = \\ & = \sum_{n=1}^{\left] \frac{N+3}{3} \right]} \varepsilon^n \sum_{k=1}^{\left] \frac{N+3-3n}{2} \right]} \frac{[E_{N-1}(\varepsilon) - p_2]^k}{k!} G_n^{(k-1)}(p_2) + \\ & \quad + \mathfrak{C}^{**}(\omega) + O\left(\varepsilon^{\frac{N+3}{3}} \ln^{\pi(N-2)} \frac{1}{\varepsilon}\right) = \\ & = \sum_{m=5}^{N+2} \varepsilon^{m/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(m-2)-1} \mathcal{B}_{m,\nu}^{**} \ln^{\nu} \frac{1}{\varepsilon} + \\ & \quad + \mathfrak{C}^{**}(\omega) + O\left(\varepsilon^{\frac{N+3}{3}} \ln^{\pi(N-2)} \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (6.9) \end{aligned}$$

где коэффициенты $\mathcal{B}_{m,\nu}^{**}$ эффективно определяются. Выражение $\mathfrak{C}^{**}(\omega)$ представляет собой сумму явно зависящих от ω членов, имеющих порядок малости ниже порядка остаточного члена.

Лемма 16. Для времени движения фазовой точки невырожденной системы (1.1) вдоль участка падения $E\hat{A}$ траектории \mathfrak{Z}_ε , лежащего вблизи отрезка $P^0P\hat{R}^0$ траектории \mathfrak{Z}_0 , справедливо асимптотическое представление

$$\begin{aligned} T_{E\hat{A}} = T_{P\hat{R}^0} + \sum_{n=1}^{\left] \frac{N+3}{3} \right]} \varepsilon^n \int_{P\hat{R}^0} g_n[f(x, y), g(x, y)] dy + \\ + \sum_{n=2}^{N+1} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} B_{n,\nu} \ln^{\nu} \frac{1}{\varepsilon} + O\left(\varepsilon^{\frac{N+2}{3}} \ln^{\pi(N)} \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (6.10) \end{aligned}$$

где N — произвольное натуральное число. Для нахождения коэффициентов $B_{n, \nu}$ не требуется интегрировать систему (1.1).

Так как время падения $T_{E\hat{A}} = T_{EG} + T_{G\hat{A}}$, то для доказательства леммы достаточно объединить результаты (6.2) и (6.5), учитывая соотношения (6.3), (6.4), (6.6) — (6.9). Существенно, что при этом все члены, явно зависящие от ω , исчезнут, поскольку справедливо равенство

$$\begin{aligned} -\frac{1}{f'_x(P)} \varepsilon \ln \omega + \mathfrak{E}_0(\omega) - \mathfrak{E}^*(\omega) - \mathfrak{E}^{**}(\omega) = \\ = O\left(\varepsilon^{\frac{N+2}{3}} \ln^{\pi(N)} \frac{1}{\varepsilon}\right). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Проверку равенства (6.11) можно провести прямыми элементарными, но весьма громоздкими вычислениями, если подробно выписать соответствующие выражения и использовать формулы (II.21.7), (II.21.8).

Коэффициенты $B_{n, \nu}$ представления (6.10) вычисляются непосредственно через значения правых частей системы (1.1) и нескольких их производных на участке быстрого движения SP траектории \mathfrak{Z}_0 . В этом нетрудно убедиться, если проанализировать определения коэффициентов в формулах (6.3), (6.4), (6.8), (6.9).

В главе II, § 20 мы видели, что каждая из функций $z_{n, \nu}(w)$ выражается только через значения функций $f(x, y)$, $g(x, y)$ и нескольких их производных на отрезке SP . Если выполнить замену переменной $x = p_1 + sz_{0, 0}(w)$ (см. (II.20.11), (II.20.12) и (II.19.8)), то обобщенный интеграл (см. (6.4))

$$\oint_1^{\infty} g_{n, \nu}^*(p_1 + sz_{0, 0}(w), z_{2, 0}(w), \dots, z_{n-5, \kappa}(w)) dw$$

преобразуется в обобщенный интеграл по отрезку P^0P траектории \mathfrak{Z}_0 от функции, выражающейся только через функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ и их производные. В получающемся интеграле, как и в появляющихся внеинтегральных членах, будут, кроме того, фигурировать величины, выражающиеся только через значения этих функций и их производных на отрезке SP^0 . Что касается констант $\mathfrak{B}_{n, \nu}^*$ и $\mathfrak{B}_{n, \nu}^{**}$ (см. (6.8), (6.9)), то они, очевидно, выражаются

только через значения функций $f(x, y)$, $g(x, y)$ и их производных на участке SP (см. (II.20.3) и гл. II, § 17).

В качестве примера представления (6.10) укажем следующую формулу, которую нетрудно проверить, если воспользоваться равенствами (II.20.18), (II.21.6), (II.20.22), (3.4), (II.20.3), (II.17.15):]

$$\begin{aligned}
 T_{E\hat{A}} = & T_{P\hat{R}^0} + \varepsilon \int_{P\hat{R}^0} \frac{-g'_x(x, y)}{f'_x(x, y) g(x, y)} dy + \\
 & + B_{2,0} \varepsilon^{2/3} + B_{3,1} \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + B_{3,0} \varepsilon + O(\varepsilon^{4/3}), \\
 B_{2,0} = & -\frac{\gamma^{2/3} \Omega_0}{g(P)} \operatorname{sign} g(S), \quad B_{3,1} = -\frac{\gamma'_\xi}{3g(P)} \operatorname{sign} g(S), \\
 B_{3,0} = & -\frac{\gamma'_\xi \Omega_1}{g(P)} \operatorname{sign} g(S) + \frac{\gamma'_\xi \ln \gamma}{3g(P)} \operatorname{sign} g(S) - \\
 & -\frac{1}{g(P)} \left[\operatorname{sign} g(S) \int_0^q \frac{\gamma(\xi, 0)}{\xi^2} d\xi + \int_{Q+P^0} \frac{g(x, y)}{f(x, y)} dx \right] + \\
 & + \int_1^\infty \frac{b dw}{\omega g(p_1 + sz_{0,0}(w), p_2)}.
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Выполняя замену (II.5.3), найдем (см. гл. II, § 13)

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sign} g(S) \int_0^q \frac{\gamma(\xi, 0)}{\xi^2} d\xi = \\
 + \int_{SQ^+} \frac{g(x, y)}{f(x, y)} dx + \gamma \frac{\varphi''(0)}{2\varphi'^2(0)} \operatorname{sign} f'_y(S) + \gamma'_\xi \ln \varphi'(0) \operatorname{sign} g(S).
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Далее, переходя к новой переменной интегрирования $x = p_1 + sz_{0,0}(w)$, получим (см. (II.19.8), (II.20.11), (II.21.1)):

$$\begin{aligned}
 \int_1^\infty \frac{b dw}{\omega g(p_1 + sz_{0,0}(w), p_2)} = & \int_{p_1^0}^{p_1} \frac{dx}{f(x, p_2)} + \frac{1}{f'_x(P)} \ln z_{1,0}^0 = \\
 = & \int_{P^0 P} \frac{dx}{f(x, y)} - \frac{1}{g(P)} \int_{P^0 P} \frac{g(x, y)}{f(x, y)} dx.
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Следовательно, входящие в формулу (6.12) величины определяются (см. (4.22), (6.13), (6.14)) без интегрирования системы (1.1) непосредственно через ее правые части.

§ 7. Асимптотическая формула для периода релаксационного колебания

Сейчас мы применим результаты §§ 3—6 для получения асимптотической формулы, позволяющей вычислять с произвольной степенью точности период релаксационного колебания, описываемого невырожденной системой (1.1).

Пусть \mathfrak{Z}_0 — замкнутая траектория вырожденной системы (1.2) (см. рис. 48). Обозначим через S_1, \dots, S_M все различные точки срыва траектории \mathfrak{Z}_0 , занумерованные в той последовательности, в какой их проходит фазовая точка системы (1.2). Далее, обозначим через P_1, \dots, P_M точки падения этой траектории, считая, что P_m — точка падения, следующая за точкой срыва S_m , $m = 1, \dots, M$. Тогда траектория \mathfrak{Z}_0 естественно разбивается на M пар смежных участков медленного и быстрого движения:

$$(P_M S_1; S_1 P_1), (P_1 S_2; S_2 P_2), \dots, (P_{M-1} S_M; S_M P_M). \quad (7.1)$$

Теорема XIII. Пусть выполнены предположения, сформулированные в главе II, § 1 и в § 1. Для периода T_ε предельного цикла \mathfrak{Z}_ε невырожденной системы (1.1) справедливо асимптотическое представление

$$T_\varepsilon = T_0 + \sum_{m=1}^M \Delta_m T + O\left(\varepsilon^{\frac{N+2}{3}} \ln^{\pi(N)} \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (7.2)$$

где N — произвольное натуральное число, T_0 — период замкнутой траектории \mathfrak{Z}_0 , вычисляемый по формуле (1.5), а величина $\Delta_m T$, $m = 1, \dots, M$, представляется в виде

$$\Delta_m T = \sum_{n=2}^{N+1} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} \mathfrak{K}_{n,\nu}^m \ln^\nu \frac{1}{\varepsilon}. \quad (7.3)$$

Коэффициенты $\mathfrak{K}_{n,\nu}^m$ при каждом m , $1 \leq m \leq M$, выражаются непосредственно через значения правых частей системы (1.1) и их производных на соответствующей паре $(P_{m-1} S_m; S_m P_m)$ смежных участков траектории \mathfrak{Z}_0 , так

что для определения этих коэффициентов не требуется интегрировать невырожденную систему (1.1).

Из пар смежных участков (7.1) возьмем произвольную пару $(\bar{P}S; SP)$ и рассмотрим близкий участок $ABDE\hat{A}$ траектории \mathfrak{Z}_ε (см. § 2 и рис. 48). Объединяя результаты (3.3), (4.11), (4.18), (5.2) и (6.10) с учетом требуемой точности, легко находим следующее представление для времени движения фазовой точки системы (1.1) вдоль этого участка:

$$\begin{aligned}
 T_{A\hat{A}} = & T_{R^0S} + \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N+2}{3} \rfloor} \varepsilon^n \int_{R^0Q^-} g_n [f(x, y), g(x, y)] dy + \\
 & + T_{Q-R} + \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N+2}{3} \rfloor} \varepsilon^n \int_{Q^-R} g_n [f(x, y), g(x, y)] dy - \\
 & - \mathfrak{S}_2(-q) + \sum_{n=3}^{N+1} A_n^{(1)} \varepsilon^{n/3} + \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N+2}{3} \rfloor} A_n^{(2)} \varepsilon^n \ln \frac{1}{\varepsilon} + \\
 & + \sum_{n=2}^{N+1} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} A_{n,\nu}^* \ln^\nu \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon \int_{Q^+P^0} \frac{dx}{f(x, y)} + \\
 & + \sum_{n=5}^{N+1} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)-1} \ln^\nu \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q^+P^0} f_{n,\nu} [f(x, y), g(x, y)] dx + \\
 & + \sum_{n=2}^{N+1} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} B_{n,\nu} \ln^\nu \frac{1}{\varepsilon} + T_{P\hat{R}^0} + \\
 & + \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N+2}{3} \rfloor} \varepsilon^n \int_{P\hat{R}^0} g_n [f(x, y), g(x, y)] dy + \\
 & + O\left(\varepsilon^{\frac{N+2}{3}} \ln^{\pi(N)} \frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (7.4)
 \end{aligned}$$

Для вычисления периода T_ε цикла \mathfrak{Z}_ε нужно составить выражения типа (7.4) для каждой из пар смежных участков (7.1), а затем сложить все такие выражения. При этом, очевидно, можно произвести перегруппировку слагаемых, а именно: последние два выписанных члена

формулы (7.4)

$$T_{P\hat{R}^0} + \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N+2}{3} \rfloor} \varepsilon^n \int_{P\hat{R}^0} g_n [f(x, y), g(x, y)] dy$$

отнесем к выражению, которое отвечает паре смежных участков, последующей за парой $(\tilde{P}S; SP)$, а к выражению (7.4) присоединим два аналогичных члена

$$T_{\tilde{P}R^0} + \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N+2}{3} \rfloor} \varepsilon^n \int_{\tilde{P}R^0} g_n [f(x, y), g(x, y)] dy \quad (7.5)$$

из выражения, которое отвечает паре смежных участков, предшествующей паре $(\tilde{P}S; SP)$. Слагаемые (7.5) объединим соответственно с первым и вторым членами формулы (7.4).

Далее рассмотрим третий, четвертый и пятый члены формулы (7.4). Из результатов главы II, § 7 и § 4 настоящей главы непосредственно видно, что с точностью до величин требуемого порядка малости каждый из этих членов представляется полиномом по ε . Более подробные вычисления позволяют убедиться, что справедливо соотношение

$$\begin{aligned} T_{Q-R} + \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N+2}{3} \rfloor} \varepsilon^n \int_{Q-R} g_n [f(x, y), g(x, x)] dy - \mathfrak{C}_2(-q) = \\ = O\left(\varepsilon^{\frac{N+2}{3}} \ln^{\pi(N)} \frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (7.6) \end{aligned}$$

Таким образом, имея в виду указанную выше перегруппировку слагаемых и учитывая равенство (7.6), можно участку $ABDE\hat{A}$ траектории \mathfrak{Z}_ε поставить в соответствие выражение

$$T_{A\hat{A}}^* = T_{\tilde{P}S} + \sum_{n=2}^{N+1} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} K_{n,\nu}^{A\hat{A}} \ln^\nu \frac{1}{\varepsilon} + O\left(\varepsilon^{\frac{N+2}{3}} \ln^{\pi(N)} \frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Коэффициенты этого выражения, очевидно, определяются лишь значениями функций $f(x, y)$, $g(x, y)$ и их производных на участке $\tilde{P}SP$ траектории \mathfrak{Z}_0 . Отсюда немедленно вытекают формулы (7.2) и (7.3).

Теорема XIII до конца решает вопрос о структуре асимптотического разложения периода T_ε релаксационного колебания в системе второго порядка (1.1), которому отвечает устойчивый предельный цикл \mathfrak{Z}_ε , близкий к фазовой траектории \mathfrak{Z}_0 разрывного периодического решения вырожденной системы (1.2). Это разложение имеет вид

$$T_\varepsilon = \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq 1}}^{\infty} \varepsilon^{n/3} \sum_{\nu=0}^{\pi(n-2)} K_{n,\nu} \ln^\nu \frac{1}{\varepsilon}, \quad (7.7)$$

где (см. (II.12.14))

$$\pi(n) = \left[\frac{n}{3} \right] + \begin{cases} 0, & \text{если } n \not\equiv 1 \pmod{3}, \\ 1, & \text{если } n \equiv 1 \pmod{3}, \end{cases}$$

или, что то же самое,

$$\pi(n) = \frac{n}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \operatorname{tg} \frac{\pi n}{3}.$$

Ряд (7.7) является естественным обобщением обычного асимптотического степенного ряда и обладает многими свойствами формальных степенных рядов.

Подчеркнем, что структура (7.7) асимптотического разложения для периода релаксационного колебания получена при некоторых предположениях (см. гл. II, § 1 и § 1) относительно системы (1.1) и, в частности, в предположении о невырожденности всех точек срыва траектории \mathfrak{Z}_0 (см. (II.1.6), (II.1.15)). Структура асимптотического разложения в случае, когда нерегулярные точки траектории \mathfrak{Z}_0 имеют более общую природу, выясняется в [51].

Коэффициенты разложения (7.7) определяются рекуррентным образом без интегрирования невырожденной системы (1.1). Проводя более подробно вычисления, описанные в §§ 3—6, можно найти явные выражения для любого наперед заданного числа этих коэффициентов непосредственно через функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$. Например, если исходить из представлений (3.4), (4.21), (5.3), (6.12) и учесть соотношения (4.22), (6.13) и (6.14), то после элементарных преобразований нетрудно установить следующее утверждение.

Теорема XIV. Для периода T_ε предельного цикла \mathfrak{Z}_ε невырожденной системы (1.1), удовлетворяющей предположениям главы II, § 1 и § 1, справедливо асимптотическое

представление

$$T_\varepsilon = \oint_{\mathfrak{z}_0} \frac{dy}{g(x, y)} + \sum_{m=1}^M \Delta_m T + O(\varepsilon^{4/3}); \quad (7.8)$$

здесь величина $\Delta_m T$, $m=1, \dots, M$, соответствует паре $(P_{m-1}S_m; S_mP_m)$ смежных участков траектории \mathfrak{z}_0 и вычисляется по формуле

$$\Delta_m T = \mathfrak{K}_{2,0}^{em} \varepsilon^{2/3} + \mathfrak{K}_{3,1}^{em} \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \mathfrak{K}_{3,0}^{em} \varepsilon, \quad (7.9)$$

где

$$\mathfrak{K}_{2,0}^{em} = \gamma^{2/3}(S_m) \Omega_0 \chi(S_m P_m),$$

$$\mathfrak{K}_{3,1}^{em} = \frac{1}{3} \gamma'_\xi(S_m) \chi(S_m P_m) + \frac{1}{6} \gamma(S_m) \delta'_\xi(S_m),$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_{3,0}^{em} = & \oint_{P_{m-1}S_m} \frac{-g'_x(x, y)}{f'_x(x, y) g(x, y)} dx + \\ & + \oint_{S_m P_m} \frac{dx}{f(x, y)} - \frac{1}{g(P_m)} \oint_{S_m P_m} \frac{g(x, y)}{f(x, y)} dx + \\ & + \left[\gamma'_\xi(S_m) \Omega_1 - \frac{1}{3} \gamma'_\xi(S_m) \ln \gamma(S_m) + \right. \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} & \left. + \gamma'_\xi(S_m) \ln \varphi'(S_m) + \gamma(S_m) \frac{\varphi''(S_m)}{2\varphi'^2(S_m)} \operatorname{sign} f_x^2(S_m) \right] \chi(S_m P_m) - \\ & - \gamma(S_m) \delta'_\xi(S_m) \left[I_0 + \frac{1}{6} \ln \gamma(S_m) - \frac{1}{2} \ln \varphi'(S_m) \right]; \end{aligned}$$

$$\varphi'(S_m) = \sqrt{\left| \frac{f_x^{(2)}(S_m)}{2f_y'(S_m)} \right|},$$

$$\varphi''(S_m) = \frac{f_x^{(3)}(S_m) f_y'(S_m) - 3f_{xy}''(S_m) f_x^{(2)}(S_m)}{6f_y'^2(S_m) \varphi'(S_m)} \operatorname{sign} g(S_m),$$

$$\chi(S_m P_m) = \left[\frac{1}{g(S_m)} - \frac{1}{g(P_m)} \right] \operatorname{sign} g(S_m),$$

$$\gamma(S_m) = |g(S_m)| \sqrt{\frac{2}{|f_x^{(2)}(S_m) f_y'(S_m)|}},$$

$$\gamma'_\xi(S_m) = \frac{6f_x^{(2)}(S_m) g'_x(S_m) - 2f_x^{(3)}(S_m) g(S_m)}{3[f_x^{(2)}(S_m)]^2} \operatorname{sign} g(S_m),$$

$$\delta'_\xi(S_m) = -\frac{g'_x(S_m)}{g^2(S_m) \varphi'(S_m)} \operatorname{sign} f_y'(S_m),$$

$$\Omega_0 = \lim_{u \rightarrow \infty} v_0(u), \quad \Omega_1 = \lim_{u \rightarrow \infty} [v_1(u) - \ln u],$$

$$I_0 = 1 + \int_{-\infty}^0 z_0(u) du + \int_0^{\infty} v_0(u) du.$$

§ 8. Уравнение Ван-дер-Поля. Формула Дородницына

Применим теорему XIV для приближенного вычисления периода релаксационного колебания в системе, описываемой уравнением Ван-дер-Поля.

Мы уже отмечали (см. гл. I, § 3), что при любом значении параметра $\lambda > 0$ среди решений уравнения Ван-дер-Поля (см. (I.3.6))

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda(-1 + x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (8.1)$$

существует и периодическое. Нетрудно убедиться, что при достаточно больших значениях параметра λ это периодическое решение имеет характер релаксационного колебания.

Введем еще одну неизвестную y , новое время t и параметр ε по формулам (ср. с (I.3.7))

$$y = \int_0^x (x^2 - 1) dx + \frac{1}{\lambda} \frac{dx}{dt}, \quad t = \frac{t}{\lambda}, \quad \varepsilon = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (8.2)$$

Тогда от уравнения (8.1) легко перейти к системе второго порядка (ср. с (I.3.8))

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = y - \frac{1}{3} x^3 + x, \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad (8.3)$$

с малым (положительным) параметром при производной, т. е. к системе того типа, который изучается в предыдущей и настоящей главах. Непосредственно проверяется, что система (8.3) удовлетворяет всем предположениям, сформулированным в § I и в главе II, § I. В частности, ясно (см. гл. I, § 4), что вырожденная система

$$\begin{cases} y - \frac{1}{3} x^3 + x = 0, \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad (8.4)$$

имеет замкнутую фазовую траекторию \mathfrak{Z}_0 (см. рис. 8), состоящую из двух участков P_2S_1 и P_1S_2 медленного движения и двух участков S_1P_1 и S_2P_2 быстрого движения. Координаты точек срыва S_1, S_2 и точек падения P_1, P_2 таковы:

$$S_1(-1, 2/3), \quad S_2(1, -2/3), \quad P_1(2, 2/3), \quad P_2(-2, -2/3). \quad (8.5)$$

Из теоремы XII теперь следует, что у невырожденной системы (8.3) при каждом достаточно малом значении параметра ε существует единственный и устойчивый предельный цикл \mathfrak{Z}_ε , причем $\mathfrak{Z}_\varepsilon \rightarrow \mathfrak{Z}_0$ равномерно при $\varepsilon \rightarrow 0$. Другими словами, система, описываемая уравнением (8.1), при достаточно больших значениях параметра λ совершает устойчивое релаксационное колебание.

Применяя формулы главы II, удастся получить асимптотическое представление с произвольной степенью точности по ε для замкнутой траектории \mathfrak{Z}_ε системы (8.3), например, с точностью до величин порядка малости $\varepsilon^{4/3}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тем самым решается задача приближенного нахождения близкого к разрывному периодического решения уравнения (8.1). В частности, можно рассмотреть и задачу о вычислении важной характеристики релаксационного колебания—его амплитуды. Мы, однако, не будем останавливаться здесь на всех этих задачах и ограничимся лишь построением асимптотического приближения для периода релаксационного колебания с точностью до величин порядка малости $\varepsilon^{4/3}$.

Согласно формуле (7.8) для периода T_ε предельного цикла \mathfrak{Z}_ε системы (8.3) справедливо асимптотическое представление

$$T_\varepsilon = T_0 + \Delta_1 T + \Delta_2 T + O(\varepsilon^{4/3}), \quad (8.6)$$

где T_0 —период замкнутой траектории \mathfrak{Z}_0 системы (8.4), а величины $\Delta_1 T$ и $\Delta_2 T$ соответствуют парам $(P_2S_1; S_1P_1)$ и $(P_1S_2; S_2P_2)$ смежных участков этой траектории. Очевидно, что

$$T_0 = \oint_{\mathfrak{Z}_0} \frac{dy}{-x} = 3 - 2 \ln 2.$$

Далее, заметим, что поле фазовых скоростей системы (8.3) обладает центральной симметрией, а потому $\Delta_1 T = \Delta_2 T$, так что достаточно вычислить, например, величину $\Delta_1 T$.

По формулам (7.10) с учетом (8.5) легко получаем:

$$\begin{aligned} \varphi'(S_1) &= 1, & \varphi''(S_1) &= -1/3, & \chi(S_1 P_1) &= 3/2, \\ \gamma(S_1) &= 1, & \gamma'_\xi(S_1) &= -2/3, & \delta'_\xi(S_1) &= 1. \end{aligned}$$

Нетрудно найти значения и участвующих в формулах (7.10) обобщенных интегралов (см. гл. II, § 13):

$$\begin{aligned} \oint_{P_1 S_1} \frac{dx}{-x(-x^2+1)} &= \int_{-2}^{-1} \left(\frac{-1}{x} + \frac{1/2}{x-1} \right) dx - \frac{1}{2} \ln 1 = \\ &= \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \oint_{S_1 P_1} \frac{dx}{y - \frac{1}{3}x^3 + x} &= -3 \oint_{-1}^0 \frac{dx}{(x-2)(x+1)^2} - 3 \oint_0^2 \frac{dx}{(x-2)(x+1)^2} = \\ &= \frac{2}{3} \ln 3 - \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

$$\oint_{S_1 P_1} \frac{-x dx}{y - \frac{1}{3}x^3 + x} = 3 \oint_{-1}^2 \frac{x dx}{(x-2)(x+1)^2} = -\frac{4}{3} \ln 3 - \frac{1}{3}.$$

Теперь уже можно выписать выражение для величины $\Delta_1 T$ (см. (7.9)), а затем подставить его в соотношение (8.6).

В результате придем к следующему асимптотическому представлению для периода траектории \mathfrak{Z}_ε системы (8.3):

$$\begin{aligned} T_\varepsilon &= 3 - 2 \ln 2 + 3\Omega_0 \varepsilon^{2/3} - \frac{1}{3} \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \\ &+ \left(3 \ln 2 - \ln 3 - \frac{3}{2} - 2\Omega_1 - 2I_0 \right) \varepsilon + O(\varepsilon^{4/3}); \quad (8.7) \end{aligned}$$

входящие сюда универсальные константы Ω_0 , Ω_1 и I_0 определены в (7.10). Подчеркнем, что здесь период вычислен относительно времени t . Если же вернуться к времени \bar{t} и параметру λ (см. (8.2)), то равенство (8.7) переписется в виде

$$\begin{aligned} T_\lambda &= (3 - 2 \ln 2) \lambda + 3\Omega_0 \lambda^{-1/3} - \frac{2 \ln \lambda}{3 \lambda} + \\ &+ \left(3 \ln 2 - \ln 3 - \frac{3}{2} - 2\Omega_1 - 2I_0 \right) \frac{1}{\lambda} + O(\lambda^{-5/3}). \end{aligned}$$

Это — известная формула Дородницына для периода релаксационного колебания системы, описываемой уравнением Ван-дер-Поля (см. [18], [58]).

Системы произвольного порядка. Асимптотическое вычисление решений

В отличие от случая $n=2$, рассмотренного в двух предыдущих главах, асимптотическое разложение траекторий системы произвольного порядка n , содержащей малый параметр при части производных, до сих пор не известно. В частности, не удалось получить и асимптотическое разложение периодических решений, описывающих релаксационные колебания.

В настоящей главе вычислено асимптотическое приближение траекторий системы произвольного порядка с малым параметром ε при части производных с точностью до величин порядка малости не ниже ε .

§ 1. Основные предположения

Будем изучать фазовые траектории системы

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}^i = f^i(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l), \\ \dot{y}^j = g^j(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l), \end{cases} \quad (1.1)$$

$$i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, l, \quad k + l = n,$$

где ε — малый положительный параметр. Буквами x, y, f, g без индексов будем обозначать векторы

$$x = (x^1, \dots, x^k), \quad f = (f^1, \dots, f^k), \\ y = (y^1, \dots, y^l), \quad g = (g^1, \dots, g^l).$$

Правые части системы (1.1) предполагаются определенными во всем фазовом пространстве R^n переменных $x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l$ и достаточно гладкими, т. е. дифференцируемыми по совокупности этих переменных столько раз, сколько нужно при проведении вычислений. Фазовое пространство $R^n, n = k + l$, системы (1.1) представляет собой прямую сумму k -мерного подпространства X^k и l -мерного подпространства Y^l .

Системе (1.1), которую мы назовем *невырожденной*, поставим в соответствие *вырожденную* систему, получающуюся из (1.1), если положить $\varepsilon = 0$:

$$\begin{cases} f^i(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l) = 0, & i = 1, \dots, k, \\ \dot{y}^j = g^j(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l), & j = 1, \dots, l. \end{cases} \quad (1.2)$$

Кроме того, введем соответствующую системе (1.1) *систему уравнений быстрых движений*

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l), \quad i = 1, \dots, k. \quad (1.3)$$

Это — нормальная система k -го порядка, в которой величины y^1, \dots, y^l считаются параметрами. Фазовое пространство системы (1.3) отождествим с k -мерной плоскостью X_{y^1, \dots, y^l}^k пространства R^n , состоящей из точек $(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l)$, где y^1, \dots, y^l — фиксированы. Будем предполагать, что система (1.3) при любых значениях параметров y^1, \dots, y^l своими стационарными решениями имеет лишь положения равновесия.

В дальнейшем существенную роль играет l -мерная поверхность Γ , выделяемая в пространстве R^n совокупностью первых k уравнений системы (1.2):

$$f^i(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l) = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (1.4)$$

Ясно, что эта поверхность представляет собой множество всех положений равновесия системы (1.3) при всевозможных значениях параметров y^1, \dots, y^l (см. рис. 24).

Рассмотрим матрицу

$$\mathfrak{A}(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l) = \left\| \frac{\partial}{\partial x^\beta} f^\alpha(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l) \right\|, \\ \alpha, \beta = 1, \dots, k, \quad (1.5)$$

определенную в пространстве R^n и, в частности, на поверхности Γ . Совокупность тех точек поверхности (1.4), в которых все собственные значения матрицы (1.5) имеют отрицательные действительные части, назовем *устойчивой областью* поверхности Γ и обозначим Γ_- . Впредь будем считать, что в устойчивой области Γ_- нет положений равновесия системы (1.1).

Точки поверхности Γ , для которых справедливо равенство

$$\det \mathfrak{A}(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l) = 0, \quad (1.6)$$

назовем *нерегулярными*. В общем случае множество Γ_0 всех нерегулярных точек является $(l-1)$ -мерным подмножеством поверхности Γ и разбивает эту поверхность на две или несколько частей. В силу соотношения (1.6) в каждой нерегулярной точке хотя бы одно собственное значение матрицы \mathfrak{A} обращается в нуль.

Нерегулярную точку $S(x_0^1, \dots, x_0^k, y_0^1, \dots, y_0^l)$ поверхности Γ назовем *точкой срыва*, если выполнены следующие условия:

а) точка S не является положением равновесия системы (1.1), т. е. $g(S) \neq 0$;

б) все собственные значения матрицы $\mathfrak{M}(S)$, кроме одного, которое обращается в нуль, имеют отрицательные действительные части;

в) у системы (1.3) при $y^1 = y_0^1, \dots, y^l = y_0^l$ существует лишь одна траектория, примыкающая к точке S при $t \rightarrow -\infty$;

г) в любой k -мерной плоскости пространства R^n , которая получается из плоскости $X_{y_0^1, \dots, y_0^l}^k$ сдвигом на вектор h (пропорциональный вектору $g(S)$ и достаточно малый, но не зависящий от ϵ), нет положений равновесия системы (1.3), близких в пространстве R^n к точке S .

Пусть $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^k, \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^l)$ — точка пространства R^n , не лежащая на поверхности Γ . Рассмотрим выходящую из данной точки траекторию системы (1.3) (в которую вместо параметров y^1, \dots, y^l подставлены их значения $y^1 = \bar{y}^1, \dots, y^l = \bar{y}^l$). Если эта траектория при возрастании t стремится к устойчивому положению равновесия $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^k, \tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^l)$, принадлежащему устойчивой области Γ_- , то точку $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^k, \tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^l)$ назовем *точкой падения* из точки $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^k, \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^l)$ (см. рис. 14, 15).

Наконец, пусть $S(x_0^1, \dots, x_0^k, y_0^1, \dots, y_0^l)$ — точка срыва, удовлетворяющая такому дополнительному условию: траектория системы (1.3) при $y^1 = y_0^1, \dots, y^l = y_0^l$, примыкающая при $t \rightarrow -\infty$ к точке S , асимптотически приближается при $t \rightarrow +\infty$ к устойчивому положению равновесия $P(x_1^1, \dots, x_1^k, y_1^1, \dots, y_1^l)$, лежащему в устойчивой области Γ_- . Тогда точку P назовем *точкой падения, следующей за точкой срыва* S (см. рис. 14, 15).

§ 2. Нулевое приближение

Для системы (1.2) можно ввести понятие *разрывного решения* (см. гл. I, § 6); тогда под фазовыми траекториями этой системы естественно понимать траектории ее

разрывных решений. Другими словами, *фазовой траекторией вырожденной системы* (1.2) с начальной точкой Q назовем непрерывную кривую \mathfrak{X} в пространстве R^n , которая получается последовательно по такому правилу:

1. Если точка $Q(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^k, \tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^l)$ не лежит на поверхности Γ , то существует единственная траектория системы (1.3), выходящая из точки Q . Эта траектория либо уходит в бесконечность, либо приближается к некоторому положению равновесия. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь того случая, когда существует точка падения из точки Q . Тогда траектория \mathfrak{X} своим первым звеном имеет лежащую в плоскости $X_{\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^l}^k$ дугу траектории системы (1.3), начинающуюся в точке Q и пополненную точкой падения из точки Q . Фазовая точка системы (1.2) проходит это звено траектории \mathfrak{X} мгновенно и попадает в устойчивую область Γ_- .

2. Если точка $Q(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^k, \tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^l)$ принадлежит устойчивой области Γ_- , то однозначно определяется траектория системы (1.2), выходящая из точки Q (см. гл. I, § 6). Эта траектория либо всегда остается в устойчивой области Γ_- , либо в некоторый момент времени попадает в точку $S \in \Gamma_0$. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь того случая, когда S является точкой срыва. Тогда траектория \mathfrak{X} своим первым звеном имеет лежащую в устойчивой области Γ_- дугу QS траектории системы (1.2). Фазовая точка системы (1.2) проходит это звено траектории \mathfrak{X} за вполне определенное конечное время. Такое звено назовем *участком медленного движения* траектории \mathfrak{X} .

3. Если точка $Q(x_0^1, \dots, x_0^k, y_0^1, \dots, y_0^l)$ является точкой срыва, то существует единственная траектория системы (1.3), примыкающая при $t \rightarrow -\infty$ к точке Q . Эта траектория при $t \rightarrow +\infty$ либо уходит в бесконечность, либо приближается к некоторому положению равновесия. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь того случая, когда существует точка падения P , следующая за точкой срыва Q . Тогда траектория \mathfrak{X} своим первым звеном имеет лежащую в плоскости $X_{y_0^1, \dots, y_0^l}^k$ дугу указанной траектории системы (1.3), пополненную точками Q и P . Фазовая точка системы (1.2) проходит это

звено траектории \mathfrak{Z} мгновенно и попадает в устойчивую область Γ_- . Такое звено назовем *участком быстрого движения* траектории \mathfrak{Z} .

На рис. 14, 15, 24 изображены, в частности, фазовые траектории системы (1.2), построенные по указанному правилу в перечисленных выше предположениях. Во всех других случаях фазовые траектории вырожденной системы мы определять не будем.

Пусть теперь Q_0 — некоторая фиксированная точка фазового пространства R^n и существует фазовая траектория \mathfrak{Z}_0 вырожденной системы (1.2), исходящая из этой точки. Обозначим через \mathfrak{Z}_ε фазовую траекторию невырожденной системы (1.1) с той же начальной точкой Q_0 . Наводящие соображения, изложенные в главе I, § 5, подсказывают, что справедливо следующее утверждение.

Теорема XV. *В произвольной ограниченной части фазового пространства кривая \mathfrak{Z}_0 служит нулевым асимптотическим приближением траектории \mathfrak{Z}_ε , т. е. $\mathfrak{Z}_\varepsilon \rightarrow \mathfrak{Z}_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно на любом отрезке траектории \mathfrak{Z}_0 конечной длины.*

Доказательство теоремы XV не просто. Сравнительно легко оно получается для участка траектории \mathfrak{Z}_0 между двумя последовательными точками срыва вне конечных (не зависящих от ε) окрестностей этих точек (см. [57], [12]). Более того, для такого участка траектории \mathfrak{Z}_ε можно указать равномерное асимптотическое приближение с точностью до величин порядка ε , если воспользоваться одним обобщением предложенного в [13], [14] алгоритма построения асимптотического разложения. Мы сформулируем соответствующий результат, но не будем останавливаться на его обосновании, так как необходимые рассуждения аналогичны приведенным в [14].

Теорема XVI. *Пусть*

$$x^i = x^i(t, \varepsilon), \quad i = 1, \dots, k, \quad y^j = y^j(t, \varepsilon), \quad j = 1, \dots, l, \quad (2.1)$$

— решение невырожденной системы (1.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$x^i(t_1, \varepsilon) = \tilde{x}^i + a^i \varepsilon^{2/3} + b^i \varepsilon \ln(1/\varepsilon) + O(\varepsilon), \quad i = 1, \dots, k, \quad (2.2)$$

$$y^j(t_1, \varepsilon) = \tilde{y}^j + c^j \varepsilon^{2/3} + d^j \varepsilon \ln(1/\varepsilon) + O(\varepsilon), \quad j = 1, \dots, l,$$

причем точка $Q(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^k, \tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^l)$ лежит на конечном расстоянии от поверхности Γ и существует точка падения $P(\tilde{\tilde{x}}^1, \dots, \tilde{\tilde{x}}^k, \tilde{\tilde{y}}^1, \dots, \tilde{\tilde{y}}^l)$ из точки Q , принадлежащая устойчивой области Γ_- . Пусть, далее,

$$x^i = \Pi^i x \left(\frac{t-t_1}{\varepsilon} \right), \quad i = 1, \dots, k,$$

— решение системы уравнений быстрых движений (1.3) при $y^1 = \tilde{y}^1, \dots, y^l = \tilde{y}^l$ и начальных условиях

$$\Pi^i x(0) = \tilde{x}^i - \tilde{\tilde{x}}^i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Наконец, пусть

$$x^i = x_0^i(t), \quad i = 1, \dots, k, \quad y^j = y_0^j(t), \quad j = 1, \dots, l, \quad (2.3)$$

— решение вырожденной системы (1.2) с начальными условиями

$$y_0^j(t_1) = \tilde{y}^j, \quad j = 1, \dots, l.$$

Если участок траектории решения (2.3), отвечающий отрезку $t_1 \leq t \leq t_2$, целиком расположен в устойчивой области Γ_- вне конечной окрестности множества Γ_0 , то решение (2.1) определено на всем отрезке $t_1 \leq t \leq t_2$ и равномерно на этом отрезке представимо в виде

$$x^i(t, \varepsilon) = x_0^i(t) + \Pi^i x \left(\frac{t-t_1}{\varepsilon} \right) + \varphi^i(t, \varepsilon) \varepsilon^{2/3} + \\ + \Phi^i(t, \varepsilon) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon), \quad i = 1, \dots, k,$$

$$y^j(t, \varepsilon) = y_0^j(t) + \psi^j(t, \varepsilon) \varepsilon^{2/3} + \Psi^j(t, \varepsilon) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon), \\ j = 1, \dots, l,$$

причем функции $\varphi^i(t, \varepsilon)$, $\Phi^i(t, \varepsilon)$, $\psi^j(t, \varepsilon)$, $\Psi^j(t, \varepsilon)$ эффективно определяются. Если \bar{t}_1 — произвольное не зависящее от ε число, удовлетворяющее условию $t_1 < \bar{t}_1 < t_2$, то на отрезке $\bar{t}_1 \leq t \leq t_2$ для решения (2.1) имеет место равномерное представление

$$x^i(t, \varepsilon) = x_0^i(t) + O(\varepsilon), \quad i = 1, \dots, k, \\ y^j(t, \varepsilon) = y_0^j(t) + O(\varepsilon), \quad j = 1, \dots, l.$$

Из теоремы XVI видно, что при подходе к точке срыва на малом конечном расстоянии от этой точки траек-

тория \mathfrak{T}_ε отличается от траектории \mathfrak{T}_0 на величину порядка ε . Дальнейшие параграфы настоящей главы посвящены построению асимптотического приближения траектории \mathfrak{T}_ε с пренебрежением величинами порядка ε в конечной окрестности точки срыва. В частности, мы убедимся, что и в такой окрестности нулевым асимптотическим приближением участка траектории \mathfrak{T}_ε служит соответствующий участок траектории \mathfrak{T}_0 . Кроме того, мы покажем, что при отходе от точки срыва на малом конечном расстоянии от этой точки для траектории \mathfrak{T}_ε справедливо представление типа (2.2); таким образом, для вычисления последующего участка траектории \mathfrak{T}_ε можно применить теорему XVI.

§ 3. Локальные координаты в окрестности точки срыва

Для асимптотического вычисления траекторий \mathfrak{T}_ε системы (1.1) вблизи точки срыва введем в малой, но конечной (т. е. не зависящей от ε) окрестности этой точки вместо $x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l$ локальные координаты $\xi^1, \dots, \xi^k, \eta^1, \dots, \eta^l$, в которых система (1.1) запишется в достаточно простой форме.

Пусть $S(x_0^1, \dots, x_0^k, y_0^1, \dots, y_0^l)$ —точка срыва. Разложим правые части системы (1.1) в окрестности точки S по формулам Тейлора, выписывая лишь члены, которые понадобятся в дальнейшем:

$$\begin{aligned} f^i(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l) = & \\ = A_\alpha^i(x^\alpha - x_0^\alpha) + B_x^i(y^x - y_0^x) + A_{\alpha\beta}^i(x^\alpha - x_0^\alpha)(x^\beta - x_0^\beta) + & \\ + A_{\alpha\beta\gamma}^i(x^\alpha - x_0^\alpha)(x^\beta - x_0^\beta)(x^\gamma - x_0^\gamma) + \dots, & \\ i = 1, \dots, k, & \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} g^j(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^l) = & \\ = g^j(x_0^1, \dots, x_0^k, y_0^1, \dots, y_0^l) + C_\alpha^j(x^\alpha - x_0^\alpha) + \dots, & \\ j = 1, \dots, l. & \end{aligned}$$

В формулах (3.1) мы, пользуясь тензорными обозначениями, опускаем знак суммирования—если в некотором члене один и тот же индекс встречается сверху и снизу,

то это автоматически означает суммирование по нему в естественных пределах, например:

$$A_{\alpha}^i(x^{\alpha} - x_0^{\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^k A_{\alpha}^i(x^{\alpha} - x_0^{\alpha});$$

$$B_{\kappa}^i(y^{\kappa} - y_0^{\kappa}) = \sum_{\kappa=1}^l B_{\kappa}^i(y^{\kappa} - y_0^{\kappa}).$$

Согласно определению точки срыва S матрица

$$\mathfrak{A}(S) = \|A_{\alpha}^i\| = \left\| \frac{\partial f^i(x_0^1, \dots, x_0^k, y_0^1, \dots, y_0^l)}{\partial x^{\alpha}} \right\| \quad (3.2)$$

имеет лишь одно нулевое собственное значение (кратности единица). Принадлежащий ему единичный собственный вектор обозначим

$$m = (m^1, \dots, m^k).$$

Собственный вектор с нулевым собственным значением транспонированной матрицы обозначим

$$n = (n_1, \dots, n_k).$$

Вектор n определяется однозначно, если дополнительно потребовать выполнение нормирующего соотношения

$$m^{\alpha} n_{\alpha} = 1. \quad (3.3)$$

Таким образом, справедливы равенства

$$A_{\alpha}^i m^{\alpha} = 0, \quad A_i^{\alpha} n_{\alpha} = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (3.4)$$

Возьмем линейно независимую систему векторов

$$e_1, \dots, e_k; \quad e_i = (e_i^1, \dots, e_i^k), \quad i = 1, \dots, k, \quad (3.5)$$

где $e_1 = m$, а другие e_i таковы, что $(e_i, n) = 0$ и в остальном произвольны. Далее, возьмем линейно независимую систему векторов

$$h_1, \dots, h_l; \quad h_j = (h_j^1, \dots, h_j^l), \quad j = 1, \dots, l, \quad (3.6)$$

где $h_1 = g = (g^1, \dots, g^l) = g(x_0^1, \dots, x_0^k, y_0^1, \dots, y_0^l)$, а остальные h_j произвольны. Пусть вектор $x - x_0$ раскладывается по базису (3.5) с коэффициентами $\bar{\xi}^1, \dots, \bar{\xi}^k$, а вектор $y - y_0$ раскладывается по базису (3.6) с коэффициентами $\bar{\eta}^1, \dots, \bar{\eta}^l$:

$$x^i - x_0^i = \bar{\xi}^{\alpha} e_{\alpha}^i, \quad i = 1, \dots, k;$$

$$y^j - y_0^j = \bar{\eta}^{\beta} h_{\beta}^j, \quad j = 1, \dots, l. \quad (3.7)$$

Воспользовавшись соотношениями (3.1), (3.3), (3.4) и проведя очевидные преобразования, найдем, что в координатах $\bar{\xi}^1, \dots, \bar{\xi}^k, \bar{\eta}^1, \dots, \bar{\eta}^l$ система (1.1) запишется так:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{\bar{\xi}}^1 = p (\bar{\xi}^1)^2 + q \bar{\eta}^1 + \bar{b}_x^1 \bar{\eta}^{x'} + \bar{d}_1^1 (\bar{\xi}^1)^3 + \\ \quad + \bar{c}_x^1 \bar{\xi}^1 \bar{\eta}^{x'} + \bar{r}_\alpha^1 \bar{\xi}^1 \bar{\xi}^{\alpha'} + \dots, \\ \varepsilon \dot{\bar{\xi}}^i = \bar{a}_\alpha^i \bar{\xi}^{\alpha'} + \bar{b}_x^i \bar{\eta}^{x'} + \bar{c}_0^i (\bar{\xi}^1)^2 + \bar{d}_1^i (\bar{\xi}^1)^3 + \\ \quad + \bar{c}_x^i \bar{\xi}^1 \bar{\eta}^{x'} + \bar{r}_\alpha^i \bar{\xi}^1 \bar{\xi}^{\alpha'} + \dots, \quad i=2, \dots, k, \\ \dot{\bar{\eta}}^1 = 1 + \bar{g}_1^1 \bar{\xi}^1 + \dots, \\ \dot{\bar{\eta}}^j = \bar{g}_1^j \bar{\xi}^1 + \dots, \quad j=2, \dots, l. \end{cases} \quad (3.8)$$

Здесь, как нетрудно проверить,

$$\begin{aligned} p &= n_\gamma A_{\alpha\beta}^\gamma m_\alpha m^\beta, \quad q = n_\alpha B_x^\alpha g^x, \quad \bar{d}_1^1 = n_\delta A_{\alpha\beta\gamma}^\delta m^\alpha m^\beta m^\gamma, \\ \bar{b}_j^1 &= n_\alpha B_x^\alpha h_j^x, \quad j=2, \dots, l, \\ \bar{r}_i^1 &= 2n_\gamma A_{\alpha\beta}^\gamma m^\alpha e_i^\beta, \quad i=2, \dots, k, \end{aligned} \quad (3.9)$$

а $\bar{g}_1^j, j=1, \dots, l$, суть коэффициенты разложения вектора

$$\bar{h} = \|C_i^\alpha\| m, \quad \bar{h} = (\bar{h}^1, \dots, \bar{h}^l), \quad \bar{h}^j = C_i^\alpha m^\alpha,$$

по базису h_1, \dots, h_l . В формулах (3.8), как и всюду в дальнейшем, суммирование по штрихованному индексу начинается с двух, например:

$$\bar{a}_\alpha^i \bar{\xi}^{\alpha'} = \sum_{\alpha'=2}^k \bar{a}_\alpha^i \bar{\xi}^{\alpha'}; \quad \bar{b}_x^1 \bar{\eta}^{x'} = \sum_{x'=2}^l \bar{b}_x^1 \bar{\eta}^{x'}.$$

Заметим, что в первом из уравнений (3.8) коэффициенты при $\bar{\xi}^1, \dots, \bar{\xi}^k$ равны нулю. Далее, матрица

$$\left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ \cdot & & \|\bar{a}_{\alpha'}^{i'}\| & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \right\| \begin{array}{l} i'=2, \dots, k, \\ \alpha'=2, \dots, k \end{array}$$

подобна матрице (3.2), а потому все $k-1$ собственных значений матрицы $\|\bar{a}_{\alpha'}^{i'}\|$ имеют отрицательные действительные части.

В дальнейшем будем считать, что точка срыва S удовлетворяет следующему условию невырожденности:

$$p \neq 0, \quad q \neq 0.$$

Систему (3.8) можно еще несколько упростить. Положим

$$\begin{aligned} \bar{\xi}^1 &= p^{-2/3} q^{1/3} \xi^1, & \bar{\xi}^i &= \xi^i, \quad i = 2, \dots, k; \\ \bar{\eta}^1 &= p^{-1/3} q^{-1/3} \eta^1, & \bar{\eta}^j &= \eta^j, \quad j = 2, \dots, l; \\ \bar{t} &= p^{1/3} q^{1/3} t. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Тогда система (3.8) переписется в виде

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon \dot{\bar{\xi}}^1 &= (\bar{\xi}^1)^2 + \eta^1 + b_{\times}^1 \eta^{\times\prime} + d_1^1 (\bar{\xi}^1)^3 + \\ &+ c_{\times}^1 \bar{\xi}^1 \eta^{\times} + r_{\alpha}^1 \bar{\xi}^1 \bar{\xi}^{\alpha\prime} + \dots, \\ \varepsilon \dot{\bar{\xi}}^i &= a_{\alpha}^i \bar{\xi}^{\alpha\prime} + b_{\times}^i \eta^{\times} + c_0^i (\bar{\xi}^1)^2 + d_1^i (\bar{\xi}^1)^3 + \\ &+ c_{\times}^i \bar{\xi}^1 \eta^{\times} + r_{\alpha}^i \bar{\xi}^1 \bar{\xi}^{\alpha\prime} + \dots, \quad i = 2, \dots, k, \\ \dot{\bar{\eta}}^1 &= 1 + g_1^1 \bar{\xi}^1 + \dots, \\ \dot{\bar{\eta}}^j &= g_1^j \bar{\xi}^1 + \dots, \quad j = 2, \dots, l, \end{aligned} \right. \quad (3.11)$$

(здесь точкой обозначено дифференцирование по \bar{t}), где

$$\begin{aligned} b_j^1 &= \bar{b}_j^1 p^{1/3} q^{-2/3}, & g_1^j &= \bar{g}_1^j p^{-1}, \quad j = 2, \dots, l, \\ a_{\alpha}^i &= \bar{a}_{\alpha}^i p^{-1/3} q^{-1/3}, & c_0^i &= \bar{c}_0^i p^{-5/3} q^{1/3}, \quad i = 2, \dots, k, \\ d_1^1 &= \bar{d}_1^1 p^{-5/3} q^{1/3}, & r_{\alpha}^1 &= \bar{r}_{\alpha}^1 p^{-1/3} q^{-1/3}, \\ g_1^1 &= \bar{g}_1^1 p^{-2/3} q^{1/3}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Систему (3.11) назовем канонической формой системы (1.1) в окрестности точки срыва. Хотя в (3.11) точкой обозначается дифференцирование по \bar{t} , в дальнейшем для удобства мы вместо \bar{t} будем всюду писать t , а к истинному времени t (см. (3.10)) вернемся только в главе V. Для краткости правые части системы (3.11) обозначим соответственно через Φ^i , Ψ^j :

$$\begin{aligned} \Phi^1 &\equiv (\xi^1)^2 + \eta^1 + b_{\times}^1 \eta^{\times\prime} + c_{\times}^1 \xi^1 \eta^{\times} + d_1^1 (\xi^1)^3 + r_{\alpha}^1 \xi^1 \xi^{\alpha\prime} + \dots, \\ \Phi^i &\equiv a_{\alpha}^i \xi^{\alpha\prime} + b_{\times}^i \eta^{\times} + c_0^i (\xi^1)^2 + \dots, \quad i = 2, \dots, k, \\ \Psi^1 &\equiv 1 + g_1^1 \xi^1 + \dots, \\ \Psi^j &\equiv g_1^j \xi^1 + \dots, \quad j = 2, \dots, l. \end{aligned} \quad (3.13)$$

§ 4. Асимптотические приближения траектории в начале участка срыва

В малой конечной окрестности точки срыва S от системы (1.1) перейдем к системе (см. (3.13))

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{\xi}^i = \Phi^i(\xi^1, \dots, \xi^k, \eta^1, \dots, \eta^l), & i=1, \dots, k, \\ \dot{\eta}^j = \Psi^j(\xi^1, \dots, \xi^k, \eta^1, \dots, \eta^l), & j=1, \dots, l; \end{cases} \quad (4.1)$$

точка срыва расположена теперь в начале координат. Отрезок траектории \mathfrak{X}_ε , лежащий в этой окрестности, назовем *участком срыва*.

Наряду с системой (4.1) рассмотрим соответствующую ей вырожденную систему

$$\begin{cases} \Phi^i(\xi^1, \dots, \xi^k, \eta^1, \dots, \eta^l) = 0, & i=1, \dots, k, \\ \dot{\eta}^j = \Psi^j(\xi^1, \dots, \xi^k, \eta^1, \dots, \eta^l), & j=1, \dots, l. \end{cases} \quad (4.2)$$

Пусть

$$\xi^i = \xi_0^i(t), \quad i=1, \dots, k, \quad \eta^j = \eta_0^j(t), \quad j=1, \dots, l, \quad (4.3)$$

— ее решение, определенное на отрезке $-t_1 \leq t \leq 0$ и удовлетворяющее конечным условиям

$$\xi_0^i(0) = 0, \quad i=1, \dots, k, \quad \eta_0^j(0) = 0, \quad j=1, \dots, l;$$

функции (4.3) описывают в новых координатах участок траектории \mathfrak{X}_0 , примыкающий к точке срыва. Прежде всего вычислим траекторию решения (4.3), приняв вдоль нее за независимую переменную координату ξ^1 .

Непосредственно видно, что при $\xi^1 = \dots = \xi^k = \eta^1 = \dots = \eta^l = 0$ функциональный определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi^1}{\partial \eta^1} & \frac{\partial \Phi^1}{\partial \xi^2} & \dots & \frac{\partial \Phi^1}{\partial \xi^k} \\ \frac{\partial \Phi^2}{\partial \eta^1} & \frac{\partial \Phi^2}{\partial \xi^2} & \dots & \frac{\partial \Phi^2}{\partial \xi^k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Phi^k}{\partial \eta^1} & \frac{\partial \Phi^k}{\partial \xi^2} & \dots & \frac{\partial \Phi^k}{\partial \xi^k} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Поэтому из первых k соотношений (4.2) величины $\eta^1, \xi^2, \dots, \xi^k$ можно выразить через $\xi^1, \eta^2, \dots, \eta^l$. Легко проверить, что эти выражения имеют такой вид:

$$\begin{aligned} \eta^1 &= -(\xi^1)^2 + h^1(\xi^1, \eta^2, \dots, \eta^l), \\ \xi^i &= k^i(\xi^1)^2 + h^i(\xi^1, \eta^2, \dots, \eta^l), \quad i=2, \dots, k; \end{aligned} \quad (4.4)$$

здесь k^i — числовые коэффициенты, а функции h^1, \dots, h^k не содержат членов $a\xi^1$ и $b(\xi^1)^2$, где a и b — константы.

Дифференцируя по t первое из соотношений (4.4), получим

$$\dot{\eta}^1 = -2\xi^1 \dot{\xi}^1 + h_{\xi^1}^1 \dot{\xi}^1 + h_{\eta^{k'}}^1 \dot{\eta}^{k'},$$

откуда

$$\dot{\xi}^1 = \frac{\dot{\eta}^1 - h_{\eta^{k'}}^1 \dot{\eta}^{k'}}{-2\xi^1 + h_{\xi^1}^1}$$

или, подставляя сюда вместо $\dot{\eta}^1, \dot{\eta}^{k'}$ их значения из (4.1) и (3.13),

$$\dot{\xi}^1 = \frac{1 + g_1^1 \xi^1 + \dots - h_{\eta^{k'}}^1 (g_1^{k'} \xi^1 + \dots)}{-2\xi^1 + h_{\xi^1}^1}. \quad (4.5)$$

Далее, заменяя в уравнении (4.5) и в последних l уравнениях (4.2) величины $\eta^1, \xi^2, \dots, \xi^k$ их выражениями (4.4), приходим к следующей системе уравнений для $\xi^1, \eta^2, \dots, \eta^l$:

$$\begin{cases} \dot{\xi}^1 = \frac{1 + g_1^1 \xi^1 + \dots}{-2\xi^1 + \dots}, \\ \dot{\eta}^j = g_j^j \xi^1 + \dots, \quad j = 2, \dots, l; \end{cases} \quad (4.6)$$

здесь многоточием заменены выражения, не содержащие членов вида $a, b\xi^1$, где a и b — константы.

В достаточно малой конечной окрестности точки $\xi^1 = \eta^2 = \dots = \eta^l = 0$ правая часть первого из уравнений (4.6) положительна при $\xi^1 < 0$. Поэтому на участке $-\rho \leq \xi^1 \leq 0$, где ρ — достаточно малое, но не зависящее от ε число, можно принять за независимую переменную координату ξ^1 и вместо системы (4.6) рассматривать систему

$$\frac{d\eta^j}{d\xi^1} = \frac{-2g_j^j (\xi^1)^2 + \dots}{1 + g_1^1 \xi^1 + \dots}, \quad j = 2, \dots, l. \quad (4.7)$$

Решением системы (4.7), проходящим при $\xi^1 = 0$ через точку $\eta^2 = \dots = \eta^l = 0$, как нетрудно убедиться, будет

$$\eta_0^j(\xi^1) = -\frac{2}{3} g_j^j (\xi^1)^3 + \dots, \quad j = 2, \dots, l; \quad (4.8)$$

многоточием заменены более высокие степени ξ^1 . Подставляя выражения (4.8) в правые части равенств (4.4), находим разложения траектории решения (4.3) по степеням ξ^1 .

Выпишем их с точностью до членов третьей степени:

$$\begin{aligned} \xi_0^i(\xi^1) &= k^i (\xi^1)^2 + l^i (\xi^1)^3 + \dots, & i &= 2, \dots, k, \\ \eta_0^i(\xi^1) &= -(\xi^1)^2 + \\ &+ \left(\frac{2}{3} b_{\alpha}^1 g_{i'}^{\alpha'} + c_1^1 - d_1^1 - r_{\alpha}^1 k^{\alpha'} \right) (\xi^1)^3 + \dots, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\eta_0^j(\xi^1) = -\frac{2}{3} g_j^1 (\xi^1)^3 + \dots, \quad j = 2, \dots, l;$$

здесь l^i — константы.

Итак, траектория решения (4.3) вычислена; она определена на всем отрезке $-\rho \leq \xi^1 \leq 0$.

Возвратимся теперь к системе (4.1). В достаточно малой, но конечной окрестности начала координат U_0 за независимую переменную можно принять координату ξ^1 и вместо системы (4.1) рассмотреть систему

$$\begin{cases} \frac{d\xi^i}{d\xi^1} = \frac{\Phi^i(\xi^1, \dots, \xi^k, \eta^1, \dots, \eta^l)}{\Phi^1(\xi^1, \dots, \xi^k, \eta^1, \dots, \eta^l)}, & i = 2, \dots, k, \\ \frac{d\eta^j}{d\xi^1} = \varepsilon \frac{\Psi^j(\xi^1, \dots, \xi^k, \eta^1, \dots, \eta^l)}{\Phi^1(\xi^1, \dots, \xi^k, \eta^1, \dots, \eta^l)}, & j = 1, \dots, l. \end{cases} \quad (4.10)$$

Пусть

$$\begin{aligned} \xi^i &= \xi^i(\xi^1, \varepsilon), & i &= 2, \dots, k, \\ \eta^j &= \eta^j(\xi^1, \varepsilon), & j &= 1, \dots, l, \end{aligned} \quad (4.11)$$

— решение системы (4.10) с начальной (при $\xi^1 = -\rho$) точкой, лежащей в области U_0 и отстоящей от начальной (при $\xi^1 = -\rho$) точки траектории (4.9) на величину порядка ε . Это решение естественно попытаться приближенно представить в виде сумм

$$\xi^{i,N} = \xi_0^i(\xi^1) + \varepsilon \xi_1^i(\xi^1) + \dots + \varepsilon^N \xi_N^i(\xi^1), \quad i = 2, \dots, k, \quad (4.12)$$

$$\eta^{j,N} = \eta_0^j(\xi^1) + \varepsilon \eta_1^j(\xi^1) + \dots + \varepsilon^N \eta_N^j(\xi^1), \quad j = 1, \dots, l,$$

где функции $\xi_v^i(\xi^1)$, $\eta_v^j(\xi^1)$, $i=2, \dots, k$, $j=1, \dots, l$, $v=0, 1, \dots, N$, определяются из системы (4.10) подстановкой в нее выражений (4.12) и последующим приравниванием коэффициентов разложений при одинаковых степенях ε .

Оказывается, однако, что функции $\xi_v^i(\xi^1)$, $\eta_v^j(\xi^1)$ имеют в точке $\xi^1 = 0$ особенности типа степенных и логарифмических полюсов, причем тем более высокого порядка, чем

больше индекс ν . Поэтому от аппроксимации решения (4.11) суммами вида (4.12) на всем отрезке $-\rho \leq \xi^1 \leq 0$ приходится отказаться. Но мы можем поступить следующим образом (ср. с гл. II, §§ 6, 7): возьмем величину $\sigma_1 = \varepsilon^{\lambda_1}$ и подберем число $\lambda_1 > 0$ так, чтобы на отрезке $-\rho \leq \xi^1 \leq -\sigma_1$ каждое следующее приближение равномерно отличалось от предыдущего на величины более высокого порядка малости, чем фигурирующие в предыдущем приближении. Так как мы хотим провести вычисление траектории \mathfrak{F}_ε с точностью до величин порядка ε , то, как показывают дальнейшие расчеты, достаточно взять $\sigma_1 = \varepsilon^{2/7}$ и определить только первые и вторые приближения, т. е. вычислить суммы

$$\begin{aligned} \xi^{i,2} &= \xi_0^i(\xi^1) + \varepsilon \xi_1^i(\xi^1) + \varepsilon^2 \xi_2^i(\xi^1), \quad i = 2, \dots, k, \\ \eta^{j,2} &= \eta_0^j(\xi^1) + \varepsilon \eta_1^j(\xi^1) + \varepsilon^2 \eta_2^j(\xi^1), \quad j = 1, \dots, l. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Функции $\xi_0^i(\xi^1)$ и $\eta_0^j(\xi^1)$ уже найдены из решения вырожденной системы (4.2) и представляются формулами (4.9). Проведем вычисление функций $\xi_1^i(\xi^1)$, $i = 2, \dots, k$, и $\eta_1^j(\xi^1)$, $j = 1, \dots, l$.

Подставляя суммы (4.13) в правую и левую части уравнения

$$\frac{d\eta^1}{d\xi^1} = \varepsilon \frac{\Psi^1(\xi^\alpha, \eta^\alpha)}{\Phi^1(\xi^\alpha, \eta^\alpha)}$$

и приравнивая свободные члены в разложениях по степеням ε , находим

$$\frac{d\eta_0^1(\xi^1)}{d\xi^1} = \frac{\Psi^1(\xi^1, \xi_0^{\alpha'}(\xi^1), \eta_0^\alpha(\xi^1))}{\delta\Phi^1},$$

где

$$\begin{aligned} \delta\Phi^1 &= \frac{\partial}{\partial \xi^{\beta'}} [\Phi^1(\xi^1, \xi_0^{\alpha'}(\xi^1), \eta_0^\alpha(\xi^1))] \xi_1^{\beta'} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta^{\beta'}} [\Phi^1(\xi^1, \xi_0^{\alpha'}(\xi^1), \eta_0^\alpha(\xi^1))] \eta_1^{\beta'}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

откуда получаем

$$\delta\Phi^1 = \frac{1}{(\eta_0^1)'} \Psi^1(\xi^1, \xi_0^{\alpha'}(\xi^1), \eta_0^\alpha(\xi^1)). \quad (4.15)$$

В этих формулах мы прибегли к сокращенной записи совокупности аргументов, стоящих под знаками функций Φ^1 и Ψ^1 : вместо $(\xi^1, \dots, \xi^k, \eta^1, \dots, \eta^l)$ пишем $(\xi^\alpha, \eta^\alpha)$, вместо (ξ^2, \dots, ξ^k) пишем $(\xi^{\alpha'})$. Такие обозначения будут использоваться и в дальнейшем.

Далее, подставляя суммы (4.13) в правую и левую части последних $l-1$ уравнений (4.10) и приравнявая в разложениях по степеням ε свободные члены и коэффициенты при ε , после небольших вычислений получим

$$\frac{d\eta_0^j(\xi^1)}{d\xi^1} = \frac{\Psi^j(\xi^1, \xi_0^{\alpha'}(\xi^1), \eta_0^\kappa(\xi^1))}{\delta\Phi^1}, \quad (4.16)$$

$$\frac{d\eta_1^j(\xi^1)}{d\xi^1} = \frac{(\eta_0^j)'}{\Psi^1(\xi^1, \xi_0^{\alpha'}(\xi^1), \eta_0^\kappa(\xi^1))} [\delta\Psi^j - (\eta_0^j)' \delta^2\Phi^1].$$

Здесь через $\delta\Psi^j$ обозначен коэффициент при ε в разложении функции $\Psi^j(\xi^1, \xi^{\alpha' \cdot 2}, \eta^{\kappa \cdot 2})$, а через $\delta^2\Phi^1$ — коэффициент при ε^2 в разложении функции $\Phi^1(\xi^1, \xi^{\alpha' \cdot 2}, \eta^{\kappa \cdot 2})$. Так как

$$(\eta_0^j)' + \varepsilon(\eta_1^j)' = \frac{\Psi^1(\xi^1, \xi_0^{\alpha'}, \eta_0^\kappa) + \varepsilon\delta\Psi^1 + \dots}{\delta\Phi^1 + \varepsilon\delta^2\Phi^1 + \dots},$$

то $\delta\Psi^1 = (\eta_0^j)' \delta^2\Phi^1 + (\eta_1^j)' \delta\Phi^1$, а потому

$$\delta^2\Phi^1 = \frac{\delta\Psi^1 - (\eta_1^j)' \delta\Phi^1}{(\eta_0^j)'}. \quad (4.17)$$

Подставляя выражение (4.17) в равенство (4.16), после элементарных преобразований найдем

$$(\eta_1^j)' = \frac{1}{\Psi^1} [(\eta_0^j)' \delta\Psi^j - (\eta_0^j)' \delta\Psi^1] + \frac{(\eta_0^j)' (\eta_1^1)'}{(\eta_0^j)'}, \quad j = 2, \dots, l. \quad (4.18)$$

Аналогично, из первых $k-1$ уравнений (4.10) получаем $(\xi_0^i)' = \delta\Phi^i/\delta\Phi^1$, откуда, принимая во внимание (4.15),

$$\frac{\partial\Phi^i}{\partial\xi^{\beta'}} \xi_1^{\beta'} + \frac{\partial\Phi^i}{\partial\eta^{\phi}} \eta_1^{\phi} = (\xi_0^i)' \frac{\Psi^1(\xi^1, \xi_0^{\alpha'}, \eta_0^\kappa)}{(\eta_0^j)'}, \quad i = 2, \dots, k. \quad (4.19)$$

Кроме того, для $i=1$ имеем (см. (4.15), (4.14))

$$\frac{\partial\Phi^1}{\partial\xi^{\beta'}} \xi_1^{\beta'} + \frac{\partial\Phi^1}{\partial\eta^1} \eta_1^1 + \frac{\partial\Phi^1}{\partial\eta^{\phi'}} \eta_1^{\phi'} = \frac{\Psi^1(\xi^1, \xi_0^{\alpha'}, \eta_0^\kappa)}{(\eta_0^j)'}. \quad (4.20)$$

Положим

$$\frac{\partial\Phi^1}{\partial\eta^1} = 1 + B^1(\xi^1), \quad \frac{\partial\Phi^1}{\partial\xi^{\beta'}} = D_{\beta'}^1(\xi^1);$$

при этом очевидно, что $B^1(0) = 0$, $D_{\beta'}^1(0) = 0$. Объединяя соотношения (4.19), (4.20) и (4.18), получим следующую

систему уравнений для определения искомых функций $\xi_1^i(\xi^1), \dots, \xi_1^k(\xi^1), \eta_1^i(\xi^1), \dots, \eta_1^l(\xi^1)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi^i}{\partial \xi^{\beta'}} \xi_1^{\beta'} + \frac{\partial \Phi^i}{\partial \eta^{\vartheta}} \eta_1^{\vartheta} = (\xi_0^i)' \frac{\Psi^1}{(\eta_0^1)',} & i = 2, \dots, k, \\ (1 + B^1(\xi^1)) \eta_1^i = - \frac{\partial \Phi^1}{\partial \eta^{\vartheta}} \eta_1^{\vartheta} + D_{\beta'}^1(\xi^1) \xi_1^{\beta'} + \frac{\Psi^1}{(\eta_0^1)',} & (4.21) \\ (\eta_1^j)' = \frac{1}{\Psi^1} [(\eta_0^j)' \delta \Psi^j - (\eta_0^j)' \delta \Psi^1] + \frac{(\eta_0^j)' (\eta_1^j)'}{(\eta_0^1)',} & j = 2, \dots, l. \end{cases}$$

Первые k уравнений этой системы — конечные, последние $l-1$ уравнений — дифференциальные. Выражая из первых $k-1$ уравнений (4.21) функции $\xi_1^{\beta'}$, $\beta' = 2, \dots, k$, через η_1^{κ} , $\kappa = 1, \dots, l$, и подставляя полученные выражения

$$\xi_1^{\beta'} = G_{\kappa}^{\beta'}(\xi^1) \eta_1^{\kappa} + E^{\beta'}(\xi^1), \quad \beta' = 2, \dots, k, \quad (4.22)$$

в правые части последних $l-1$ уравнений (4.21), после очевидных вычислений найдем

$$(\eta_1^j)' = \tilde{N}^j(\xi^1) + \tilde{N}_{\vartheta}^j(\xi^1) \eta_1^{\vartheta} + \frac{(\eta_0^j)' (\eta_1^j)'}{(\eta_0^1)',}, \quad j = 2, \dots, l, \quad (4.23)$$

причем, как легко проверить,

$$\tilde{N}^j(0) = \tilde{N}_{\vartheta}^j(0) = 0, \quad j = 2, \dots, l, \quad \vartheta = 1, \dots, l.$$

Далее, подставляя выражения (4.22) в k -е уравнение (4.21), дифференцируя затем полученное соотношение по ξ^1 и подставляя найденное таким путем выражение для $(\eta_1^j)'$ в (4.23), приходим к системе уравнений для определения функций $\eta_1^2, \dots, \eta_1^l$:

$$(\eta_1^j)' = P^j(\xi^1) + N_{\vartheta}^j(\xi^1) \eta_1^{\vartheta} + Q_{\vartheta}^j(\xi^1) (\eta_1^{\vartheta})', \quad j = 2, \dots, l. \quad (4.24)$$

Здесь, как нетрудно видеть, функции

$$Q_{\vartheta}^j(\xi^1), \quad N_{\vartheta}^j(\xi^1), \quad j = 2, \dots, l, \quad \vartheta' = 2, \dots, l,$$

обращаются в нуль при $\xi^1 = 0$, а функции $P^j(\xi^1)$, $j = 2, \dots, l$, имеют при $\xi^1 = 0$ полюсы первого порядка и их главные члены суть соответственно $g_i^j/2\xi^1$.

Наличие полюсов первого порядка при $\xi^1 = 0$ у правых частей системы (4.24) наводит на мысль искать решение этой системы в виде

$$\eta_1^j = K^j(\xi^1) \ln |\xi^1| + L^j(\xi^1), \quad j = 2, \dots, l. \quad (4.25)$$

Подставляя выражение (4.25) в уравнение (4.24), получим

$$(K^j)' \ln |\xi^1| + \frac{K^j}{\xi^1} + (L^j)' = P^j + N_{\phi}^j K^{\phi'} \ln |\xi^1| + \\ + N_{\phi}^j L^{\phi'} + Q_{\phi}^j \left[(K^{\phi'})' \ln |\xi^1| + \frac{K^{\phi'}}{\xi^1} + (L^{\phi'})' \right].$$

Приравняв коэффициенты при $\ln |\xi^1|$, приходим к системе уравнений для определения функций $K^j(\xi^1)$:

$$(K^j)' = N_{\phi}^j K^{\phi'} + Q_{\phi}^j (K^{\phi'})', \quad j = 2, \dots, l;$$

кроме того, имеем естественные начальные условия $K^j(0) = g_1^j/2$. Таким образом, функции $K^j(\xi^1)$, $j = 2, \dots, l$, определяются однозначно. После этого из системы

$$(L^j)' = P^j - \frac{K^j}{\xi^1} + Q_{\phi}^j \frac{K^{\phi'}}{\xi^1} + N_{\phi}^j L^{\phi'} + Q_{\phi}^j (L^{\phi'})' \quad (4.26)$$

можно определить и функции $L^j(\xi^1)$, $j = 2, \dots, l$. Правда, мы не знаем для них начальных условий, однако правые части системы (4.26) не имеют в нуле особенностей и все функции $L^j(\xi^1)$ ограничены на отрезке $-\rho \leq \xi^1 \leq 0$.

Итак, можем записать, что

$$\eta_1^j(\xi^1) = \frac{g_1^j}{2} \ln |\xi^1| + O(1), \quad j = 2, \dots, l.$$

Здесь и дальше символ $O(1)$ заменяет члены, равномерно ограниченные на всем отрезке $-\rho \leq \xi^1 \leq 0$. Далее, из системы (4.21) непосредственно следует:

$$\eta_1^1(\xi^1) = -\frac{1}{2\xi_1^3} - \frac{1}{2} b_{1*}^1 g_1^{1*} \ln |\xi^1| + O(1);$$

$$\xi_1^i(\xi^1) = \frac{M^i}{\xi^1} + N^i \ln |\xi^1| + O(1), \quad i = 2, \dots, k,$$

где M^i и N^i — константы.

Вычисление функций $\xi_2^i(\xi^1)$, $i = 2, \dots, k$ и $\eta_2^j(\xi^1)$, $j = 1, \dots, l$, проводится аналогично. Мы опустим все промежуточные выкладки и выпишем лишь окончательный результат в форме, достаточной для вычисления решения (4.11) с точностью до величин порядка ε :

$$\eta_2^1(\xi^1) = -\frac{1}{8(\xi^1)^4} + \delta^1(\xi^1),$$

$$\eta_2^j(\xi^1) = \delta^j(\xi^1), \quad j = 2, \dots, l,$$

$$\xi_2^i(\xi^1) = \frac{q^i}{(\xi^1)^4} + \gamma^i(\xi^1), \quad i = 2, \dots, k.$$

Здесь q^i — числовые коэффициенты, а функции $\delta^j(\xi^1)$, $j=1, \dots, l$, $\gamma^i(\xi^1)$, $i=2, \dots, k$, хотя и неограничены при $\xi^1 \rightarrow 0$, но таковы, что равномерно на отрезке $-\rho \leq \xi^1 \leq -\sigma_1$, где $\sigma_1 = \varepsilon^{2/7}$, величины $\varepsilon^2 \delta^j(\xi^1)$ и $\varepsilon^2 \gamma^i(\xi^1)$ суть величины порядка $o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Таким образом, мы вычислили нулевое, первое и второе формальные приближения решения (4.11). Тот факт, что каждое из этих формальных приближений действительно представляет решение (4.11) на отрезке $-\rho \leq \xi^1 \leq -\sigma_1$ с точностью до величин более высокого порядка малости, требует, конечно, специального доказательства. Такое доказательство можно провести (см. [40]) по аналогии с двумерным случаем, разобранным в главе II, § 7. Здесь же мы ограничимся лишь формулировкой следующего утверждения.

Теорема XVII. *На отрезке $-\rho \leq \xi^1 \leq -\varepsilon^{2/7}$ решение (4.11) представимо в виде*

$$\begin{aligned} \xi^i &= \xi_0^i(\xi^1) + \varepsilon \xi_1^i(\xi^1) + \varepsilon^2 \xi_2^i(\xi^1) + \mathfrak{R}^i(\xi^1, \varepsilon) \equiv \\ &\equiv k^i(\xi^1)^2 + l^i(\xi^1)^3 + \dots + \varepsilon \left(\frac{M^i}{\xi^1} + N^i \ln |\xi^1| \right) + \\ &\quad + \varepsilon^2 \frac{q^i}{(\xi^1)^4} + \mathfrak{R}^i(\xi^1, \varepsilon), \quad i=2, \dots, k, \\ \eta^1 &= \eta_0^1(\xi^1) + \varepsilon \eta_1^1(\xi^1) + \varepsilon^2 \eta_2^1(\xi^1) + \mathfrak{C}^1(\xi^1, \varepsilon) \equiv \\ &\equiv -(\xi^1)^2 + \left(\frac{2}{3} b_{\kappa}^1 g_{\kappa}^{\kappa'} + c_1^1 - d_1^1 - r_{\alpha}^1 k^{\alpha'} \right) (\xi^1)^3 + \dots \quad (4.27), \\ &\quad \dots + \varepsilon \left(-\frac{1}{2\xi^1} - \frac{1}{2} b_{\kappa}^1 g_{\kappa}^{\kappa'} \ln |\xi^1| \right) + \\ &\quad + \varepsilon^2 \frac{-1}{8(\xi^1)^4} + \mathfrak{C}^1(\xi^1, \varepsilon), \\ \eta^j &= \eta_0^j(\xi^1) + \varepsilon \eta_1^j(\xi^1) + \mathfrak{C}^j(\xi^1, \varepsilon) \equiv \\ &\equiv -\frac{2}{3} g_1^j (\xi^1)^3 + \dots + \varepsilon \frac{g_1^j}{2} \ln |\xi^1| + \mathfrak{C}^j(\xi^1, \varepsilon), \quad j=2, \dots, l, \end{aligned}$$

где многоточием заменены члены степени $(\xi^1)^4$ и выше, а функции $\mathfrak{R}^i(\xi^1, \varepsilon)$, $i=2, \dots, k$, $\mathfrak{C}^j(\xi^1, \varepsilon)$, $j=1, \dots, l$, имеют на всем отрезке $-\rho \leq \xi^1 \leq -\varepsilon^{2/7}$ величину порядка ε или выше.

§ 5. Асимптотические приближения траектории в непосредственной близости от точки срыва

Проведем вычисление решения (4.11) на отрезке $-\sigma_1 \leq \xi^1 \leq \sigma_2$, где $\sigma_2 = \varepsilon^{2/9}$ (напомним, что $\sigma_1 = \varepsilon^{2/7}$). Мы увидим, что здесь оно значительно сильнее отклоняется от соответствующего решения вырожденной системы — на величины порядка $\varepsilon^{2/3}$ и $\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$.

Прежде всего сделаем замену переменных (ср. с гл. II, § 8)

$$\begin{aligned} \xi^1 &= \mu u^1, & \xi^i &= \mu^2 u^i, & i &= 2, \dots, k, \\ \eta^1 &= \mu v^1, & \eta^j &= \mu^3 v^j, & j &= 2, \dots, l, \\ t &= \mu^2 \tau, & \mu^3 &= \varepsilon \end{aligned} \quad (5.1)$$

и будем рассматривать μ как новый малый параметр.

Введенное здесь время τ является быстрым: при $\mu \rightarrow 0$ конечному отрезку изменения t соответствует бесконечно большой промежуток изменения τ . Формулы (5.1) устанавливают взаимно однозначное соответствие между малой конечной окрестностью U_0 начала координат пространства $(\xi^1, \dots, \xi^k, \eta^1, \dots, \eta^l)$ и бесконечно большой (при $\varepsilon \rightarrow 0$) областью U_0^* пространства $(u^1, \dots, u^k, v^1, \dots, v^l)$; геометрически они означают растяжения вдоль каждой из осей ξ, η , причем коэффициенты растяжения различны, но тем больше, чем меньше параметр ε .

Замена (5.1) приводит систему (4.1) к следующему виду:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{u}^1 &= (u^1)^2 + v^1 + \\ &+ \mu [b_{\alpha}^1 v^{\alpha} + c_1^1 u^1 v^1 + d_1^1 (u^1)^3 + r_{\alpha}^1 u^1 u^{\alpha}] + \dots, \\ \mu \dot{u}^i &= a_{\alpha}^i u^{\alpha} + b_1^i v^1 + c_0^i (u^1)^2 + \\ &+ \mu [b_{\alpha}^i v^{\alpha} + d_1^i (u^1)^3 + c_1^i u^1 v^1 + r_{\alpha}^i u^1 u^{\alpha}] + \dots, & i=2, \dots, k, \\ v^1 &= 1 + \mu g_1^1 u^1 + \dots, \\ v^j &= g_1^j u^1 + \dots, & j=2, \dots, l \end{aligned} \right. \quad (5.2)$$

(здесь точкой обозначено дифференцирование уже по τ), или, если ввести новые обозначения для правых частей системы (5.2),

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{u}^1 &= \varphi^1(u^{\alpha}, v^{\alpha}, \mu), \\ \mu \dot{u}^i &= \varphi^i(u^{\alpha}, v^{\alpha}, \mu), & i=2, \dots, k, \\ v^j &= \psi^j(u^{\alpha}, v^{\alpha}, \mu), & j=1, \dots, l. \end{aligned} \right. \quad (5.3)$$

Приняв координату u^1 за независимую переменную, вместо системы (5.3) будем рассматривать систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \frac{du^i}{du^1} = \frac{\varphi^i(u^\alpha, v^\alpha, \mu)}{\varphi^1(u^\alpha, v^\alpha, \mu)}, \quad i=2, \dots, k, \\ \frac{dv^j}{du^1} = \frac{\psi^j(u^\alpha, v^\alpha, \mu)}{\varphi^1(u^\alpha, v^\alpha, \mu)}, \quad j=1, \dots, l, \end{array} \right. \quad (5.4)$$

которая получается из системы (4.10) в результате замены (5.1). Решение системы (5.4), соответствующее (при замене (5.1)) участку решения (4.11)_а для $\xi^1 \geq -\sigma_1$, естественно попытаться приближенно представить в виде сумм

$$\begin{aligned} u^{i,N} &= u_0^i(u^1) + \mu u_1^i(u^1) + \dots + \mu^N u_N^i(u^1), \quad i=2, \dots, k, \\ v^{j,N} &= v_0^j(u^1) + \mu v_1^j(u^1) + \dots + \mu^N v_N^j(u^1), \quad j=1, \dots, l, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где функции

$$u_\nu^i(u^1), v_\nu^j(u^1), \quad i=2, \dots, k, \quad j=1, \dots, l, \quad \nu=0, 1, \dots, N,$$

определяются из системы (5.4) подстановкой в нее выражений (5.5) и последующим приравниванием коэффициентов разложений при одинаковых степенях μ .

Таким путем для указанных функций получаются дифференциальные уравнения, и первая трудность заключается в том, чтобы из множества решений этих уравнений выбрать вполне определенные (с аналогичной ситуацией мы уже сталкивались в гл. II, § 10). Необходимые начальные условия для выделения определенных частных решений будем искать из условия «стыковки» приближений (5.5) с функциями (4.27) в точке $u^1 = -\sigma_1/\mu$ (т. е. $\xi^1 = -\sigma_1$) с искомой степенью точности. Оказывается, однако, что почти все функции $u_\nu^i(u^1)$, $v_\nu^j(u^1)$ неограниченно возрастают при $u^1 \rightarrow +\infty$. Поэтому от аппроксимации вычисляемого решения суммами вида (5.5) на всем отрезке $-\sigma_1 \leq \xi^1 \leq \rho$ (т. е. $-\sigma_1/\mu \leq u^1 \leq \rho/\mu$) приходится отказаться. Мы поступим следующим образом (ср. с гл. II, §§ 10, 11): возьмем величину $\sigma_2 = \varepsilon^{\lambda_2}$ и подберем число $\lambda_2 > 0$ так, чтобы на отрезке $-\sigma_1/\mu \leq u^1 \leq \sigma_2/\mu$ (т. е. $-\sigma_1 \leq \xi^1 \leq \sigma_2$) обеспечивалось равномерное асимптотическое приближение искомой точности. Так как мы хотим провести вычисление траектории \mathfrak{L}_ε с точностью до ε величин порядка ε , то, как показывают

дальнейшие расчеты, достаточно взять $\sigma_2 = \varepsilon^{2/9}$ и определить только нулевые и первые приближения.

Начнем с вычисления функций $u_0^i(u^1)$, $i = 2, \dots, k$, $v_0^j(u^1)$, $j = 1, \dots, l$, описывающих нулевое приближение. Для них сразу получается система уравнений, являющаяся вырожденной по отношению к системе (5.4):

$$\begin{cases} \alpha_{\alpha'}^i, u^{\alpha'} + b_1^i v^1 + c_0^i (u^1)^2 = 0, & i = 2, \dots, k, \\ \frac{dv^1}{du^1} = \frac{1}{(u^1)^2 + v^1}, \\ \frac{dv^j}{du^1} = \frac{g_1^j u^1}{(u^1)^2 + v^1}, & j = 2, \dots, l. \end{cases} \quad (5.6)$$

В этой системе k -е уравнение независимо и приводится к уравнению Риккати (см. гл. II, § 9). В качестве $v_0^1(u^1)$ возьмем функцию (II.9.8), связанную с разделяющим решением уравнения Риккати. Напомним нужные в дальнейшем формулы:

$$\begin{aligned} v_0^1(u^1) &= -(u^1)^2 + z_0(u^1), \quad -\infty < u^1 \leq 0, \\ z_0(u^1)^- &= -\frac{1}{2u^1} - \frac{1}{8(u^1)^4} + O\left(\frac{1}{(u^1)^7}\right), \\ v_0^1(u^1)^+ &= \Omega_0 - \frac{1}{u^1} + O\left(\frac{1}{(u^1)^3}\right), \quad \Omega_0 = \lim_{u^1 \rightarrow \infty} v_0^1(u^1). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Определив функцию $v_0^1(u^1)$, из последних $l-1$ уравнений (5.6) найдем

$$v_0^j(u^1) = g_1^j \int \frac{u^1 du^1}{(u^1)^2 + v_0^1(u^1)}, \quad j = 2, \dots, l.$$

Мы видим, что функции $v_0^j(u^1)$ находятся с точностью до аддитивных констант. Выберем эти функции вполне определенным образом, а именно:

$$v_0^j(u^1) = g_1^j \int_0^{u^1} \frac{u^1 du^1}{(u^1)^2 + v_0^1(u^1)} - \frac{g_1^j}{2} \ln \frac{1}{\mu}, \quad j = 2, \dots, l. \quad (5.8)$$

Учитывая формулы (5.7), после элементарных вычислений найдем асимптотические представления для функций (5.8):

$$\begin{aligned} v_0^i(u^1)^- &= -\frac{2}{3} g_1^i (u^1)^3 + \frac{g_1^i}{2} \ln |u^1| - \frac{g_1^i}{2} \ln \frac{1}{\mu} + O(1), \\ v_0^i(u^1)^+ &= g_1^i \ln u^1 - \frac{g_1^i}{2} \ln \frac{1}{\mu} + O(1), \quad j = 2, \dots, l. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Теперь из первых $k-1$ уравнений системы (5.6), которые являются конечными, однозначно определяются функции $u_0^i(u^1)$, $i=2, \dots, k$. Проведя небольшие вычисления, получим для них асимптотические представления:

$$\begin{aligned} u_0^i(u^1)^- &= k^i (u^1)^2 + \frac{M^i}{u^1} + \frac{q^i}{(u^1)^4} + O\left(\frac{1}{(u^1)^7}\right), \\ u_0^i(u^1)^+ &= \Omega_0^i (u^1)^2 + s_0^i + \frac{n_0^i}{u^1} + O\left(\frac{1}{(u^1)^3}\right), \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$i=2, \dots, k,$$

где Ω_0^i , s_0^i , n_0^i — числовые коэффициенты.

Перейдем к вычислению следующего формального приближения

$$\begin{aligned} u^{i,1} &= u_0^i(u^1) + \mu u_1^i(u^1), \quad i=2, \dots, k, \\ v^{j,1} &= v_0^j(u^1) + \mu v_1^j(u^1), \quad j=1, \dots, l, \end{aligned} \quad (5.11)$$

т. е. к определению функций $u_1^i(u^1)$, $i=2, \dots, k$ и $v_1^j(u^1)$, $j=1, \dots, l$.

Подставляя суммы (5.11) в правую и левую части уравнения

$$\frac{dv^1}{du^1} = \frac{\psi^1(u^\alpha, v^\alpha, \mu)}{\varphi^1(u^\alpha, v^\alpha, \mu)}$$

и приравнявая коэффициенты при μ в разложениях по степеням μ , получим линейное дифференциальное уравнение для функции $v_1^1(u^1)$:

$$\frac{dv_1^1}{du^1} + \frac{v_1^1}{[(u^1)^2 + v_0^1(u^1)]^2} = \mathcal{H}_1(u^1) + \frac{b_{\alpha'}^1 g_1^{\alpha'}}$$

$$2 [(u^1)^2 + v_0^1(u^1)]^2 \ln \frac{1}{\mu},$$

где

$$\mathcal{H}_1(u^1) = \frac{g_1^1 u^1 [(u^1)^2 + v_0^1(u^1)] - b_{\alpha'}^1 \tilde{v}_0^{\alpha'}(u^1)}{[(u^1)^2 + v_0^1(u^1)]^2} - \frac{c_1^1 u^1 v_0^1(u^1) + d_1^1 (u^1)^3 + r_{\alpha'}^1 u^1 u_0^{\alpha'}(u^1)}{[(u^1)^2 + v_0^1(u^1)]^2},$$

$$\tilde{v}_0^{\alpha'}(u^1) = g_1^{\alpha'} \int_0^{u^1} \frac{u^1 du^1}{(u^1)^2 + v_0^1(u^1)}, \quad \alpha' = 2, \dots, l.$$

Это уравнение не зависит от функций $v_1^2, \dots, v_1^l, u_1^2, \dots, u_1^k$ и может быть решено отдельно. В качестве

функции $v_1^1(u^1)$ возьмем следующее его частное решение:

$$v_1^1(u^1) = \mathcal{M}(u^1) \int_{-\infty}^{u^1} \frac{\mathcal{H}_1(\theta)}{\mathcal{M}(\theta)} d\theta + \frac{1}{2} b_{\alpha}^1 g_1^{\alpha'} \ln \frac{1}{\mu}, \quad (5.12)$$

где (см. (II.10.11))

$$\mathcal{M}(u^1) = \exp \int_{u^1}^{\infty} \frac{d\theta}{[\theta^2 + v_0^1(\theta)]^2}.$$

Из формулы (5.12), учитывая асимптотические представления (II.11.3), (II.11.4), (5.7), (5.9) и (5.10), легко найти асимптотические представления для функции $v_1^1(u^1)$:

$$v_1^1(u^1)^- = \left(\frac{2}{3} b_{\alpha}^1 g_1^{\alpha'} + c_1^1 - d_1^1 - r_{\alpha}^1 k^{\alpha'} \right) (u^1)^3 - \\ - \frac{1}{2} b_{\alpha}^1 g_1^{\alpha'} \ln |u^1| + \frac{1}{2} b_{\alpha}^1 g_1^{\alpha'} \ln \frac{1}{\mu} + O(1), \quad (5.13)$$

$$v_1^1(u^1)^+ = (g_1^1 - d_1^1 - r_{\alpha}^1 \Omega_0^{\alpha'}) \ln u^1 + \frac{1}{2} b_{\alpha}^1 g_1^{\alpha'} \ln \frac{1}{\mu} + O(1). \dagger$$

Зная функцию $v_1^1(u^1)$, можно однозначно определить функции $u_1^i(u^1)$, $i=2, \dots, k$. Для этого подставим суммы (5.11) в правую и левую части первых $k-1$ уравнений (5.4) и приравняем коэффициенты при μ в разложениях по степеням μ :

$$(u_0^i)' [(u^1)^2 + v_0^1] = a_{\alpha}^i u_1^{\alpha'} + b_1^i v_1^1 + b_{\alpha}^i v_0^{\alpha'} + \\ + d_1^i (u^1)^3 + c_1^i u^1 v_0^1 + r_{\alpha}^i u^1 u_0^{\alpha'}, \quad i=2, \dots, k.$$

Это — система линейных алгебраических уравнений с отличным от нуля детерминантом. Решив ее, найдем функции $u_1^i(u^1)$, $i=2, \dots, k$. Их явные выражения в дальнейшем не потребуются, а нужны будут лишь асимптотические представления при больших отрицательных и больших положительных значениях u^1 . Такие представления нетрудно получить, привлекая формулы (5.7), (5.9), (5.10), (5.13):

$$u_1^i(u^1)^- = l^i (u^1)^3 + N^i \ln |u^1| - N^i \ln \frac{1}{\mu} + O(1), \\ u_1^i(u^1)^+ = \omega_1^i (u^1)^3 + s_1^i \ln u^1 + n_1^i \ln \frac{1}{\mu} + O(1), \quad (5.14) \\ i=2, \dots, k,$$

где ω_1^i , s_1^i , n_1^i — числовые коэффициенты.

Таким образом, мы вычислили следующее формальное приближение решений системы (5.4):

$$\begin{aligned} u^i &= u_0^i(u^1) + \mu u_1^i(u^1), \quad i = 2, \dots, k, \\ v^j &= v_0^j(u^1) + \mu v_1^j(u^1), \quad v^j = v_0^j(u^1), \quad j = 2, \dots, l. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Обратим внимание, что функции (см. 5.5) $v_1^2(u^1), \dots, \dots, v_1^l(u^1)$ не определялись. Это объясняется тем, что уже приближение (5.15) обеспечивает искомую точность «стыковки» с решением (4.27) в точке $\xi^1 = -\sigma_1$.

В самом деле, в координатах $\xi^1, \dots, \xi^k, \eta^1, \dots, \eta^l$ приближение (5.15) запишется так (см. (5.1)):

$$\begin{aligned} \xi^i &= \varepsilon^2 {}^3u_0^i(\xi^1/\mu) + \varepsilon u_1^i(\xi^1/\mu), \quad i = 2, \dots, k, \\ \eta^1 &= \varepsilon^2 {}^3v_0^1(\xi^1/\mu) + \varepsilon v_1^1(\xi^1/\mu), \\ \eta^j &= \varepsilon v_0^j(\xi^1/\mu), \quad j = 2, \dots, l. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Пользуясь асимптотическими представлениями функций

$$\begin{aligned} u_0^i(u^1), \quad u_1^i(u^1), \quad i = 2, \dots, k, \\ v_0^j(u^1), \quad v_1^j(u^1), \quad v_0^l(u^1), \quad j = 2, \dots, l, \end{aligned} \quad (5.17)$$

для больших отрицательных u^1 (см. (5.7), (5.9), (5.10), (5.13), (5.14)), нетрудно найти значения сумм (5.16) при $\xi^1 = -\sigma_1$ с точностью до величин порядка ε :

$$\begin{aligned} \xi^i &= k^i \sigma_1^2 - l^i \sigma_1^3 + \varepsilon \left(-\frac{M^i}{\sigma_1} + N^i \ln \sigma_1 \right) + \\ &\quad + \varepsilon^2 \frac{q^i}{\sigma_1^4} + O(\varepsilon), \quad i = 2, \dots, k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta^1 &= -\sigma_1^2 - \left(\frac{2}{3} b_{\alpha'}^1 g_1^{\alpha'} + c_1^1 - d_1^1 - r_{\alpha'}^1 k^{\alpha'} \right) \sigma_1^3 + \\ &\quad + \varepsilon \left(\frac{1}{2\sigma_1} - \frac{1}{2} b_{\alpha'}^1 g_1^{\alpha'} \ln \sigma_1 \right) + \varepsilon^2 \frac{-1}{8\sigma_1^4} + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

$$\eta^j = \frac{2}{3} g_1^j \sigma_1^3 + \varepsilon \frac{g_1^j}{2} \ln \sigma_1 + O(\varepsilon), \quad j = 2, \dots, l.$$

Сравнивая эти выражения с выражениями, получающимися из формул (4.27) при $\xi^1 = -\sigma_1$, где $\sigma_1 = \varepsilon^{2/7}$, непосредственно убеждаемся, что они действительно совпадают с точностью до величин порядка ε .

Тот факт, что формально построенное приближение (5.15) в самом деле дает асимптотическое приближение решений системы (5.4) на отрезке $-\sigma_1/\mu \leq u^1 \leq \sigma_2/\mu$,

где $\sigma_2 = \varepsilon^{2/9}$, с точностью до величин порядка ε , нуждается в специальном доказательстве. Такое доказательство можно провести (см. [40]) по аналогии с двумерным случаем, разобранным в главе II, § 11; здесь же мы это доказательство опустим.

Теорема XVIII. *На отрезке $-\varepsilon^{2/7} \leq \xi^1 \leq \varepsilon^{2/9}$ решение (4.11) представимо в виде*

$$\begin{aligned} \xi^i &= \varepsilon^{2/3} u_0^i(\xi^1/\mu) + \varepsilon u_1^i(\xi^1/\mu) + \mathfrak{R}^i(\xi^1, \varepsilon), \quad i=2, \dots, k, \\ \eta^1 &= \varepsilon^{2/3} v_0^1(\xi^1/\mu) + \varepsilon v_1^1(\xi^1/\mu) + \mathfrak{C}^1(\xi^1, \varepsilon), \\ \eta^j &= \varepsilon v_0^j(\xi^1/\mu) + \mathfrak{C}^j(\xi^1, \varepsilon), \quad j=2, \dots, l, \end{aligned} \quad (5.18)$$

где $\mu^3 = \varepsilon$, а функции $\mathfrak{R}^i(\xi^1, \varepsilon)$, $i=2, \dots, k$, $\mathfrak{C}^j(\xi^1, \varepsilon)$, $j=1, \dots, l$, имеют на всем отрезке $-\varepsilon^{2/7} \leq \xi^1 \leq \varepsilon^{2/9}$ величину порядка ε или выше.

§ 6. Асимптотические приближения траектории в конце участка срыва

Проведем вычисление решения (4.11) на отрезке $\sigma_2 \leq \xi^1 \leq \rho$, где ρ — малое, но конечное число (напомним, что $\sigma_2 = \varepsilon^{2/9}$). Мы увидим, что в конце участка срыва, т. е. на конечном расстоянии от поверхности Γ , траектория \mathfrak{T}_ε действительно представима в виде (2.2).

На отрезке $\sigma_2 \leq \xi^1 \leq \rho$ функции (4.11) являются решением невырожденной системы (4.10). Пусть

$$\xi^i = \tilde{\xi}_0^i(\xi^1), \quad i=2, \dots, k, \quad \eta^j = \tilde{\eta}_0^j(\xi^1), \quad j=1, \dots, l, \quad (6.1)$$

— решение соответствующей вырожденной системы

$$\begin{cases} \frac{d\xi^i}{d\xi^1} = \frac{\Phi^i(\xi^1, \eta^1)}{\Phi^1(\xi^1, \eta^1)}, & i=2, \dots, k, \\ \frac{d\eta^j}{d\xi^1} = 0, & j=1, \dots, l, \end{cases} \quad (6.2)$$

определенное на промежутке $0 < \xi^1 \leq \rho$ и удовлетворяющее начальным условиям

$$\lim_{\xi^1 \rightarrow 0} \tilde{\xi}_0^i(\xi^1) = 0, \quad i=2, \dots, k, \quad \tilde{\eta}_0^j(0) = 0, \quad j=1, \dots, l;$$

функции (6.1) описывают участок траектории \mathfrak{T}_0 , выходящий из точки срыва (начала координат). Непосредственно из системы (6.2) получаем, что

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}_0^i(\xi^1) &= \Omega_0^i(\xi^1)^2 + \dots, \quad i=2, \dots, k, \\ \tilde{\eta}_0^j(\xi^1) &= 0, \quad j=1, \dots, l; \end{aligned} \quad (6.3)$$

многоточием здесь заменены члены более высокой степени

по ξ^1 , а константы Ω_0^i (см. (5.10)) удовлетворяют алгебраической системе

$$a_{\alpha'}^i \Omega_0^{\alpha'} + c_0^i = 0, \quad i = 2, \dots, k. \quad (6.4)$$

Решение (4.11) при $\xi^1 \geq \sigma_2$ попытаемся приближенно представить в виде сумм

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^{i,3} &= \tilde{\xi}_0^i(\xi^1) + \tilde{\xi}_1^i(\xi^1) \varepsilon^{2/3} + \tilde{\xi}_2^i(\xi^1) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \tilde{\xi}_3^i(\xi^1) \varepsilon, \\ & \quad i = 2, \dots, k, \\ \tilde{\eta}^{j,3} &= \tilde{\eta}_0^j(\xi^1) + \tilde{\eta}_1^j(\xi^1) \varepsilon^{2/3} + \tilde{\eta}_2^j(\xi^1) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \tilde{\eta}_3^j(\xi^1) \varepsilon, \\ & \quad j = 1, \dots, l, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где функции

$$\tilde{\xi}_v^i(\xi^1), \quad \tilde{\eta}_v^j(\xi^1), \quad i = 2, \dots, k, \quad j = 1, \dots, l, \quad v = 0, 1, 2, 3,$$

определяются из системы (4.10) подстановкой в нее выражений (6.5) и последующим приравнованием соответствующих коэффициентов разложений. Необходимые начальные условия будем искать из условия «стыковки» приближений (6.5) с функциями (5.18) в точке $\xi^1 = \sigma_2$ (т. е. $u^1 = \sigma_2/\mu$) с искомой степенью точности. Так как мы хотим провести вычисление траектории \mathfrak{Z}_ε с точностью до величин порядка ε , то, как показывают дальнейшие расчеты, достаточно определить только выписанные в (6.5) функции.

Функции $\tilde{\xi}_0^i(\xi^1)$ и $\tilde{\eta}_0^j(\xi^1)$ уже найдены из решения вырожденной системы (6.2) и представляются формулами (6.3). Проведем вычисление функций $\tilde{\eta}_v^j(\xi^1)$, $j = 1, \dots, l$, $v = 1, 2, 3$. Предварительно по формулам (5.18) с помощью асимптотических представлений функций (5.17) для больших положительных u^1 получим значение решения (4.11) при $\xi^1 = \sigma_2$ с точностью до величин порядка ε :

$$\begin{aligned} \xi^i &= \Omega_0^i \sigma_2^2 + s_0^i \varepsilon^{2/3} + \omega_1^i \sigma_2^3 + n_0^i \frac{\varepsilon}{\sigma_2} + \\ & \quad + \frac{s_1^i + n_1^i}{3} \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + s_1^i \varepsilon \ln \sigma_2 + O(\varepsilon), \quad i = 2, \dots, k, \\ \eta^1 &= \Omega_0 \varepsilon^{2,3} - \frac{\varepsilon}{\sigma_2} + \\ & \quad + \frac{1}{3} \left(g_1^1 - d_1^1 - r_{\alpha'}^1 \Omega_0^{\alpha'} + \frac{1}{2} b_{\alpha'}^1 g_1^{\alpha'} \right) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \\ & \quad + (g_1^1 - d_1^1 - r_{\alpha'}^1 \Omega_0^{\alpha'}) \varepsilon \ln \sigma_2 + O(\varepsilon), \\ \eta^j &= \frac{1}{6} g_1^j \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + g_1^j \varepsilon \ln \sigma_2 + O(\varepsilon), \quad j = 2, \dots, l. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Подставляя суммы (6.5) в правую и левую части последних l уравнений системы (4.10) и приравнявая в разложениях коэффициенты при членах одного порядка малости, приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}(\tilde{\eta}_1^1)' &= 0, & (\tilde{\eta}_2^1)' &= 0, \\(\tilde{\eta}_3^1)' &= \frac{\Psi^1(\xi^1, \tilde{\xi}_0^{\alpha'}(\xi^1), \tilde{\eta}_0^{\alpha'}(\xi^1))}{\Phi^1(\xi^1, \tilde{\xi}_0^{\alpha'}(\xi^1), \tilde{\eta}_0^{\alpha'}(\xi^1))}; \\(\tilde{\eta}_1^j)' &= 0, & (\tilde{\eta}_2^j)' &= 0, \\(\tilde{\eta}_3^j)' &= \frac{\Psi^j(\xi^1, \tilde{\xi}_0^{\alpha'}(\xi^1), \tilde{\eta}_0^{\alpha'}(\xi^1))}{\Phi^j(\xi^1, \tilde{\xi}_0^{\alpha'}(\xi^1), \tilde{\eta}_0^{\alpha'}(\xi^1))}, & j=2, \dots, l.\end{aligned}\quad (6.7)$$

Соотношения (6.3) и (3.13) позволяют легко подсчитать, что при $\xi^1 \rightarrow +0$

$$\begin{aligned}\frac{\Psi^1(\xi^1, \tilde{\xi}_0^{\alpha'}(\xi^1), \tilde{\eta}_0^{\alpha'}(\xi^1))}{\Phi^1(\xi^1, \tilde{\xi}_0^{\alpha'}(\xi^1), \tilde{\eta}_0^{\alpha'}(\xi^1))} &= \frac{1}{(\xi^1)^2} + \frac{g_1^1 - d_1^1 - r_{\alpha'}^1 \Omega_0^{\alpha'}}{\xi^1} + O(1), \\ \frac{\Psi^j(\xi^1, \tilde{\xi}_0^{\alpha'}(\xi^1), \tilde{\eta}_0^{\alpha'}(\xi^1))}{\Phi^j(\xi^1, \tilde{\xi}_0^{\alpha'}(\xi^1), \tilde{\eta}_0^{\alpha'}(\xi^1))} &= \frac{g_j^1}{\xi^1} + O(1), \quad j=2, \dots, l.\end{aligned}$$

Отсюда видно, что решения уравнений (6.7) на промежутке $0 < \xi^1 \leq \rho$ можно записать в виде (см. гл. II, § 13)

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_1^1(\xi^1) &= K_1^1, & \tilde{\eta}_2^1(\xi^1) &= K_2^1, \\ \tilde{\eta}_3^1(\xi^1) &= -\frac{1}{\xi^1} + (g_1^1 - d_1^1 - r_{\alpha'}^1 \Omega_0^{\alpha'}) \ln \xi^1 + O(1); \\ \tilde{\eta}_1^j(\xi^1) &= K_1^j, & \tilde{\eta}_2^j(\xi^1) &= K_2^j, \\ \tilde{\eta}_3^j(\xi^1) &= g_j^1 \ln \xi^1 + O(1), & j=2, \dots, l.\end{aligned}\quad (6.8)$$

Входящие сюда константы $K_1^j, K_2^j, j=1, \dots, l$, следует выбрать так, чтобы при каждом $j=1, \dots, l$ значение $\tilde{\eta}^{j,3}$ второй суммы (6.5) при $\xi^1 = \sigma_2$ отличалось от значения компоненты η^j решения (4.11) в точке $\xi^1 = \sigma_2$ (см. (6.6)) на величину порядка ε :

$$\begin{aligned}K_1^1 &= \Omega_0, & K_2^1 &= \frac{1}{3} \left(g_1^1 - d_1^1 - r_{\alpha'}^1 \Omega_0^{\alpha'} + \frac{1}{2} b_{\alpha'}^1 g_1^{\alpha'} \right); \\ K_1^j &= 0, & K_2^j &= \frac{1}{6} g_j^1, \quad j=2, \dots, l.\end{aligned}\quad (6.9)$$

Формулами (6.8), (6.9) функции $\tilde{\eta}_v^i(\xi^1), j=1, \dots, l, v=1, 2, 3$, полностью определены.

Перейдем к вычислению функций $\tilde{\xi}_v^i(\xi^1), i=2, \dots, k, v=1, 2, 3$. Подставляя суммы (6.5) в правую и левую

части первых $k-1$ уравнений системы (4.10) и приравнявая в разложениях коэффициенты при $\varepsilon^{2/3}$, находим

$$(\Phi^1)^2 (\tilde{\xi}_1^i)' = \left(\Phi^1 \frac{\partial \Phi^i}{\partial \xi^{\beta'}} - \Phi^i \frac{\partial \Phi^1}{\partial \xi^{\beta'}} \right) \tilde{\xi}_1^{\beta'} + \left(\Phi^1 \frac{\partial \Phi^i}{\partial \eta^{\phi}} - \Phi^i \frac{\partial \Phi^1}{\partial \eta^{\phi}} \right) \tilde{\eta}_1^{\phi};$$

здесь функции Φ^i , $i=1, \dots, k$, и их производные берутся в точке $(\xi^1, \tilde{\xi}_0^{\alpha'}(\xi^1), \tilde{\eta}_0^{\kappa}(\xi^1))$. Если учесть соотношения (3.13), (6.3), (6.4), (6.7) и (6.8), то нетрудно убедиться, что для функций $\tilde{\xi}_1^i(\xi^1)$, $i=2, \dots, k$, получается линейная система с иррегулярно особой точкой при $\xi^1=0$:

$$(\tilde{\xi}_1^i)' = \left[\frac{a_{\beta'}^i}{(\xi^1)^2} + \dots \right] \tilde{\xi}_1^{\beta'} + \frac{b^i \Omega_0}{(\xi^1)^2} + \dots, \quad i=2, \dots, k;$$

многоточием заменены члены, имеющие при $\xi^1=0$ полюс порядка ниже второго. Линейные системы такого типа хорошо изучены (см., например, [10]). Аналогичного вида линейные системы получаются и для функций $\tilde{\xi}_2^i(\xi^1)$, $\tilde{\xi}_3^i(\xi^1)$, $i=2, \dots, k$. Начальные условия для этих систем следует подобрать так, чтобы при каждом $i=2, \dots, k$ значение $\tilde{\xi}_1^i$ первой суммы из (6.5) при $\xi^1=\sigma_2$ отличалось от значения компоненты ξ^i решения (4.11) в точке $\xi^1=\sigma_2$ (см. (6.6)) на величину порядка ε .

Конечно, необходимо еще специально доказать, что формально построенное приближение (6.5) действительно служит асимптотическим приближением решения (4.11) на отрезке $\sigma_2 \leq \xi^1 \leq \rho$ с точностью до величин порядка ε . Такое доказательство можно провести (см. [40]), однако, как и в предыдущих параграфах, мы его здесь опустим.

Теорема XIX. *На отрезке $\varepsilon^{2/3} \leq \xi^1 \leq \rho$ решение (4.11) представимо в виде*

$$\begin{aligned} \xi^i &= \Omega_0^i (\xi^1)^2 + \dots + \tilde{\xi}_1^i(\xi^1) \varepsilon^{2/3} + \tilde{\xi}_2^i(\xi^1) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \\ &\quad + \tilde{\xi}_3^i(\xi^1) \varepsilon + \mathfrak{R}^i(\xi^1, \varepsilon), \quad i=2, \dots, k, \\ \eta^1 &= \Omega_0 \varepsilon^{2/3} + \\ &\quad + \frac{1}{3} \left(g_1^1 - d_1^1 - r_{\alpha'}^1 \Omega_0^{\alpha'} + \frac{1}{2} b_{\kappa}^1 g_1^{\kappa'} \right) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \\ &\quad + \varepsilon \left[-\frac{1}{\xi^1} + (g_1^1 - d_1^1 - r_{\alpha'}^1 \Omega_0^{\alpha'}) \ln \xi^1 \right] + \mathfrak{C}^1(\xi^1, \varepsilon), \\ \eta^j &= \frac{1}{6} g_1^j \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon g_1^j \ln \xi^1 + \mathfrak{C}^j(\xi^1, \varepsilon), \quad j=2, \dots, l, \end{aligned} \quad (6.10)$$

где функции $\mathfrak{D}^i(\xi^1, \varepsilon)$, $i=2, \dots, k$, $\mathfrak{C}^j(\xi^1, \varepsilon)$, $j=1, \dots, l$, имеют на всем отрезке $\varepsilon^{2/3} \leq \xi^1 \leq \rho$ величину порядка ε или выше.

§ 7. Вектор смещения

Обозначим через $\Delta = (\Delta^1, \dots, \Delta^l)$ вектор с координатами

$$\Delta^1 = \Omega_0 \varepsilon^{2/3} + \frac{1}{3} \left(g_1^1 - d_1^1 - r_{\alpha}^1 \Omega_0^{\alpha'} + \frac{1}{2} b_{\kappa}^1 g_1^{\kappa'} \right) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad (7.1)$$

$$\Delta^j = \frac{1}{6} g_1^j \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad j=2, \dots, l.$$

Вектор Δ будем называть *вектором смещения*, соответствующим точке срыва $S(x_0, y_0)$. Сравнение формул (6.10) и (7.1) показывает, что Δ представляет собой с точностью до величин порядка ε вектор отклонения решения (4.11) в точке $\xi^1 = \rho$ от линейного подпространства Σ^k , состоящего из точек $(\xi^1, \dots, \xi^k, 0, \dots, 0)$.

Система (4.1) получается из системы (1.1) линейным преобразованием координат в окрестности точки срыва $S(x_0, y_0)$. Это преобразование (см. § 3) не перемешивает быстрых и медленных переменных, т. е. переводит плоскость $X_{y_0^1, \dots, y_0^l}^k$ в подпространство Σ^k , а плоскость $Y_{x_0^1, \dots, x_0^k}^l$ — в подпространство N^l , состоящее из точек $(0, \dots, 0, \eta^1, \dots, \eta^l)$. Таким образом, вектор смещения Δ характеризует отклонение решения (4.11) в конце участка срыва от плоскости $X_{y_0^1, \dots, y_0^l}^k$.

Вектор смещения зависит от точки срыва $S(x_0, y_0)$, но, естественно, не зависит от произвола в выборе локальной системы координат в окрестности этой точки. Сейчас мы найдем инвариантное выражение для вектора Δ , т. е. выразим его компоненты через величины, получаемые непосредственно из правых частей системы (1.1), и координаты точки срыва.

Прежде всего, очевидно, что

$$\Delta = \overline{\Delta}^{\kappa'} h_{\kappa}, \quad (7.2)$$

где h_1, \dots, h_l — базис (3.6), причем (см. (3.10))

$$\overline{\Delta}^1 = \rho^{-1/3} q^{-1/3} \Delta^1, \quad \overline{\Delta}^{\kappa'} = \Delta^{\kappa'}, \quad \kappa' = 2, \dots, l. \quad (7.3)$$

Учитывая равенства (3.12), (7.3) и употребляя символ Кронекера δ'_j , непосредственно из (7.1) получим выражения для величин $\bar{\Delta}^j$:

$$\bar{\Delta}^j = \frac{1}{6\rho} \bar{g}_1^j \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \delta_1^j \frac{\Omega_0}{\rho^{1/3} q^{1/3}} \varepsilon^{2/3} + \\ + \delta_1^j \left(\frac{\bar{b}_x^1 \bar{g}_1^x}{6\rho q} - \frac{\bar{d}_1^1}{3\rho^2} - \frac{\bar{r}_{\alpha'}^1 \Omega_0^{\alpha'}}{3\rho^2 r^3 q^2 r^3} \right) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}, \quad j = 1, \dots, l.$$

Подставляя эти выражения в формулу (7.2), находим инвариантное выражение для вектора смещения:

$$\Delta = \frac{\Omega_0}{\rho^{1/3} q^{1/3}} g \varepsilon^{2/3} + \left[\frac{\hbar}{6\rho} + g \left(\frac{r}{6\rho q} - \frac{s}{3\rho^2} - \frac{k}{3\rho^2 r^3 q^2 r^3} \right) \right] \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}. \quad (7.4)$$

Для входящих в формулу (7.4) векторов g , \hbar и чисел ρ , q , $s = \bar{d}_1^1$ мы уже указали инвариантные выражения (см. § 3). Остается найти константы

$$r = \bar{b}_x^1 \bar{g}_1^x, \quad k = \bar{r}_{\alpha'}^1 \Omega_0^{\alpha'}.$$

Из равенств

$$\bar{b}_j^1 = n_{\alpha} B_x^{\alpha} \bar{h}_j^x, \quad \bar{g}_1^x \bar{h}_x^j = C_j^{\beta} m^{\beta}$$

(см. (3.9)) сразу получаем

$$r = n_{\alpha} B_x^{\alpha} C_j^{\beta} m^{\beta}. \quad (7.5)$$

Вычислим k . Выражение для $\bar{r}_{\alpha'}^1$ уже получено (см. (3.9)), а величины $\Omega_0^{\alpha'}$ удовлетворяют системе линейных уравнений (6.4). Учитывая формулы преобразования координат (3.7), без труда проверим, что

$$c_0^{\beta'} = l_{\nu}^{\beta'} A_{\nu\lambda}^{\gamma} m^{\gamma} m^{\lambda},$$

где $\|l_j^i\|$ — матрица, обратная матрице $\|e_j^i\|$. Подставляя эти выражения $c_0^{\beta'}$ в систему (6.4) и решая ее относительно $\Omega_0^{\alpha'}$, приходим к равенству

$$\Omega_0^{\alpha'} = -b_{\beta'}^{\alpha'} l_{\nu}^{\beta'} A_{\nu\lambda}^{\gamma} m^{\gamma} m^{\lambda},$$

где $\|b_{\beta'}^{\alpha'}\|$ — матрица, обратная матрице $\|a_{\beta'}^{\alpha'}\|$. Поэтому

$$k = -2n_i A_{\alpha\beta}^i m^{\alpha} e_{\alpha}^{\beta} b_{i'}^{\alpha'} l_{\nu}^{\beta'} A_{\nu\lambda}^{\gamma} m^{\gamma} m^{\lambda}.$$

Положим

$$\tilde{d}_{\nu}^{\beta} = e_{\alpha}^{\beta} b_{i'}^{\alpha'} l_{\nu}^{\beta'};$$

нетрудно сообразить, что матрица $\|\tilde{d}_{\nu}^{\beta}\|$ однозначно определяется матрицей $\|A_{\alpha}^i\|$. Таким образом, окончательно

$$k = -\frac{2}{\rho^{1/3} q^{2/3}} n_i A_{\alpha\beta}^i m^{\alpha} \tilde{d}_{\nu}^{\beta} A_{\nu\lambda}^{\gamma} m^{\gamma} m^{\lambda}. \quad (7.6)$$

Системы произвольного порядка. Периодические решения, близкие к разрывным

Среди решений вырожденной системы могут быть и разрывные периодические решения. Оказывается, что при некоторых предположениях вблизи каждой замкнутой траектории, соответствующей такому решению, лежит по меньшей мере одна замкнутая траектория невырожденной системы; отвечающее этой траектории периодическое решение имеет характер релаксационного колебания.

В настоящей главе мы укажем условия существования периодического решения, близкого к разрывному, системы произвольного порядка с малым параметром ε при части производных. Будет проведено асимптотическое вычисление траектории и периода такого решения с точностью до величин порядка малости не ниже ε .

§ 1. Некоторые вспомогательные отображения

Продолжим изучение фазовых траекторий невырожденной системы (IV.1.1); все предположения, сделанные в главе IV, § 1, сохраняются. Кроме того, в дальнейшем будем предполагать, что соответствующая *вырожденная система* (IV.1.2) *среди своих разрывных решений имеет периодическое* (см. гл. I, §§ 5, 6); его траекторию обозначим \mathfrak{Z}_0 .

Из рассмотрений главы IV, § 2 следует, что траектория \mathfrak{Z}_0 представляет собой непрерывную замкнутую кривую в пространстве R^n , состоящую из конечного числа чередующихся между собой участков медленного и быстрого движения. Без ограничения общности можно для определенности считать, что эта траектория состоит из четырех участков — двух участков медленного движения и двух участков быстрого движения (рис. 49). Пусть S_1 и S_2 — точки срыва траектории \mathfrak{Z}_0 , а P_1 и P_2 — соответственно следующие за ними точки падения. Обозначим через $u_1(P_2, S_1)$, $u_2(P_1, S_2)$ участки медленного движения, а через $v_1(S_1, P_1)$, $v_2(S_2, P_2)$ — участки быстрого движения. Напомним, что участки $u_1(P_2, S_1)$ и $u_2(P_1, S_2)$, кроме своих концевых точек S_1 и S_2 , лежат в устойчивой области Γ_- поверхности Γ , а точки срыва S_1 и S_2 принадлежат множеству Γ_0 .

Относительно рассматриваемого разрывного периодического решения вырожденной системы (IV.1.2) сделаем следующее предположение: замкнутая траектория \mathcal{Z}_0 является изолированной и устойчивой. Это значит, что однократный обход по траекториям разрывных решений системы (IV.1.2), близким к траектории \mathcal{Z}_0 , порождает

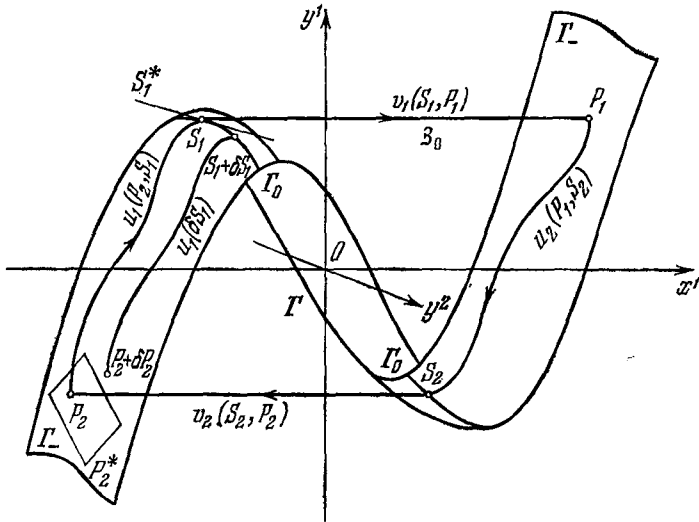


Рис. 49.

непрерывное отображение φ в себя любой достаточно малой, но конечной $(l-1)$ -мерной окрестности из множества Γ_0 точки срыва S_1 (соответственно S_2), причем единственной неподвижной точкой отображения φ является точка S_1 (соответственно S_2). Дополнительно также предположим, что линейная часть отображения φ обладает тем же свойством.

Сконструируем несколько вспомогательных отображений, индуцируемых обходом по траекториям разрывных решений вырожденной системы (IV.1.2).

Пусть S_1^* и S_2^* — $(l-1)$ -мерные плоскости, касающиеся соответственно в точках срыва S_1 и S_2 поверхности Γ_0 , выделяемой в пространстве R^n уравнениями (IV.1.4) и (IV.1.6). Далее, пусть P_1^* и P_2^* — l -мерные плоскости, касающиеся соответственно в точках падения P_1 и P_2 поверх-

ности Γ . Будем трактовать S_1^* , S_2^* , P_1^* , P_2^* как векторные пространства с нулями соответственно в точках S_1 , S_2 , P_1 , P_2 .

Построим линейное отображение

$$M_1^*: S_1^* \rightarrow P_2^*$$

пространства S_1^* в пространство P_2^* следующим образом. Обозначим через t_1 время движения фазовой точки вырожденной системы (IV.1.2) по участку $u_1(P_2, S_1)$ траектории \mathfrak{Z}_0 . Пусть $S_1 + \delta S_1$ — произвольная точка поверхности Γ_0 , близкая к точке срыва S_1 . Тогда существует точка $P_2 + \delta P_2$ на поверхности Γ , близкая к точке падения P_2 и переходящая в точку $S_1 + \delta S_1$ за то же время t_1 по некоторой близкой к $u_1(P_2, S_1)$ траектории $u_1(\delta S_1)$ системы (IV.1.2). Соответствие

$$S_1 + \delta S_1 \rightarrow P_2 + \delta P_2$$

определяет, таким образом, отображение

$$\mathfrak{M}: U(S_1) \rightarrow V(P_2)$$

$(l-1)$ -мерной окрестности $U(S_1)$ из множества Γ_0 точки срыва S_1 в l -мерную окрестность $V(P_2)$ из множества Γ точки падения P_2 . Линейную часть отображения \mathfrak{M} мы и обозначим M_1^* . Совершенно аналогично строится линейное отображение

$$M_2^*: S_2^* \rightarrow P_1^*.$$

Пространства S_1^* , S_2^* , P_1^* , P_2^* параллельно перенесем так, чтобы их нули перешли в нуль пространства R^n , а затем спроектируем эти пространства в направлении X^k в пространство Y^l . При таком проектировании π_x пространства P_1^* и P_2^* отобразятся на пространство Y^l . Действительно, вырождения произойти не может, так как в точках падения P_1 и P_2 определить матрицы (IV.1.5) отличен от нуля, а потому пространства P_1^* и P_2^* не содержат направлений, параллельных пространству X^k . При проектировании π_x пространства S_1^* и S_2^* отобразятся в пространство Y^l также без вырождения, т. е. отобразятся на некоторые $(l-1)$ -мерные подпространства \tilde{S}_1 и \tilde{S}_2 пространства Y^l :

$$\pi_x S_1^* = \tilde{S}_1, \quad \pi_x S_2^* = \tilde{S}_2.$$

Это следует из того, что в точках срыва S_1 и S_2 лишь

одно собственное значение матрицы (IV.1.5) обращается в нуль.

Уравнения плоскостей \tilde{S}_1 и \tilde{S}_2 нетрудно выписать явно. Найдем, например, уравнение плоскости \tilde{S}_1 . Для этого достаточно, очевидно, из уравнений

$$\frac{\partial f^i(S_1)}{\partial x^\alpha} (x^\alpha - x_1^\alpha) + \frac{\partial f^i(S_1)}{\partial y^\kappa} (y^\kappa - y_1^\kappa) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad (1.1)$$

определяющих касательную плоскость к поверхности Γ в точке срыва $S_1(x_1^1, \dots, x_1^k, y_1^1, \dots, y_1^l)$, исключить переменные x^α , $\alpha = 1, \dots, k$, а затем заменить $(y^\kappa - y_1^\kappa)$ на y^κ , $\kappa = 1, \dots, l$. Пусть $n = (n_1, \dots, n_k)$ — собственный вектор с нулевым собственным значением матрицы, транспонированной к матрице $\mathfrak{A}(S_1)$, причем выполнено соотношение (IV.3.3). Свертывая (1.1) с n_α , получим

$$n_\alpha B_\kappa^\alpha (y^\kappa - y_1^\kappa) = 0; \quad B_\kappa^\alpha = \frac{\partial f^\alpha(S_1)}{\partial y^\kappa}.$$

Введем ковариантный вектор ${}_1\omega$:

$${}_1\omega_j = n_\alpha B_j^\alpha, \quad j = 1, \dots, l, \quad {}_1\omega_\kappa g^\kappa(S_1) = 1. \quad (1.2)$$

Тогда уравнение плоскости \tilde{S}_1 запишется в виде

$${}_1\omega_\kappa y^\kappa = 0. \quad (1.3)$$

Аналогично выводится и уравнение плоскости \tilde{S}_2 :

$${}_2\omega_\kappa y^\kappa = 0. \quad (1.4)$$

Проектирование π_x и отображения M_1^* , M_2^* естественным образом порождают отображения

$$M_1: \tilde{S}_1 \rightarrow Y^l, \quad M_2: \tilde{S}_2 \rightarrow Y^l$$

подпространств \tilde{S}_1 и \tilde{S}_2 в пространство Y^l :

$$M_1 = \pi_x M_1^* \pi_x^{-1}, \quad M_2 = \pi_x M_2^* \pi_x^{-1}.$$

Эти отображения можно разными способами продолжить до отображений пространства Y^l на себя. Обозначим через N_1 и N_2 такие продолжения, при которых образы векторов $g(S_1)$ и $g(S_2)$ задаются формулами

$$N_1 g(S_1) = g(P_2), \quad N_2 g(S_2) = g(P_1).$$

Таким образом, мы предполагаем выполненным некоторое *условие невырожденности*, а именно: трансверсальность

вектора $g(S_1)$ к пространству S_1^* и вектора $g(S_2)$ к пространству S_2^* .

Итак, построены отображения N_1 и N_2 пространства Y^l на себя:

$$N_1: Y^l \rightarrow Y^l, \quad N_2: Y^l \rightarrow Y^l.$$

Фактическое вычисление этих отображений можно провести, решая систему уравнений в вариациях, соответствующую вырожденной системе (IV.1.2).

Пользуясь отображениями N_1 и N_2 , введем следующие линейные отображения L_1 и L_2 пространства Y^l в себя:

$$L_1 y \equiv N_1^{-1} y - ({}_1\omega, N_1^{-1} y) g(S_1), \\ L_2 y \equiv N_2^{-1} y - ({}_2\omega, N_2^{-1} y) g(S_2).$$

Докажем, что отображение L_1 переводит Y^l на \tilde{S}_1 , а отображение L_2 переводит Y^l на \tilde{S}_2 . Ясно, что $Y^l = Y_1 + Y_2$, где $Y_1 = N_1 \tilde{S}_1$, а Y_2 — одномерное подпространство, порожденное вектором $g(P_2)$. Если $y \in Y_1$, то

$$N_1^{-1} y \in \tilde{S}_1, \quad ({}_1\omega, N_1^{-1} y) = 0,$$

и $L_1 y \in \tilde{S}_1$. Если же $y \in Y_2$, то

$$y = \lambda g(P_2), \quad N_1^{-1} y = \lambda g(S_1),$$

и $L_1 y = 0$ в силу последнего из соотношений (1.2). Для отображения L_2 утверждение проверяется аналогично.

Определим, далее, отображения Π_1 и Π_2 соответственно подпространств \tilde{S}_1 и \tilde{S}_2 на себя как композиции отображений L_1 и L_2 :

$$\Pi_1 = L_1 L_2, \quad \Pi_2 = L_2 L_1. \quad (1.5)$$

Нетрудно сообразить, что отображения (1.5) индуцируются проекциями в пространство Y^l линейных приближений отображений окрестностей $U(S_1)$, соответственно $U(S_2)$, в себя, порождаемых обходом по фазовым траекториям вырожденной системы (IV.1.2). Единственной неподвижной точкой отображений (1.5) является вектор $y = 0$.

С помощью отображений (1.5) построим, наконец, отображения Π_1^e и Π_2^e подпространств \tilde{S}_1 и \tilde{S}_2 на себя следующим образом:

$$\Pi_1^e y \equiv L_1 [L_2 (y + \Delta_1) + \Delta_2], \\ \Pi_2^e y \equiv L_2 [L_1 (y + \Delta_2) + \Delta_1], \quad (1.6)$$

где Δ_1 и Δ_2 —векторы смещения, соответствующие точкам срыва S_1 и S_2 (см. гл. IV, § 7). Отображения (1.6) сконструированы здесь чисто формально. Ниже мы используем их для изучения близкого к разрывному периодического решения системы (IV.1.1).

§ 2. Существование периодического решения, близкого к разрывному. Асимптотическое вычисление траектории

Поставим следующий вопрос: верно ли, что при достаточно малых ϵ невырожденная система (IV.1.1) имеет замкнутую траекторию, нулевым асимптотическим приближением которой служит кривая \mathcal{Z}_0 ? Оказывается, что при перечисленных выше предположениях у системы (IV.1.1) действительно существует по крайней мере одна такая траектория. Однако, в отличие от двумерного случая (см. гл. III, § 1), доказательство этого факта весьма не просто. Кроме того, остается не известным, является ли такая траектория единственной.

Докажем, что у невырожденной системы (IV.1.1) существует периодическое решение, траектория \mathcal{Z}_ϵ которого при $\epsilon \rightarrow 0$ равномерно стремится к замкнутой кривой \mathcal{Z}_0 . Одновременно будет проведено и вычисление траектории \mathcal{Z}_ϵ с точностью до величин порядка малости ϵ и выше.

Теорема XX. Пусть $\delta_1 \in \tilde{S}_1$ —неподвижный вектор отображения Π_1^ϵ , а $\delta_2 \in \tilde{S}_2$ —неподвижный вектор отображения Π_2^ϵ :

$$\begin{aligned} \delta_1 &= L_1 [L_2 (\delta_1 + \Delta_1) + \Delta_2], \\ \delta_2 &= L_2 [L_1 (\delta_2 + \Delta_2) + \Delta_1]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Пусть, далее, $\delta_1 S_1$ и $\delta_2 S_2$ —прообразы векторов δ_1 и δ_2 при проектировании в касательных плоскостях S_1^* и S_2^* , а $S_1 + \delta S_1$ и $S_2 + \delta S_2$ —точки окрестностей $U(S_1)$ и $U(S_2)$ на поверхности Γ_0 , соответствующие векторам $\delta_1 S_1$ и $\delta_2 S_2$. Пусть, наконец, $u_1(\delta S_1)$ и $u_2(\delta S_2)$ —участки траекторий вырожденной системы (IV.1.2), проходящие соответственно вблизи участков $u_1(P_2, S_1)$ и $u_2(P_1, S_2)$ и упирающиеся в точки срыва $S_1 + \delta S_1$ и $S_2 + \delta S_2$. Тогда существует периодическое решение невырожденной системы (IV.1.1), траектория \mathcal{Z}_ϵ которого на конечном отрезке изменения t проходит в ϵ -окрестностях участков $u_1(\delta S_1)$ и $u_2(\delta S_2)$.

Для доказательства этой теоремы будет нужна следующая лемма, представляющая и самостоятельный интерес.

Лемма 17. Пусть $X_{y_0}^k$ — k -мерная плоскость в пространстве R^n , состоящая из точек (x, y_0) , где y_0 — постоянный вектор. Пусть, далее, (x_0, y_0) — точка пересечения плоскости $X_{y_0}^k$ с поверхностью Γ . Предположим, что в этой точке все собственные значения матрицы \mathfrak{A} имеют отрицательные действительные части. Возьмем два решения системы (IV.1.1):

$$x = x_1(t), \quad y = y_1(t); \quad (2.2)$$

$$x = x_2(t), \quad y = y_2(t), \quad (2.3)$$

из которых первое проходит при $t = t_0$ через точку (x_0, y_0) , а второе при $t = t_0$ имеет начальную точку в плоскости $X_{y_0}^k$, отстоящую от точки (x_0, y_0) на достаточно малом, но конечном расстоянии. Тогда существует такое число $t' > t_0$, что при $t \geq t'$ решения (2.2) и (2.3) совпадают с точностью до величин порядка ε на некотором конечном отрезке изменения t :

$$x_2(t) = x_1(t) + O(\varepsilon), \quad y_2(t) = y_1(t) + O(\varepsilon).$$

При этом можно считать, что $|t' - t_0| \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Сформулированная лемма представляет собой, по существу, частный случай теоремы XVI (см. [34], [14]). Мы приведем здесь простое прямое доказательство, опирающееся на метод функций Ляпунова.

Точка (x_0, y_0) является точкой экспоненциально устойчивого равновесия для системы (см. (IV.1.3))

$$\frac{dx^i}{d\theta} = f^i(x^1, \dots, x^k, y_0^1, \dots, y_0^l), \quad i = 1, \dots, k, \quad \theta = t/\varepsilon. \quad (2.4)$$

Известно (см. [45]), что в этом случае существует положительно определенная квадратичная форма $W(u)$ компонент вектора $u = x - x_0$ — функция Ляпунова. Производная этой функции в силу системы, получающейся линеаризацией системы (2.4), удовлетворяет следующему неравенству:

$$\frac{\partial W(u)}{\partial u^i} \frac{\partial f^i(x_0, y_0)}{\partial x^j} u^j < -\alpha W(u), \quad (2.5)$$

где α — положительная константа. Положим

$$u(t) = x_2(t) - x_1(t), \quad v(t) = y_2(t) - y_1(t)$$

и вычислим производную функции $W(u(t))$ по t :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [W(u(t))] &= \frac{\partial W}{\partial u^i} \frac{d(x_2^i - x_1^i)}{dt} = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial W}{\partial u^i} [f^i(x_2, y_2) - f^i(x_1, y_1)] = \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial W}{\partial u^i} [f^i(x_2, y_2) - f^i(x_1, y_2) + f^i(x_1, y_2) - f^i(x_1, y_1)] = \\ &= \frac{i}{\varepsilon} \frac{\partial W}{\partial u^i} \left[\frac{\partial f^i}{\partial x^j} (x_2^j - x_1^j) + \frac{\partial f^i}{\partial y^v} (y_2^v - y_1^v) \right]; \end{aligned}$$

производные $\partial f^i / \partial x^j$, $\partial f^i / \partial y^v$ взяты, в соответствии с формулой Лагранжа, при промежуточных значениях аргументов. Учитывая неравенство (2.5), отсюда сразу же получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [W(u(t))] &< -\frac{1}{\varepsilon} \tilde{\alpha} W(u(t)) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial W}{\partial u^i} \frac{\partial f^i}{\partial y^v} (y_2^v - y_1^v), \\ \tilde{\alpha} &= \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Определим теперь нормы $\|u\|$, $\|v\|$ векторов $u = x_2 - x_1$, $v = y_2 - y_1$ по формулам

$$\|u\| = \sqrt{W(u)}, \quad \|v\| = \sqrt{\sum_{v=1}^l (y_2^v - y_1^v)^2}.$$

Дифференцируя тождество $\|u(t)\|^2 = W(u(t))$ по t и используя неравенство (2.6), после элементарных преобразований найдем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|x_2(t) - x_1(t)\| &< \\ &< -\frac{1}{\varepsilon} a \|x_2(t) - x_1(t)\| + \frac{1}{\varepsilon} b \|y_2(t) - y_1(t)\|, \\ a &= \text{const} > 0, \quad b = \text{const} > 0. \end{aligned}$$

Аналогично получается оценка для производной по t функции $\|v(t)\|$:

$$\begin{aligned} \frac{d\|v(t)\|}{dt} &= \frac{1}{\|v\|} \sum_{j=1}^l (y_2^j - y_1^j) \frac{d}{dt} (y_2^j - y_1^j) < \\ &< q \sum_{j=1}^l \left| \frac{d}{dt} (y_2^j - y_1^j) \right|, \quad q = \text{const} > 0. \end{aligned}$$

Так как, далее,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(y_2^j - y_1^j) &= g^j(x_2, y_2) - g^j(x_1, y_2) + g^j(x_1, y_2) - g^j(x_1, y_1) = \\ &= \frac{\partial g^j}{\partial x^i}(x_2^i - x_1^i) + \frac{\partial g^j}{\partial y^v}(y_2^v - y_1^v), \quad j = 1, \dots, l, \end{aligned}$$

то приходим к неравенству

$$\frac{d\|v\|}{dt} < c(\|u\| + \|v\|), \quad c = \text{const} > 0.$$

Таким образом, если положить

$$\xi = \|u\|, \quad \eta = \|v\|, \quad (2.7)$$

то для ξ и η получим следующую систему дифференциальных неравенств:

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} < -\frac{1}{\varepsilon} a\xi + \frac{1}{\varepsilon} b\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} < c(\xi + \eta); \end{cases} \quad (2.8)$$

здесь a, b, c — положительные константы, причем, очевидно, можно считать, что $b > a$. Наряду с системой (2.8) рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений, получающуюся, если в (2.8) знаки неравенств заменить знаками равенств:

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon} a\xi + \frac{1}{\varepsilon} b\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} = c(\xi + \eta). \end{cases} \quad (2.9)$$

Мы сравним функции ξ и η , определяемые формулами (2.7) и удовлетворяющие системе неравенств (2.8), с решениями системы уравнений (2.9). Для этого возьмем (рис. 50) треугольник OAB , стороны которого в плоскости (ξ, η) заданы уравнениями

$$OA: \eta = 0; \quad OB: -a\xi + b\eta = 0; \quad AB: \eta + 2\varepsilon \frac{c}{a}(\xi - 1) = 0.$$

Докажем, что через каждую точку стороны AB , имеющую абсциссу $\xi > \xi_0$, где ξ_0 — некоторое малое положительное число порядка ε , траектории системы (2.9) входят внутрь треугольника OAB . Действительно, производная функции $\eta + 2\varepsilon \frac{c}{a}(\xi - 1)$ в силу системы (2.9) в любой точке

стороны AB равна

$$V(\xi) = \left\{ c(\xi + \eta) + 2\varepsilon \frac{c}{a} \left(-\frac{1}{\varepsilon} a\xi + \frac{1}{\varepsilon} b\eta \right) \right\}_{\eta = -2\varepsilon \frac{c}{a} (\xi - 1)}$$

Непосредственно проверяется, что эта производная отрицательна для всех значений $\xi > \xi_0$, где ξ_0 находится из уравнения $V(\xi) = 0$ и, как легко видеть, имеет порядок ε .

Наряду с треугольником OAB рассмотрим треугольник ADE с вершиной E ($\xi_0, 0$) и стороной DE , параллельной оси $O\xi$ (см. рис. 50). Пусть $(\rho, 0)$ — произвольная

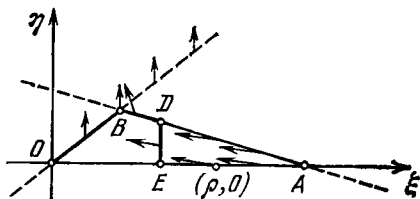


Рис. 50.

точка на его стороне AE . Элементарные рассуждения показывают, что решение системы (2.9), начинающееся при $t = t_0$ в этой точке, при некотором $t' > t_0$ пересечет отрезок DE , причем $t' \rightarrow t_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отсюда и из неравенств (2.8) сразу следует, что, если кривая $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t)$ (где функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ определены формулами (2.7)) при $t = t_0$ начинается в точке $(\rho, 0)$, то она пересечет отрезок DE даже при некотором $t'' < t'$.

Это означает, что, во-первых, норма $\|x_2(t) - x_1(t)\|$ за время $t'' - t_0$ уменьшается до величины порядка ε , а, во-вторых, за это же время норма $\|y_2(t) - y_1(t)\|$ возрастет не более чем на величину порядка ε . Затем соотношения

$$\|x_2(t) - x_1(t)\| = O(\varepsilon), \quad \|y_2(t) - y_1(t)\| = O(\varepsilon)$$

сохранятся уже на некотором конечном отрезке изменения t . Тем самым лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы XX. Прежде всего отметим, что векторы δ_1 и δ_2 (см. (2.1)) существуют в силу предположения об устойчивости замкнутой траектории \mathcal{J}_0 .

Возьмем произвольную точку q на участке $u_1(\delta S_1)$ отстоящую от точки срыва $S_1 + \delta S_1$ на конечное расстояние. Пусть $V^{l-1}(q)$ — достаточно малая (но конечных, и зависящих от ε размеров) $l-1$ -мерная окрестность точки на поверхности Γ , трансверсальная в этой точке к траектории $u_1(\delta S_1)$. Пусть, далее, $W^k(q)$ — k -мерный достаточно малый (но конечных, не зависящих от ε размеров

открытый куб с ребрами, параллельными координатным осям пространства X^k и с центром в точке q . Обозначим через $\mathcal{O}^{k+l-1}(q)$ декартово произведение $V^{l-1}(q) \times W^k(q)$.

Пусть u^ε — некоторая траектория системы (IV.1.1) с начальной точкой q^ε , отстоящей от точки q на расстояние порядка ε , т. е. $\rho(q, q^\varepsilon) = O(\varepsilon)$. Покажем прежде всего, что траектория u^ε вновь пересечет область $\mathcal{O}^{k+l-1}(q)$ в некоторой точке Q^ε , причем $\rho(q, Q^\varepsilon) = O(\varepsilon)$.

В силу результатов гл. IV траектория u^ε на некотором конечном своем протяжении идет вдоль участка $u_1(\delta S_1)$, отклоняясь от него лишь на величины порядка ε . Однако при подходе к точке срыва $S_1 + \delta S_1$ отклонение траектории u^ε от участка $u_1(\delta S_1)$ будет уже величиной порядка $a\varepsilon^{2/3} + b\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$.

Обозначим через $X_{S_1 + \delta S_1}^k$ k -мерную плоскость пространства R^n , параллельную подпространству X^k и проходящую через точку срыва $S_1 + \delta S_1$. Именно в этой плоскости, очевидно, лежит продолжение траектории $u_1(\delta S_1)$ системы (IV.1.2). Из результатов главы IV следует, что траектория u^ε , обойдя точку срыва $S_1 + \delta S_1$, в дальнейшем пойдет с точностью до величин порядка ε в k -мерной плоскости $u = \text{const}$ пространства R^n , получающейся из плоскости $X_{S_1 + \delta S_1}^k$ сдвигом на вектор смещения $\Delta(S_1 + \delta S_1)$ соответствующий точке срыва $S_1 + \delta S_1$. Но вектор δ_1 имеет, как это следует из соотношений (2.1), величину порядка $\varepsilon^{2/3}$, а потому точки S_1 и $S_1 + \delta S_1$ отличаются также на величину порядка $\varepsilon^{2/3}$. Отсюда непосредственно вытекает, что

$$\Delta(S_1 + \delta S_1) = \Delta_1 + O(\varepsilon).$$

Таким образом, можно считать, что продолжение траектории u^ε лежит с точностью до величин порядка ε в плоскости $X_{S_1 + \delta S_1}^k(\Delta_1)$ пространства R^n , которая получается из плоскости $X_{S_1 + \delta S_1}^k$ параллельным сдвигом на вектор Δ_1 .

Обозначим через $P_1 + \delta P_1$ точку пересечения плоскости $X_{S_1 + \delta S_1}^k(\Delta_1)$ с поверхностью Γ и проведем через эту точку траекторию системы (IV.1.2). Пусть указанная траектория имеет точку срыва $S_2 + \delta S_2$; саму траекторию тогда можно обозначить $u_2(\delta S_2)$. Образ отклонения точек S_2 и $S_2 + \delta S_2$ в касательной плоскости S_2^* обозначим через $\delta_1 S_2$,

а образ вектора $\delta_1 S_2$ при проектировании в пространство Y^l — через δ_2 . Нетрудно сообразить, что

$$\delta_2 = L_2(\delta_1 + \Delta_1).$$

При подходе к поверхности Γ (т. е. к точке $P_1 + \delta P_1$) траектория u^ε будет отходить от плоскости $X_{S_1 + \delta S_1}^k(\Delta_1)$, однако в силу леммы 17 в дальнейшем она пойдет на некотором конечном своем протяжении в ε -окрестности траектории $u_2(\delta S_2)$. Такое совпадение траекторий u^ε и $u_2(\delta S_2)$ с точностью до величины порядка ε нарушится лишь вблизи точки срыва $S_2 + \delta S_2$: эту точку траектория u^ε обойдет, отклоняясь от траектории $u_2(\delta S_2)$ на величину порядка $a\varepsilon^{2/3} + b\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$. Затем по описанной схеме траектория u^ε вновь пойдет в ε -окрестности участка $u_1(\delta S_3)$ некоторой траектории системы (IV.1.2). Из только что проведенных рассуждений легко следует, что образом вектора $\delta_1 S_3$ в пространстве \tilde{S}_3 будет вектор

$$L_1[L_2(\delta_1 + \Delta_1) + \Delta_2],$$

т. е. вектор δ_1 (см. (2.1)). Следовательно, участок $u_1(\delta S_3)$ с точностью до величин порядка ε совпадает с участком $u_1(\delta S_1)$.

Для завершения доказательства теоремы остается убедиться, что среди траекторий u^ε , поведение которых мы только что описали, есть замкнутая траектория \mathfrak{Z}_ε . Для этого в свою очередь достаточно установить, что обход по траекториям системы (IV.1.1) порождает непрерывное отображение множества $\mathcal{G}^{k+l-1}(q)$ в себя. Но последнее немедленно вытекает из проведенных выше рассуждений и из леммы 17, если учесть, что обход по траекториям разрывных решений системы (IV.1.2) порождает (в силу предположения об устойчивости траектории \mathfrak{z}_0) непрерывное отображение окрестности $V^{l-1}(q)$ в себя.

§ 3. Асимптотическая формула для периода релаксационного колебания

Теорема XX утверждает, что при достаточно малом ε система (IV.1.1) имеет периодическое решение, равномерно стремящееся к разрывному периодическому решению системы (IV.1.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Траектория \mathfrak{Z}_ε периодического

решения системы (IV.1.1) была вычислена с точностью до величин порядка малости ε . С той же точностью вычислим теперь период этого решения.

Пусть на прохождение участка $u_1(P_2, S_1)$ фазовая точка вырожденной системы (IV.1.2) затрачивает время T_{10} , а на прохождение участка $u_2(P_1, S_2)$ — время T_{20} , так что период разрывного периодического решения, имеющего траекторию \mathcal{Z}_0 , равен

$$T_0 = T_{10} + T_{20}. \quad (3.1)$$

Наряду с участками $u_1(P_2, S_1)$ и $u_2(P_1, S_2)$ рассмотрим участки траекторий системы (IV.1.2)

$$\begin{aligned} u_1(\delta S_1) &= u_1(P_2 + \delta P_2, S_1 + \delta S_1), \\ u_2(\delta S_2) &= u_2(P_1 + \delta P_1, S_2 + \delta S_2), \end{aligned}$$

расположенные вблизи участков u_1 , соответственно u_2 , и имеющие точками срыва точки $S_1 + \delta S_1$ и $S_2 + \delta S_2$, где отклонения δS_1 и δS_2 определяются теоремой XX. При этом начальные точки $P_2 + \delta P_2$, $P_1 + \delta P_1$ выберем так, чтобы время движения фазовой точки системы (IV.1.2) по участку $u_1(\delta S_1)$ было равно T_{10} , а по участку $u_2(\delta S_2)$ равно T_{20} . Подчеркнем, что отклонения δS_1 и δS_2 суть величины порядка малости $\varepsilon^{2/3}$. Урежем теперь участки $u_1(\delta S_1)$ и $u_2(\delta S_2)$, т. е. введем вместо них их части

$$\tilde{u}_1(\delta S_1) = \tilde{u}_1(P'_2, S'_1), \quad \tilde{u}_2(\delta S_2) = \tilde{u}_2(P'_1, S'_2),$$

начальные и конечные точки которых P'_2, S'_1, P'_1, S'_2 отстоят от соответствующих начальных и конечных точек участков $u_1(\delta S_1)$ и $u_2(\delta S_2)$ на достаточно малое, но конечное расстояние.

Пусть участок $\tilde{u}_1(\delta S_1)$ описывается решением вырожденной системы (IV.1.2)

$$x^i = x_0^i(t), \quad i = 1, \dots, k, \quad y^j = y_0^j(t), \quad j = 1, \dots, l,$$

где t пробегает отрезок $t_1 \leq t \leq t_2$; ясно, что время движения фазовой точки системы (IV.1.2) вдоль участка $\tilde{u}_1(\delta S_1)$ равно $t_2 - t_1$. В силу теоремы XX траектория \mathcal{Z}_ε содержит участок, представляющийся при $t_1 \leq t \leq t_2$ в виде

$$\begin{aligned} x^i &= x_0^i(t) + x_1^i(t, \varepsilon), \quad i = 1, \dots, k, \\ y^j &= y_0^j(t) + y_1^j(t, \varepsilon), \quad j = 1, \dots, l, \end{aligned}$$

где функции $x_1^i(t, \varepsilon)$, $y_1^i(t, \varepsilon)$ имеют на всем отрезке $t_1 \leq t \leq t_2$ величину порядка ε . Обозначим этот участок $\mathfrak{B}_\varepsilon(\bar{u}_1(\delta S_1))$; очевидно, что время движения фазовой точки системы (IV.1.1) вдоль участка $\mathfrak{B}_\varepsilon(\bar{u}_1(\delta S_1))$ равно $t_2 - t_1 + O(\varepsilon)$.

Пусть $\mathfrak{B}_\varepsilon(S_1 + \delta S_1)$ — непосредственно следующий за $\mathfrak{B}_\varepsilon(\bar{u}_1(\delta S_1))$ участок траектории \mathfrak{B}_ε , огибающий точку срыва $S_1 + \delta S_1$; будем считать, что участок $\mathfrak{B}_\varepsilon(S_1 + \delta S_1)$ имеет малую, но конечную длину. В окрестности точки срыва $S_1 + \delta S_1$ система (IV.1.1) линейным преобразованием координат приводится к канонической форме (IV.3.11), а вдоль участка $\mathfrak{B}_\varepsilon(S_1 + \delta S_1)$ можно принять за независимую переменную координату ξ^1 . Тогда уравнение этого участка запишется в виде

$$\xi^i = \xi^i(\xi^1, \varepsilon), \quad i = 2, \dots, k, \quad \eta^j = \eta^j(\xi^1, \varepsilon), \quad j = 1, \dots, l, \quad (3.2)$$

$$-\rho \leq \xi^1 \leq \rho.$$

Функции (3.2) были вычислены нами в главе IV, §§ 4—6, с точностью до малых порядка ε . Используя полученные там результаты, найдем с той же точностью время $T_{-\rho, \rho}$ движения фазовой точки системы (IV.1.1) вдоль участка $\mathfrak{B}_\varepsilon(S_1 + \delta S_1)$.

Разобьем отрезок $-\rho \leq \xi^1 \leq \rho$ точками $\xi^1 = -\sigma_1$, $\xi^1 = 0$, $\xi^1 = \sigma_2$, где $\sigma_1 = \varepsilon^{2/7}$, $\sigma_2 = \varepsilon^{2/9}$, на четыре отрезка: $-\rho \leq \xi^1 \leq -\sigma_1$, $-\sigma_1 \leq \xi^1 \leq 0$, $0 \leq \xi^1 \leq \sigma_2$, $\sigma_2 \leq \xi^1 \leq \rho$. Очевидно, что

$$T_{-\rho, \rho} = T_{-\rho, -\sigma_1} + T_{-\sigma_1, 0} + T_{0, \sigma_2} + T_{\sigma_2, \rho}. \quad (3.3)$$

При вычислении этого времени будем исходить из формулы

$$T_{-\rho, \rho} = \int_{-\rho}^{\rho} \frac{d}{d\xi^1} [\eta^1(\xi^1, \varepsilon)] \delta(\xi^1, \xi^{\alpha'}(\xi^1, \varepsilon), \eta^\kappa(\xi^1, \varepsilon)) d\xi^1, \quad (3.4)$$

где $\xi^{\alpha'}(\xi^1, \varepsilon)$, $\eta^\kappa(\xi^1, \varepsilon)$, $\alpha' = 2, \dots, k$, $\kappa = 1, \dots, l$, суть функции (3.2) и (см. (IV.3.13))

$$\delta(\xi^1, \xi^{\alpha'}, \eta^\kappa) \equiv \frac{1}{\Psi^1(\xi^1, \xi^{\alpha'}, \eta^\kappa)}.$$

На отрезке $-\rho \leq \xi^1 \leq -\sigma_1$ для функций (3.2) справедливы асимптотические приближения (IV.4.27). Рассматривая в формуле (3.4) интеграл по отрезку $-\rho \leq \xi^1 \leq -\sigma_1$.

подставим в подынтегральное выражение представления (IV.4.27) и проведем разложения по формуле Тейлора; в частности, отметим, что при $\xi^1 \rightarrow 0$

$$\delta(\xi^1, \xi_0^{\alpha'}(\xi^1), \eta_0^{\alpha}(\xi^1)) = 1 - g_1^1 \xi^1 + O((\xi^1)^2).$$

После несложных преобразований и элементарной оценки остаточного члена окончательно получим

$$T_{-\rho, -\sigma_1} = T_{-\rho, -\sigma_1}^0 + \varepsilon \left[\frac{1}{2\sigma_1} - \left(\frac{1}{2} b_{\alpha'}^1 g_1^{\alpha'} + g_1^1 \right) \ln \sigma_1 \right] + \\ + \varepsilon^2 \frac{-1}{8\sigma_1^4} + O(\varepsilon), \quad (3.5)$$

где для краткости введено обозначение

$$T_{-\rho, -\sigma_1}^0 = \int_{-\rho}^{-\sigma_1} \frac{d}{d\xi^1} [\eta_0^1(\xi^1)] \delta(\xi^1, \xi_0^{\alpha'}(\xi^1), \eta_0^{\alpha}(\xi^1)) d\xi^1. \quad (3.6)$$

Рассматривая в формуле (3.4) интеграл по отрезку $-\sigma_1 \leq \xi^1 \leq 0$ и выполнив преобразование переменных (IV.5.1), легко убеждаемся, что

$$T_{-\sigma_1, 0} = \mu^2 \int_{-\omega_1}^0 \frac{d}{du^1} [v^1(u^1, \mu)] \frac{du^1}{\psi^1(u^1, u^{\alpha'}(u^1, \mu), v^{\alpha}(u^1, \mu), \mu)}; \quad (3.7)$$

здесь $\omega_1 = \sigma_1/\mu$, определение функции $\psi^1(u^{\alpha}, v^{\alpha}, \mu)$ содержится в (IV.5.3) и (IV.5.2), а функции

$$u^i = u^i(u^1, \mu), \quad i = 2, \dots, k, \quad v^j = v^j(u^1, \mu), \quad j = 1, \dots, l, \quad (3.8)$$

в новых координатах описывают участок (3.2). На отрезке $-\sigma_1 \leq \xi^1 \leq 0$ для функций (3.2) справедливы асимптотические приближения (IV.5.18), поэтому для функций (3.8) можно использовать представления (IV.5.15). Кроме того, очевидно, что

$$\frac{1}{\psi^1(u^1, u^{\alpha'}(u^1, \mu), v^{\alpha}(u^1, \mu), \mu)} = 1 - \mu g_1^1 u^1 + O(\mu^2 (u^1)^2).$$

Подставляя эти представления в формулу (3.7) и производя оценку остаточного члена, получим

$$T_{-\sigma_1, 0} = \mu^2 \int_{-\omega_1}^0 \frac{d}{du^1} [v_0^1(u^1) + \mu v_1^1(u^1)] (1 - \mu g_1^1 u^1) du^1 + O(\varepsilon). \quad (3.9)$$

Имея в виду разложения (IV.4.9) траектории вырожденной системы, перепишем соотношение (3.9) так:

$$\begin{aligned}
 T_{-\sigma_1, 0} &= \mu^2 \int_{-\omega_1}^0 \frac{d}{du^1} \left[-(u^1)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \mu \left(\frac{2}{3} b_{\kappa}^1 g_1^{\kappa'} + c_1^1 - d_1^1 - r_{\alpha}^1 k^{\alpha'} \right) (u^1)^3 \right] (1 - \mu g_1^1 u^1) du^1 + \\
 &\quad + \mu^2 \int_{-\omega_1}^0 \frac{d}{du^1} [z_0(u^1)] (1 - \mu g_1^1 u^1) du^1 + \mu^3 \int_{-\omega_1}^0 \frac{d}{du^1} \left[v_1^1(u^1) - \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{2}{3} b_{\kappa}^1 g_1^{\kappa'} + c_1^1 - d_1^1 - r_{\alpha}^1 k^{\alpha'} \right) (u^1)^3 \right] (1 - \mu g_1^1 u^1) du^1 + O(\varepsilon).
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Первый член формулы (3.10) для краткости обозначим $T_{-\sigma_1, 0}^0$; возвращаясь к переменной интегрирования ξ^1 , находим

$$\begin{aligned}
 T_{-\sigma_1, 0}^0 &= \int_{-\sigma_1}^0 \frac{d}{d\xi^1} \left[-(\xi^1)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{2}{3} b_{\kappa}^1 g_1^{\kappa'} + c_1^1 - d_1^1 - r_{\alpha}^1 k^{\alpha'} \right) (\xi^1)^3 \right] (1 - g_1^1 \xi^1) d\xi^1 = \\
 &= \int_{-\sigma_1}^0 \frac{d}{d\xi^1} [\eta_0^1(\xi^1)] \delta(\xi^1, \xi_0^{\alpha'}(\xi^1), \eta_0^{\kappa}(\xi^1)) d\xi^1 + O(\varepsilon).
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Во втором члене формулы (3.10) выполним интегрирование по частям, а затем, учитывая представление (IV.5.7) при $u^1 \rightarrow -\infty$, проведем регуляризацию интеграла (см. гл. II, § 13):

$$\begin{aligned}
 \mu^2 \int_{-\omega_1}^0 \frac{d}{du^1} [z_0(u^1)] (1 - \mu g_1^1 u^1) du^1 &= \\
 &= \mu^2 z_0(0) - \frac{\mu^3}{2\sigma_1} + \frac{\mu^6}{8\sigma_1^4} + \frac{1}{2} g_1^1 \mu^3 \ln \frac{1}{\mu} + \\
 &\quad + \frac{1}{2} g_1^1 \mu^3 \ln \sigma_1 + O(\varepsilon).
 \end{aligned}$$

Третий член формулы (3.10) проинтегрируем по

частям и вычислим, привлекая представление (IV.5.13) при $u^1 \rightarrow -\infty$:

$$\begin{aligned} \mu^3 \int_{-\omega_1}^0 \frac{d}{du^1} \left[v_1^1(u^1) - \right. \\ \left. - \left(\frac{2}{3} b_{\alpha'}^1 g_1^{\alpha'} + c_1^1 - d_1^1 - r_{\alpha'}^1 k^{\alpha'} \right) (u^1)^3 \right] (1 - \mu g_1^1 u^1) du^1 = \\ = \frac{1}{2} b_{\alpha'}^1 g_1^{\alpha'} \mu^3 \ln \frac{1}{\mu} + \frac{1}{2} b_{\alpha'}^1 g_1^{\alpha'} \mu^3 \ln \sigma_1 + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно получим

$$\begin{aligned} T_{-\sigma_1, 0} = T_{-\sigma_1, 0}^0 + z_0(0) \varepsilon^{2/3} - \frac{\varepsilon}{2\sigma_1} + \frac{\varepsilon^2}{8\sigma_1^3} + \\ + \frac{1}{6} (g_1^1 + b_{\alpha'}^1 g_1^{\alpha'}) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} (g_1^1 + b_{\alpha'}^1 g_1^{\alpha'}) \varepsilon \ln \sigma_1 + O(\varepsilon). \quad (3.12) \end{aligned}$$

Рассматривая в формуле (3.4) интеграл по отрезку $0 \leq \xi^1 \leq \sigma_2$ и проводя аналогичные рассуждения, легко убеждаемся, что

$$T_{0, \sigma_2} = \mu^2 \int_0^{\omega_2} \frac{d}{du^1} [v_0^1(u^1) + \mu v_1^1(u^1)] (1 - \mu g_1^1 u^1) du^1 + O(\varepsilon);$$

здесь $\omega_2 = \sigma_2/\mu$ (ср. с (3.9)). Перепишем эту формулу в виде

$$\begin{aligned} T_{0, \sigma_2} = \mu^2 \int_0^{\omega_2} \frac{d}{du^1} [v_0^1(u^1)] du^1 - \\ - \mu^3 g_1^1 \int_0^{\omega_2} \frac{d}{du^1} [v_0^1(u^1)] u^1 du^1 + \mu^3 \int_0^{\omega_2} \frac{d}{du^1} [v_1^1(u^1)] du^1 + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

а затем выполним интегрирование по частям и, учитывая представления (IV.5.7), (IV.5.13) при $u^1 \rightarrow +\infty$, проведем регуляризацию интегралов. После элементарных вычислений окончательно получим

$$\begin{aligned} T_{0, \sigma_2} = [\Omega_0 - z_0(0)] \varepsilon^{2/3} - \frac{\varepsilon}{\sigma_2} - \\ - \frac{1}{3} (d_1^1 + r_{\alpha'}^1 \Omega_0^{\alpha'}) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} - (d_1^1 + r_{\alpha'}^1 \Omega_0^{\alpha'}) \varepsilon \ln \sigma_2 + O(\varepsilon). \quad (3.13) \end{aligned}$$

На отрезке $\sigma_2 \leq \xi^1 \leq \rho$ для функций (3.2) справедливы асимптотические приближения (IV.6.10). Рассматривая в формуле (3.4) интеграл по отрезку $\sigma_2 \leq \xi^1 \leq \rho$ и подставляя в подынтегральное выражение представление (IV.6.10), после небольших преобразований окончательно получим

$$T_{\sigma_2, \rho} = \frac{\varepsilon}{\sigma_2} + (d_1^1 + r_{\alpha'}^1 \Omega_0^{\alpha'}) \varepsilon \ln \sigma_2 + O(\varepsilon). \quad (3.14)$$

Для вычисления времени $T_{-\rho, \rho}$ остается подставить выражения (3.5), (3.12), (3.13) и (3.14) в формулу (3.3):

$$T_{-\rho, \rho} = T_{-\rho, 0}^0 + \Omega_0 \varepsilon^{2/3} + \left(\frac{1}{6} Q - \frac{1}{3} D - \frac{1}{3} K \right) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon). \quad (3.15)$$

Здесь $T_{-\rho, 0}^0 = T_{-\rho, -\sigma_1}^0 + T_{-\sigma_1, 0}^0$ (см. (3.6), (3.11)) есть время, затрачиваемое фазовой точкой вырожденной системы (IV.1.2) на прохождение участка траектории $u_1(\delta S_1)$ между точками S_1' и $S_1 + \delta S_1$. Константа Ω_0 не зависит от конкретного вида системы (IV.1.1) и является универсальной (см. гл. II, § 9). Далее,

$$Q = g_1^1 + b_{\alpha'}^1 g_{\alpha'}^1, \quad D = d_1^1, \quad K = r_{\alpha'}^1 \Omega_0^{\alpha'}; \quad (3.16)$$

инвариантные выражения для этих величин даны в главе IV (см. (IV.3.12), (IV.7.5), (IV.7.6)).

Коэффициенты (3.16) формулы (3.15), очевидно, зависят от значений правых частей системы (IV.1.1) и их нескольких производных в точке срыва $S_1 + \delta S_1$. Но с точностью до величин по меньшей мере порядка ε время $T_{-\rho, \rho}$ останется тем же, если вместо величин (3.16), соответствующих точке срыва $S_1 + \delta S_1$, взять величины, соответствующие точке срыва S_1 . Снабдим эти величины индексом единица: Q_1, D_1, K_1 .

Итак, получена асимптотическая формула для вычисления времени $T_{-\rho, \rho}^1$, затрачиваемого фазовой точкой невырожденной системы (IV.1.1) на прохождение участка $\} \varepsilon (S_1 + \delta S_1)$:

$$T_{-\rho, \rho}^1 = T_{-\rho, 0}^{1, 0} + \Omega_0 \varepsilon^{2/3} + \left(\frac{1}{6} Q_1 - \frac{1}{3} D_1 - \frac{1}{3} K_1 \right) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon); \quad (3.17)$$

здесь $T_{-\rho, 0}^{1, 0}$ — время, затрачиваемое фазовой точкой вырожденной системы (IV.1.2) на прохождение участка $(S_1', S_1 + \delta S_1)$ траектории $u_1(\delta S_1)$. Аналогичные вычисления можно провести и для участка $\mathfrak{Z}_\varepsilon(S_2 + \delta S_2)$ траектории \mathfrak{Z}_ε , огибающего точку срыва $S_2 + \delta S_2$; затрачиваемое на его прохождение время

$$T_{-\rho, \rho}^2 = T_{-\rho, 0}^{2, 0} + \Omega_0 \varepsilon^{2/3} + \left(\frac{1}{6} Q_2 - \frac{1}{3} D_2 - \frac{1}{3} K_2 \right) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon). \quad (3.18)$$

Вычислим теперь время τ_1 , затрачиваемое в пространстве Y^l на переход из точки Δ_1 в плоскость $N_2 \tilde{S}_2$ при движении с постоянной скоростью $g(P_1)$. Плоскость \tilde{S}_2 определяется в пространстве Y^l ковариантным вектором ${}_2\omega = ({}_2\omega_1, \dots, {}_2\omega_l)$, соответствующим точке срыва S_2 ; координаты этого вектора мы уже вычисляли (см. (1.3), (1.4)). Легко проверить, что $N_2 \tilde{S}_2$ — образ плоскости \tilde{S}_2 при отображении N_2 — определяется ковариантным вектором ${}_2\omega' = ({}_2\omega'_1, \dots, {}_2\omega'_l)$, причем

$${}_2\omega'_\alpha = q_{\alpha 2}^B \omega_\beta,$$

где $\|q_\beta^\alpha\|$ — матрица преобразования N_2^{-1} . Элементарный расчет показывает, что

$$\tau_1 = \frac{({}_2\omega', \Delta_1)}{({}_2\omega', g(P_1))} + O(\varepsilon).$$

Но, как легко проверить,

$$\begin{aligned} ({}_2\omega', g(P_1)) &= ({}_2\omega, N_2^{-1} g(P_1)) = ({}_2\omega, g(S_2)) = 1, \\ ({}_2\omega', \Delta_1) &= ({}_2\omega, N_2^{-1} \Delta_1), \end{aligned}$$

а поэтому окончательно

$$\tau_1 = ({}_2\omega, N_2^{-1} \Delta_1) + O(\varepsilon). \quad (3.19)$$

Аналогично находится время τ_2 , затрачиваемое на переход из точки Δ_2 в плоскость $N_1 \tilde{S}_1$ при движении с постоянной скоростью $g(P_2)$:

$$\tau_2 = ({}_1\omega, N_1^{-1} \Delta_2) + O(\varepsilon). \quad (3.20)$$

Принимая во внимание формулы (3.1), (3.17) — (3.20) и теорему XX, не представляет труда завершить вывод

асимптотической формулы для периода релаксационного колебания.

Теорема XXI. Для периода T_ε траектории \mathfrak{Z}_ε невырожденной системы (IV.1.1) справедлива асимптотическая формула

$$T_\varepsilon = T_0 + \Delta T_\varepsilon^1 + \Delta T_\varepsilon^2 + O(\varepsilon),$$

где T_0 — период траектории \mathfrak{Z}_0 вырожденной системы (IV.1.2), а ΔT_ε^1 и ΔT_ε^2 представляют собой следующие выражения:

$$\Delta T_\varepsilon^1 = \Omega_0 \varepsilon^{2/3} + \left(\frac{1}{6} Q_1 - \frac{1}{3} D_1 - \frac{1}{3} K_1 \right) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} - \tau_1,$$

$$\Delta T_\varepsilon^2 = \Omega_0 \varepsilon^{2/3} + \left(\frac{1}{6} Q_2 - \frac{1}{3} D_2 - \frac{1}{3} K_2 \right) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} - \tau_2,$$

для вычисления которых не требуется интегрировать невырожденную систему (IV.1.1).

Литература

1. Адамар Ж. (Hadamard J.), Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Hermann, Paris, 1932. См. также: Lectures on Cauchy's problem in linear hyperbolic differential equations, Dover, New York, 1952.
2. Андронов А. А., Витт А. А., Разрывные периодические решения и теория мультивibrатора Абрагама и Блоха, Докл. АН СССР, № 8 (1930), 189—192. См. также: Андронов А. А., Собрание трудов, Изд-во АН СССР, 1956, 65—69.
3. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., Теория колебаний, изд. 2-е, переработка и дополнения Н. А. Железцова, Физматгиз, М., 1959.
4. Аносов Д. В., Осреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений с быстроколеблющимися решениями, Изв. АН СССР, сер. матем. 24, № 5 (1960), 721—742.
5. Аносов Д. В., О предельных циклах систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных, Матем. сб. 50, № 3 (1960), 299—334.
6. Беляева М. А., Приближенное решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных, Докл. АН СССР 189, № 6 (1969), 1167—1170.
7. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, «Наука», М., 1974.
8. Бутузов В. Ф., Васильева А. Б., Федорюк М. В., Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Итоги науки. Математика. Математический анализ—1967, ВИНТИ, М., 1969, 5—73.
9. Вазов В. (Wasow W. R.), Singular perturbation methods for nonlinear oscillations, Proceedings of the symposium on nonlinear circuit analysis, Polytechn. Inst. of Brooklyn, 1953, 75—98.
10. Вазов В. (Wasow W. R.), Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений, «Мир», М., 1968.
11. Ван-дер-Поль Б. (Van der Pol B.), On relaxation oscillations, Philos. Mag. (7) 2, № 11 (1926), 978—992.
12. Васильева А. Б., О дифференциальных уравнениях, содержащих малые параметры при производных, Матем. сб. 31, № 3 (1952), 587—644.
13. Васильева А. Б., Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных, Успехи матем. наук 18, № 3 (1963), 15—86.

14. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений, «Наука», М., 1973.
15. Волосов В. М., Моргунов Б. И., Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем, Изд-во МГУ, М., 1971.
16. Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, «Наука», М., 1971.
17. де Брёйн Н. Г. (de Bruijn N. G.), Асимптотические методы в анализе, ИЛ, М., 1961.
18. Дородницын А. А., Асимптотическое решение уравнения Ван-дер-Поля, *Прикл. матем. и механ.* 11, № 3 (1947), 313—328.
19. Железцов Н. А., К теории разрывных колебаний в системах второго порядка, *Изв. высших учебн. заведений. Радиофизика* 1, № 1 (1958), 67—78.
20. Железцов Н. А., Родыгин Л. В., К теории симметричного мультивибратора, *Докл. АН СССР* 81, № 3 (1951), 391—392.
21. Камке Э. (Камке Е.), Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, «Наука», М., 1971.
22. Картрайт М. (Cartwright M. L.), Van der Pol's equation for relaxation oscillations, Contributions to the theory of nonlinear oscillations, Princeton Univ. Press, 1952, 3—18.
23. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. (Coddington E. A., Levinson N.), Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1958.
24. Копсон Э. Т. (Copson E. T.), Асимптотические разложения, «Мир», М., 1966.
25. Корбейе Ф. (le Corbeiller Ph.), Les systèmes autoentretenues et les oscillations de relaxation, Hermann, Paris, 1931.
26. Коул Дж. (Cole J. D.), Методы возмущений в прикладной математике, «Мир», М., 1972.
27. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н., Введение в нелинейную механику, Изд-во АН УССР, Киев, 1937.
28. Ласалль Ж. (La Salle J.), Relaxation oscillations, *Quart. J. Appl. Math.* 7, № 1 (1949), 1—19.
29. Левинсон Н. (Levinson N.), Perturbations of discontinuous solutions of nonlinear systems of differential equations, *Acta Math.* 82, № 1—2 (1951), 71—106.
30. Лефшец С. (Lefschetz S.), Геометрическая теория дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1961.
31. Макаева Г. С., Асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений с малым параметром, системы «быстрых движений» которых гамильтоновы, *Изв. АН СССР, сер. матем.* 25, № 5 (1961), 685—716.
32. Митропольский Ю. А., Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, «Наука», М., 1964.
33. Митропольский Ю. А., Метод усреднения в нелинейной механике, «Наукова думка», Киев, 1971.
34. Мищенко Е. Ф., Асимптотическое вычисление периодических решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных, *Изв. АН СССР, сер. матем.* 21, № 5 (1957), 627—654.

35. Мищенко Е. Ф., Асимптотическая теория релаксационных колебаний, описываемых системами второго порядка, *Матем. сб.* 44, № 4 (1958), 457—480.
36. Мищенко Е. Ф., Асимптотические методы в теории релаксационных колебаний, *Успехи матем. наук* 14, № 6 (1959), 229—236.
37. Мищенко Е. Ф., Differential equations containing a small parameter and relaxation oscillations, Univ. of Michigan, 1964.
38. Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С., Периодические решения систем дифференциальных уравнений, близкие к разрывным, *Докл. АН СССР* 102, № 5 (1955), 889—891.
39. Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С., Доказательство некоторых асимптотических формул для решений дифференциальных уравнений с малым параметром, *Докл. АН СССР* 120, № 5 (1958), 967—969.
40. Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С., Вывод некоторых асимптотических оценок для решений дифференциальных уравнений с малым параметром при производных, *Изв. АН СССР, сер. матем.* 23, № 5 (1959), 643—660.
41. Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С., Differential equations with a small parameter attached to the higher derivatives and some problems in the theory of oscillations, *IRE Trans. Circuit Theory* 7, № 4 (1960), 527—535.
42. Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С., Relaxation oscillations and differential equations containing a small parameter with the senior derivative, Calcutta mathematical society. The golden jubilee commemoration volume (1958—1959), Calcutta, 1963, 141—150.
43. Понтрягин Л. С., Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных, *Изв. АН СССР, сер. матем.* 21, № 5 (1957), 605—626.
44. Понтрягин Л. С., Системы, обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при высших производных, Тр. 3-го Всесоюзного математического съезда, т. III, Изд-во АН СССР, 1958, 570—577.
45. Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, «Наука», М., 1965.
46. Понтрягин Л. С., Родыгин Л. В., Приближенное решение одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных, *Докл. АН СССР* 131, № 2 (1960), 255—258.
47. Понтрягин Л. С., Родыгин Л. В., Периодическое решение одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производных, *Докл. АН СССР* 132, № 3 (1960), 537—540.
48. Пулькин С. С., Розов Н. Х., К асимптотической теории релаксационных колебаний в системах с одной степенью свободы. I. Вычисление фазовых траекторий, *Вестн. Моск. ун-та, сер. матем., механ.*, № 2 (1964), 70—82.
49. Родыгин Л. В., О существовании инвариантного тора для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, содержа-

- шей малый параметр, *Изв. высших учебн. заведений. Радиофизика* 3, № 1 (1960), 116—129.
50. Розов Н. Х., Асимптотическое вычисление близких к разрывным периодических решений систем дифференциальных уравнений второго порядка, *Докл. АН СССР* 145, № 1 (1962), 38—40.
 51. Розов Н. Х., К асимптотической теории релаксационных колебаний в системах с одной степенью свободы. II. Вычисление периода предельного цикла, *Вестн. Моск. ун-та, сер. матем., механ.*, № 3 (1964), 56—65.
 52. Розов Н. Х., Асимптотическое вычисление близких к разрывным периодических решений, описывающих релаксационные колебания в системах с одной степенью свободы, *Международный конгресс математиков. Тезисы кратких научных сообщений: секция 6*, М., 1966, 45—46.
 53. Сибуйа Я. (Sibuya Ya.), On perturbations of discontinuous solutions of ordinary differential equations, *Natur. Sci. Rept. Ochanomizu Univ.* 11, № 1 (1960), 1—18.
 54. Сидоров А. С., Теория и проектирование нелинейных импульсных схем на туннельных диодах, «Сов. радио», М., 1971.
 55. Стокер Дж. (Stoker J. J.), Нелинейные колебания в механических и электрических системах, ИЛ, М., 1953.
 56. Тихонов А. Н., О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра, *Матем. сб.* 22, № 2 (1948), 193—204.
 57. Тихонов А. Н., Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных, *Матем. сб.* 31, № 3 (1952), 575—586.
 58. Урабе М. (Urage M.), Численное исследование периодических решений уравнения Ван-дер-Поля, Тр. Международного симпозиума по нелинейным колебаниям, т. II, Изд-во АН УССР, Киев, 1963, 367—376.
 59. Фландерс Д., Стокер Дж. (Flanders D. A., Stoker J. J.), The limit case of relaxation oscillations, *Studies in nonlinear vibration theory*, New York Univ., 1946, 51—64.
 60. Флэтто Л., Левинсон Н. (Flatto L., Levinson N.), Periodic solutions of singularly perturbed systems, *J. Rational Mech. Anal.* 4, № 6 (1955), 943—950. См. также: *Математика* 2, № 2 (1958), 61—68.
 61. Хааг Ж. (Haag J.), Etude asymptotique des oscillations de relaxation, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (3) 60, (1943), 35—64.
 62. Хааг Ж. (Haag J.), Exemples concrets d'étude asymptotique d'oscillation de relaxation, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (3) 61 (1944), 65—111.
 63. Хааг Ж. (Haag J.), Les mouvements vibratoires, Press. Univ. de France, Paris, t. I, 1952, t. II, 1955.
 64. Шишкова М. А., Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных, *Докл. АН СССР* 209, № 3 (1973), 576—579.
 65. Эрдейи А. (Erdélyi A.), Асимптотические разложения, Физматгиз, М., 1962.
 66. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. (Janke E., Emde F., Lösch F.), Специальные функции—формулы, графики, таблицы, «Наука», М., 1968.

*Евгений Фролович Мищенко,
Николай Христович Розов*

М., 1975 г., 248 стр. с илл.

Редактор *И. Е. Морозова*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректоры *Е. А. Белицкая, И. В. Хорошасва*

Сдано в набор 25/IV 1975 г. Подписано к печати
13/X 1975 г. Бумага 84×108¹/₃₂.

Физ. печ. л. 7,75. Услови. печ. л. 13,02.

Уч.-изд. л. 13,58,

Тираж 7000 экз. Т-17334. Цена книги 1 р. 02 к.

Заказ № 3054

Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Набрано в Ордена Трудового Красного Знамени
Первой Образцовой типографии

имени А. А. Жданова Союзполиграфпрома

при Государственном комитете

Совета Министров СССР по делам издательств,

полиграфии и книжной торговли.

Москва, М-54, Валовая, 28

Отпечатано во 2-ой типографии

издательства «Наука»,

Москва Г-99, Шубинский пер., 10.